GOVERNMENT OF TAMIL NADU

ఎనిమిదవ తరగతి
STANDARD EIGHT

గణితము
MATHEMATICS

TELUGU MEDIUM

Department of School Education

Untouchability is Inhuman and a Crime

00_8th_Maths_Telugu_Front_Pages.indd 1 31-07-2020 12:38:39

Government of Tamil Nadu

First Edition - 2019

Revised Edition - 2020, 2022, 2023

(Published under New Syllabus)

Content Creation

State Council of Educational Research and Training

© SCERT 2019

Printing & Publishing

Tamil Nadu Textbook and Educational Services Corporation

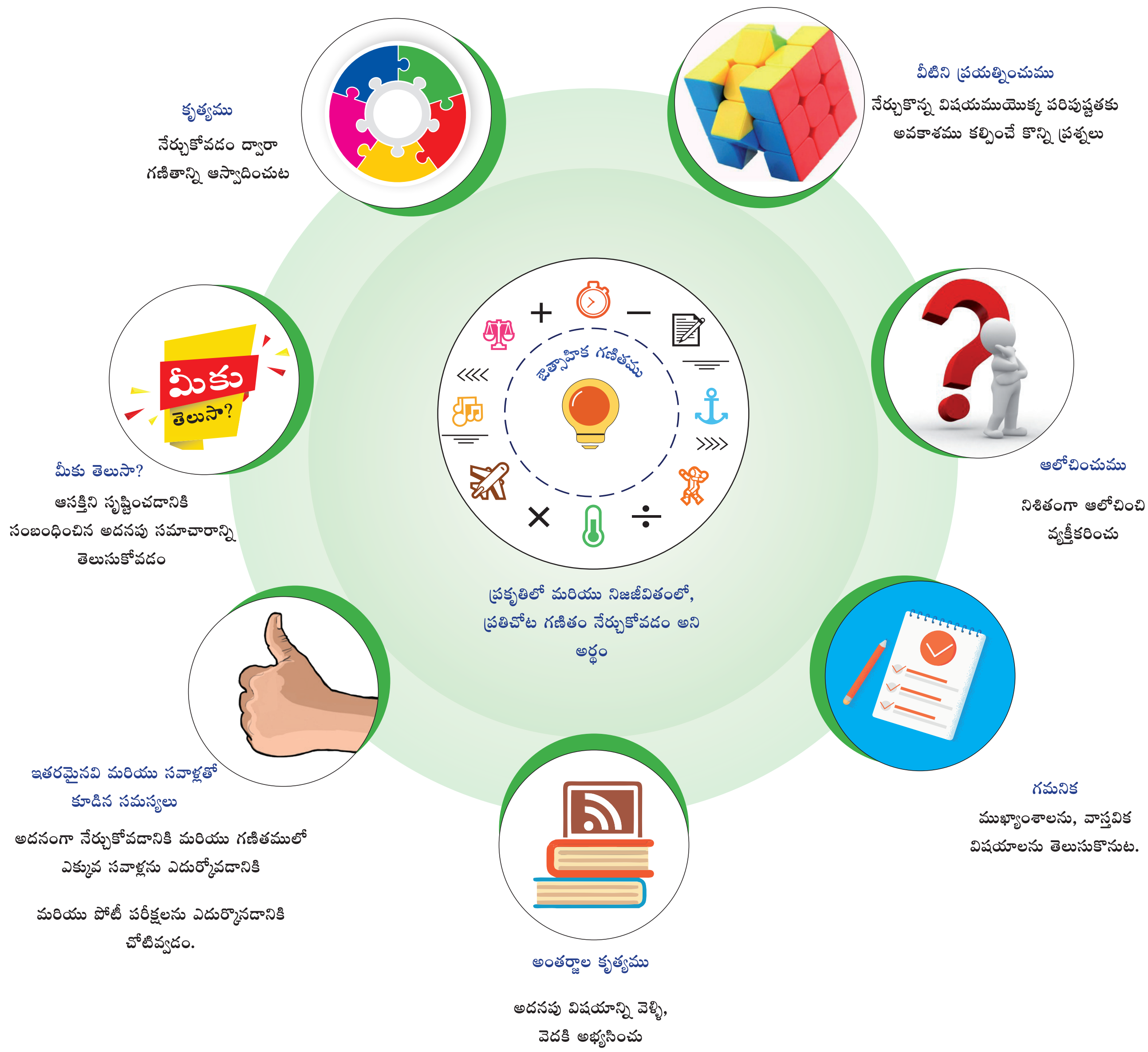
www.textbooksonline.tn.nic.in

00_8th_Maths_Telugu_Front_Pages.indd 2 31-07-2020 12:38:40

ప్రపంచంలో పలు భాషలు మాట్లాడినను, ప్రపంచపు ఒకే మామూలు భాష గణితం అగును. దీనిని సులభ పద్ధతిలో విద్యార్థులకు ఇవ్వడమే ఈ పాఠ్యపుస్తకము యొక్క ముఖ్య ఉద్దేశం అగును.

గణితమైనది సంఖ్యలు, సమీకరణాలు, ప్రాథమిక ప్రక్రియలు సోపానాలు అనుదానికంటే అర్థంచేసుకోవడానికి ఆధారంగా ఉన్నది.

– విలియం బౌల్ థర్స్టన్.



గణితము యొక్క ముఖ్య ఉద్దేశ్యము పాఠశాల విద్యలో విద్యార్థులు గణితమును ఎలా సులభంగా నేర్చుకోవడానికి మరియు విద్యార్థుల ఆలోచనా ప్రక్రియను మార్చుటకు ఉపయోగపడును.

00_8th_Maths_Telugu_Front_Pages.indd 3 31-07-2020 12:38:40

విషయ సూచిక

అధ్యాయము	పాఠ్యాంశము	పుట సంఖ్య	నెల
1	**సంఖ్యలు**	1-49	
1.1	పరిచయము	1	
1.2	అకరణీయ సంఖ్యలు	2	
1.3	అకరణీయసంఖ్యలపై ప్రాథమిక అంకగణిత పరిక్రియలు	14	
1.4	ప్రాథమిక పరిక్రియలు ఉపయోగించి వాక్యరూప సమస్యలను సాధించుట	16	
1.5	అకరణీయసంఖ్యల ధర్మాలు	20	జూన్
1.6	వర్గసంఖ్యల పరిచయం	25	
1.7	వర్గమూలము	28	
1.8	ఘనములు మరియు ఘనసంఖ్యలు	36	
1.9	ఘాతాలు మరియు ఘాతాంకములు	39	
2	**కొలతలు**	50-73	
2.1	పరిచయము	50	
2.2	వృత్త భాగాలు	52	
2.3	సంయుక్త ఆకారములు	59	జూలై
2.4	త్రిమితీయ (3-D) ఆకారములు (త్రిపరిమాణ ఆకారములు)	66	
3	**బీజగణితము**	74-120	
3.1	పరిచయం	76	
3.2	బీజీయ సమాసముల గుణకారము	77	
3.3	బీజీయ సమాసముల భాగాహారము	82	ఆగష్టు
3.4	కొన్ని సాధారణ దోషాలను నివారించుట	84	
3.5	సర్వసమీకరణములు	86	
3.6	ఘన సర్వసమీకరణాలు	88	
3.7	కారణాంకపరుచుట	92	అక్టోబరు
3.8	ఒక చరరాశి ఏకఘాత సమీకరణము	97	
3.9	రేఖా చిత్రము	107	సెప్టెంబర్
3.10	సరేఖీయ రేఖాచిత్రము	115	జనవరి
4	**జీవనాధార గణితము**	121-154	
4.1	పరిచయము	121	
4.2	శాతము యొక్క అనువర్తన వాక్యరూప సమస్యలు	122	
4.3	లాభము మరియు నష్టము, రుసుము, అధనపు ఖర్చులు మరియు GST	126	సెప్టెంబర్
4.4	చక్రవడ్డీ	132	
4.5	మిశ్రమ చలత్వము/ సమ్మేళన చలత్వము	140	నవంబరు
4.6	కాలము మరియు పని	147	

00_8th_Maths_Telugu_Front_Pages.indd 4 31-07-2020 12:38:40

5	**రేఖాగణితము**	155-210	
5.1	పరిచయము	155	ఆగష్టు
5.2	సర్వసమాన మరియు సరూప ఆకారములు	156	
5.3	పైథాగరియన్ సిద్ధాంతము (పైథాగరస్ సిద్ధాంతము)	167	
5.4	పైథాగరస్ సిద్ధాంత విపర్యయము	167	
5.5	అనుషక్త బిందువు	170	డిసెంబరు
5.6	త్రిభుజ మధ్యగతరేఖలు	170	
5.7	త్రిభుజము యొక్క ఎత్తు	173	
5.8	త్రిభుజము యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖలు	174	
5.9	త్రిభుజము యొక్క కోణ సమద్విఖండనరేఖలు	175	
5.10	చతుర్భుజముల నిర్మాణము	180	జూలై
5.11	సమలంబచతుర్భుజ నిర్మాణము	187	
5.12	ప్రత్యేక చతుర్భుజములను నిర్మించుట	192	నవంబరు
5.13	సమాంతరచతుర్భుజమును నిర్మించుట	196	
5.14	రాంబసు(సమబాహు చతుర్భుజము) నిర్మాణము	201	
5.15	దీర్ఘచతురస్ర నిర్మాణము	205	ఫిబ్రవరి
5.16	చతురస్ర నిర్మాణము	207	
6	**సాంఖ్యక శాస్త్రము**	211-231	
6.1	పరిచయం	211	జనవరి
6.2	పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక	212	
6.3	అవర్గీకృత దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య విభాజనమును రేఖా చిత్రము ద్వారా సూచించుట	217	
6.4	వర్గీకృత దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్యం విభాజనమును రేఖ చిత్రం ద్వారా సూచించుట	221	ఫిబ్రవరి
7	**సమాచర ప్రక్రియ**	232-272	
7.1	పరిచయం	233	ఆగష్టు
7.2	సంఖ్యల లెక్కింపు నియమాలు	234	
7.3	కూర్పు-ఆట	239	
7.4	పటమునకు రంగులు వేయుట	243	నవంబరు
7.5	ఫిబోనాక్సి సంఖ్యలు	247	
7.6	గరిష్ట సామాన్య కారణాంకము – గ.సా.కా.	251	
7.7	గుప్తశాస్త్రము	254	ఫిబ్రవరి
7.8	పోల్చి చూచుట ద్వారా కొనుగోలు చేయుట	262	
7.9	ప్యాకింగ్	267	
	జవాబులు	273-280	
	గణిత పదములు	281	

VPBX8

అంతర్జాల పుస్తకము

ST2EU

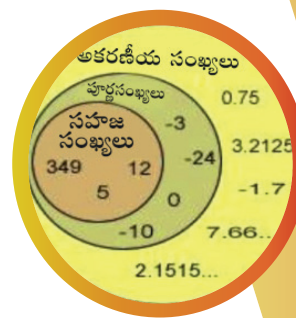
మూల్యాంకనము

00_8th_Maths_Telugu_Front_Pages.indd 5 31-07-2020 12:38:41

ఎనిమిదవ తరగతి

గణితము

00_8th_Maths_Telugu_Front_Pages.indd 6 31-07-2020 12:38:41



1 సంఖ్యలు

అభ్యసన లక్ష్యాలు

- ❖ భిన్నముల నుండి అకరణీయ సంఖ్యలకు పొడిగించవలసిన అవసరాన్ని అర్థంచేసుకొనుట. అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై సూచించుట. ఇచ్చిన ఏదైనా రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య చాలా అకరణీయ సంఖ్యలుంటాయని అర్థంచేసుకొనుట.
- ❖ అకరణీయ సంఖ్యలపై నాలుగు ప్రాథమిక పరిక్రియలను అనువర్తితం చేసి నేర్చుకొనుట. అన్ని పరిక్రియలలో పదసమస్యలను సాధించుట. కుండలీకరణములో మూడుకన్నా ఎక్కువ గల సమాసములను ఏవిధంగా సూక్ష్మీకరించవచ్చునో తెలుసుకొనుట.
- ❖ అకరణీయ సంఖ్యల ధర్మాలను అర్థంచేసుకొనుట.
- ❖ సంఖ్యల యొక్క వర్గము, వర్గమూలం,ఘనము మరియు ఘనమూలములను గణించుట.
- ❖ సంఖ్యల యొక్క వర్గమూలం మరియు ఘనమూలములను సూమారుగా అంచనా చేయుట.
- ❖ సంఖ్యలను ఘాతాంక రూపంలో వ్యక్తపరచుట మరియు పూర్ణసంఖ్యలు ఘాతాలుగా గల సంఖ్యల ఘాతాంక న్యాయాలను అర్థంచేసుకోనుట.
- ❖ శాస్త్రీయ సంకేతములను గుర్తుచేసుకొనుట మరియు వ్యక్తపరుచుట.

E6YHU

1.1 పరిచయము

మనము పూర్వతరగతిలో నేర్చుకొన్న సంఖ్యల యొక్క విభిన్న రకాలను పునశ్చరణ చేసుకొందాము. మనము లెక్కించునప్పుడు సహజంగా 1, 2, 3, 4, 5, ... సంఖ్యలతో ప్రారంభిస్తాము కదా?

వీటిని **లెక్కించు సంఖ్యలు** లేదా **సహజ సంఖ్యలు** అని అంటారు. వీటి సేకరణను **N** చే సూచిస్తారు. జాబితా యొక్క చివరలో ఉపయోగించు మూడు చుక్కలు (...) అనేది ఆ జాబితా అలాగే ఎప్పటికి కొనసాగుతూ ఉంటుందని అర్థము.

సహజసంఖ్యలను ఒక కిరణముపై ఈ సంఖ్యలచే గుర్తించుట ద్వారా దృష్టాంతం చేసుకొనవచ్చును.

పటము 1.1

ఒక సందర్భమును పరిశీలిద్దాము. నిన్న నా పర్సునందు ₹8 ఉన్నది, కాని ఈ రోజు నా పర్సు ఖాళీగా ఉన్నది. ఇప్పుడు నా పర్సు నందు ఎన్ని రూపాయిలు గలదు? ఈ **ఖాళీ**ని ఏవిధంగా సూచిస్తాము? ఇచ్చట**ఖాళీ**ని సంకేతపరుచుటకు సున్న అనే భావన వచ్చినది. సున్న అనే భావన ఈ కాలంలో సాధారణమైనది కాని ఆదిమానవులకు సాధారణమైనది కాదు. ప్రజలు దాదాపు కొన్ని వందలసంవత్సరాల తరువాత సున్నను ఒక **మాములు సంఖ్య**గా గుర్తించుట ప్రారంభించిరి. భారతదేశపు గణితశాస్త్రవేత్త ఈ సున్నను సంకేతపరచుట మూలంగా ఈ సమస్యను సాధించాము. అదనంగా లభించిన సున్న అను సంఖ్యతో సహజసంఖ్య వ్యవస్థ **పూర్ణాంకాలు**గా మారినది.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 1 31-07-2020 12:39:01

ఈ క్రింది విధంగా పూర్ణాంకాలును మనము దృష్టాంతం చేసుకొనవచ్చును.

పటము 1.2

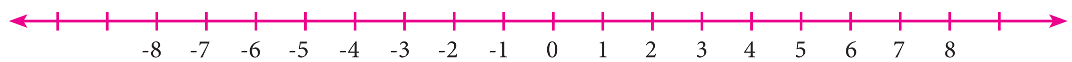
ఈ పూర్ణాంకములను **W** చే సూచించారు.

సమస్యలు సాధనకు సున్న మాత్రమే సరిపోలేదు. 6 నుంచి 4ను తీసివేసేటప్పుడు ఏమి జరుగునని ఆలోచించుము?

సంఖ్యారేఖాను 9 వరకు గీచి 6ను ఒక చుక్కతో గుర్తించుము.

పటము 1.3

4ను తీసివేయుటకు 6నుంచి 4అడుగులు ఎడమవైపుకు పోవాలని మనకు తెలుసు. అలా చేసినట్లయితే మనము 2ను చేరుతాము కావున జవాబు 2అగును. కాని ఒకవేళ 4నుంచి 6ను తీసివేయాలంటే ఏమి జరుగును? ఈ పరిస్థితిలో మానవులు ఋణసంఖ్యల అవసరమును గ్రహించి వాటిని సృష్టించారు.

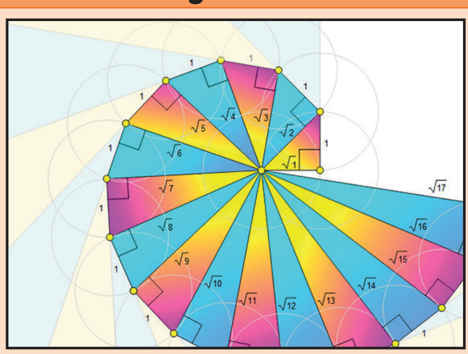


పటము 1.4

కాని, ఒక సంఖ్య ఏలా ఋణాత్మకం కాగలదు? దీనికి ఋణసంఖ్యలను సున్న కన్న చిన్నసంఖ్యలుగా ఊహించుకొనుము. పూర్ణాంకాలకు ఋణసంఖ్యలను కలుపగా లభించు జాబితాను **పూర్ణసంఖ్యలు** అంటారు. ఈ పూర్ణసంఖ్యలలో సున్న, సహజసంఖ్యలు మరియు సహజసంఖ్యల యొక్క ఋణాత్మకాలు ఉంటుంది. మరియు ఇది కలిగివున్న సంఖ్యలు ఒకదానికిఒకటి వ్యతిరేఖదిశలో అంతంకాకుండా వ్యాపించి ఉంటుంది. ఈ పూర్ణసంఖ్యల పూర్తి సేకరణను $\mathbb{Z}$ చే సూచిస్తాము.

ఔత్సాహిక గణితము – నిత్యజీవితములో సంఖ్యలు

ఒక నారింజ పండును ఒలిచేటప్పుడు 8 ముక్కలు ఉండిన, ఒక్కొక్క ముక్క $\frac{1}{8}$. అకరణీయ సంఖ్యను సూచించును.



జ్యామితిలోని పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి సర్పిలాకారంలో సంఖ్యల వర్గమూలములను కనుగొనడం.

1.2 అకరణీయ సంఖ్యలు

పూర్ణసంఖ్యల పరిచయంతో మనము విశ్రాంతి చెందలేము. $10 \div 5$ జవాబు 2 దీనినందు ఏటువంటి సందేహము లేదు కాని $8 \div 5$ నందు? **సంఖ్యలమధ్య సంఖ్యలు** అవసరము. $8 \div 5$ అనునది 1.6, ఈ సంఖ్య 1 మరియు 2 మధ్య ఉంటుంది. కాని, $-3 \div 4$ ఎక్కడ ఉంటుంది? 0 మరియు -1 మధ్య ఉంటుంది. ఇలాగే

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 2 31-07-2020 12:39:01

$\frac{-12}{5}$ సంఖ్యారేఖాపై ఎక్కడ ఉంటుంది? -2 మరియు -3 మధ్య ఉంటుంది. కావున, ఒక పూర్ణసంఖ్యను మరోక పూర్ణసంఖ్యతో భాగించుట ద్వారా వచ్చిన ఒక నిష్పత్తిని ఒక **అకరణీయసంఖ్య** అంటారు. (0తో భాగించలేమని గుర్తించుకొనుము!)

సాధారణంగా మాట్లాడునప్పుడు ఒక అకరణీయసంఖ్య అనునది ఒక సంఖ్య $\frac{a}{b}$ (a, b లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $b \neq 0$) రూపంలోవున్న భిన్నము(నిష్పత్తి). అన్ని అకరణీయసంఖ్యల సేకరణను $\mathbb{Q}$ చే సూచిస్తారు. ఋణేతరఅకరణీయసంఖ్యలను భిన్నములుగా భావించవచ్చును. వీటిని దశాంశాలుగా మరియు శాతములుగా కూడ వ్యక్తపరుచవచ్చును.

అకరణీయసంఖ్యల పరిక్రియలను అర్థంచేసుకొనుటకు భిన్నాల పరిక్రియలను గూర్చి తెలుపవలెను. భిన్నాలకు సంబంధించిన కొన్ని ప్రధాన విషయాలను క్రింది అభ్యాసము ద్వారా పునశ్చరణ చేసుకొందాం.

పునశ్చరణ అభ్యాసము

1. $\frac{125}{200}$ యొక్క సూక్ష్మరూపము __________.

2. $\frac{8}{12}$ భిన్నమునకు సమానముకాని భిన్నము ఏది?

   (అ) $\frac{2}{3}$ (ఆ) $\frac{16}{24}$ (ఇ) $\frac{32}{60}$ (ఈ) $\frac{24}{36}$

3. $\frac{4}{5}$ లేక $\frac{8}{9}$ లో ఏది పెద్దది?

4. $\left(\frac{3}{5}+\frac{5}{8}+\frac{7}{10}\right)$ భిన్నములను కూడుము.

5. $\frac{1}{8} - \left(\frac{1}{6}-\frac{1}{4}\right)$ ను సూక్ష్మీకరింపుము.

6. $2\frac{3}{5}$ మరియు $1\frac{4}{7}$ ను గుణించుము.

7. $\frac{7}{36}$ ను $\frac{35}{81}$ తో భాగించుము.

8. కింది పెట్టెలను పూరింపుము. $\frac{\square}{66} = \frac{70}{\square} = \frac{28}{44} = \frac{\square}{121} = \frac{7}{\square}$

9. ఒక పట్టణములోని జనాభాలో $\frac{7}{20}$ వ భాగము స్త్రీలు $\frac{1}{4}$ వ భాగము పిల్లలు కలరు, అయిన పురుషుల భిన్న భాగము ఎంత?

10. $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)$ ను చిత్రము ద్వారా సూచించుము.

ప్రయత్నించుము

1. -7 ఒక అకరణీయసంఖ్య అగునా? ఏందుకు?
2. 0 మరియు 1ల మధ్య ఏదేని 6 అకరణీయసంఖ్యలును వ్రాయుము.

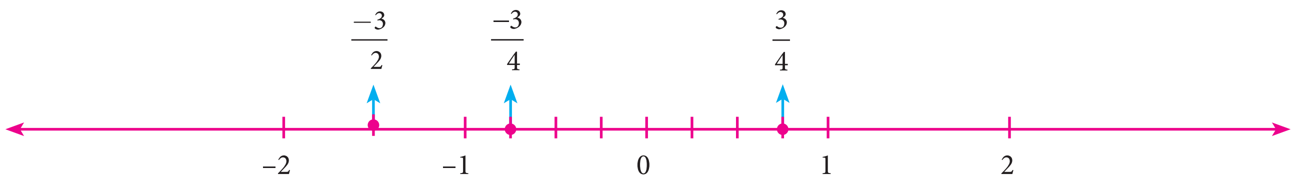
సూచన

గణితంలో రెండు వేర్వేరు వస్తువుల కొలతలను పోల్చుటను 'నిష్పత్తి' అని అంటారు. ఉదాహరణకు ఒక తరగతిలో 20 మంది విద్యార్థులకు 1 ఉపాధ్యాయుడు ఉండిన, ఉపాధ్యాయుడు విద్యార్థి నిష్పత్తిని 1:20 గా వ్రాయవచ్చును. అకరణీయ సంఖ్యలను సాధారణంగా భిన్నములుగా వ్రాయుచున్నాము. కావున 1:20 అనేదానిని $\frac{1}{20}$. గా వ్రాయవచ్చు. ఈ కారణం వలనే భిన్నరూపంలో గల సంఖ్యలను అకరణీయ సంఖ్యలు అని పిలుస్తున్నాము.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 3 31-07-2020 12:39:04

1.2.1 సంఖ్యారేఖపై అకరణీయసంఖ్యలు

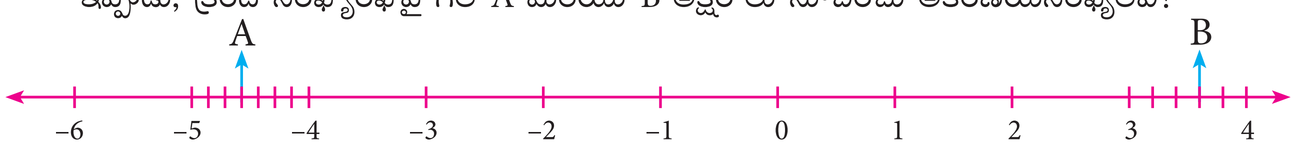
సంఖ్యారేఖపై అకరణీయసంఖ్యలను సూచించుట ఒక ముఖ్యమైన నైపుణ్యము . ఇప్పుడు ఉదాహరణకు మనము $\frac{-3}{4}$ అను సంఖ్యను సంఖ్యారేఖపై సూచిస్తాము. $\frac{-3}{4}$ అనునది ఋణ సంఖ్య కావున 0కు ఎడమ వైపు, 0 మరియు -1 మధ్య సూచించవచ్చును. మనకు పూర్ణసంఖ్యలలో 1 మరియు -1 అనునది 0 నుండి సమాన దూరములో ఉంటుందని తెలుసు. అదేవిధంగా 2 మరియు -2, 3 మరియు -3 కూడా 0 నుండి సమాన దూరములో ఉంటుంది. ఇది అకరణీయసంఖ్యలకు కూడా వర్తించును. ఇప్పుడు 0 కు కుడివైపు 0 మరియు 1 మధ్యలో 4 లో 3 భాగములు $\frac{3}{4}$ అని గుర్తించే విధంగా 0 కు ఎడమవైపు 0 మరియు -1 మధ్య 4 లో 3 భాగములు $\frac{-3}{4}$ అని క్రింది చూపిన విధముగా మనము సూచించవచ్చును.



పటము 1.5

ఇదేవిధంగా $\frac{-3}{2}$ అనేది -1 మరియు -2 కు మధ్యలో కలదని సులభంగా చెప్పవచ్చును. ఎందుకనగా $\frac{-3}{2} = -1\frac{1}{2}$ అగును.

ఇప్పుడు, క్రింది సంఖ్యారేఖపై గల A మరియు B అక్షరాలు సూచించు అకరణీయసంఖ్యలేవి?



పటము 1.6

పైన చూపిన విధంగా సంఖ్యారేఖాపై A మరియు B లుగా గుర్తించిన అకరణీయసంఖ్యలను ఇప్పుడు నీవు సులభంగా చెప్పగలవు.కదా?ఇక్కడ, A సూచించు అకరణీయ సంఖ్య $-4\frac{4}{7}\left(\frac{-32}{7}\right)$ మరియు B సూచించు అకరణీయసంఖ్య $3\frac{3}{5}\left(\frac{18}{5}\right)$.

1.2.2 అకరణీయసంఖ్యలను దశాంశరూపంలో సూచించుట

ఒక అకరణీయసంఖ్యను సాధారణంగా సూచించు భిన్నరూపంకన్న దశాంశరూపములో సూచించుట అనేది భాగుంటుంది. ఇవ్వబడిన ఒక $\frac{a}{b} (b \neq 0)$ రూపంలోని ఒక అకరణీయసంఖ్యను లవము a ను హరము b తో భాగించినప్పుడు దీనిని అంతంమొందు లేదా అంతంమొందని లేదా ఆవర్తన దశాంశాలుగా వ్యక్తపరచవచ్చని మనము తెలుసుకొనవచ్చును.

కృత్యము

ఒక దారమును సంఖ్యారేఖగా ఉపయోగించి, తరగతిగది పొడవున దానిని గోడకు కట్టుము. దారములో చాలినంత స్థలమును వదిలి పూర్ణసంఖ్యలను అమర్చుము. తరువాత విద్యార్థులను ఒక పెట్టెలో గల అకరణీయ సంఖ్యల అట్టముక్కలను తీయమని చెప్పి వాటిని సరైనచోట దారములో ఉంచమని చెప్పవలెను. ఈ ఆటను జట్టుగా ఆడమని చెప్పవచ్చును. ఏ జట్టు ఎక్కువ అట్టముక్కలను సరిగ్గా దారం మీద అమర్చునో ఆ జట్టు విజయం సాధించును.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 4 31-07-2020 12:39:06

ఉదాహరణ 1.1

క్రిందివ్వబడిన అకరణీయసంఖ్యలను దశాంశరూపంలో వ్రాయుము.

i) $\frac{1}{4}$ ii) $1\frac{3}{20}$ iii) $-5\frac{4}{5}$ iv) 3 v) $\frac{1}{3}$

సాధన:

(i) $\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=0.25$ (ii) $1\frac{3}{20}=\frac{23}{20}=\frac{115}{100}=1.15$ (iii) $-5\frac{4}{5}=\frac{-29}{5}=\frac{-58}{10}=-5.8$

(iv) $3=\frac{3}{1}=\frac{30}{10}=3.0$ (v) $\frac{1}{3}=0.3333...$ (ఇది అంతంమొందని మరియు ఆవర్తనముచెందు దశాంశము)

సూచన

- పై ఉదాహరణలు ద్వారా ఒక అకరణీయసంఖ్యను ఏవిధంగా దశాంశరూపంలో మార్చవచ్చని తెలుస్తున్నది. ఒక అకరణీయసంఖ్యను దశాంశరూపము నుంచి భిన్నరూపమునకు మార్చు పురోగమన ప్రకియను పైతరగతులలో నేర్చుకొందాము.
- క్రిందివ్వబడిన ఈ దశాంశసంఖ్యలు అంతంమొందని మరియు ఆవర్తనము చెందనవి.

  $\pi = 3.14159265358979323846264 3.....$

  $\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168.......$ మొదలగునవి.

  ఇవి ఆకరణీయసంఖ్యలు కాదు మరియు వీటి గురించి మనము విపులంగా పైతరగతిలో నేర్చుకొందాము.

ప్రయత్నించుము

క్రిందివ్వబడిన అకరణీయసంఖ్యలను దశాంశరూపంలో వ్రాయుము.

1. $\frac{4}{5}$ 2. $\frac{6}{25}$ 3. $\frac{486}{1000}$ 4. $\frac{1}{9}$ 5. $3\frac{1}{4}$ 6. $-2\frac{3}{5}$

1.2.3 ధన మరియు ఋణాత్మక అకరణీయసంఖ్యలు

అకరణీయసంఖ్యలను ధన మరియు ఋణాత్మక సంఖ్యలుగా వర్గీకరించవచ్చును. భిన్నముయొక్క లవ మరియు హరములుకు ఒకే గుర్తులున్నట్లయితే ఆ అకరణీయసంఖ్య ధనాత్మకమగును.

ఉదాహరణకు $\frac{3}{4}, \frac{-11}{-6}$ గా గల మొదలగు సంఖ్యలు ధన అకరణీయసంఖ్యలు.

భిన్నముయొక్క లవము లేదా హరము ఏదోకటి ఋణాత్మకమయినచో అది ఋణ అకరణీయసంఖ్య అగును.

ఉదాహరణకు $\frac{-3}{4}, \frac{11}{-6}$ గా గల మొదలగు సంఖ్యలు ఋణ అకరణీయసంఖ్యలు.

సూచన

- 0 అనేది ధన మరియు ఋణ అకరణీయసంఖ్య కాదు.
- $\frac{-11}{6}=\frac{11}{-6}=-\frac{11}{6}$ గమనించుము.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 5 31-07-2020 12:39:08

1.2.4 సమాన అకరణీయసంఖ్యలు

ఇచ్చిన భిన్నమునకు సమాన భిన్నములు ఏవిధంగా వ్రాయవలెనని మనకు తెలుసు. అకరణీయసంఖ్యలును భిన్నములుగా సూచించవచ్చును కావున సమాన అకరణీయసంఖ్యలును సమాన భిన్నములను పొందునట్లు పొందవచ్చును.

భిన్నరూపంలో సూచించిన అకరణీయసంఖ్య యొక్క లవము మరియు హరములను ఒకే శూన్యేతర పూర్ణసంఖ్యచే గుణించుట ద్వారా సమాన అకరణీయసంఖ్యలును పొందవచ్చును.

ఉదాహరణకు,

$$\frac{-2}{3}=\frac{-2\times 3}{3\times 3}=\frac{-6}{9} \text{ కావున } -\frac{2}{3} \text{ అనునది } \frac{-6}{9} \text{ కు సమానమగును.}$$

$$\frac{2}{-3}=\frac{2\times 5}{-3\times 5}=\frac{10}{-15} \text{ కావున } -\frac{2}{3} \text{ అనునది } \frac{10}{-15} \text{ కు సమానమగును.}$$

కావున, $-\frac{2}{3}=\frac{-6}{9}=\frac{10}{-15}$.

ప్రయత్నించుము

1. $\frac{7}{3}=\frac{?}{9}=\frac{49}{?}=\frac{-21}{?}$
2. $\frac{-2}{5}=\frac{?}{10}=\frac{6}{?}=\frac{-8}{?}$

1.2.5 ప్రామాణికరూపంలో అకరణీయసంఖ్యలు

$\frac{4}{5},\frac{-3}{7},\frac{1}{6},\frac{-4}{13},\frac{-50}{51}$ ఈ అకరణీయసంఖ్యలను పరిశీలించుము.

ఇచ్చట మనము క్రింది విషయాలను గమనించవచ్చును.

i) అన్ని అకరణీయసంఖ్యల హరములు ధనపూర్ణసంఖ్యలు.

ii) ప్రతిఅకరణీయసంఖ్య యొక్క లవ,హరములకు 1 మాత్రమే ఒకేఒక ఉమ్మడి కారణాంకము. మరియు

iii) ఋణాత్మక గుర్తు లవములో మాత్రమే గలదు.

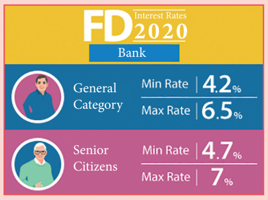
ఇటువంటి అకరణీయసంఖ్యలు ప్రామాణికరూపంలో గలదని చెప్పవచ్చును.

ఒక అకరణీయసంఖ్య యొక్క హరము ధనపూర్ణసంఖ్య అయ్యి మరియు లవ,హరముల రెండింటికి 1 తప్ప ఏ ఉమ్మడి కారణాంకములేనిచో ఆ అకరణీయసంఖ్య ప్రామాణికరూపంలో ఉందని అంటారు.

ఒకవేళ అకరణీయసంఖ్య ప్రామాణికరూపంలో లేనిచో దానిని సూక్ష్మీకరించుట ద్వారా ప్రామాణికరూపమును పొందవచ్చును.

మీకు తెలుసా?

అకరణీయసంఖ్యల సేకరణను $\mathbb{Q}$ అక్షరముచే సూచిస్తారు ఎందుకనగా అన్నింటిని విభక్త (quotients) రూపంలో (0తో భాగించేవి తప్ప) వ్రాయగలము. దశాంశ సంఖ్యలను విభక్తరూపంలో చూపవచ్చును కావునఅవి అకరణీయసంఖ్యలు కూడఅగును.



ఉదాహరణ 1.2

ప్రామాణిక రూపంలోకి మార్చుము (i) $\frac{48}{-84}$ (ii) $\frac{-18}{-42}$

సాధన:

(i) **పద్ధతి 1:**

$$\frac{48}{-84}=\frac{48\div(-2)}{-84\div(-2)}=\frac{-24\div 2}{42\div 2}=\frac{-12\div 3}{21\div 3}=\frac{-4}{7} \text{ (–2,2 మరియు 3 ను వరుసగా భాగించిన)}$$

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 6 31-07-2020 12:39:09

పద్ధతి 2:

48 మరియు 84 ల గ.సా.కా. 12 కావున ప్రామాణిక రూపము పొందుటకు -12తో భాగించవలెను.

$$\frac{48}{-84}=\frac{48\div(-12)}{-84\div(-12)}=\frac{-4}{7}$$

(ii) **పద్ధతి 1:**

$$\frac{-18}{-42}=\frac{-18\div(-2)}{-42\div(-2)}=\frac{9\div3}{21\div3}=\frac{3}{7}$$ (-2 మరియు 3 ను వరుసగా భాగించిన)

పద్ధతి 2:

18 మరియు 42 ల గ.సా.కా 6 కావున ప్రామాణిక రూపము పొందుటకు 6 తో భాగించవలెను.

$$\frac{-18}{-42}=\frac{-18\times(-1)}{-42\times(-1)}=\frac{18}{42}=\frac{18\div6}{42\div6}=\frac{3}{7}$$

ప్రయత్నించుము

1. కింది వానిలో ఏవి సమాన అకరణీయసంఖ్యల జతలు అగును?

   (i) $\frac{-6}{4},\frac{18}{-12}$ (ii) $\frac{-4}{-20},\frac{1}{-5}$ (iii) $\frac{-12}{-17},\frac{60}{85}$

2. ప్రామాణిక రూపంలో వ్రాయుము.

   (i) $\frac{36}{-96}$ (ii) $\frac{-56}{-72}$ (iii) $\frac{27}{18}$

3. అకరణీయ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖపై సూచించుము.

   (i) $\frac{-2}{3}$ (ii) $\frac{-8}{-5}$ (iii) $\frac{5}{-4}$

1.2.6 అకరణీయసంఖ్యలను పోల్చుట

అకరణీయసంఖ్యలను పోల్చుటకు క్రిందివ్వబడిన విషయాలను గుర్తించుకొనుమను.

- ప్రతి ధనసంఖ్య సున్నకన్న పెద్దది.
- ప్రతి ఋణసంఖ్య సున్నకన్న చిన్నది.
- ప్రతి ధనసంఖ్య, ప్రతి ఋణసంఖ్య కన్న పెద్దది.
- సంఖ్యారేఖపై ఒక సంఖ్యకు కుడివైపునగల ప్రతి సంఖ్య ఆ సంఖ్య కన్న పెద్దది.

ఇవ్వబడిన రెండు పూర్ణసంఖ్యలు లేదా భిన్నములలో ఏది పెద్దది లేదా చిన్నది అని ఏవిధంగా పోల్చాలని మనకు తెలుసు. ఇప్పుడు ఇలాగే అకరణీయసంఖ్యల జతను పోల్చగలము.

రకము 1 : వ్యతిరేఖ గుర్తులు గల రెండు అకరణీయసంఖ్యలను పోల్చుట

ఉదాహరణ 1.3

$\frac{5}{17}$ మరియు $\frac{-10}{19}$ లను పోల్చుము.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 7 31-07-2020 12:39:14

సాధన:

ప్రతిధనసంఖ్య,ప్రతి ఋణసంఖ్యకన్న పెద్దది కావున $\frac{5}{17} > \frac{-10}{19}$.

రకము 2 : ఒకే హారములుగల భిన్నరూపంలోని రెండు అకరణీయసంఖ్యలను పోల్చుట

ఉదాహరణ 1.4

$\frac{1}{3}$ మరియు $\frac{4}{3}$ లను పోల్చుము.

సాధన:

హారములు సమానము కావున వాటి లవములను పోల్చుము.

$1 < 4$ కావున $\frac{1}{3} < \frac{4}{3}$ గా నిర్ధారించవచ్చును.

రకము3 : వేర్వేరు హారములుగల భిన్నరూపంలోని రెండు అకరణీయసంఖ్యలను పోల్చుట

ఉదాహరణ 1.5

$\frac{3}{4}$ మరియు $\frac{5}{6}$ లను పోల్చుము.

సాధన:

హారముల క.సా.గు 12 (కనుగొనుము!) ఇచ్చిన ప్రతి అకరణీయసంఖ్యను క.సా.గు12 హారముగాగల సమాన అకరణీయసంఖ్యలను తీసుకొనుము.

$\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$ మరియు $\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$ లభించును.ఇప్పుడు ఇవి సదృశ భిన్నములుగా మారినది.

ఇక్కడ, $\frac{9}{12} < \frac{10}{12}$ కావున $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$ గా నిర్ధారించవచ్చును.

రకము4 : ప్రామాణికరూపంలో లేని రెండు అకరణీయసంఖ్యలను పోల్చుట

ఉదాహరణ 1.6

$\frac{9}{-4}$ మరియు $\frac{-2}{3}$ లను పోల్చుము.

సాధన:

$\frac{9}{-4}$ సంఖ్య ప్రామాణికరూపంలో లేదు. మొదట దీనిని ప్రామాణికరూపంలో మారుస్తాము.

$\frac{9}{-4}=\frac{9}{-4}\times\frac{-1}{-1}$ (ధనహారమును పొందుటకు) $=\frac{-9}{4}$

ఇప్పుడు, $\frac{-9}{4}$ మరియు $\frac{-2}{3}$ లను పోలుస్తాము. ఈ రెండు భిన్నాలు సదృశభిన్నాలు కాదు.వాటిని సదృశభిన్నాలుగా మార్చుటకు క.సా.గును ఉపయోగిస్తాము.క.సా.గు 12.

వాని సమాన భిన్నాలు $\frac{-9}{4}=\frac{-27}{12}$ మరియు $\frac{-2}{3}=\frac{-8}{12}$ లను పోల్చవచ్చును.(ఎలా?) వీని హారములు సమానము కావున వాని లవములను −27 మరియు −8లను పోలిస్తే చాలు.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 8 31-07-2020 12:39:15

ఈ సంఖ్యలను సంఖ్యారేఖాపై మనము దృశ్యాంతం చేసుకొంటే

పటము 1.7

$-8, -27$కు కుడివైపున ఉంది కావున $(-8) > (-27)$. దీనివలన $\frac{-8}{12} > \frac{-27}{12}$ అను ఫలితము వచ్చును మరియు అలాగే $\frac{-2}{3} > \frac{9}{-4}$ అని నిర్ధారించవచ్చును.

ఉదాహరణ 1.7

క్రిందివ్వబడిన అకరణీయసంఖ్యలను ఆరోహణ మరియు అవరోహణ క్రమములో వ్రాయుము.

$$\frac{-3}{5}, \frac{7}{-10}, \frac{-15}{20}, \frac{14}{-30}, \frac{-8}{15}$$

సాధన:

మొదట హరములను ధనాత్మకంగా మార్చి మరియు ఆ సంఖ్యలను $\frac{-3}{5}, \frac{-7}{10}, \frac{-15}{20}, \frac{-14}{30}, \frac{-8}{15}$ లాగా ప్రామాణికరూపంలో వ్రాయుము. ఇక్కడ, $5, 10, 15, 20$ మరియు 30ల క.సా.గు 60 (కనుగొనుము!) ఇవ్వబడిన అకరణీయసంఖ్యలను ఉమ్మడి హరము 60 అగునట్లు సమాన అకరణీయసంఖ్యలరూపంనకు మార్చుము.

$\frac{-3}{5}$	$\frac{-7}{10}$	$\frac{-15}{20}$	$\frac{-14}{30}$	$\frac{-8}{15}$
$=\frac{-3}{5}\times\frac{12}{12}$	$=\frac{-7}{10}\times\frac{6}{6}$	$=\frac{-15}{20}\times\frac{3}{3}$	$=\frac{-14}{30}\times\frac{2}{2}$	$=\frac{-8}{15}\times\frac{4}{4}$
$=\frac{-36}{60}$	$=\frac{-42}{60}$	$=\frac{-45}{60}$	$=\frac{-28}{60}$	$=\frac{-32}{60}$

లవములను మాత్రమే పోల్చిన, అది $-36, -42, -45, -28$ మరియు -32 లను $-45 < -42 < -36 < -32 < -28$ గా మనము చూడవచ్చును.

కావున, $\frac{-45}{60} < \frac{-42}{60} < \frac{-36}{60} < \frac{-32}{60} < \frac{-28}{60}$ మరియు కావున, $\frac{-15}{20} < \frac{7}{-10} < \frac{-3}{5} < \frac{-8}{15} < \frac{14}{-30}$.

కావున, ఆరోహణక్రమము $\frac{-15}{20}, \frac{7}{-10}, \frac{-3}{5}, \frac{-8}{15}$ మరియు $\frac{14}{-30}$.

అవరోహణక్రమము $\frac{14}{-30}, \frac{-8}{15}, \frac{-3}{5}, \frac{7}{-10}$ మరియు $\frac{-15}{20}$ లభించును..

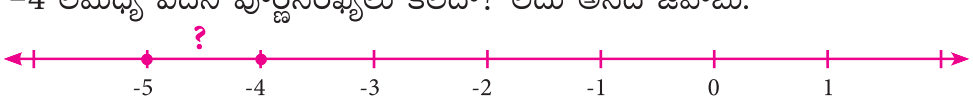
1.2.7 ఏవేని రెండు అకరణీయసంఖ్యల మధ్య అకరణీయసంఖ్యలు

పూర్ణసంఖ్యలు 4 మరియు 10 తీసుకొనుము. 5, 6, 7, 8 మరియు 9 అను ఐదు అకరణీయసంఖ్యలను 4 మరియు 10 లమధ్య గుర్తించబడినది. (దట్టమైన చుక్కలచే చూపబడినది). కదా?

పటము 1.8

3 మరియు –2 లమధ్య ఎన్ని పూర్ణసంఖ్యలను కనుగొనగలము? వాటిని జాబితాపరుచుము.

–5 మరియు –4 లమధ్య ఏదేని పూర్ణసంఖ్యలు కలదా? లేదు అనేది జవాబు.



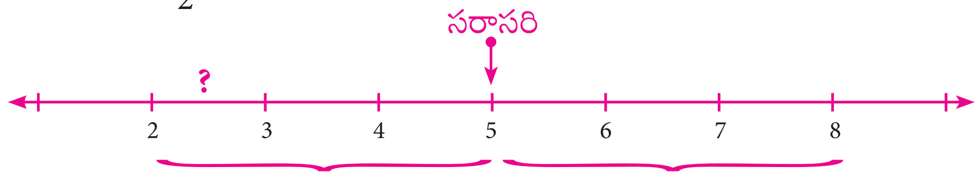
పటము 1.9

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 9 31-07-2020 12:39:17

దీనినుంచి ఇచ్చిన రెండు పూర్ణసంఖ్యల మధ్య పూర్ణసంఖ్యల ఎంపిక పరిమితంగా ఉంటుంది. అవి పరిమితసంఖ్యలో గలదు లేదా వాని మధ్య ఏమియు కూడ లేకుండా ఉండవచ్చును. పూర్ణసంఖ్యలుకు బదులుగా అకరణీయసంఖ్యలను తీసుకొంటే ఏమి జరుగునని ఊహించుకొందాము. రెండు అకరణీయసంఖ్యల మధ్య చాలా అకరణీయసంఖ్యలు ఉంటుందని మనము చూడగలము. రెండు అకరణీయసంఖ్యల మధ్య చాలా అకరణీయసంఖ్యలును కనుగొనుటకు మనకు కనీసము రెండు పద్ధతులుగలదు.

సరాసరి (మధ్యమాల) పద్ధతి:

రెండు సంఖ్యల సరాసరి ఎల్లప్పుడు వానికి మధ్యబిందువు వద్ద ఉంటుందని మనకు తెలుసు. ఉదాహరణకు, 2 మరియు 8 ల సరసరి $\frac{2+8}{2}=5$ మరియు 5, 2 మరియు 8 లమధ్య పటంలో చూపినవిధంగా ఉంటుంది.



పటము 1.10

ఈ పద్ధతినుపయోగించి ఏదేని రెండు అకరణీయసంఖ్యల మధ్య చాలా అకరణీయసంఖ్యలను కనుగొనవచ్చును.

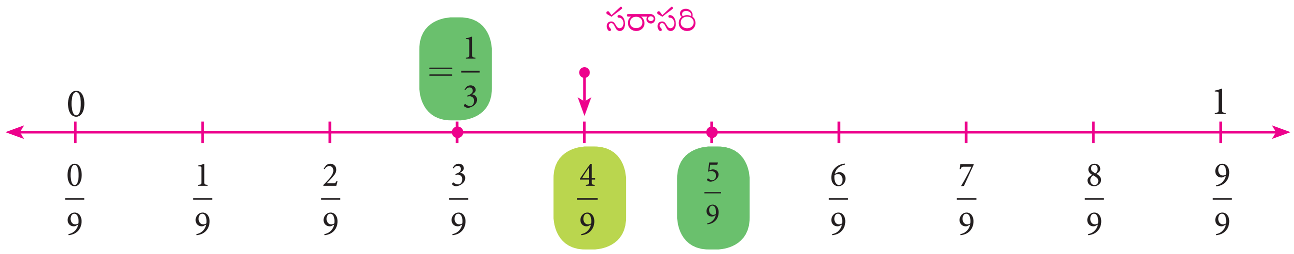
ఉదాహరణ 1.8

$\frac{1}{3}$ మరియు $\frac{5}{9}$ లమధ్య ఒక అకరణీయసంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన:

$\frac{1}{3}$ మరియు $\frac{5}{9}$ ల సరాసరి $=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{5}{9}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\times\frac{3}{3}+\frac{5}{9}\right)$ (ఎందుకు?)

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{9}+\frac{5}{9}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{8}{9}=\frac{4}{9}$$



పటము 1.11

$\frac{1}{3}$ మరియు $\frac{5}{9}$ లమధ్య $\frac{4}{9}$ అను ఒక అకరణీయసంఖ్యను మనము కనుగొన్నాము మరియు మనము ఇలాంటి సంఖ్యలను $\frac{1}{3}$ మరియు $\frac{5}{9}$ లమధ్య కనుగొనచ్చును. ఇది ఏదేని రెండు అకరణీయసంఖ్యల మధ్య అపరిమిత అకరణీయసంఖ్యలు ఉంటుందని చూపిస్తున్నది! గణితపరంగా,ఏదేని రెండు అకరణీయసంఖ్యల మధ్య అనంత అకరణీయసంఖ్యలు ఉంటుందని మనము చెప్పగలము.

ఆలోచించుము

$\frac{-7}{11}$ మరియు $\frac{6}{-11}$ మధ్య ఏదైనా అకరణీయ సంఖ్యలుండునా?

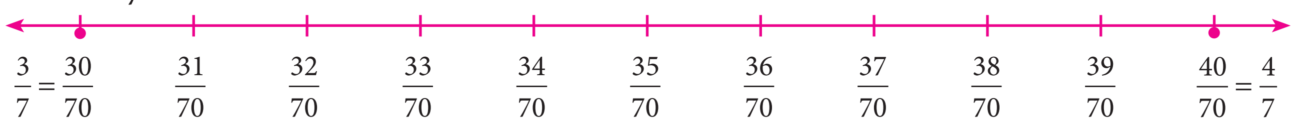
సమానత్వ అకరణీయసంఖ్యల పద్ధతి:

మనము సమానభిన్నాల పద్ధతినుపయోగించి ఏదేని రెండు అకరణీయసంఖ్యల మధ్య చాలా అకరణీయసంఖ్యలను పొందొచ్చును. దీనిని క్రిందిచ్చిన వివరణలో స్పష్టంగా వివరించబడినది.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 10 31-07-2020 12:39:20

వివరణ:

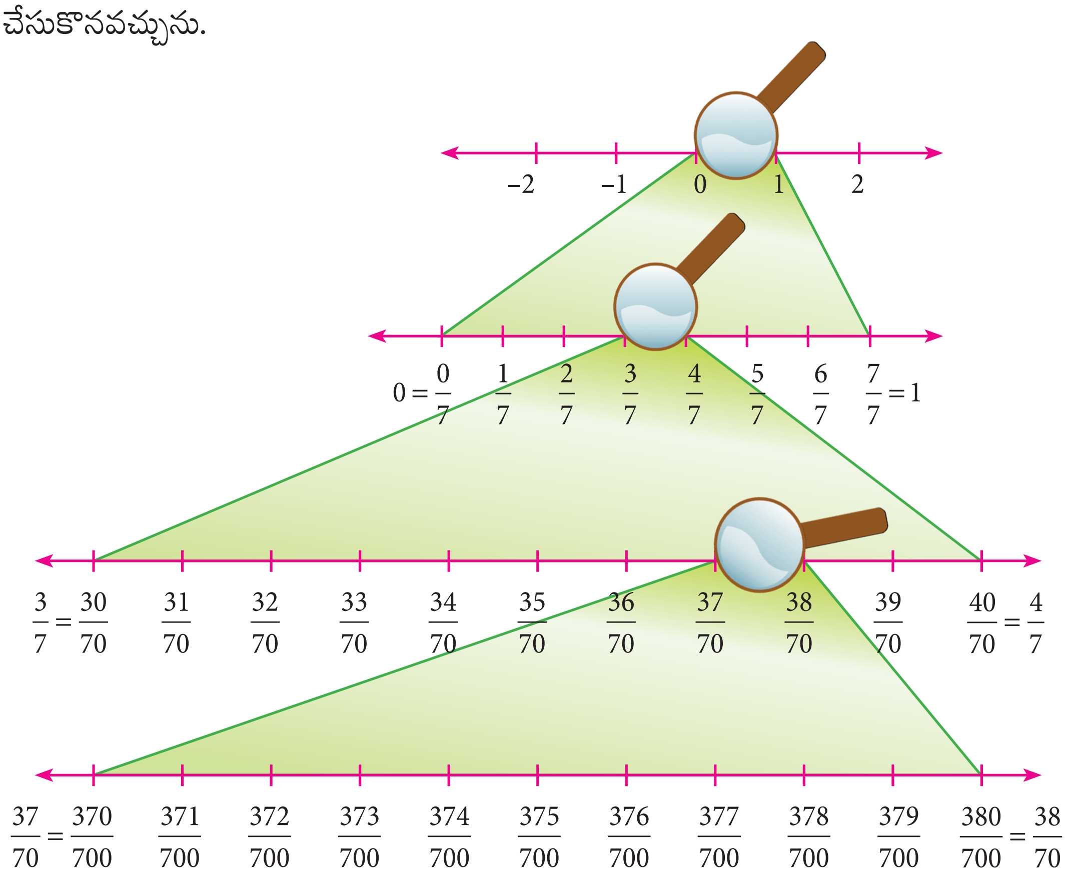
సంఖ్యారేఖాపై క్రిందివ్వబడిన దృశ్యవివరణ ద్వారా $\frac{3}{7}$ మరియు $\frac{4}{7}$ లమధ్య చాలా అకరణీయసంఖ్యలనుకనుగొనుటకు ప్రయత్నిస్తాము. ఒకవేళ అకరణీయసంఖ్య హరముయొక్క గుణిజాల (10 చే గుణించడం సులభము) ద్వారా సమానత్వ అకరణీయసంఖ్యలను పొందినట్లయితే మనము ఎన్ని కోరుకుంటే అన్ని అకరణీయసంఖ్యలను పొందుపరచవచ్చును. $\frac{3}{7}$ ను $\frac{30}{70}$ గా, $\frac{4}{7}$ ను $\frac{40}{70}$ గా వ్రాయవచ్చును మరియు $\frac{3}{7}$ మరియు $\frac{4}{7}$ లమధ్య 9 అకరణీయసంఖ్యలను క్రిందిచ్చిన సంఖ్యారేఖాపై మనము చూడగలము.



పటము 1.12

$\frac{37}{70}$ మరియు $\frac{38}{70}$ లమధ్య ఇంకా ఎక్కువ అకరణీయసంఖ్యలు కావాలంటే $\frac{37}{70}$ ను $\frac{370}{700}$ గా, $\frac{38}{70}$ ను $\frac{380}{700}$ గా వ్రాయవచ్చును $\frac{37}{70}$ మరియు $\frac{38}{70}$ లమధ్య తొమ్మిది అకరణీయసంఖ్యలు $\frac{371}{700}, \frac{372}{700}, \frac{373}{700}, \frac{374}{700}, \frac{375}{700}, \frac{376}{700}, \frac{377}{700}, \frac{378}{700}$ మరియు $\frac{379}{700}$ లను మనము పొందగలము.

క్రిందిచ్చిన చిత్రము కటకమునుపయోగించి 0 మరియు 1 లమధ్య స్థలమును పెద్దది చేయుట ద్వారా అర్థము చేసుకొనుటకు సహాయపడును. మరియు ఇలాగే భిన్నభాగములను కూడ జూమ్‌చేస్తూ కొనసాగిస్తే అర్థము చేసుకొనవచ్చును.



పటము 1.13

కావున,మనము ఏదేని రెండు అకరణీయసంఖ్యల మధ్య అపరిమిత అకరణీయసంఖ్యలను చూడగలము.

ఉదాహరణ 1.9

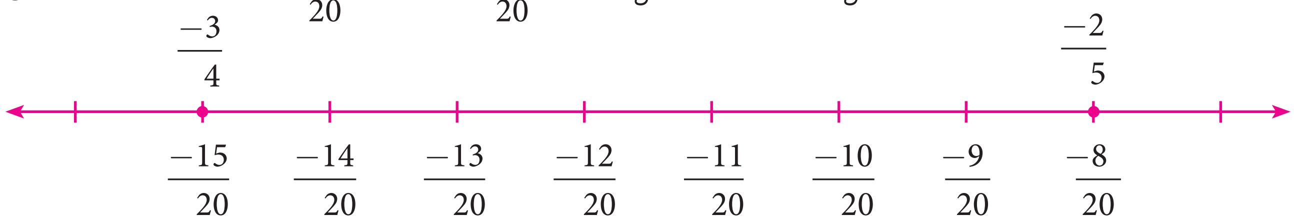
$\frac{-3}{4}$ మరియు $\frac{-2}{5}$ లమధ్య కనీసము రెండు అకరణియసంఖ్యలను కనుగొనుము.

సాధన:

ఇవ్వబడిన అకరణీయసంఖ్యల హరాలు విభిన్నాలు. హారాలు 4 మరియు 5 ల క.సా.గు 20. ఇచ్చిన అకరణీయసంఖ్యల హరములు సామాన్యంగా 20 ఉండునట్లు మార్చుము. ఇక్కడ,

$\frac{-3}{4} = \frac{-3}{4} \times \frac{5}{5} = \frac{-15}{20}$ మరియు $\frac{-2}{5} = \frac{-2}{5} \times \frac{4}{4} = \frac{-8}{20}$.

క్రిందిచూపిన విధంగా $\frac{-15}{20}$ మరియు $\frac{-8}{20}$ లమధ్య అకరణీయసంఖ్యలను పొందుపరుచుట సులభము.



పటము 1.14

$\frac{-15}{20}$ మరియు $\frac{-8}{20}$ లమధ్య కొన్ని అకరణీయసంఖ్యలను $\frac{-14}{20}, \frac{-13}{20}, \frac{-12}{20}, \frac{-11}{20}, \frac{-10}{20}$ మరియు $\frac{-9}{20}$ లు లాగా మనము జబితాపరచవచ్చును.

ఇవి మాత్రమే $\frac{-15}{20}$ మరియు $\frac{-8}{20}$ లమధ్యగల అకరణీయసంఖ్యలు? ఆలోచించుము! వీలైతే వీని మధ్య ఇంకా 10 అకరణీయసంఖ్యలను కనుగొనుటకు ప్రయత్నించుము.

సూచన

క్రింద ఇవ్వబడినట్లు $\frac{-7}{11}$ మరియు $\frac{5}{-9}$ మధ్య చాలా అకరణీయ సంఖ్యలను వేగముగా కనుగొనవచ్చును. అకరణీయ సంఖ్యల వ్యాప్తిని హారములను లవముతో అడ్డగుణకారము చేసి భిన్నములను ప్రామాణిక రూపంలో వ్రాసి కనుగొనవచ్చును. $\frac{-7}{11} \times \frac{-5}{9}$ ల అడ్డగుణకార వ్యాప్తి –63 నుండి –55 వరకు వచ్చును. వీటి హారము 99. ఇది ఇవ్వబడిన అకరణీయసంఖ్యల హరములను99! అగునట్లు సమాన అకరణీయసంఖ్యలుగా మార్చుటకు సమానము!

అభ్యాసము 1.1

1. **ఖాళీలను పూరించుము:**

(i) $\frac{-19}{5}$ __________ మరియు __________ పూర్ణసంఖ్యల మధ్య ఉంటుంది.

(ii) $\frac{15}{-4}$ అను అకరణీయసంఖ్య యొక్క దశాంశరూపము __________.

(iii) __________ నుండి $\frac{-8}{3}$ మరియు $\frac{8}{3}$ అకరణీయసంఖ్యలు సమానదూరంలో ఉంటుంది.

(iv) $\frac{-15}{24}, \frac{20}{-32}, \frac{-25}{40}$ అను ఈ వరుసలో తరువాతి అకరణీయసంఖ్య __________.

(v) $\frac{58}{-78}$ యొక్క ప్రామాణికరూపము __________.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 12 31-07-2020 12:39:28

2. **సత్యమా లేదా అసత్యమా తెలుపుము:**

(i) 0 అనునది అతిచిన్న అకరణీయసంఖ్య.

(ii) $\frac{-4}{5}$ అనునది $\frac{-3}{4}$ కు ఎడమవైపున ఉంటుంది.

(iii) $\frac{-19}{5}$ అనునది $\frac{15}{-4}$ కన్న పెద్దది.

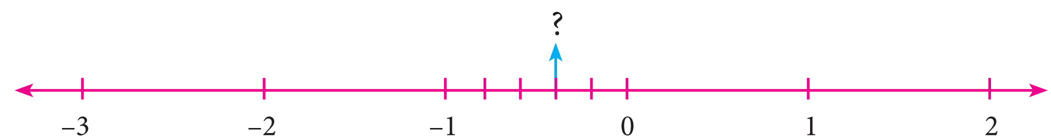
(iv) రెండు అకరణీయసంఖ్యల సరాసరి వాని మధ్య ఉంటుంది.

(v) 10 మరియు 11 లమధ్య అపరిమితసంఖ్యలో అకరణీయసంఖ్యలు ఉంటుంది.

3. సంఖ్యారేఖపై ప్రశ్నార్థక గుర్తు ఉన్న ప్రదేశములో గల అకరణీయ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

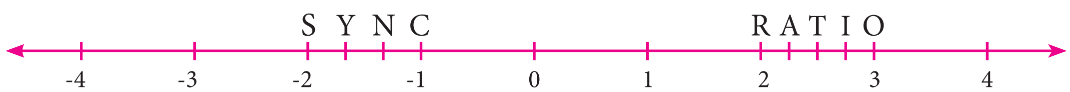
(i)

(ii)



(iii)

4. బిందువులు S, Y, N, C, R, A, T, I మరియు O లను సంఖ్యారేఖాపై CN=NY=YS మరియు RA=AT=TI=IO. అగునట్లు గలదు Y, N, A, T మరియు I అక్షరాలచే సూచించిన అకణీయసంఖ్యలను కనుగొనుము.



5. సంఖ్యారేఖను గీచి కింద ఇవ్వబడిన అకరణీయ సంఖ్యలను వాటిపై సూచించుము.

(i) $\frac{9}{4}$ (ii) $\frac{-8}{3}$ (iii) $\frac{-17}{-5}$ (iv) $\frac{15}{-4}$

6. క్రిందివ్వబడిన అకరణీయసంఖ్యలను దశాంశరూపంలో వ్రాయుము.

(i) $\frac{1}{11}$ (ii) $\frac{13}{4}$ (iii) $\frac{-18}{7}$ (iv) $1\frac{2}{5}$ (v) $-3\frac{1}{2}$

7. ఇచ్చిన అకరణీయసంఖ్యలమధ్య ఐదు అకరణీయసంఖ్యలను జాబితాపరుచుము.

(i) -2 మరియు 0 (ii) $\frac{-1}{2}$ మరియు $\frac{3}{5}$ (iii) $\frac{1}{4}$ మరియు $\frac{7}{20}$ (iv) $\frac{-6}{4}$ మరియు $\frac{-23}{10}$

8. $\frac{14}{5}$ మరియు $\frac{16}{3}$ ల మధ్య 2 అకరణీయసంఖ్యలను సరాసరి పద్ధతినుపయోగించి వ్రాయుము.

9. కింద ఇవ్వబడిన అకరణీయ సంఖ్యల జతను పోల్చుము.

(i) $\frac{-11}{5}, \frac{-21}{8}$ (ii) $\frac{3}{-4}, \frac{-1}{2}$ (iii) $\frac{2}{3}, \frac{4}{5}$.

10. కింద ఇవ్వబడిన అకరణీయ సంఖ్యలను ఆరోహణక్రమము మరియు అవరోహణ క్రమములో వ్రాయుము.

(i) $\frac{-5}{12}, \frac{-11}{8}, \frac{-15}{24}, \frac{-7}{-9}, \frac{12}{36}$ (ii) $\frac{-17}{10}, \frac{-7}{5}, 0, \frac{-2}{4}, \frac{-19}{20}$

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

11. $\frac{-6}{11}$ నుండి ఏ సంఖ్యను తీసివేసిన $\frac{8}{9}$ వచ్చును.

(A) $\frac{34}{99}$ (B) $\frac{-142}{99}$ (C) $\frac{142}{99}$ (D) $\frac{-34}{99}$

12. కింద ఇవ్వబడిన ఏ జతలు సమానము?

(A) $\frac{-20}{12}, \frac{5}{3}$ (B) $\frac{16}{-30}, \frac{-8}{15}$ (C) $\frac{-18}{36}, \frac{-20}{44}$ (D) $\frac{7}{-5}, \frac{-5}{7}$

13. $\frac{-5}{4}$ అకరణీయ సంఖ్య కింది వాటిలో వేటి మధ్య కలదు?

(A) 0 మరియు $\frac{-5}{4}$ (B) −1 మరియు 0 (C) −1 మరియు −2 (D) −4 మరియు −5

14. కింద ఇవ్వబడిన అకరణీయ సంఖ్యలలో ఏది పెద్దది?

(A) $\frac{-17}{24}$ (B) $\frac{-13}{16}$ (C) $\frac{7}{-8}$ (D) $\frac{-31}{32}$

15. $\frac{112}{528}$ యొక్క సూక్ష్మరూపములోని హారముల అంకెల మొత్తము

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

1.3 అకరణీయసంఖ్యలపై ప్రాథమిక అంకగణిత పరిక్రియలు

భిన్నముల ప్రాథమిక పరిక్రియలలో పాటించు అన్ని నియమము మరియు ధర్మాలను అకరణీయసంఖ్యలలో కూడ వర్తింపచేయవచ్చును.

1.3.1 సంకలనము

సంకలనము చేయునపుడు 4 వేర్వేరు పరిస్థితులు గలవు.

రకము 1 : ఒకే హారము గల అకరణీయ సంఖ్యల యొక్క సంకలనము

రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ గల అకరణీయ సంఖ్యల లవములను మాత్రము కూడి సమాన హారములను అలాగే వ్రాయవలెను.

ఉదాహరణ 1.10

$\frac{-6}{11}, \frac{8}{11}, \frac{-12}{11}$ ను కూడుము.

సాధన:

ఇచ్చిన అకరణీయ సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలోకి మార్చిన తరువాత కూడుము.

$$\frac{-6}{11} + \frac{8}{11} + \frac{-12}{11} = \frac{-6+8-12}{11} = \frac{-10}{11}$$

రకము 2 : వేర్వేరు హారము గల అకరణీయ సంఖ్యలను కూడడం

ఇవ్వబడిన అకరణీయ సంఖ్యలను ప్రామాణిక రూపంలోకి మార్చిన తరువాత హారముల క.సా.గు కనుగొని, వాటిని ఒకే హారము (క.సా.గు) కలిగిన సమాన అకరణీయ సంఖ్యలుగా మార్చిన తరువాత లవములను కూడవలెను.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 14 31-07-2020 12:39:33

ఉదాహరణ 1.11

$\frac{-5}{9}, \frac{-4}{3}, \frac{7}{12}$ లను కూడుము.

సాధన:

9,3,12 ల క.సా.గు $= 36$

$$\frac{-5}{9} + \frac{-4}{3} + \frac{6}{12} = \frac{-5}{9} \times \frac{4}{4} + \frac{-4}{3} \times \frac{12}{12} + \frac{7}{12} \times \frac{3}{3}$$

$$= \frac{-20}{36} + \frac{-48}{36} + \frac{21}{36} = \frac{-20 - 48 + 21}{36} = \frac{-47}{36}$$

1.3.2 సంకలన విలోమము

ఒక అకరణీయసంఖ్యకు మరోక అకరణీయసంఖ్యను కూడినప్పుడు సున్న లభించిన ఆ అకరణీయసంఖ్యను ఇచ్చిన అకరణీయసంఖ్యకు సంకలన విలోమము అంటారు.

ఉదాహరణకు, $\frac{4}{3}$ మరియు $\frac{-4}{3}$ లు ఒకదానికొకటి సంకలన విలోమాలు కావున వాటి మొత్తము సున్న అగును.

ఆలోచించుము

సున్న అకరణీయసంఖ్య అగునా? అయితే దానియొక్క సంకలన విలోమము ఏమి?

1.3.3 వ్యవకలనము

వ్యవకలనము అనేది సంకలన విలోమముచేత కూడడం.

ఉదాహరణ 1.12

$\frac{-12}{17}$ నుండి $\frac{9}{17}$ ను తీసివేయుము.

సాధన:

ఇప్పుడు, $\frac{-12}{17} - \frac{9}{17} = \frac{-12}{17} + \left(\frac{-9}{17}\right) = \frac{-12-9}{17} = \frac{-21}{17}$

ఉదాహరణ 1.13

$\left(-4\frac{5}{22}\right)$ నుండి $\left(-2\frac{6}{11}\right)$ ను తీసివేయుము.

సాధన:

ఇప్పుడు, $\left(-4\frac{5}{22}\right) - \left(-2\frac{6}{11}\right)$

$$= \frac{-93}{22} - \left(\frac{-28}{11}\right)$$

$$= \frac{-93}{22} + \frac{28}{11} = \frac{-93 + 28 \times 2}{22}$$

$$= \frac{-93 + 56}{22} = \frac{-37}{22} = -1\frac{15}{22}$$

1.3.4 గుణకారము

రెండు లేదా ఎక్కువ అకరణీయసంఖ్యల లబ్ధము అనేది వాని అనురూప లవము మరియు హారములను గుణించి మరియు దానిని ప్రామాణికరూపంలో వ్రాయుట.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 15 31-07-2020 12:39:35

ఉదాహరణ 1.14

గణించుము: (i) $\frac{-5}{8}\times\frac{7}{3}$ (ii) $\frac{-6}{-11}\times(-4)$

సాధన:

(i) $\frac{-5}{8}\times\frac{7}{3}=\frac{-5\times7}{8\times3}=\frac{-35}{24}$ (ii) $\frac{-6}{-11}\times(-4)=\frac{6}{11}\times\frac{(-4)}{1}=\frac{6\times(-4)}{11\times1}=\frac{-24}{11}$

1.3.5 గుణకార విలోమము

రెండు అకరణీయసంఖ్యల లబ్ధము 1 అయినచో వానిని వ్యుత్క్రమము లేదా అవి పరస్పరం గుణకారవిలోమాలు అగును. a అను అకరణీయసంఖ్య యొక్క వ్యుత్క్రమము $\frac{1}{a}$ అగును. మరియు దీని విపర్యయము $a\times\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\times a=1$.

ఆలోచించుము

1 మరియు −1ల గుణకారవిలోమములు ఏవి?

$\frac{a}{b}$ అను అకరణీయసంఖ్య యొక్క గుణకారవిలోమము $\frac{b}{a}$ అగును. మరియు దీని విపర్యయము. $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=\frac{b}{a}\times\frac{a}{b}=1$

1.3.6 భాగహారము

భిన్నముల వ్యుత్క్రమము అనే భావనను అకరణీయసంఖ్యల యొక్క భాగహారమునకు కూడ అనువర్తించుము. ఇచ్చిన ఒక అకరణీయసంఖ్యను మరోక అకరణీయసంఖ్యతో భాగించుట అనునది, ఇచ్చిన అకరణీయసంఖ్యను మరోక అకరణీయసంఖ్య యొక్క వ్యుత్క్రమముతో గుణించుట అగును. అనగా, భాగహారము అనునది భాజకము, గుణకారవిలోమముతో గుణించుట.

ఉదాహరణ 1.15

$\frac{7}{-8}$ ను $\frac{-3}{4}$ చే భాగించుము.

సాధన:

ఇక్కడ, $\frac{7}{-8}\div\frac{-3}{4}=\frac{-7}{8}\times\frac{-4}{3}=\frac{7}{6}$

ప్రయత్నించుము

(i) $\frac{-7}{3}$ ను 5 చే (ii) 5 ను $\frac{-7}{3}$ చే (iii) $\frac{-7}{3}$ ను $\frac{35}{6}$ చే భాగించుము.

సూచన

$b, c,$ మరియు d ల శూన్యేతర సంఖ్యలకు

(i) $\left(\frac{a}{b}\right)\div c=\frac{a}{bc}$ (ii) $a\div\left(\frac{b}{c}\right)=\frac{ac}{b}$ (iii) $\left(\frac{a}{b}\right)\div\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{ad}{bc}$

1.4 ప్రాథమిక పరిక్రియలు ఉపయోగించి వాక్యరూప సమస్యలను సాధించుట

ఉదాహరణ 1.16

రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మొత్తము $\frac{4}{5}$ దీనిలో ఒక అకరణీయ సంఖ్య $\frac{2}{15}$ అయిన మరియొక అకరణీయ సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన:

మరియొక అకరణీయ సంఖ్యను x అనుకొనుము.

ఇవ్వబడినది, $\frac{2}{15}+x=\frac{4}{5}$

$$\Rightarrow x=\frac{4}{5}-\frac{2}{15}=\frac{12-2}{15}=\frac{10}{15}\Rightarrow x=\frac{2}{3}$$

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 16 31-07-2020 12:39:39

ఉదాహరణ 1.17

రెండు అకరణీయ సంఖ్యల లబ్దము $\frac{-2}{3}$ దానిలో ఒక అకరణీయ సంఖ్య $\frac{3}{7}$ అయిన మరియొక అకరణీయ సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన:

మరియొక అకరణీయ సంఖ్యను x అనుకొనుము.

ఇవ్వబడినది, $\frac{3}{7} \times x = \frac{-2}{3}$

$\frac{3}{7}$ యొక్క వ్యుత్క్రమము $\frac{7}{3}$ ను ఇరువైపులా గుణించగా

$$\Rightarrow \frac{7}{3} \times \frac{3}{7} \times x = \frac{7}{3} \times \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-14}{9}$$

మరొక పద్ధతి

$$\frac{3}{7} \times x = \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-2}{3} \times \frac{7}{3} = \frac{-14}{9}$$

(అడ్డుగుణకార పద్ధతి ద్వారా)

ఉదాహరణ 1.18

ఒక రిబ్బను చుట్ట $18\frac{3}{4}$ మీ పొడవు కలదు. శంకరి వద్ద నాలుగు పూర్తి చుట్టలు మరియు చుట్టలో 1/3 వంతు మరో చుట్ట కలదు. అయితే శంకరి వద్ద గల మొత్తము రిబ్బను చుట్ట ఎన్ని మీటర్లు కలదు?

సాధన:

శంకరి వద్ద గల రిబ్బను చుట్ట పొడవు మీటర్లలో

$$= 18\frac{3}{4} \times 4\frac{1}{3}$$

$$= \frac{75}{4} \times \frac{13}{3} = \frac{325}{4} = 81\frac{1}{4} \text{ మీ}$$

పటము 1.15

ఉదాహరణ 1.19

$3\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4} + 2\frac{3}{8}$ తో ఏ అకరణీయ సంఖ్యలను కూడిన మరియు తీసివేసిన పూర్ణాంకముగా మారునో కనుగొనుము.

సాధన:

ఇక్కడ, $3\frac{1}{2} + 1\frac{3}{4} + 2\frac{3}{8}$

$$= \frac{7}{2} + \frac{7}{4} + \frac{19}{8} = \frac{7 \times 4 + 7 \times 2 + 19 \times 1}{8} = \frac{28 + 14 + 19}{8}$$

$= \frac{61}{8} = 7\frac{5}{8}$, ఇది పూర్ణాంకములు 7 మరియు 8 ల మధ్య ఉండును.

$\frac{5}{8}$ ను $7\frac{5}{8}$, నుంచి తీసివేసిన అది 7. గా మారును. $\frac{3}{8}$ ను $7\frac{5}{8}$, కు కలిపిన అది $7+\frac{5}{8}+\frac{3}{8}$=7+1=8. గా మారును.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 17 31-07-2020 12:39:41

ఉదాహరణ 1.20

ఒక విద్యార్థి ఒక సంఖ్యను $\frac{8}{9}$ గుణించుటకు బదులుగా $\frac{8}{9}$ తో పొరబాటున భాగించెను. అతను పొందిన సమాధానానికి సరియైన సమాదానానికి గల వ్యత్యాసము 34 అయిన ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన: సంఖ్యను x అనుకొనుము.

విద్యార్థి $\frac{8x}{9}$ ను కనుగొనవలెను కాని, అతను $\frac{x}{\left(\frac{8}{9}\right)}$ చేసెను. అంటే $\frac{9x}{8}$

ఇప్పుడు, $\frac{9x}{8}-\frac{8x}{9} = 34$

$$\frac{81x-64x}{72} = 34 \Rightarrow \frac{17x}{72} = 34$$

$$x = \frac{34\times 72}{17} = 144$$

ఉదాహరణ 1.21

సూక్ష్మీకరించుము: $\left(\frac{4}{3}-\left(\frac{-3}{2}\right)\right)+\left(\frac{-5}{3}\div\frac{30}{12}\right)+\left(\frac{-12}{9}\times\frac{-27}{16}\right)$

సాధన: $\left(\frac{4}{3}-\left(\frac{-3}{2}\right)\right)+\left(\frac{-5}{3}\div\frac{30}{12}\right)+\left(\frac{-12}{9}\times\frac{-27}{16}\right) = \left(\frac{4}{3}+\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{-5}{3}\times\frac{12}{30}\right)+\left(\frac{-12}{9}\times\frac{-27}{16}\right)$

$$=\left(\frac{8}{6}+\frac{9}{6}\right)+\left(\frac{-1}{1}\times\frac{4}{6}\right)+\left(\frac{-3}{1}\times\frac{-3}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{17}{6}\right)+\left(\frac{-4}{6}\right)+\left(\frac{9}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{17-4}{6}\right)+\frac{9}{4} = \frac{13}{6}+\frac{9}{4}$$

$$=\frac{26+27}{12}=\frac{53}{12}$$

అభ్యాసము 1.2

1. **ఖాళీలను పూరించుము:**

   (i) $\frac{-5}{12}+\frac{7}{15}$ యొక్క విలువ ________.

   (ii) $\left(\frac{-3}{6}\right)\times\left(\frac{18}{-9}\right)$ యొక్క విలువ ________.

   (iii) $\left(\frac{-15}{23}\right)\div\left(\frac{30}{-46}\right)$ యొక్క విలువ ________.

   (iv) విలోమము లేని అకరణీయసంఖ్య ________

   (v) −1 యొక్క గుణకారవిలోమము ________.

2. **సత్యమా లేదా అసత్యమా తెలుపుము:**

   (i) అన్ని అకరణీయసంఖ్యలకు సంకలనవిలోమములు ఉంటుంది.

   (ii) 0 మరియు −1 అను అకరణీయసంఖ్యలు వానియొక్క సంకలనవిలోమములుకు సమానము.

   (iii) $\frac{-11}{-17}$ యొక్క సంకలనవిలోమము $\frac{11}{17}$.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 18 31-07-2020 12:39:44

(iv) −1 అను అకరణీయసంఖ్య తనకుతానే వ్యుత్క్రమము అగును.

(v) అన్ని అకరణీయసంఖ్యలకు గుణకారవిలోమములు గలదు.

3. మొత్తమును కనుగొనుము:

(i) $\frac{7}{5}+\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{7}{5}+\frac{5}{7}$ (iii) $\frac{6}{5}+\left(\frac{-14}{15}\right)$ (iv) $-4\frac{2}{3}+7\frac{5}{12}$

4. $\frac{-17}{11}$ నుంచి $\frac{-8}{44}$ ను వ్యవకలనము చేయుము.

5. గణించుము: (i) $\frac{9}{132}\times\frac{-11}{3}$ (ii) $\frac{-7}{27}\times\frac{24}{-35}$

6. (i) $\frac{-21}{5}$ ను $\frac{-7}{-10}$ చే (ii) $\frac{-3}{13}$ ను -3 చే (iii) -2 ను $\frac{-6}{15}$ చే భాగించుము.

7. (i) $a=\frac{1}{2}, b=\frac{2}{3}$ (ii) $a=\frac{-3}{5}, b=\frac{2}{15}$ అయితే $(a+b)\div(a-b)$ ను కనుగొనుము.

8. $\frac{1}{2}+\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{5}\right)\div\frac{3}{10}\times 3$ ను సూక్ష్మీకరించుము మరియు ఇది 11 మరియు 12ల మధ్యగల అకరణీయసంఖ్య అని చూపుము.

9. సూక్ష్మీకరించుము:

(i) $\left[\frac{11}{8}\times\left(\frac{-6}{33}\right)\right]+\left[\frac{1}{3}+\left(\frac{3}{5}\div\frac{9}{20}\right)\right]-\left[\frac{4}{7}\times\frac{-7}{5}\right]$ (ii) $\left[\frac{4}{3}\div\left(\frac{8}{-7}\right)\right]-\left[\frac{3}{4}\times\frac{4}{3}\right]+\left[\frac{4}{3}\times\left(\frac{-1}{4}\right)\right]$

10. ఒక విద్యార్థి ఒక సంఖ్యను $\frac{4}{3}$ చే భాగించుటకు బదులు $\frac{4}{3}$ చే గుణించాడు మరియు సరైన జవాబుకన్న 70 ఎక్కువ లభించినది. ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

11. $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\left(\frac{-7}{12}\right)$ యొక్క మొత్తమునకు ప్రామాణికరూపము ________ .

(A) 1 (B) $\frac{-1}{2}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{22}$

12. $\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{8}\right)+\frac{1}{2}=$ ________ .

(A) $\frac{15}{64}$ (B) 1 (C) $\frac{5}{8}$ (D) $\frac{1}{16}$

13. $\frac{3}{4}\div\left(\frac{5}{8}+\frac{1}{2}\right)=$ ________ .

(A) $\frac{13}{10}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{5}{8}$

14. $\frac{3}{4}\times\left(\frac{5}{8}\div\frac{1}{2}\right)=$ ________ .

(A) $\frac{5}{8}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{15}{32}$ (D) $\frac{15}{16}$

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 19 31-07-2020 12:39:49

15. క్రిందిచ్చిన అకరణీయసంఖ్యలలో దేనికి సంకలనవిలోమము గలదు?

(A) 7 (B) $\frac{-5}{7}$ (C) 0 (D) పైవన్నియు

సూచన

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} \neq \frac{a+c}{b+d}$? ఎందుకు?

ఒక గణిత ప్రపచనము ఏ మినహాయింపు లేకుండా 100% సత్యమైతే మాత్రమే, ఆ ప్రవచనము సత్యమగును. ఇక్కడ $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$, $\frac{3+1}{4+4}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ అని కూడిన అది తప్పు ఎందుకనగా $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3+1}{4}=\frac{4}{4}=1$

1.5 అకరణీయసంఖ్యల ధర్మాలు

క్రిందివ్వనడిన కొన్ని ధర్మాలు పదసమస్యలను సాధించుటకు ఉపయోగపడును.

1.5.1 $\mathbb{Q}$ అనే అకరణీయసంఖ్యల సేకరణ యొక్క సంవృత ధర్మము

i) సంకలన సంవృతధర్మము

a మరియు ***b*** అను ఏదేని రెండు అకరణీయసంఖ్యల మొత్తము ***a + b*** కూడ ఒక అకరణీయసంఖ్య అగును.

ii) గుణకార సంవృత ధర్మము

a మరియు ***b*** అను ఏదేని రెండు అకరణీయసంఖ్యల లబ్దము ***ab*** కూడ ఒక అకరణీయసంఖ్య అగును.

వివరణ

$a=\frac{3}{4}$ మరియు $b=\frac{-1}{2}$ తీసుకొనుము.

ఇప్పుడు, $a+b=\frac{3}{4}+\frac{-1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{-2}{4}=\frac{3-2}{4}=\frac{1}{4}$ అనేది $\mathbb{Q}$ లో కలదు.

మరియు, $a \times b=\frac{3}{4}\times\frac{-1}{2}=\frac{-3}{8}$ అనేది $\mathbb{Q}$ లో కలదు.

ప్రయత్నించుము

పూర్ణసంఖ్యలపై గల సంవృత ధర్మము వ్యవకలనము దృష్ట్యా సత్యము కాదు. దీనిని అకరణీయ సంఖ్యలకు సరిచూడుము.

1.5.2 $\mathbb{Q}$ అనే అకరణీయసంఖ్యల సేకరణ యొక్క స్థిత్యంతర ధర్మము

i) సంకలన స్థిత్యంతర ధర్మము

a మరియు ***b*** అను ఏదేని రెండు అకరణీయసంఖ్యలకు, ***a + b = b + a***.

ii) గుణకార స్థిత్యంతర ధర్మము

a మరియు ***b*** అను ఏదేని రెండు అకరణీయసంఖ్యలకు, ***ab = ba***

(ab అనగా $a \times b$ మరియు ba అనగా $b \times a$).

వివరణ

$a=\frac{-7}{8}$ మరియు $b=\frac{3}{5}$ తీసుకొనుము.

ఇప్పుడు, $a+b=\frac{-7}{8}+\frac{3}{5}=\frac{-7\times5+3\times8}{40}=\frac{-35+24}{40}=\frac{-11}{40}$

మరియు, $b+a=\frac{3}{5}+\frac{-7}{8}=\frac{3\times8+-7\times5}{40}=\frac{24-35}{40}=\frac{-11}{40}$

$a+b=b+a$ కావున సంకలనము దృష్ట్యా స్థిత్యంతర ధర్మము వర్తించును.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 20 31-07-2020 12:39:52

పరిక్రియలు	పూర్ణసంఖ్యల లోని ధర్మములను గుర్తుచేసుకొనిన (*a, b, c* అనునవి పూర్ణసంఖ్యలైన −*a*, −*b*, −*c* కూడా పూర్ణసంఖ్యలగును.)					
	సంవృత	స్థిత్యంతర	సహచర	తత్సమము	విలోమము	విభాగ ధర్మము
సంకలనము	$a+b$ ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన ఉదా॥ $5+(-3)=2$ కూడా పూర్ణసంఖ్యయే	$a+b=b+a$ ఉదా॥ $5+(-3)=(-3)+5$ $\Rightarrow 2=2$	$(a+b)+c$ $=a+(b+c)$ ఉదా॥ $(2+3)+(-4)=1$ $2+[3+(-4)]=1$	$a+0$ $=0+a=a$ ఉదా॥ $(-4)+0$ $=0+(-4)=-4$	$a+(-a)$ $=(-a)+a=0$ ఉదా॥ $5+(-5)$ $=(-5)+5=0$	$a\times(b+c)$ $=(a\times b)+(a\times c)$ ఉదా॥ $2\times[3+(-5)]=-4$ $(2\times3)+[2\times(-5)]$ $=-4$
గుణకారము	ab కూడా ఒక పూర్ణసంఖ్య ఉదా॥________	$a\times b=b\times a$ ఉదా॥________	$(a\times b)\times c$ $=a\times(b\times c)$ ఉదా॥ $(2\times3)\times(-6)=-36$ $2\times[3\times(-6)]=-36$	$a\times1$ $=1\times a=a$ ఉదా॥________	సాధించుటకు వీలుకాదు	వర్తించదు
వ్యవకలనము	$a-b$ ఒక పూర్ణసంఖ్య. ఉదా॥________	$a-b\neq b-a$ ఉదా॥________	$(a-b)-c$ $\neq a-(b-a)$ ఉదా॥_______	$a-0\neq0-a$ ఉదా॥ $5-0=5$ $0-5=-5$ $5\neq-5$	$a-(-a)$ $\neq(-a)-a$ ఉదా॥ $2-(-2)=4$ $(-2)-2=-4$ $4\neq-4$	$a\times(b-c)$ $=(a\times b)-(a\times c)$ ఉదా॥________
భాగహారము	$a\div b$ ఒక పూర్ణసంఖ్యకానిచో ఉదా॥ $3\div5=\frac{3}{5}$ పూర్ణసంఖ్య కాదు..	నిజము కాదు	నిజముకాదు	నిజముకాదు	నిజముకాదు	వర్తించదు

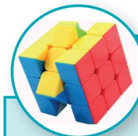
01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 21 31-07-2020 12:39:56

మరియు,

$$a\times b=\frac{-7}{8}\times\frac{3}{5}=\frac{-7\times3}{8\times5}=\frac{-21}{40}$$

, $$b\times a=\frac{3}{5}\times\frac{-7}{8}=\frac{3\times-7}{5\times8}=\frac{-21}{40}$$

$a\times b=b\times a$ కావున గుణకారము దృష్ట్యా స్థిత్యంతర ధర్మము వర్తించును.



ప్రయత్నించుము

(i) అనేది సమానమా? $\frac{3}{5}-\frac{7}{8}=\frac{7}{8}-\frac{3}{5}$?

(ii) $\frac{3}{5}\div\frac{7}{8}=\frac{7}{8}\div\frac{5}{3}$? అనేది సమానమగునా? మీరు ఏ విధంగా న్యాయపరుస్తారు?

1.5.3 $\mathbb{Q}$ అనే అకరణీయసంఖ్యల సేకరణ యొక్క సహచర ధర్మము

i) సంకలన సహచరధర్మము

a, ***b***, మరియు ***c*** లు ఏదేని మూడు అకరణీయసంఖ్యలకు, $a+(b+c)=(a+b)+c$

ii) గుణకార సహచరధర్మము

a, ***b***, మరియు ***c*** లు ఏదేని మూడు అకరణీయసంఖ్యలకు, $a(bc)=(ab)c$

వివరణ

a,b,c లో $a=\frac{-1}{2}$, $b=\frac{3}{5}$ మరియు $c=\frac{-7}{10}$ అను మూడు అకరణీయ సంఖ్యలను తీసుకొనుము.

ఇక్కడ, $a+b=\frac{-1}{2}+\frac{3}{5}=\frac{-5}{10}+\frac{6}{10}$ (ఒకే హారము గల సమాన అకరణీయ సంఖ్య)

$$a+b=\frac{-5+6}{10}=\frac{1}{10}$$

$$(a+b)+c=\frac{1}{10}+\left(\frac{-7}{10}\right)=\frac{1-7}{10}=\frac{-6}{10}=\frac{-3}{5} \quad ...(1)$$

మరియు, $$b+c=\frac{3}{5}+\frac{-7}{10}=\frac{6}{10}+\frac{-7}{10}=\frac{6-7}{10}=\frac{-1}{10}$$

$$a+(b+c)=\frac{-1}{2}+\frac{-1}{10}=\frac{-5}{10}+\frac{-1}{10}=\frac{-5-1}{10}=\frac{-6}{10}=\frac{-3}{5} \quad ...(2)$$

(1) మరియు (2)ల నుండి $(a+b)+c=a+(b+c)$ అనేది అకరణీయ సంఖ్యలకు సత్యమగును.

ఇక్కడ, $$a\times b=\frac{-1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{-1\times3}{2\times5}=\frac{-3}{10}$$

$$(a\times b)\times c=\frac{-3}{10}\times\frac{-7}{10}=\frac{-3\times-7}{10\times10}=\frac{21}{100} \quad ...(3)$$

మరియు, $$b\times c=\frac{3}{5}\times\frac{-7}{10}=\frac{3\times-7}{5\times10}=\frac{-21}{50}$$

$$a\times(b\times c)=\frac{-1}{2}\times\frac{-21}{50}=\frac{-1\times-21}{2\times50}=\frac{21}{100} \quad ...(4)$$

(3) మరియు (4)ల నుండి

$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$ అనునది అకరణీయ సంఖ్యలకు సత్యమగును. కావున అకరణీయసంఖ్యలకు, సంకలనము మరియు గుణకారము దృష్ట్యా సహచర ధర్మము పాటించును.

ప్రయత్నించుము

అకరణీయ సంఖ్యలకు తీసివేత మరియు భాగహారము దృష్ట్యా సహచర ధర్మము వర్తించునా? అని సరిచూడుము.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 22 31-07-2020 12:40:01

1.5.4 $\mathbb{Q}$ అనే అకరణీయసంఖ్యల సేకరణ యొక్క తత్సమ ధర్మము

i) సంకలన తత్సమ ధర్మము

ఏదేని అకరణీయసంఖ్య a కు $0 + a = a = 0 + a$. అగునట్లు 0 అను ఒక ఏకైక అకరణీయసంఖ్య ఉంటుంది.

ii) గుణకార తత్సమ ధర్మము

ఏదేని అకరణీయసంఖ్య a కు $1 \times a = a = a \times 1$ అగునట్లు 1 అను ఒక ఏకైక అకరణీయసంఖ్య ఉంటుంది.

వివరణ

$a = \frac{3}{-7}$ ను తీసుకొనుము. ఇక్కడ $\frac{-3}{7} + 0 = \frac{-3}{7} = 0 + \frac{-3}{7}$ ఎందుకు?

కావున 0 అనేది $\frac{-3}{7}$ యొక్క సంకలన తత్సమమగును.

మరియు, $\frac{-3}{7} \times 1 = \frac{-3}{7} = 1 \times \frac{-3}{7}$ (ఎందుకు?)

1 అనేది $\frac{-3}{7}$ యొక్క గుణకార తత్సమమగును.

1.5.5 $\mathbb{Q}$ అనే అకరణీయసంఖ్యల సేకరణ యొక్క విలోమ ధర్మము

i) సంకలనవిలోమ ధర్మము

ఏదేని ఒక అకరణియసంఖ్య a కు $a + (-a) = (-a) + a = 0$ అగునట్లు $-a$ అను ఒక ఏకైక అకరణీయసంఖ్య ఉంటుంది. ఇక్కడ, 0 సంకలన తత్సమము.

ii) గుణకారవిలోమ ధర్మము

ఏదేని ఒక అకరణియసంఖ్య b కు $b \times \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \times b = 1$ అగునట్లు $\frac{1}{b}$ అను ఒక ఏకైక అకరణీయసంఖ్య ఉంటుంది. ఇక్కడ, 1 గుణకార తత్సమము.

వివరణ

$a = \frac{-11}{23}$ తీసుకొనుము, $-a = -\left(\frac{-11}{23}\right) = \frac{11}{23}$

ఇచ్చుట, $a + (-a) = \frac{-11}{23} + \frac{11}{23} = \frac{-11+11}{23} = \frac{0}{23} = 0$

మరియు, $(-a) + a = \frac{11}{23} + \frac{-11}{23} = \frac{11-11}{23} = \frac{0}{23} = 0$

$\therefore a + (-a) = (-a) + a = 0$ అనేది సత్యమగును.

మరియు $b = \frac{-17}{29}$, $\frac{1}{b} = \frac{29}{-17} = \frac{-29}{17}$ తీసుకొనుము.

$b \times \frac{1}{b} = \frac{-17}{29} \times \frac{-29}{17} = 1$ మరియు, $\frac{1}{b} \times b = \frac{-29}{17} \times \frac{-17}{29} = 1$

$\therefore b \times \frac{1}{b} = \frac{1}{b} \times b = 1$ అనేది సత్యమగును.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 23 31-07-2020 12:40:04

1.5.6 $\mathbb{Q}$ అనే అకరణీయసంఖ్యల సేకరణ యొక్క విభాగ ధర్మము

అకరణీయసంఖ్యలు గుణకారము సంకలనముపై విభాగము అగును **a**, **b** మరియు **c**, అను ఏదేని మూడు అకరణీయసంఖ్యలకు విభాగధర్మము $a\times\left(b+c\right)=\left(a\times b\right)+\left(a\times c\right)$.

వివరణ

a,b,c, $a=\frac{-7}{9}$, $b=\frac{11}{18}$ మరియు $c=\frac{-14}{27}$ అనే మూడు అకరణీయ సంఖ్యలను తీసుకొనుము.

$$b+c \;=\; b+c=\frac{11}{18}+\frac{-14}{27}=\frac{33}{54}+\frac{-28}{54}=\frac{33-28}{54}=\frac{5}{54}$$

(ఒకే హారము గల సమాన అకరణీయ సంఖ్యలు)

$$\therefore\; a\times(b+c) \;=\; \frac{-7}{9}\times\frac{5}{54}=\frac{-7\times 5}{9\times 54}=\frac{-35}{486} \qquad ---(1)$$

మరియు, $a\times b \;=\; \frac{-7}{9}\times\frac{11}{18}=\frac{-7\times 11}{9\times 18}=\frac{-77}{9\times 9\times 2}$

$$a\times c \;=\; \frac{-7}{9}\times\frac{-14}{27}=\frac{7\times 14}{9\times 9\times 3}=\frac{98}{9\times 9\times 3}$$

$$\therefore\; (a\times b)+(a\times c) \;=\; \frac{-77}{9\times 9\times 2}+\frac{98}{9\times 9\times 3}$$

$$=\frac{-77\times 3+98\times 2}{9\times 9\times 2\times 3}=\frac{-231+196}{486}=\frac{-35}{486} \qquad ---(2)$$

(1) మరియు (2) ల నుండి $a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$ అనేది సత్యమగును.

కావున $\mathbb{Q}$ అనే అకరణీయ సంఖ్య సేకరణకు, సంకలనము దృష్ట్యా గుణకార విభాగ ధర్మమును తృప్తిపరచును.

అభ్యాసము 1.3

1. $\frac{-5}{7}$ మరియు $\frac{8}{9}$. అకరణీయసంఖ్యలకు సంకలన మరియు గుణకార సంవృత ధర్మములను సరిచూడుము.
2. $\frac{-10}{11}$ మరియు $\frac{-8}{33}$ అకరణీయసంఖ్యలకు సంకలన మరియు గుణకార స్థిత్యంతర ధర్మములను సరిచూడుము.
3. $\frac{-7}{9},\frac{5}{6}$ మరియు $\frac{-4}{3}$ అకరణీయసంఖ్యలకు సంకలన మరియు గుణకార సహచర ధర్మములను సరిచూడుము.
4. విభాగన్యాయము $a\times\left(b+c\right)=\left(a\times b\right)+\left(a+c\right)$ ను $a=\frac{-1}{2}$, $b=\frac{2}{3}$ మరియు $c=\frac{-5}{6}$ అకరణీయసంఖ్యలకు సరిచూడుము.
5. $\frac{15}{19}$ మరియు $\frac{-18}{25}$ అకరణీయసంఖ్యలకు సంకలన మరియు గుణకార తత్సమ ధర్మములను సరిచూడుము.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 24 31-07-2020 12:40:08

6. $\frac{-7}{17}$ మరియు $\frac{17}{27}$ అకరణీయసంఖ్యలకు సంకలన మరియు గుణకార విలోమ ధర్మములను సరిచూడుము.

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

7. ఈ క్రింది వానిలో ఏ సంఖ్య వలన అకరణీయసంఖ్యల భాగహార సంవృతధర్మము నిజము కాదు.

(A) 1 (B) –1 (C) 0 (D) $\frac{1}{2}$

8. అకరణీయసంఖ్యల వ్యవకలన ధర్మము $\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{6}\right)\neq\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right)-\frac{5}{6}$ ________ తృప్తిచెందదని వివరించును.

(A) స్థిత్యంతర (B) సంవృత (C) విభాగ (D) సహచర

9. క్రింది వాటిలో ఏది సంకలనవిలోమ ధర్మమును వివరించును.

(A) $\frac{1}{8}-\frac{1}{8}=0$ (B) $\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{8}+0=\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{8}-0=\frac{1}{8}$

10. $\frac{3}{4}\times\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}$ అనునది గుణకారము ________ పై విభాగమగునని వివరించును.

(A) సంకలనము (B) వ్యవకలనము (C) గుణకారము (D) భాగహారము

మీకు తెలుసా?

ఒకే అకరణీయ సంఖ్యకు వేర్వేరు ప్రాథమిక పరిక్రియలు చేసిన సాధారణంగా వేర్వేరు జవాబులను పొందుతాము. కాని క్రింద ఇవ్వబడిన అకరణీయ సంఖ్యల లెక్కలు కొన్ని ఆశ్చర్యకరమైన మినహాయింపులు అగును.

(i) $\frac{13}{4}+\frac{13}{9}=\frac{13}{4}\times\frac{13}{9}$ (ii) $\frac{169}{30}+\frac{13}{15}=\frac{169}{30}\div\frac{13}{15}$

ఆశ్చర్యంగా కలదా! ఈ విధమైన ఆశ్చర్యకరమైన కొన్ని ఉదాహరణలు నీవు కొన్నింటిని ప్రయత్నించుము.

ఆలోచించుము

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}=\frac{4}{5}$$

తర్క రీతిలో ఆలోచించి, పైన ఇవ్వబడిన అమరికలో మొదటి 7 సంఖ్యల మొత్తమును కనుగొనుము.

1.6 వర్గసంఖ్యల పరిచయం

1	*1 2* *3 4*	*1 2 3* *4 5 6* *7 8 9*
ఇది 1 ప్రమాణం గల ఒక చతురస్ర భుజము. ఇక్కడ 1 వర్గం చేయబడినది. దీనిని 1^2 గా వ్రాయవచ్చు. $1^2 = 1 \times 1 = 1$	ఇది 2 ప్రమాణం గల ఒక చతురస్ర భుజము ఇక్కడ 2 వర్గం చేయబడినది. దీనిని 2^2 గా వ్రాయవచ్చు. $2^2 = 2 \times 2 = 4$	ఇది 3 ప్రమాణం గల ఒక చతురస్ర భుజము ఇక్కడ 3 వర్గం చేయబడినది. దీనిని 3^2 గా వ్రాయవచ్చు. $3^2 = 3 \times 3 = 9$

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 25 31-07-2020 12:40:10

దీనిని అలాగే కొనసాగిస్తే:

$4^2 = 16$

దీనిని 4 యొక్క వర్గం 16 అని పిలుస్తారు.

పైనున్న 2ను వర్గం అని అంటారు. ఇది 4ను రెండుసార్లు లబ్దంచేయవలెనని తెలుపుతుంది. $(4 \times 4 = 4^2 = 16)$.

1, 4, 9, 16, ... సంఖ్యలను వర్గసంఖ్యలు (ఖచ్చిత వర్గసంఖ్యలు) అని అంటారు. ఒక్కొక్కటి అదే సంఖ్యను, రెండుసార్లు గునించగా ఏర్పడినది.

n అనే సహజసంఖ్యను వర్గసంఖ్యగా పిలువవలెనన్నా మనము m అనే మరొక సహజసంఖ్యను కనుగొనవలెను. $n = m^2$.

49 వర్గసంఖ్యనా? అవును, ఎందుకంటే దీనిని 7^2 గా వ్రాయవచ్చు. 50 వర్గసంఖ్యనా?

క్రింది పట్టిక 20 వరకు గల వర్గసంఖ్యలను చూపును.

సంఖ్య	దీని వర్గము	సంఖ్య	దీని వర్గము	సంఖ్య	దీని వర్గము	సంఖ్య	దీని వర్గము
1	1	6	36	11	121	16	256
2	4	7	49	12	144	17	289
3	9	8	64	13	169	18	324
4	16	9	81	14	196	19	361
5	25	10	100	15	225	20	400

పై పట్టికను 50 వరకు గల వర్గ సంఖ్యలను విస్తరించి వ్రాయుటకు ప్రయత్నించుము.

పై పట్టికలోని వర్గసంఖ్యలను కింద ఇవ్వబడిన ధర్మముల ద్వారా సులభముగా సరిచూడవచ్చును.

- వర్గసంఖ్యలు 0, 1, 4, 5, 6 లేక 9 సంఖ్యలతో మాత్రమే అంతమగును.
- ఒక సంఖ్య 1 లేక 9తో అంతమయిన, దాని వర్గము 1తో అంతమగును.
- ఒక సంఖ్య 2 లేక 8తో అంతమయిన, దాని వర్గము 4తో అంతమగును.
- ఒక సంఖ్య 3 లేక 7తో అంతమయిన, దాని వర్గము 9తో అంతమగును.
- ఒక సంఖ్య 4 లేక 6తో అంతమయిన, దాని వర్గము 6తో అంతమగును.
- ఒక సంఖ్య 5 లేక 0తో అంతమయిన, దాని వర్గము కూడా 5లేక 0తో అంతమగును.
- బేసి సంఖ్యల వర్గము ఎల్లప్పుడూ బేసి సంఖ్య మరియు సరిసంఖ్యల వర్గము ఎల్లప్పుడూ సరిసంఖ్య అవుతుంది.
- 2,3,7 మరియు 8తో అంతమయ్యే సంఖ్యలు ఖచ్చిత వర్గములుకావు.

ఆలోచించుము

1. ప్రధానసంఖ్యల వర్గము ప్రధానసంఖ్యేనా?
2. రెండు ఖచ్చిత వర్గసంఖ్యల మొత్తము ఎల్లప్పుడూ ఖచ్చిత వర్గసంఖ్యేనా? అయితే వాటి వ్యత్యాసము మరియు వాటి లబ్దములు ఏమగును?

ప్రయత్నించుము

1. 256, 576, 960, 1025, 4096 సంఖ్యలలో ఖచ్చిత వర్గములు.
   (సూచన: ఇదివరకే పైనచూపిన వర్గపట్టికను కొనసాగించుము)
2. 82, 113, 1972, 2057, 8888, 24353 అనేవి ఖచ్చిత వర్గములు కావు అని ఒకతను చూపిన వెంటనే చెప్పెను. ఎందుకు? వివరించుము.

8th Maths - Copy.indd 26 04-02-2023 18:13:38

1.6.1 వర్గసంఖ్యల కొన్ని ప్రత్యేక ధర్మములు

(i) ఒక సహజసంఖ్య యొక్క వర్గము (1 తప్ప) అనునది 3యొక్క గుణిజము లేదా 3 యొక్క గుణిజముకన్న 1 ఎక్కువ.

(ii) ఒక సహజసంఖ్య యొక్క వర్గము (1 తప్ప) అనునది 4యొక్క గుణిజము లేదా 4 యొక్క గుణిజముకన్న 1 ఎక్కువ.

(iii) ఒక శుద్ధవర్గమును 3 చే భాగించినప్పుడు శేషము 0 లేదా 1 అగును కాని ఎప్పుడూ 2 కాదు.

(iv) ఒక శుద్ధవర్గమును 4 చే భాగించినప్పుడు శేషము 0 లేదా 1 అగును కాని ఎప్పుడూ 2 మరియు 3 కాదు.

(v) ఒక శుద్ధవర్గమును 8చే భాగించినప్పుడు శేషము 0 లేదా 1 లేదా 4 అగును కాని ఎప్పుడూ 2,3,5,6, లేదా 7 కాదు.

మీకు తెలుసా?

ఖచ్చిత సంఖ్యలయిన 6, 28, 496, 8128మొదలగునవి ఖచ్చితవర్గ సంఖ్యలు కావు.

సూచన

ఖచ్చిత వర్గసంఖ్య 0 తో అంతమయిన, ఆ సున్నల సంఖ్య ఎల్లప్పుడూ సరిసంఖ్యగానే ఉండును. మనము ఈ విషయాన్ని కింది పట్టిక ద్వారా చూడవచ్చునుయ:

సంఖ్య	10	20	30	40	...	90	100	110	...	2000	...
దాని వర్గము	100	400	900	1600	...	8100	10000	12100	...	4000000	...

ఆలోచించుము

ఒక వాదనను తీసుకొందాము. " n మరియు $(n+1)$ వరుస వర్గసంఖ్యల మధ్య $2n$ వర్గముకాని సంఖ్యలు ఉంటాయి. ఇది సత్యమగునా? 2500 మరియు 2601 మధ్య ఎన్ని వర్గముకాని సంఖ్యలు ఉంటాయి. వాదనను సరిచూడుము.

1.7 వర్గమూలము

ఒక సంఖ్యను వర్గము చేయడమనేది కూడిక, తీసివేత, గుణకారము లాంటి ఒక గణిత ప్రక్రియ. చాలా గణిత పరిక్రియలకు విలోమ (అనగా వ్యతిరేకము) పరిక్రియలు ఉంటుంది. ఉదాహరణకు తీసివేతకు విలోమ పరిక్రియ కూడిక, గుణకారమునకు విలోమ పరిక్రియ భాగహారము మొదలగునవి. అదేవిధంగా వర్గమునకు కూడా ఒక విలోమ పరిక్రియ కలదు, అదే వర్గమూలము.

n యొక్క వర్గమూలమును $\sqrt{n}$ లేదా $n^{\frac{1}{2}}$ గా వ్రాయవచ్చు. ఉదాహరణకు $\sqrt{81}$ విలువ 9, ఎందుకనగా $9 \times 9 = 81$. $324 = 18$ అని మనకు తెలుసు. దీనిని మనము $\sqrt{324}$ విలువ 18 అని చెప్పవచ్చు. $11^2 = 121$, అయిన $\sqrt{121}$ విలువ? $529 = 23^2$, అయిన 529 యొక్క వర్గమూలము ఎంత?

ప్రక్కపటములో 1 నుండి 100 వరకు గల ఖచ్చిత వర్గముల వర్గమూలములు కలవు.

8th Maths - Copy.indd 27 04-02-2023 18:13:38

వర్గమూలము	కారణము
$\sqrt{1} = 1$	$1^2 = 1$
$\sqrt{4} = 2$	$2^2 = 4$
$\sqrt{9} = 3$	$3^2 = 9$
$\sqrt{16} = 4$	$4^2 = 16$
$\sqrt{25} = 5$	$5^2 = 25$
$\sqrt{36} = 6$	$6^2 = 36$
$\sqrt{49} = 7$	$7^2 = 49$
$\sqrt{64} = 8$	$8^2 = 64$
$\sqrt{81} = 9$	$9^2 = 81$
$\sqrt{100} = 10$	$10^2 = 100$

$1^2 = 1$ అని మనకు తెలుసు కావున 1 యొక్క వర్గమూలం 1. $(-1)^2$ విలువ కూడా 1 కావున 1 యొక్క వర్గమూలము (–1) కూడా.

$2^2 = 4$ కావున 4 యొక్క వర్గమూలము 2 $(-2)^2$ కూడా 4 కావున 4 యొక్క వర్గమూలము –2 కూడా అవుతుంది.

అదేవిధముగా,

$3^2 = 9$ మరియు 9 యొక్క వర్గమూలము $(-3)^2$ విలువ కూడా $= 9$.

కావున 9 యొక్క వర్గమూలము –3 కూడా అవుతుంది.

పై ఉదాహరణముల నుండి ఖచ్చిత వర్గసంఖ్యకు రెండు వర్గమూలాలు ఉంటాయని తెలుపుతున్నది. సమస్యలు సాధించేటప్పుడు ధనాత్మక వర్గమూలమును మాత్రమే తీసుకొనవలెను. ధనాత్మక వర్గమూలమును ఎల్లప్పుడూ $\sqrt{\ }$ అనే గుర్తుతో సూచిస్తాము. కావున $\sqrt{4}$ విలువ 2 (కాని –2 కాదు), $\sqrt{9}$ విలువ 3 (కాని –3 కాదు). మనము ఇక్కడ మరలా గుర్తుచేసుకోవలసినది ఇది విశ్వవ్యాప్తంగా అంగీకరించబడినది.

1.7.1 ప్రధాన కారణాంక పద్ధతి ద్వారా వర్గమూలమును కనుగొనుట

క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడిన సంఖ్యల ప్రధాన కారణాంకములు మరియు వాటి వర్గములను గమనించుము.

సంఖ్యలు	సంఖ్యల ప్రధాన కారణాంకములు	ఇవ్వబడిన సంఖ్యల వర్గములు	ప్రధాన కారణాంకముల యొక్క వర్గములు
6	$6 = 2 \times 3$	$6^2 = 36$	$36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 = (2 \times 3)^2$
8	$8 = 2 \times 2 \times 2$	$8^2 = 64$	$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = (2 \times 2 \times 2)^2$
12	$12 = 2 \times 2 \times 3$	$12^2 = 144$	$44 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = (2 \times 2 \times 3)^2$
15	$15 = 3 \times 5$	$15^2 = 225$	$225 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 = (3 \times 5)^2$

6 కు గల ప్రధాన కారణాంకములను గమనించుము. 2 ఎన్నిసార్లు వస్తున్నది.

ఇప్పుడు 6 వర్గము 36 యొక్క ప్రధాన కారణాంకములను గమనించుము.

ఇక్కడ 2 ఎన్నిసార్లు వస్తున్నది? 8, 12, మరియు 15 లకు కూడా ఇదే పద్ధతిని కొనసాగించండి. (మీరు సొంతముగా ఒక సంఖ్యను దాని వర్గమును ఎంపిక చేసుకొనము)

వర్గములో ప్రధాన కారణాంకములు వచ్చిన సంఖ్య } = { **సంఖ్య యొక్క ప్రధానకారణాంకములో సంభవించే రెట్టింపు సంఖ్య**

మనము ఇదే పద్ధతిని వర్గసంఖ్యలకు వర్గమూలము కనుగొనుటకు ఉపయోగించవచ్చు. మొదట ఇచ్చిన సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకములుగా విడగొట్టవలెను. ఒకేరకమైన కారణాంకములు జతలుగా చేసి దాని నుండి ఒక సంఖ్యను తీసుకొన్న సంఖ్య యొక్క వర్గమూలము వస్తుంది.

ఉదాహరణ 1.22

324 యొక్క వర్గమూలమును ప్రధానకారణాంక పద్ధతి ద్వారా కనుగొనుము.

8th Maths - Copy.indd 28 04-02-2023 18:13:39

సాధన:

మొదట ఇచ్చిన సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకములుగా వ్రాయవలెను. ఒకే విధమైన కారణాంకముల జతను సమూహపరచి వాటి నుండి ఒకదానిని తీసుకొని వర్గమూలమును కనుగొనుము.

ఇప్పుడు, $324 = 2\times2\times3\times3\times3\times3$

$= 2^2\times3^2\times3^2$

$= (2\times3\times3)^2$

$\therefore \sqrt{324} = \sqrt{(2\times3\times3)^2}$

$= 2\times3\times3$

$\therefore \sqrt{324} = 18$

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

ఇప్పుడు, $324 = 2\times2\times3\times3\times3\times3$

$= 2^2\times3^2\times3^2$

$= (2\times3\times3)^2$

$\therefore \sqrt{324} = \sqrt{(2\times3\times3)^2}$

$= 2\times3\times3$

$\therefore \sqrt{324} = 18$

2	324
2	162
3	81
3	27
3	9
3	3
	1

ఉదాహరణ 1.23

250 కు ఏ కనిష్ట సంఖ్యను గుణించిన లేదా భాగించిన ఖచ్చిత వర్గసంఖ్య వచ్చును మరియు దాని వర్గమూలమును కనుగొనుము.

సాధన: 250 ను $5\times5\times5\times2$ గా వ్రాయవచ్చును. $= 5^2\times5\times2$

ఇక్కడ 5 మరియు 2 ప్రధాన కారణాంకములకు జతలేదు.

కావున, 250ను 10తో భాగించవలెను. లేదా 10తో గుణించవలెను.

5	250
5	50
5	10
2	2
	1

(i) 250ను 10 తో గుణించిన 2500 వచ్చును. $5^2\times5\times2\times5\times2$ మరియు 2500 లకు వర్గమూలము $5\times5\times2 = 50$.

(ii) 250ను 10తో భాగించిన 25 వచ్చును. 25కు వర్గమూలము $\sqrt{25} = \sqrt{5^2} = 5$.

ఉదాహరణ 1.24

108 ఖచ్చిత వర్గసంఖ్యేనా?

సాధన:

ఇక్కడ, $108 = 2\times2\times3\times3\times3$

$= 2^2\times3^2\times3$

ఇక్కడ రెండవ ప్రధాన కారణాంకము 3కు జతలేదు. కావున 108 ఖచ్చిత వర్గసంఖ్య కాదు.

2	108
2	54
3	27
3	9
3	3
	1

ఆలోచించుము

మనము ఖచ్చిత వర్గసంఖ్యను పొందుటకు 108 కు గుణించగల లేదా భాగించగల అతి చిన్న కారణాంకమును కనుగొనుటకు ఏమి చేయవలెను?

1.7.2 దీర్ఘ భాగాహార పద్ధతి ద్వారా వర్గమూలము కనుగొనుట

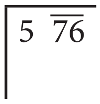
పెద్ద సంఖ్యలకు వర్గమూలమును కారణాంక పద్ధతి ద్వారా కనుగొనడం చాలా కష్టతరం మరియు పెద్దది. ఇలాంటి సందర్భములో దీర్ఘభాగహార పద్ధతి ద్వారా వర్గమూలము కనుగొనవచ్చును. ఈ పద్ధతిలో వర్గమూలము కనుగొనుటకు కింది వివరణలు మనకు సహాయపడును.

8th Maths - Copy.indd 29 04-02-2023 18:13:39

వివరణ 1

576 యొక్క వర్గమూలము దీర్ఘభాగహార పద్ధతిలో కనుగొనుము.

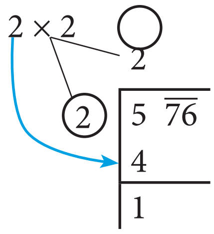
సోపానము 1:



ఇచ్చిన సంఖ్య యొక్క అంకెలను ఒకట్ల స్థానం మొదలుకొని రెండేసి సంఖ్యల (జతలుగా) సమూహములుగా విభజించుము. ప్రతి జతను మరియు మిగిలిన ఏదైనా అంకెము అవధి అంటారు. ఇచ్చిన సంఖ్యకు కుడి వైపు నుండి ప్రతి జతపై గీతను (బార్) గీయుము. ఇచ్చిన సంఖ్యలో బేసి సంఖ్యలలో అంకెలు ఉన్నచో చివరి ఎడమ అంకెపై గీత గీయుము.

కావున, ఇక్కడ **5 $\overline{76}$** లో 5కు గీత లేదు.

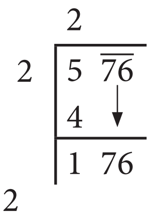
సోపానము 2:



మొదటి జత లేదా అంకెను (ఎడమ నుండి కుడికి) సమానమైన లేదా తక్కువైన పరిపూర్ణ వర్గసంఖ్యను కనుగొనండి. ఈ సంఖ్యను విభాజకంగా మరియు భాగఫలముగా తీసుకొనండి. ఇక్కడ చివరి సంఖ్య 5 కావున 5 కన్నా తక్కువైన లేదా సమానమైన వర్గసంఖ్య 2 తీసుకొనిన, ఇదే ఇక్కడ విభాజకము మరియు భాగఫలము అగును.

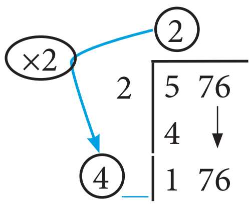
సోపానము 3:

76ను క్రిందకు తీసుకొనివచ్చి శేషము '1' ప్రక్కన వ్రాయవలెను. ఇప్పుడు క్రొత్త భాజ్యము 176 అవుతుంది.



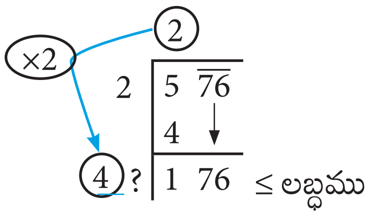
సోపానము 4:

క్రొత్త భాజకము కనుగొనుటకు, ముందు భాగఫలము (2)ను ( )తో గుణించవలెను మరియు దాని ప్రక్కన ఖాళీ స్థలము వదిలి వ్రాయవలెను.

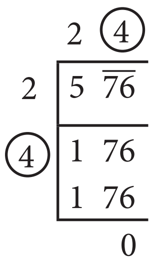


సోపానము 5:

క్రొత్త విభాజకము 4 తరువాత అంకెను సరియైన అంకె 4ను ఎంపిక చేసిన అది క్రొత్త భాగఫలము 176 కన్నా తక్కువ లేదా సమానంగా ఉండవలెను.



సోపానము 6:

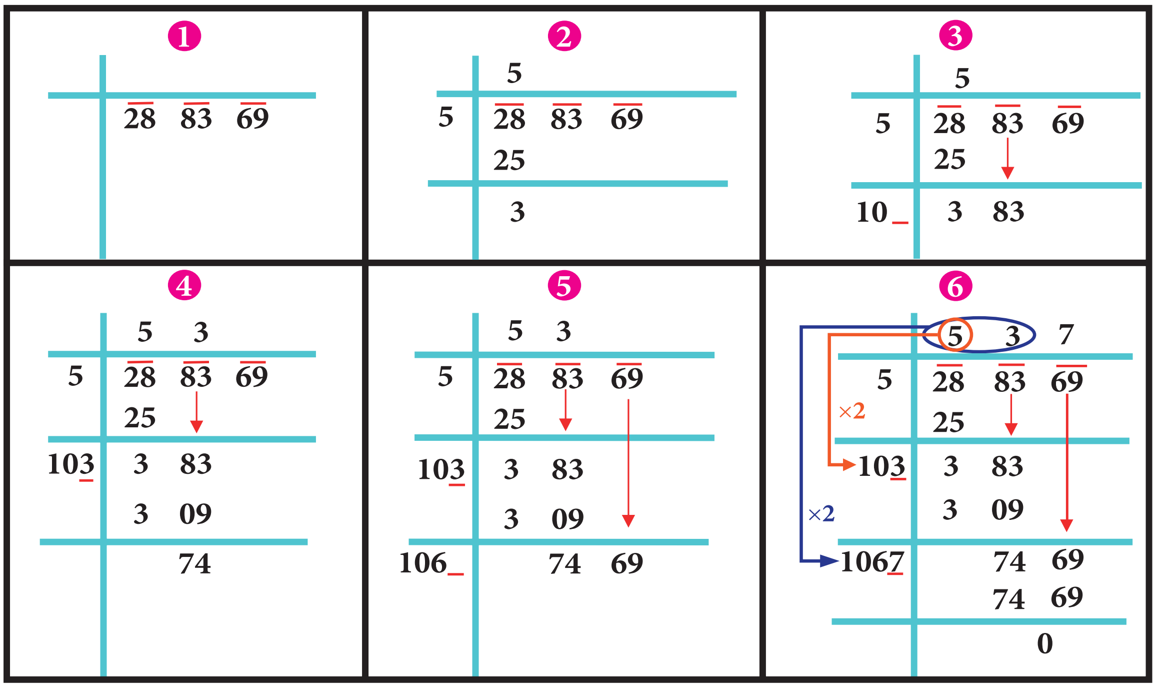


స్పష్టంగా, ఇక్కడ కావలసిన అంకె 4 లేదా 6 (ఎందుకు?) గుణకారం చేసిన, $46 \times 6 = 276$ $44 \times 4 = 176$ మరియు కావున, 4 ను ఖాళీ ప్రదేశంలో ఉంచి, 176 క్రింద 176 వ్రాసి రెండింటిని తీసివేసిన 0 వస్తుంది. $\therefore \sqrt{576} = 24$

వివరణ 2

క్రింది ఉదాహరణలో 288369 యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుటకు దశలవారీగా గల బొమ్మల నుండి ఒకదాని తరువాత ఒకటి వచ్చే బొమ్మలు ఏమి వివరిస్తున్నదని తెలుపుము?

8th Maths - Copy.indd 30 04-02-2023 18:13:39



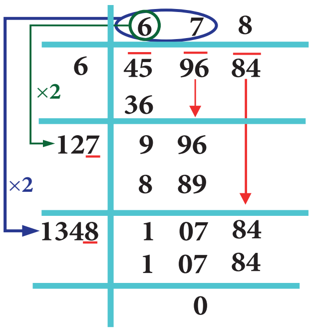
మీరు $\sqrt{288369} = 537$ అని కనుగొనుము.

ఉదాహరణ 1.25

459684 యొక్క వర్గమూలంను దీర్ఘభాగహారపద్ధతి ద్వారా కనుగొనుము.

సాధన:

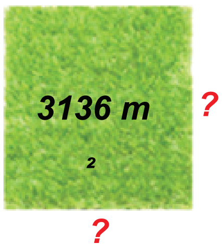
క్రిందివిధంగా దీర్ఘభాగహారపద్ధతి ద్వారా 459684 యొక్క వర్గమూలంను మనము కనుగొనవచ్చును.



$\therefore \sqrt{459684} = 678$

ఉదాహరణ 1.26

ఒక చతురస్రాకార పొలము వైశాల్యము 3136 మీ^{2} దాని చుట్టుకొలతను కనుగొనుము.

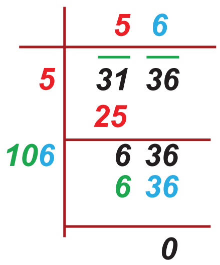


సాధన:

ఇవ్వబడిన చతురస్రాకార పొలము వైశాల్యము = 3136 మీ^{2}.

∴ చతురస్రార పొలము భుజము = $\sqrt{3136}$ = 56 మీ

∴ చతురస్రాకార పొలము చుట్టుకొలత = 4 × భుజము
= 4 × 56
= 224 మీ



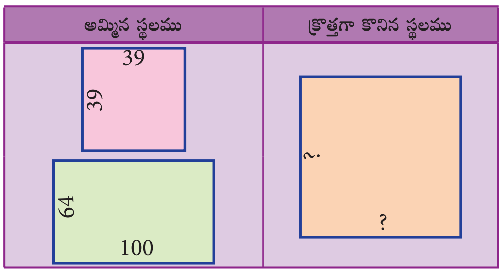
8th Maths - Copy.indd 31 04-02-2023 18:13:40

ఉదాహరణ 1.27

ఒక రియల్ ఎస్టేట్ వ్యాపారి వద్ద రెండు స్థలములు కలవు. ఒకటి భుజము 39 మీ కలిగిన చతురస్రాకారంలోను, మరొకటి పొడవు 100 మీ మరియు వెడల్పు 64 మీ కొలతలు గల దీర్ఘచతురస్రాకారంలో గలదు. అతడు ఈ రెండు స్థలములను అమ్మి అంతే వైశాల్యము గల చతురస్రాకార స్థలమును కొనెను. క్రొత్తగా కొనిన చతురస్రాకార స్థలము యొక్క భుజము పొడవును కనుగొనుము.

సాధన:

లావాదేవీలను ఈ క్రింది విధముగా వివరించవచ్చును.



కొనిన చతురస్రాకార స్థల వైశాల్యము = అమ్మిన చతురస్రాకార స్థల వైశాల్యము + అమ్మిన దీర్ఘచతురస్రాకార స్థల వైశాల్యము

$= 39 \times 39 + 100 \times 64$

$= 1521 + 6400$

$= 7921$ మీ^{2}

క్రొత్తగా కొనిన చతురస్రాకార స్థల భుజము పొడవు = $\sqrt{7921} = 89$ మీ.

	8 9
8	$\overline{79}\ \overline{21}$
	64
169	15 21
	15 21
	0

ప్రయత్నించుము

దీర్ఘభాగహార పద్ధతి ద్వారా వర్గమూలమును కనుగొనుము. 1. 400 2. 1764 3. 9801

సాధన:

1.7.3 ఖచ్చిత వర్గసంఖ్య యొక్క వర్గమూలములో గల అంకెల సంఖ్య

భాగహార పద్ధతిలో వర్గమూలము కనుగొనుటకు సంఖ్యపై గీత (బార్) ఉపయోగిస్తాము. ఈ గీతలు ఖచ్చిత వర్గసంఖ్య యొక్క వర్గమూలము కనుగొనుటకు ఉపయోగిస్తాము. క్రింది ఉదాహరణలను గమనించండి. (అంకెలపై గీత వేసి భాగహార పద్ధతిలో వర్గమూలమును కనుగొనుట).

సంఖ్యల వర్గమూలము	గీతల సంఖ్య	వర్గమూలములో గల అంకెల సంఖ్య	సంఖ్యల యొక్క వర్గమూలము	గీతల సంఖ్య	వర్గమూలములో గల అంకెల సంఖ్య
$\sqrt{169} = 13$	2	2	$\sqrt{4356} = 66$	2	2
$\sqrt{441} = 21$	2	2	$\sqrt{6084} = 78$	2	2
$\sqrt{12544} = 112$	3	3	$\sqrt{27225} = 165$	3	3

కావున వర్గమూలములో గీతల సంఖ్య, సంఖ్యలో గల అంకెలకు సమానమని నిర్ధారించవచ్చు.

ప్రయత్నించుము

వర్గమూలమును లెక్కించకుండ క్రింది సంఖ్యలకు వర్గమూలములోని అంకెల సంఖ్యను ఊహించి చెప్పుము. 1. 14400 2. 390625 3. 100000000

8th Maths - Copy.indd 32 04-02-2023 18:13:40

1.7.4 దశాంశ సంఖ్యల వర్గమూలములు

దశాంశ సంఖ్యలకు వర్గమూలము కనుగొనుటకు, క్రింది సోపానములను అనుసరించవలెను.

సోపానము 1:

దశాంశ భాగంలో అంకె యొక్క కుడి వైపు సున్నాను ఉంచడం ద్వారా కూడా దశాంశ స్థానాలను ఏర్పరచవచ్చు.

$\sqrt{42.25}$ కనుగొనుటకు

సోపానము 2:

దశాంశ సంఖ్యకు పూర్ణాంక భాగము మరియు దశాంశ భాగము ఉండును. పూర్ణాంక భాగములో, భాగహార పద్ధతిలో చర్చించిన విధముగానే బార్ గీయుము.

$\sqrt{\overline{42}.\overline{25}}$ బార్‌లను ఈ విధముగా గీస్తాము

సోపానము 3:

దశాంశ భాగములో మొదటి దశాంశ స్థానము మొదలుకొని ప్రతి అంకెల జత పై బార్ గీయుము.

సోపానము 4:

ఇప్పుడు, దీర్ఘ భాగహార పద్ధతిలో వర్గమూలము కనుగొనుము.

	6 5
6	$\overline{42}$ $\overline{25}$
	36
125	6 25
	6 25
	0

సోపానము 5:

పూర్ణాంక భాగము పూర్తి అయిన తరువాత వర్గమూలములో దశాంశ బిందువును ఉంచండి.

$$\sqrt{42.25} = 6.5$$

1.7.5 లబ్ద సంఖ్యలు మరియు భిన్న సంఖ్యల వర్గమూలము:

a మరియు b అనే ఏదైనా రెండు ధనాత్మక సంఖ్యలలో

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ మరియు (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$

ప్రయత్నించుము

క్రింది వాటికి వర్గమూలము కనుగొనుము

1. 5.4756 2. 19.36 3. 116.64

ఉదాహరణ 1.28

$\sqrt{256}$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన:

$$\sqrt{256} = \sqrt{16 \times 16} = \sqrt{16} \times \sqrt{16} = 4 \times 4 = 16. \text{(or)} \sqrt{256} = \sqrt{64 \times 4} = \sqrt{64} \times \sqrt{4} = 8 \times 2 = 16.$$

ఆలోచించుము

$\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ ను ఉపయోగించి క్రింది పట్టికను పూరించుము.

$\sqrt{36} = 6$	$\sqrt{9} \times \sqrt{4} = 3 \times 2 = 6$	$\sqrt{36} = \sqrt{9} \times \sqrt{4}$?	$\sqrt{81} = ?$	$\sqrt{9} \times \sqrt{9}$ = __ × __ = __	$\sqrt{81} = \sqrt{9} \times \sqrt{9}$?
$\sqrt{144} = ?$	$\sqrt{9} \times \sqrt{16}$ = __ × __ = __	$\sqrt{144} = \sqrt{9} \times \sqrt{16}$?	$\sqrt{144} = ?$	$\sqrt{36} \times \sqrt{4}$ = __ × __ = __	$\sqrt{144} = \sqrt{36} \times \sqrt{4}$?
$\sqrt{100} = ?$	$\sqrt{25} \times \sqrt{4}$ = __ × __ = __	$\sqrt{100} = \sqrt{25} \times \sqrt{4}$?	$\sqrt{1225} = ?$	$\sqrt{25} \times \sqrt{49}$ = __ × __ = __	$\sqrt{1225} = \sqrt{25} \times \sqrt{49}$?

కృత్యము

పైన పేర్కొన్న వర్గమూల సమస్య పట్టికను a మరియు b లు రెండు ఖచ్చిత వర్గసంఖ్యలయిన, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$ కు తయారుచేయుము.

పై విధానము నుండి మనము వర్గమూల సమస్యలను సులభముగా సాధించవచ్చును.

8th Maths - Copy.indd 33 04-02-2023 18:13:41

ఉదాహరణ 1.29

$\sqrt{42.25}$ విలువ కనుగొనుము.

సాధన:

$\sqrt{42.25}$ ను ఈ విధముగా వ్రాయవచ్చు $= \sqrt{\frac{4225}{100}} = \frac{\sqrt{4225}}{\sqrt{100}}$

పై విధముగా వ్రాయడం ద్వారా 4225 యొక్క వర్గమూలమును సులభముగా కనుగొనవచ్చును.

$\sqrt{4225} = 65$ మరియు కావున $\sqrt{42.25} = \sqrt{\frac{4225}{100}} = \frac{\sqrt{4225}}{\sqrt{100}} = \frac{65}{10} = 6.5$

దీర్ఘభాగహార పద్ధతి బదులు పై పద్ధతిలో కూడా దశాంశ సంఖ్యల వర్గమూలమును కనుగొనవచ్చు.

> **ప్రయత్నించుము**
>
> పై పద్ధతిని ఉపయోగించి 1.2321 మరియు 11.9025 లకు వర్గమూలము కనుగొనండి.

ఉదాహరణ 1.30

సూక్ష్మీకరించుము: (i) $\sqrt{12} \times \sqrt{3}$ (ii) $\sqrt{\frac{98}{162}}$

సాధన:

(i) $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ నియమాన్ని గుర్తుచేసుకొనుము.(ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$ నియమాన్ని గుర్తుచేసుకొనుము.

$\sqrt{12} \times \sqrt{3} = \sqrt{12 \times 3} = \sqrt{36} = \sqrt{6^2} = 6$

$\sqrt{\frac{98}{162}} = \sqrt{\frac{2 \times 49}{2 \times 81}} = \sqrt{\frac{49}{81}} = \sqrt{\frac{7^2}{9^2}} = \frac{7}{9}$

ఉదాహరణ 1.31

సూక్ష్మీకరించుము: (i) $\sqrt{2\frac{7}{9}}$ (ii) $\sqrt{1\frac{9}{16}}$

సాధన:

(i) $\sqrt{2\frac{7}{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{5^2}{3^2}} = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$ (ii) $\sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \sqrt{\frac{5^2}{4^2}} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

గమనిక: రెండవ సమస్యలో చూసిన వెంటనే $1\frac{3}{4}$ వర్గమూలము అని ఇవ్వడానికి ప్రయత్నించవచ్చు. కాని ఇది తప్పు. ఎందుకనగా మిశ్రమ భిన్నాన్ని అపక్రమ భిన్నంలోకి మార్చిన తరువాతనే ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$ అనే నియమాన్ని ఉపయోగించి వర్గమూలము కనుగొనవలెను.

1.7.6 వర్గమూలములను అంచనా వేయడం

$\sqrt{40}$, 6 మరియు 7 లను ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాయగలమా? ఇక్కడ $\sqrt{40}$ ఖచ్చిత వర్గసంఖ్య కాదు మరియు దాని వర్గమూలమును సులభముగా నిర్ణయించలేము. అందువలన $\sqrt{40}$ విలువను ఉజ్జాయింపుగా అంచనా వేయవచ్చు

40 కు దగ్గరగా గల వర్గసంఖ్యలు 36 మరియు 49 అని మనకు తెలుసు కావున $36 < 40 < 49$ దీనిని $6^2 < 40 < 7^2$. గా వ్రాయవచ్చు.

వర్గమూలముగా తీసుకొన్నప్పుడు దీనిని $6 < \sqrt{40} < 7$ గా వ్రాయవచ్చు.

> **ప్రయత్నించుము**
>
> (i) 4, $\sqrt{14}$, 5 మరియు (ii) 7, $\sqrt{65}$, 8 లను ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాయుము.

అభ్యాసము 1.4

1. **ఖాళీలను పూరించుము:**
   (i) 77యొక్క వర్గము నందు ఒకట్లస్థానములోని అంకె ___________.
   (ii) 24^2 మరియు 25^2 లమధ్యగల వర్గముకాని సంఖ్యల సంఖ్య ___________.
   (iii) 300 మరియు 500లమధ్యగల ఖచ్చితవర్గసంఖ్యల సంఖ్య ___________.
   (iv) 5 లేదా 6 అంకెలుగల ఒక సంఖ్యయొక్క వర్గమూలంలో ___________ అంకెలు ఉండును.
   (v) $\sqrt{180}$ యొక్క విలువ ___________ మరియు ___________ పూర్ణసంఖ్యల మధ్య ఉంటుంది.

2. **సత్యమా లేదా అసత్యమా తెలుపుము:**
   (i) వర్గసంఖ్య 6చే అంతమయిన దాని వర్గమూలం యొక్క ఒకట్లస్థానంలో 6 ఉంటుంది.
   (ii) ఒక వర్గసంఖ్య యొక్క చివర బేసిసంఖ్యలో సున్నలను కలిగిఉండదు.
   (iii) 91000 యొక్క వర్గములోగల సున్నల సంఖ్య 9.
   (iv) 75 యొక్క వర్గము 4925
   (v) 225 యొక్క వర్గమూలం 15.

3. క్రింది సంఖ్యల వర్గములను కనుగొనుము.
   (i) 17 (ii) 203 (iii) 1098

4. క్రింది వానిలో ఏవి ఖచ్చితవర్గసంఖ్యలగునా వానిని పరిక్షీంచుము.
   (i) 725 (ii) 190 (iii) 841 (iv) 1089

5. ప్రధానకారణాంక పద్ధతి ద్వారా వర్గమూలంను కనుగొనుము.
   (i) 144 (ii) 256 (iii) 784 (iv) 1156 (v) 4761 (vi) 9025

6. దీర్ఘభాగహారపద్ధతి ద్వారా వర్గమూలంను కనుగొనుము.
   (i) 1764 (ii) 6889 (iii) 11025 (iv) 17956 (v) 418609

7. క్రిందిచ్చిన వాటి వర్గమూలంయొక్క విలువలను, దానికి దగ్గరగాగల పూర్ణసంఖ్యకు అంచనావేయుము.
   (i) $\sqrt{440}$ (ii) $\sqrt{800}$ (iii) $\sqrt{1020}$

8. క్రిందివ్వబడిన దశాంశ సంఖ్యలకు మరియు భిన్నములకు వర్గమూలంను కనుగొనుము.
   (i) 2.89 (ii) 67.24 (iii) 2.0164 (iv) $\frac{144}{225}$ (v) $7\frac{18}{49}$

9. 6666 శుద్ధవర్గము కావడానికి దానినుంచి తీసివేయవలసిన(వ్యవకలనము చేయవలసిన) కనిష్టసంఖ్యను కనుగొనుము. మరియు దీని ఫలితముగా పొందు శుద్ధవర్గసంఖ్యయొక్క వర్గమూలంను కనుగొనుము.

10. 1800 శుద్ధవర్గము కావడానికి గుణించవలసిన కనిష్టసంఖ్యను కనుగొనుము. దీనిఫలితముగా లభించు శుద్ధవర్గముయొక్క వర్గమూలంను కనుగొనుము.

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

11. 43 యొక్క వర్గము _______ అంకెతో అంతమగును.
   (A) 9 (B) 6 (C) 4 (D) 3

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 35 31-07-2020 12:40:30

12. 24^2, 25^2 కావడానికి ________ ను కలుపవలెను.

(A) 4^2 (B) 5^2 (C) 6^2 (D) 7^2

13. $\sqrt{48}$ విలువ సుమారుగా ________

(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8

14. $\sqrt{128} - \sqrt{98} + \sqrt{18} =$ _______.

(A) $\sqrt{2}$ (B) $\sqrt{8}$ (C) $\sqrt{48}$ (D) $\sqrt{32}$

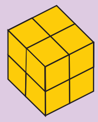
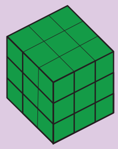
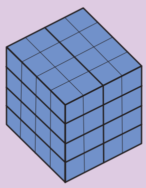
15. 123454321 యొక్క వర్గమూలములోని అంకెల సంఖ్య _______.

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

1.8 ఘనములు మరియు ఘనసంఖ్యలు

నీవు ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్యతో గుణించి మరలా అదే సంఖ్యతో మరొకసారి గుణించిన వచ్చే ఫలితము ఘనసంఖ్య అవుతుంది. అంటే దీని అర్థము ఒకే సంఖ్యను మూడుసార్లు గుణించడం. n అనేది ఒక సంఖ్య అయిన దాని ఘనమును n^3 గా సూచిస్తారు.

ఘనసంఖ్యలను దృశ్యపరంగా ఒకే ప్రమాణ ఘనములతో కూడిన త్రిమితీయ ఘనములుగా సూచించవచ్చు. ఘనసంఖ్యలను ఖచ్చిత ఘనములు అని కూడా అంటారు. సహజసంఖ్యల యొక్క ఖచ్చిత ఘనములు 1, 8, 27, 64, 125, 216, ... మొదలగునవి.

జ్యామితీయ రూపము	లబ్ద రూపము	సంకేతము	ఖచ్చిత ఘనము
	$1 \times 1 \times 1$	1^3	1
	$2 \times 2 \times 2$	2^3	8
	$3 \times 3 \times 3$	3^3	27
	$4 \times 4 \times 4$	4^3	64

మీకు తెలుసా?

రామానుజన్ సంఖ్య - $1729 = 12^3+1^3 = 10^3+9^3$

ఒకసారి రామానుజన్ అనారోగ్యం బారినపడినప్పుడు ప్రొఫెసర్ హార్డీ అతనిని పరామర్శించడానికి 1729 సంఖ్య గల టాక్సీలో వచ్చెను. ఆ 1729 సంఖ్య దురదృష్టకర సంఖ్య అని హార్డీ తెలిపెను. దానికి రామానుజన్ కాదు ఆ సంఖ్య గమ్మతైన సంఖ్య అని చెప్పెను. ఇది రెండు ఘనాల మొత్తముగా రెండు వేర్వేరు మార్గాల్లో వ్యక్తపరచబడే అతి చిన్న సంఖ్య అని రామానుజమ్ తెలిపెను. అదేవిధముగా 4104, 13832, 20683 అనేవి కొన్ని రామానుజన్ సంఖ్యలకు ఉదాహరణలు.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 36 31-07-2020 12:40:31

1.8.1 ఘనసంఖ్యల యొక్క ధర్మములు

వ.సం	ధర్మములు	ఉదాహరణలు
1.	ధనసంఖ్య యొక్క ఘనము ధనాత్మకము.	$6^3 = 6\times6\times6 = 216.$
2.	ఋణసంఖ్య యొక్క ఘనము ఋణాత్మకము.	$(-7)^3 = (-7)\times(-7)\times(-7) = -343$
3.	ప్రతి సరిసంఖ్య యొక్క ఘనము సరిసంఖ్యయే	$8^3 = 8 \times 8 \times 8 = 512$ అన్ని సరిసంఖ్యలు
4.	ప్రతి బేసిసంఖ్య యొక్క ఘనము బేసిసంఖ్యయే.	$9^3 = 9 \times 9 \times 9 = 729$ అన్ని సరిసంఖ్యలు
5.	ఒక సంఖ్య 0, 1, 4, 5, 6 లేక 9తో అంతమయిన దాని ఘనము కూడా 0, 1, 4, 5, 6 లేక 9తో అంతమగును.	$10^3 = 1000$, $11^3 = 1331$, $14^3 = 2744$ $15^3 = 3375$, $16^3 = 4096$, $19^3 = 6859$
6.	ఒక సంఖ్య 2 లేక 8తో అంతమయిన దాని ఘనము కూడా 8 లేక 2తో అంతమగును.	$12^3 = 1728$, $18^3 = 5832$
7.	ఒక సంఖ్య 3 లేక 7తో అంతమయిన దాని ఘనము కూడా 7 లేక 3తో అంతమగును.	$13^3 = 2197$, $17^3 = 4913$
8.	మొదటి వరుస n సహజసంఖ్యల ఘనముల మొత్తము ఆ సంఖ్య మొత్తము యొక్క వర్గానికి సమానము.	$1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = (1+2+3+.....+n)^2$ $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1+2+3+4)^2$ ను సరిచూడుము.

సూచన

- ఒక ఖచ్చిత ఘనము రెండు సున్నలతో అంతమవ్వదు.
- రెండంకెల సంఖ్య యొక్క ఘనములో 4 లేక 5 లేక 6 అంకెలు గల సంఖ్యగా ఉండును.

ప్రయత్నించుము

క్రింది సంఖ్యలను ఘనము చేయగా ఒకట్ల స్థానములో గల అంకెలను కనుగొనుము.

(i) 17 (ii) 12 (iii) 38
(iv) 53 (v) 71 (vi) 84

1.8.2 ఘనమూలము

దత్తసంఖ్యకు ఘనమూలము కనుగొనుటకు, ఏ సంఖ్యను ఘనము చేయగా దత్తసంఖ్య వచ్చునో ఆ సంఖ్యను దత్తసంఖ్యకు ఘనమూలము అంటారు.

ఉదాహరణకు 27 యొక్క ఘనమూలము 3, ఎందుకనగా 3ను ఘనముచేయగా 27 వచ్చును.

సంకేతము:

x యొక్క ఘనమూలమును

$\sqrt[3]{x}$ లేక $x^{\frac{1}{3}}$ తో సూచిస్తారు.

ఇక్కడ మరికొన్ని ఘనములు మరియు ఘనమూలములు కలవు.

$\sqrt[3]{1} = 1$ కావున $1^3 = 1$, $\sqrt[3]{8} = 2$ కావున $2^3 = 8$,

$\sqrt[3]{27} = 3$ కావున $3^3 = 27$, $\sqrt[3]{64} = 4$ కావున $4^3 = 64$,

$\sqrt[3]{125} = 5$ కావున $5^3 = 125$ మొదలగునవి.

ఘనములు	ఘన మూలములు	ఘనములు	ఘన మూలములు
1	1	729	9
8	2	1000	10
27	3	1331	11
64	4	1728	12
125	5	2197	13
216	6	2744	14
343	7	3375	15
512	8	4096	16

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 37 31-07-2020 12:40:34

ఉదాహరణ 1.32

400 ఒక ఖచ్చిత ఘనమగునా?

సాధన:

ప్రధాన కారణాంక పద్ధతి ద్వారా $400 = \underline{2 \times 2 \times 2} \times 2 \times 5 \times 5$.

ఇక్కడ ఒకే ఒక త్రిపాది మాత్రమే కలదు. మరిన్ని త్రికాలు రావడానికి, '2' లు రెండు మరియు 5 ఒకటి అవసరమగును. కావున 400 ఖచ్చిత ఘనముకాదు.

ఉదాహరణ 1.33

675కు ఏ కనిష్ట సంఖ్యను గుణించిన ఖచ్చిత ఘనము వచ్చును.

3	675
3	225
3	75
5	25
5	1
	1

సాధన:

$675 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5$ ....(i)

675 కు గల ప్రధాన కారణాంకములను త్రికాలుగా సమూహపరచిన 5×5 మిగిలెను.

మనకు ఖచ్చిత ఘనమగుటకు ఇంకా ఒక 5 అవసరము.

$675 \times 5 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

$3375 = 3 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$

ఇప్పుడు 3375 ఖచ్చిత ఘనము కావున 675 కు గుణించవలసిన కనిష్ట సంఖ్య 5

ఆలోచించుము

పై ప్రశ్నలో గుణించడం బదులు భాగహారం ఇచ్చిన యెడల సాధన ఏవిధముగా మారును?

1.8.3 ఇవ్వబడిన సంఖ్యకు ఘనమూలమును ప్రధాన కారణాంకము ద్వారా కనుగొనుట

సోపానము 1: ఇచ్చిన సంఖ్యను ప్రధాన కారణాంకములుగా విడగొట్టుట.

సోపానము 2: ఒకే ప్రధానసంఖ్యలను త్రికాలుగా అమర్చుము.

సోపానము 3: ప్రతి త్రికము నుండి ఒక్కొక్క సంఖ్యను ఎంపికచేసి ఆ సంఖ్యలను లబ్ధము చేయుము.

ఉదాహరణ 1.34

27000 కు ఘనమూలమును కనుగొనుము.

సాధన:

$27000 = 2\times2\times2\times3\times3\times3\times5\times5\times5$ కు ప్రధాన కారణాంకములు

$\therefore \sqrt[3]{27000} = 2\times3\times5 = 30.$

ఉదాహరణ 1.35

విశ్లేషించుము: (i) $\sqrt[3]{\dfrac{9261}{8000}}$ (ii) $\sqrt[3]{\dfrac{1728}{729}}$

సాధన:

$$\text{(i)}\ \sqrt[3]{\frac{9261}{8000}} = \frac{\sqrt[3]{9261}}{\sqrt[3]{8000}} = \frac{(21\times21\times21)^{\frac{1}{3}}}{(20\times20\times20)^{\frac{1}{3}}} = \frac{(21^3)^{\frac{1}{3}}}{(20^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{21}{20} = 1\frac{1}{20}$$

$$\text{(ii)}\ \sqrt[3]{\frac{1728}{729}} = \frac{\sqrt[3]{1728}}{\sqrt[3]{729}} = \frac{(12\times12\times12)^{\frac{1}{3}}}{(9\times9\times9)^{\frac{1}{3}}} = \frac{(12^3)^{\frac{1}{3}}}{(9^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3}$$

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 38 31-07-2020 12:40:35

అభ్యాసము 1.5

1. **ఖాళీలను పూరింపుము:**
   (i) 73 యొక్క ఘనములో ఒకట్ల స్థానములోని అంకె ____________.
   (ii) రెండంకెల సంఖ్య యొక్క ఘనములో గల గరిష్ట అంకెల సంఖ్య ____________.
   (iii) 3333 కు ____________ కనిష్ట సంఖ్యను కూడిన ఖచ్చిత ఘనమగును.
   (iv) 540×50 యొక్క ఘనమూలము ____________.
   (v) 0.000004913 యొక్క ఘనమూలము ____________.

2. **సత్యమా లేక అసత్యమా తెల్పుము:**
   (i) 24 యొక్క ఘనము 4 అను అంకెతో అంతమగును.
   (ii) 1729 నుంచి 9^3 ను తీసివేయగా 10^3 లభించును.
   (iii) 0.0012 యొక్క ఘనము 0.000001728.
   (iv) 79570 ఒక ఖచ్చిత ఘనముకాదు.
   (v) 250047 యొక్క ఘనము 63.

3. 1944 ఖచ్చిత ఘనము కాదని నిరూపించుము.
4. 10985 కు ఏ కనిష్ట సంఖ్యను భాగించిన దాని భాగఫలము ఖచ్చిత ఘనమగును.
5. 200కు ఏ కనిష్ట సంఖ్యను గుణించిన ఖచ్చిత ఘనమగును.
6. $24 \times 36 \times 80 \times 25$ యొక్క ఘనమూలమును కనుగొనుము.
7. ఒక వర్గసంఖ్య యొక్క ఘనము 729, అయితే ఆ సంఖ్యకు వర్గమూలము కనుగొనుము.
8. 46656 యొక్క ఘనమూలమునకు వర్గమూలము ఎంత?
9. 729 మరియు 6859 లకు ఘనమూలమును ప్రధాన కారణాంక పద్ధతి ద్వారా కనుగొనుము.
10. శుద్ధఘనసంఖ్యను పొందుటకు గుణించవలసిన అతిచిన్న శుద్ద వర్గసంఖ్యలను కనుగొనుము.

కృత్యము

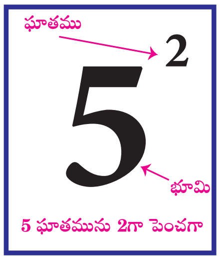
$$2^3 - 1^3 = 1 + 2 \times 1 \times 3$$
$$3^3 - 2^3 = 1 + 3 \times 2 \times 3$$
$$4^3 - 3^3 = 1 + 4 \times 3 \times 3$$

పై అమరికను గమనించి ఈ అమరిక నుండి $15^3 - 14^3$ విలువను కనుగొనుము.

$$1^3 = 1 = 1$$
$$2^3 = 8 = 3 + 5$$
$$3^3 = 27 = 7 + 9 + 11$$

ఈ అమరికను గమనించి కొనసాగించిన 7^3 విలువను వరుస బేసి సంఖ్యల మొత్తముగా కనుగొనుము.

1.9 ఘాతాలు మరియు ఘాతాంకములు



కొన్ని సంఖ్యలను వర్గములుగా మరియు ఘనములుగా ఏవిధముగా వ్యక్తపరచవలెనో తెలుసుకొన్నాము. ఉదాహరణకు 25ను 5^2 గా, 125 ను 5^3 గా మనము వ్రాస్తాము.

సాధారణంగా, ఒకే కారణాంకము యొక్క పునరావృత గుణకాన్ని సూచించే సమాసమును ఘాతాంకము అంటారు. 5 ను ఆధారము లేక భూమి మరియు 2ను ఘాతము లేక ఘాతాంకము అంటారు. ఘాతాంకము యొక్క విస్తరణ రూపమును ఆ సంఖ్య యొక్క కారణాంకము అని అంటారు.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 39 31-07-2020 12:40:35

1.9.1 ధనాత్మక ఘాతములు గల ఘాతాంకములు

క్రింది ఉదాహరణను గమనించిన పూర్ణాంకముల ఘాతాంకములు క్రమంగా పెరుగుచున్నది.

$$2^1 = 2$$
$$2^2 = 2\times2=4$$
$$2^3 = 2\times2\times2=8$$
$$2^4 = 2\times2\times2\times2 =16$$
$$2^5 = 2\times2\times2\times2\times2=32$$
$$2^6 = 2\times2\times2\times2\times2\times2=64$$
$$2^7 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=128$$
$$2^8 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=256$$
$$2^9 = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=512$$
$$2^{10} = 2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=1024$$

ఇదే విధంగా 2^{100} యొక్క విలువ ఏమవుతుంది?

బహుశా, 2^{100}=1267650600228229401496703205376

మిక్కిలి పెద్ద సంఖ్యలను సూక్ష్మరూపములో వ్రాయుటకు ఘాతాంక రూపము ఉపయోగపడుతుంది.

1.9.2 సున్న మరియు ఋణాత్మక విలువలు గల ఘాతాంకములు

$2^5 = 32$
$2^4 = 16$
$2^3 = 8$
$2^2 = 4$
$2^1 = 2$
$2^0 = ?$

ఈ అమరికను గమనించుము మొదటి నుండి ప్రారంభించిన తరువాత సోపానాలలో ఏమి జరుగును? ముందు సోపానమునకు సగము ఉండును. కావున 2^0 గురించి ఏమి చెప్పగలము? మనము 3^5, 3^4, 3^3, మొదలగు వాటిలో ఒక పట్టికను తయారుచేసిన 3^0 గురించి ఏమి చెప్పగలము? ఏదైనా శూన్యేతర సంఖ్య యొక్క ఘాతము 0 అయిన దాని విలువ 1.

$a^0 = 1$, ఇక్కడ $a \neq 0$

పై నమూనాను మరింత క్రిందికి విస్తరిస్తే ఏమి జరుగుతుందో చూద్దాం.

ముందువలె, ప్రారంభం నుండి వరుస సోపానాలలోని ఫలితాలు మునుపటి సోపానంలో సగం అని తెలుసుకొన్నాము. $2^0 = 1$, కు తరువాత సోపానము 2^{-1}. దీని విలువ 1ను 2తో భాగించిన, $\frac{1}{2}$ వచ్చును. తరువాత సోపాన విలువ 2^{-1}, ఇది $\frac{1}{2}$ ను 2 తో భాగించిన $\frac{1}{4}$ వచ్చును.

$2^3 = 8$
$2^2 = 4$
$2^1 = 2$
$2^0 = 1$
$2^{-1} = \frac{1}{2}$
$2^{-2} = \frac{1}{4}$
$2^{-3} = \frac{1}{8}$

సాధారణంగా, $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, m అనేది పూర్ణసంఖ్య.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 40 31-07-2020 12:40:37

1.9.3 ఘాతాంకములనుఉపయోగించి సంఖ్యలను విస్తరించడం

ముందు తరగతులలో, పూర్ణాంకములను ఏ విధంగా విస్తరించాలో మనము తెలుసుకొన్నాము. ఉదాహరణకు, $5832 = 5\times1000 + 8\times100 + 3\times10 + 2\times1$

$= 5\times10^3 + 8\times10^2 + 3\times10^1 + 2$ (ఘాతాంక రూపమును ఉపయోగించి).

దశాంశ స్థానములు వచ్చిన ఏమి చేయాలి? 10 యొక్క ఋణాత్మక ఘాతములు మనకు ఉపయోగపడును!

కావున, $58.32 = 50 + 8 + \frac{3}{10} + \frac{2}{100}$

$= 5\times10 + 8\times1 + 3\times\frac{1}{10} + 2\times\frac{1}{100}$

$= 5\times10^1 + 8\times10^0 + 3\times10^{-1} + 2\times10^{-2}$

ప్రయత్నించుము

ఘాతాంకములు ఉపయోగించి కింది సంఖ్యలను విస్తరించుము.

1. 8120
2. 20305
3. 3652.01
4. 9426.521

1.9.4 ఘాతాంక న్యాయములు

ఘాతాంక న్యాయం కొన్ని ప్రాథమిక పరిక్రియల నుండి ఉత్పన్నమవుతుంది. ఒక సంఖ్యను ఎన్నిసార్లు గుణించవో ఘాతాంకము సూచిస్తుంది. ఋణ ఘాతాంకములు భాగించుటను తెల్పుతుంది. ఎందుకనగా గుణకారానికి విలోమము భాగహారం కాబట్టి.

- **గుణకార న్యాయం**

ఈ న్యాయం ప్రకారము రెండు సమాన ఆధారము గల ఘాతాలను గుణించేటప్పుడు, ఘాతాంకములను కూడవలెను. అనగా

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

ఇక్కడ a అనేది $(a\neq0)$, m, n అనేవి పూర్ణసంఖ్యలు. ఇక్కడ గమనించవలసినది రెండు పరిమాణంలో ఒకేవిధమైన ఆధారము ఉండవలెను.

ఉదాహరణలు:

a)	$2^3\times2^2 = 2^5$ (అనగా $8\times4 = 32$ గా (వ్రాయరాదు) $2^{3\times2}$)
b)	$(-2)^{-4}\times(-2)^{-3} = (-2)^{(-4)+(-3)}$ ఘాతాంక న్యాయము, $= (-2)^{-7}$ లేక $(-2)^{-4}\times(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^4}\times\frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{(-2)^4\times(-2)^3} = \frac{1}{(-2)^{4+3}} = \frac{1}{(-2)^7} = (-2)^{-7}$
c)	$(-5)^3\times(-5)^{-3} = (-5)^{3-3}$ ఘాతాంక న్యాయము, $= (-5)^0 = 1$

- **భాగహార న్యాయము**

రెండు సమాన ఆధారము గల ఘాతములను భాగించేటప్పుడు ఘాతాంకములను తీసివేయవలెనని ఈ న్యాయం తెల్పుతుంది.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

ఇక్కడ a, అనేది $(a\neq0)$, m, n అనేవి పూర్ణసంఖ్యలు. ఇక్కడ గమనించవలసినది రెండు పరిమాణములో ఒకే విధమైన ఆధారము ఉండవలెను. ఇది ఎలా చేయవలెను? కింది ఉదాహరణలను చూసి అనుసరించుము

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 41 31-07-2020 12:40:39

ఉదాహరణలు:

a)	$\frac{(-3)^5}{(-3)^2} = (-3)^{5-2}$ ఘాతాంక న్యాయము, $(-3)^3 = -27$ (లేక) $\frac{(-3)^5}{(-3)^2} = (-3)^5 \times (-3)^{-2} = (-3)^{5-2} = (-3)^3$ (లేక) $\frac{(-3)^5}{(-3)^2} = \frac{(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)\times(-3)}{(-3)\times(-3)} = (-3)\times(-3)\times(-3) = (-3)^3$
b)	$\frac{(-7)^{100}}{(-7)^{98}} = (-7)^{100-98}$ ఘాతాంక న్యాయము, $(-7)^2 = 49$ (లేక) $\frac{(-7)^{100}}{(-7)^{98}} = \frac{(-7)\times(-7)\times(-7)\times\ldots 100 \text{ సార్లు}}{(-7)\times(-7)\times(-7)\times\ldots 98 \text{ సార్లు}} = (-7)\times(-7) = 49$

● ఘాతాంక న్యాయం

ఘాతము యొక్క ఘాతము ఇచ్చినప్పుడు ఆ రెండు ఘాతాంకములను గుణించవలెనని, ఘాతాంక న్యాయం తెలుపుతుంది.

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

ఇక్కడ a, అనేది $(a \neq 0)$, m, n అనేవి పూర్ణసంఖ్యలు.

ఉదాహరణలు:

$[(-2)^3]^2 = (-2)^{3\times2} = (-2)^6 = 64$ (ఘాతాంక న్యాయం ఉపయోగించి)

(లేక)

$[(-2)^3]^2 = [(-2)\times(-2)\times(-2)]^2 = [-8]^2 = 64$

ప్రయత్నించుము

a, b అనేవి శూన్యేతర సంఖ్యలు మరియు m, n అనేవి పూర్ణసంఖ్య అయిన క్రింది న్యాయములను సరిచూడుము.

1. సున్న ఘాతాంక న్యాయం: $a^0 = 1$.
2. ఒకే విధమైన ఘాతముల లబ్ధము $a^m \times b^m = (ab)^m$ గుణకార న్యాయం నుండి
3. ఒకే ఘాతము గల భిన్నము భాగహార న్యాయము నుండి $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

ఉదాహరణ 1.36

(i) 4^{-3} (ii) $\frac{1}{2^{-3}}$ (iii) $(-2)^5 \times (-2)^{-3}$ (iv) $\frac{3^2}{3^{-2}}$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన:

(i) $4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4\times4\times4} = \frac{1}{64}$ (ii) $\frac{1}{2^{-3}} = 2^3 = 2\times2\times2 = 8$

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 42 31-07-2020 12:40:41

(iii) $(-2)^5 \times (-2)^{-3} = (-2)^{5-3} = (-2)^2 = -2 \times -2 = 4$ (iv) $\dfrac{3^2}{3^{-2}} = 3^2 \times 3^2 = 9 \times 9 = 81$

ఉదాహరణ 1.37

సూక్ష్మీకరించి మరియు వచ్చిన జవాబును ఘాతరూపములో వ్యక్తపరుచుము:

(i) $(3^5 \div 3^8)^5 \times 3^{-5}$ (ii) $(-3)^4 \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^4$

సాధన:

(i) $\left(\dfrac{3^5}{3^8}\right)^5 \times 3^{-5} = (3^{5-8})^5 \times 3^{-5} = (3^{-3})^5 \times 3^{-5} = 3^{-3\times 5} \times 3^{-5} = 3^{-15} \times 3^{-5} = 3^{-15-5} = 3^{-20}$

(ii) $(-3)^4 \times \left(\dfrac{5}{3}\right)^4 = 3^4 \times \dfrac{5^4}{3^4} = 5^4$

ఉదాహరణ 1.38

$(-7)^{x+2} \times (-7)^5 = (-7)^{10}$ అయిన x విలువ కనుగొనుము.

సాధన:

$(-7)^{x+2} \times (-7)^5 = (-7)^{10}$

$(-7)^{x+2+5} = (-7)^{10}$

ఆధారములు సమానము కావున ఘాతాంకములు సమానము

$x + 7 = 10$

$\Rightarrow x = 10 - 7 = 3$

1.9.5 ప్రామాణిక రూపము మరియు సాంకేతిక రూపము

ఒక సంఖ్యకు ప్రామాణిక రూపం మనకు సాధారణంగా వ్రాసే సంఖ్య మాత్రమే. ప్రతి అంకె విలువను చూపించుటకు విస్తరణ రూపాన్ని ఉపయోగిస్తాము. ఇది ప్రతి అంకె మొత్తముగా చూపబడుతుంది. దానికి సరిపోయే స్థాన విలువ ఒకట్లు, పదులు, వందలు మొదలైన వాటితో గుణించాలి. ఉదాహరణకు, **195** ప్రామాణికరూపము. దీనిని **$195 = 1 \times 100 + 9 \times 10 + 5 \times 1$** గా విస్తరించవచ్చును.

ఖగోళశాస్త్రవేత్తలు, జీవశాస్త్రవేత్తలు, భౌతికశాస్త్రవేత్తలు మరియు ఇంజనీర్లకు పెద్ద పరిమాణాన్ని కొలుచుటకు కొలతలు అవసరమగును. అవి ప్రామాణిక రూపంలోఉన్న కొలవడం అతి కష్టమగును. అందువలన అవి సాంకేతిక రూపములో ఉన్నచో దానిని అర్థము చేసుకోవడం మరియు లెక్కించడం సులభము.

$S \times 10^a$ రూపమును పాటించి సాంకేతికరూపమును వ్రాయవచ్చును.ఇక్కడ, **S** అనునది 1 మరియు10 మధ్యగల ఒక సంఖ్య (పూర్ణసంఖ్య లేదా దశాంశముగల పూర్ణసంఖ్య) కాని 10 కాదు, మరియు a అనునది ధన లేదా ఋణ పూర్ణసంఖ్య. కావున,ఒక సంఖ్యను ఒక సంఖ్య (పూర్ణసంఖ్య లేదా దశాంశముగల పూర్ణసంఖ్య) మరియు 10యొక్క ఘాతముల లబ్ధముగా ఒక సంఖ్యను సాంకేతికరూపంలోవ్రాయవచ్చును. ఇచ్చిన సంఖ్య 1 నుంచి 9 మధ్య మారుటకు దశాంశస్థానమును ముందుకు లేదా వెనుకకు జరిపవలెను,తరువాత 10యొక్క ఘాతము మనము దశాంశమును ఎన్ని స్థానములు ముందుకు లేదా వెనుకకు జరిగామో తెలియచేస్తుంది.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 43 31-07-2020 12:40:43

ఉదాహరణలు:

ప్రామాణిక రూపము	సాంకేతిక రూపము	ప్రామాణిక రూపము	సాంకేతిక రూపము
0.00123	1.23×10^{-3}	123	1.23×10^{2}
0.0123	1.23×10^{-2}	1230	1.23×10^{3}
0.123	1.23×10^{-1}	12300	1.23×10^{4}
1.23	1.23×10^{0}	123000	1.23×10^{5}
12.3	1.23×10^{1}	1230000	1.23×10^{6}

మరికొన్ని ఉదాహరణలు:

(a) భూ వ్యాసము 12756000 మైళ్ళు. దీనిని సాంకేతిక రూపంలో వ్రాసిన 1.2756×10^{7} మైళ్ళుగా వ్రాయవచ్చు

(b) బృహస్పతి గ్రహం యొక్క ఘనపరిమాణము 143,300,000,000,000 కి.మీ^{3} దీనిని సులభముగా సాంకేతిక రూపంలో 1.433×10^{14} km^3. గా వ్రాయవచ్చు.

(c) ఒక బ్యాక్టీరియా పరిమాణము 00000085 మి.మీ. దీనిని సాంకేతిక రూపంలో 8.5×10^{-7} మి.మీగా వ్రాయవచ్చు.

సూచన

1. ధన ఘాతాంకములో 1.3×10^{12} పెద్దసంఖ్యను సూచిస్తుంది.
2. ఋణ ఘాతాంకములో 7.89×10^{-21} చిన్నసంఖ్యను సూచిస్తుంది.

ఉదాహరణ 1.39

సాంకేతిక రూపంలో వ్రాయుము: (i) $\left(7\times10^{2}\right)\left(5.2\times10^{7}\right)$ (ii) $\left(3.7\times10^{-5}\right)\left(2\times10^{-3}\right)$

సాధన:

(i) $\left(7\times10^{2}\right)\left(5.2\times10^{7}\right) = 36.4 \times 10^{9} = 3.64 \times 10^{10}$

(ii) $\left(3.7\times10^{-5}\right)\left(2\times10^{-3}\right) = 7.4 \times 10^{-8}$

ఉదాహరణ 1.40

ప్రామాణిక రూపంలో వ్రాయుము: (i) 2.27×10^{-4}

(ii) కాంతి ఒక సెకనుకు 1.86×10^{5} మైళ్ళ దూరం ప్రయాణించును.

సాధన:

(i) $2.27 \times 10^{-4} = 0.000227.$

(ii) కాంతి ఒక సెకనుకు 1.86×10^{5} మైళ్ళ దూరం ప్రయాణించును = సెకనుకు 186000 మైళ్ళు

ప్రయత్నించుము

1. ప్రామాణిక రూపంలో వ్రాయుము: యురేనస్ గ్రహము యొక్క బరువు 8.68×10^{25} కి.గ్రా.
2. సాంకేతిక రూపంలో వ్రాయుము: (i) 0.000012005 (ii) 4312.345 (iii) 0.10524
(iv)సూర్యునికి మరియు గ్రహమునకు మధ్య గల దూరము 1.4335×10^{12} మైళ్ళు

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 44 31-07-2020 12:40:44

అభ్యాసము 1.6

1. ఖాళీలను పూరింపుము:

(i) $(-1)^{\text{సరిసంఖ్య}}$ ______________.

(ii) $a \neq 0$ అయిన a^0 అనేది______________.

(iii) $4^{-3} \times 5^{-3} =$ ___________.

(iv) $(-2)^{-7} =$ ____________.

(v) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{-5} =$____________.

2. సత్యమా లేక అసత్యమా తెల్పుము:

(i) $8^x = \frac{1}{64}$, అయిన x విలువ -2.

(ii) $(256)^{\frac{-1}{4}} \times 4^2$ యొక్క సూక్ష్మరూపము $\frac{1}{4}$.

(iii) ఘాతన్యాయమునుపయోగించుము: $\left(3^7\right)^{-2} = 3^5$.

(iv) 2×10^{-4} యొక్క ప్రామాణిక రూపము 0.0002.

(v) 123.456 యొక్క సాంకేతిక రూపము 1.23456×10^{-2}.

3. విలువ కనుగొనుము: (i) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$ (ii) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ (iii) $\left(\frac{-5}{6}\right)^{-3}$ (iv) $\left(2^{-5} \times 2^7\right) \div 2^{-2}$ (v) $\left(2^{-1} \times 3^{-1}\right) \div 6^{-2}$

4. విలువ కనుగొనుము: (i) $\left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left(\frac{5}{2}\right)^{-2}$ (ii) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-2} \div \left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$ (iii) $2^7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$

5. విలువ కనుగొనుము: (i) $\left(5^0 + 6^{-1}\right) \times 3^2$ (ii) $\left(2^{-1} + 3^{-1}\right) \div 6^{-1}$ (iii) $\left(3^{-1} + 4^{-2} + 5^{-3}\right)^0$

6. విలువ కనుగొనుము: (i) $(3^2)^3 \times (2 \times 3^5)^{-2} \times (18)^2$ (ii) $\frac{9^2 \times 7^3 \times 2^5}{84^3}$ (iii) $\frac{2^8 \times 2187}{3^5 \times 32}$

7. సాధించుము x : (i) $\frac{2^{2x-1}}{2^{x+2}} = 4$ (ii) $\frac{5^5 \times 5^{-4} \times 5^x}{5^{12}} = 5^{-5}$

8. ఘాతాంకములను ఉపయోగించి విస్తరించుము: (i) 6054.321 (ii) 897.14

9. ప్రామాణిక రూపంలో కనుగొనము:

(i) $8 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 6 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 2 \times 1 + 4 \times 10^{-2} + 7 \times 10^{-4}$

(ii) $5 \times 10^3 + 5 \times 10^1 + 5 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-3}$

(iii) హైడ్రోజన్ రూపము వ్యాసార్థము 2.5×10^{-11} మీ.

10. క్రింది వాటిని సాంకేతిక రూపంలో వ్రాయుము.

(i) 467800000000 (ii) 0.000001972 (iii) 1642.398

(iv) భూ ఘనపరిమాణము 1,083,000,000,000 క్యూబిక్ కిలోమీటర్లు

(v) నీవు ఒక బకెట్టును ధూళితో నింపిన బకెట్టులో ఉన్న మొత్తం ధూళి భూమి యొక్క మొత్తం భాగంలో 0.00000000000000000000000016 కి.గ్రా ఉంటుంది.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 45 31-07-2020 12:40:47

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

11. $(-4)^{-1}$ కు ఏ సంఖ్యను గుణించిన లబ్దము 10^{-1}? అగును?

(A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{-2}{5}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) $\frac{-5}{2}$

12. $(-2)^{-3} \times (-2)^{-2} =$ ____________.

(A) $\frac{-1}{32}$ (B) $\frac{1}{32}$ (C) 32 (D) –32

13. సరికానిది ఏది?

(A) $\left(\frac{-1}{4}\right)^2 = 4^{-2}$ (B) $\left(\frac{-1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$ (C) $\left(\frac{-1}{4}\right)^2 = 16^{-1}$ (D) $-\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 16^{-1}$

14. If $\frac{10^x}{10^{-3}} = 10^9$, అయితే x విలువ ____________.

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7

15. 0.0000000002020 యొక్క సాంకేతిక రూపము ____________.

(A) 2.02×10^9 (B) 2.02×10^{-9} (C) 2.02×10^{-8} (D) 2.02×10^{-10}

అభ్యాసము 1.7

ఇతర అభ్యసన సమస్యలు

1. ఒక పెట్టెలోని $\frac{3}{4}$ వ భాగము ఆపిల్‌ల బరువు 3 కి.గ్రా 225 గ్రా అయిన, పెట్టె నిండుగా ఆపిల్ ఉన్నట్లయితే, పెట్టె యొక్క బరువు ఎంత ఉండును?
2. అఖిల్ $3\frac{4}{5}$ లీటర్ల సామర్థ్యంగల ఒక నీటి కూజాను, దాని లాంటి $2\frac{2}{3}$ రెట్లు అధిక సామర్థ్యం గల మరొక కూజాను కొనినట్లైతే పెద్ద కూజా సామర్థ్యం కనుగొనుము.
3. రవి $\frac{25}{8}$ మరియు $\frac{16}{15}$ లను గుణించిన $\frac{400}{120}$. వచ్చును. దీనిని సూక్ష్మరూపంలో $\frac{10}{3}$ అని రవి చెప్పెను. చంద్రు దీనిని $3\frac{1}{3}$. అని చెప్పెను. అయితే ఎవరు చెప్పినది సరైనది? (లేక) ఇద్దరూ చెప్పినది సరైనదా? వివరింపుము.
4. ఒక గది వైశాల్యము $\frac{153}{10}$ చ.మీ మరియు దాని వెడల్పు $2\frac{11}{20}$ మీ అయితే గది పొడవును కనుగొనుము.
5. 4489 సెం.మీ^{2} వైశాల్యము గల ఒక నాయకుని విగ్రహము చతురస్రాకారంలో కలదు. విగ్రహము చుట్టూ 2 సెం.మీ కొలత గల చెక్క చట్రము కలదు. ఆ చట్రము వైశాల్యము కనుగొనుము.
6. ఒక పెండ్లిపత్రిక వైశాల్యము 90సెం.మీ^{2} పత్రిక భుజము పొడవు ఏ రెండు పూర్ణాంకముల మధ్య కలదు?
7. ఒక చతురస్రాకార వరండాను నింపుటకు 1 చదరం వైశాల్యం గల నేలపలకలు 225 చతురస్రాకార నేల పలకలు అవసరమగును. అయితే ఆ వరండా భుజము పొడవు కనుగొనుము.
8. $\sqrt[3]{1906624} \times \sqrt{x} = 3100$, అయిన x విలువను కనుగొనుము.
9. $2^{m-1} + 2^{m+1} = 640$, అయిన m విలువ కనుగొనుము.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 46 31-07-2020 12:40:52

10. సాంకేతిక రూపంలో జవాబులిమ్ము:
మానవ హృదయం ఒక నిమిషమునకు 80 సార్లు కొట్టుకొన్న i) ఒక గంటకు?
ii) ఒక రోజుకు? iii) ఒక సంవత్సరమునకు? iv) 100 సంవత్సరములకు ఎన్నిసార్లు కొట్టుకొనవలెను?

సవాళాత్మక ప్రశ్నలు

11. ఒక పటములో 1 అంగుళము 120 కి.మీ సూచించును. A నగరము B మరియు C నగరముల మధ్య కలదు. మరియు A నుండి B మరియు C నగరములు క్రమముగా $4\frac{1}{6}$ అంగుళము మరియు $3\frac{1}{3}$ అంగుళము దూరములో కలదు. అయితే వాటి మధ్య గల దూరమును కనుగొనుము.

12. క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రతి నివేదికకు ఒక ఉదాహరణము ఇచ్చి సరిచూడుము.
   (i) అన్ని శూన్యేతర అకరణీయ సంఖ్యల సేకరణ భాగహారం దృష్ట్యా సంవృత ధర్మాన్ని పాటించును.
   (ii) అకరణీయ సంఖ్యలు వ్యవకలనము దృష్ట్యా స్థిత్యంతర ధర్మాన్ని పాటించదు.
   (iii) అకరణీయ సంఖ్యలు భాగహారము దృష్ట్యా సహచర ధర్మాన్ని పాటించదు.
   (iv) $a(b-c)=ab-ac$ అనేది తీసివేతపై విభాగ న్యాయము అకరణీయ సంఖ్యలపై వర్తించును.
   (v) రెండు అకరణీయ సంఖ్యల సగటు ఒక అకరణీయ సంఖ్య అగును మరియు అది ఆ అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య ఉండును

13. $\frac{1}{4}$ వ భాగము రాగి వడ బరువు 120 గ్రాములు అయితే $\frac{2}{3}$ వ భాగము రాగి వడ బరువు ఎంత?

14. $p+2q=18$ మరియు $pq=40$, అయిన $\frac{2}{p}+\frac{1}{q}$ విలువను కనుగొనుము.

15. $5\frac{x}{5}\times 3\frac{3}{4}=21$ అయిన 'x' ను కనుగొనుము.

16. $\frac{1}{\left(\frac{10}{11}\right)}$ అనేది $\frac{\left(\frac{1}{10}\right)}{11}$ కన్నా ఎంత ఎక్కువ?

17. 1536 జవాన్ల సమూహం ఒక చతురస్రాకార కవాతు ఏర్పాటు చేయుటకు సాధ్యమగునా? సాధ్యం కాకపోతే కవాతు ఏర్పాటుకు ఇంకా ఎంతమంది జవాన్లు అవసరమవుతారు?

18. $\sqrt{2862.25}+\sqrt{28.6225}$ ను ఉపయోగించి $\sqrt{286225}$ విలువను కనుగొనుము.

19. సూక్ష్మీకరించుము: $(3.769\times 10^5)+(4.21\times 10^5)$

20. క్రింది వాటిని ఆరోహణక్రమంలో అమర్చుము: $16^{25}, 8^{100}, 3^{500}, 4^{400}, 2^{600}$

సారాంశము

- ఒక సంఖ్యను $\frac{a}{b}$ రూపంలో వ్రాసిన దానిని అకరణీయ సంఖ్య అంటారు. ఇక్కడ a మరియు b లు పూర్ణసంఖ్యలు మరియు $b\neq 0$
- అన్ని సహజసంఖ్యలు, పూర్ణాంకములు, పూర్ణసంఖ్యలు మరియు భిన్నములను అకరణీయ సంఖ్యలు అంటారు.
- ప్రతి అకరణీయ సంఖ్యను సంఖ్యారేఖపై సూచించవచ్చును.
- 0 అనేది ధనాత్మక లేక ఋణాత్మక అకరణీయ సంఖ్య కాదు.
- $\frac{a}{b}$ అను ఒక అకరణీయ సంఖ్యలో హారము b ఒక ధనపూర్ణసంఖ్యగాను మరియు గ.సా.కా. $(a,b)=1$ గాను ఉన్నచో అది ప్రామాణిక రూపంలో కలదని చెప్పవచ్చును.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 47 31-07-2020 12:40:56

- రెండు అకరణీయ సంఖ్యల మధ్య అనంత అకరణీయ సంఖ్యలుండును.
- రెండు అకరణీయ సంఖ్యలు తీసివేయుటకు మొదటి అకరణీయ సంఖ్యకు రెండవ అకరణీయ సంఖ్య యొక్క సంకలన విలోమమును కూడుటకు సమానము.
- రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ అకరణీయ సంఖ్యలను గుణించుటకు లవముల లబ్ధములను లవముగాను, హారముల లబ్ధమును హారముగాను వ్రాసిన వచ్చునది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అగును.
- రెండు అకరణీయ సంఖ్యలను భాగించుటకు మొదటి అకరణీయ సంఖ్యకు రెండవ అకరణీయ సంఖ్య యొక్క వ్యుత్క్రమమును గుణించవలెను.
- కింద ఇవ్వబడిన పట్టిక అకరణీయ సంఖ్యల ధర్మములను తెల్పును ($\mathbb{Q}$).

$\mathbb{Q}$	సంవృత	స్థిత్యంతర	సహచర	సంకలనముపై గుణకార విభాగ న్యాయము +/-
+	✓	✓	✓	✓
−	✓	×	×	✓
×	✓	✓	✓	-
÷	×	×	×	-

- 0 మరియు 1 అనునది క్రమంగా అకరణీయ సంఖ్యల సంకలన మరియు గుణకార తత్సమమగును.
- $\frac{a}{b}$ యొక్క సంకలన విలోమము $\frac{-a}{b}$ మరియు దీని విపర్యయము కూడా సత్యమగును.
- $\frac{a}{b}$ అను అకరణీయ సంఖ్యల గుణకార విలోమము లేక వ్యుత్క్రమము $\frac{b}{a}$ మరియు $\frac{a}{b}\times\frac{b}{a}=1$
- మనము ఒక సహజసంఖ్య n ను మరియొక సహజసంఖ్య m నుండి $n = m^2$ గా చూపిన యెడల n అనేది ఒక వర్గసంఖ్య అని చెప్పవచ్చు.
- n సహజసంఖ్య యొక్క వర్గమూలమును $\sqrt{n}$ (లేదా) $n^{\frac{1}{2}}$,గా వ్రాస్తాము.
- ఒక సంఖ్య వర్గములో గల ప్రధాన కారణాంకముల సంఖ్య = ఆ సంఖ్య యొక్క ప్రధాన కారణాంకముల సంఖ్యకు రెట్టింపుగా ఉండును.
- a మరియు b అనే ఏదైనా రెండు ధనాత్మక సంఖ్యలయిన

  (i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$ మరియు (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ $(b \neq 0)$
- ఒక సంఖ్యను అదే సంఖ్యచే మూడుసార్లు గుణించగా వచ్చుసంఖ్యను ఆ సంఖ్య యొక్క ఘనము అంటారు.
- ఒక సంఖ్యయొక్క ఘనమూలం విలువను ఘనంచేసినప్పుడు అసలు సంఖ్య లభించును.
- ఒకే కారణాంకము యొక్క ఆవర్తన లబ్ధమును సూచించు సమాసమును మనము ఘాతము అంటాము.
- ఘాతాంకము అనేది ఒక ఆధార సంఖ్యను ఎన్నిసార్లు కారణాంకముగా ఉపయోగించబడినదానిని సూచించును.
- ఘాతాంక న్యాయాలు: (i) $a^m \times a^n = a^{m+n}$ (ii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (iii) $(a^m)^n = a^{mn}$
- మరిన్ని ఫలితాలు: (i) $a^0 = 1$ (ii) $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$ (iii) $a^m \times b^m = (ab)^m$ (iv) $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$
- $S \times 10^a$ రూపమును పాటించి సాంకేతికరూపమును వ్రాయవచ్చును. ఇక్కడ, S అనునది 1 మరియు 10 మధ్యగల ఒక సంఖ్య (పూర్ణసంఖ్య లేదా దశాంశముగల పూర్ణసంఖ్య) కాని 10 కాదు, మరియు a అనునది ధన లేదా ఋణ పూర్ణసంఖ్య.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 48 31-07-2020 12:40:57

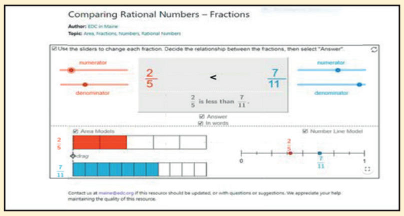
అంతర్జాల కృత్యము

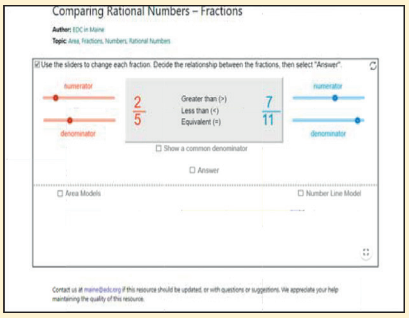
సోపానము-1 బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్ చేసి URL లేక ఇచ్చిన QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము.

సోపానము-2 వెతికే నిలువు వరుసలో అకరణీయ సంఖ్యలని టైపు చేయుము.

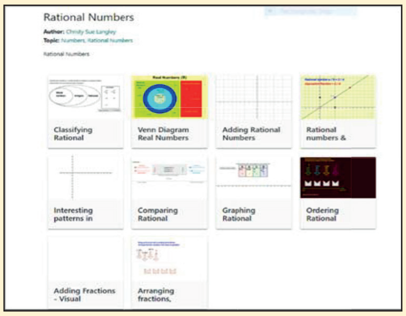
సోపానము-3 లవము మరియు హారముల స్లైడర్‌ను కదిపితే వివిధ అకరణీయ సంఖ్యలు వచ్చును. సంఖ్యారేఖ మోడల్స్ వద్ద క్లిక్ చేసిన సంఖ్యారేఖలు వచ్చును.

ఈ కృత్యము ద్వారా అకరణీయ సంఖ్యల పరిక్రియలు మరియు వాటి ధర్మములను తెలుసుకొనవచ్చును.





సోపానము 1



సోపానము 2

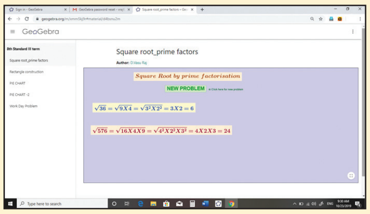
Web URL rational numbers (rational number links)
Web URL https://www.geogebra.org/m/n92AKzBF#material/ca5D7VbZ
*Pictures are indicatives only.
*If browser requires, allow Flash Player or Java Script to load the page.

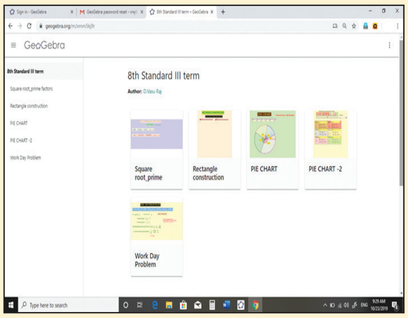
అంతర్జాల కృత్యము

సోపానము-1 బ్రౌసర్‌ను ఓపెన్ చేసి క్రింద ఇచ్చిన URL లింకును టైపు చేయుము లేదా QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము. GeoGebra అనే వర్క్‌షీటులో 8వ తరగతి 3వ అంతరము అనే పేజీ ఓపెన్ అగును. "Square root_prime factors" అనే వర్క్‌షీటును ఎంపిక చేయుము.

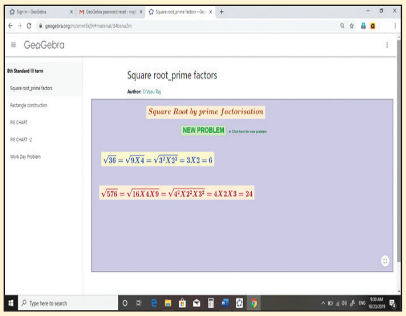
సోపానము-2 "NEW PROBLEM" వద్ద క్లిక్ చేసి లెక్కలను సరిచూడుము.

ఆశించు ఫలితము





సోపానము 1



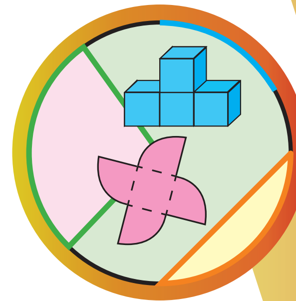
సోపానము 2

Browse in the link

Numbers:

https://www.geogebra.org/m/xmm5kj9r or Scan the QR Code.

01_8th_Maths_Telugu_Numbers_Chap_1.indd 49 31-07-2020 12:40:58



2 కొలతలు

అభ్యసన లక్ష్యాలు

- వృత్త భాగాలను తెలుసుకొనుట.
- వృత్త చాపం పొడవు, సమతల ఆకృతులు యొక్క వైశాల్యము మరియు పరిధులను లెక్కించుట.
- సంయుక్త ఆకారాల వైశాల్యం మరియు చుట్టుకొలతను లెక్కించుట.
- ద్విమితీయ (2-D) ఆకారముల మూలంగా త్రిమితీయ (3-D) ఆకారములను సూచించుటను అర్థం చేసుకొనుట.
- త్రిమితీయ వస్తువులను ఘనముల మూలంగా సూచించుటను అర్థం చేసుకొనుట.

2.1 పరిచయము

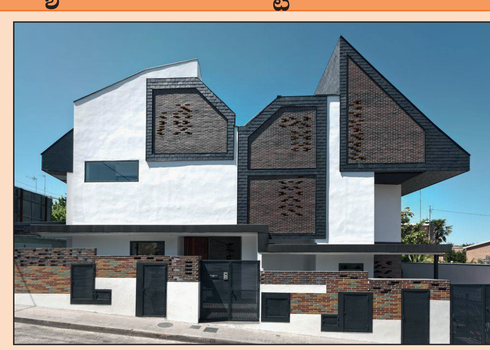
"కొలుచుట" అనునది ప్రతి ఒక్కరు తన నిత్య జీవితంలో ఉపయోగించబడు ముఖ్యమైన దశ అవుతుంది. త్రాడు పొడవును కొలుచుట, రెండు ప్రదేశములకు మధ్య గల దూరాన్ని కొలుచుట, ఇంటి స్థలం మరియు పొలము యొక్క చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యములను కనుగొనుట, నిర్దిష్ట కొలతలతో భవనములను నిర్మించుట మొదలగు లెక్కలేనన్ని పరిస్థితులలో "కొలత" అనే భావన ఉపయోగపడుతున్నది.

మనిషి యొక్క ముఖ్యమైన ఆవిష్కరణగా "చక్రమును" చెబుతారు. చక్రానికి "ఆవిష్కరణల ఊయల('**cradle of invention**') అనే మరొక పేరు కలదు. చక్రం యొక్క ఆకారం ఏమి? వృత్తం కాదా? వృత్తం మాత్రమే కాకుండా త్రిభుజం, చతురస్రం మరియు దీర్ఘ చతురస్రం మొదలగు ఆకారాలను మనం ఉపయోగించు వస్తువులలో చూడవచ్చును.

కొలతలు ప్రతి ఒక్కరి జీవితంలోనూ ముఖ్యమైన పాత్రను వహించుచున్నది. పాఠశాలకు వెళ్లి క్రమంగా గణితశాస్త్రమును నేర్చుకొనువారే కాకుండా పామరులు కూడా తార్కికంగా ఆలోచించి కొలతలకు సంబంధించిన కొన్ని భావనలను అవసరానికి అనుగుణంగా ఉపయోగిస్తున్నారు. ఉదాహరణకు తేరు (రథం) చక్రాలను చేసే వడ్రంగి కొయ్యలతో చేయబడిన చక్రాలు అరగకుండా ఉండుటకు వాటి చుట్టూ ఇనుప చట్టములను అమర్చినపుడు 7 అడుగుల ఎత్తు (వ్యాసం) కలిగిన చక్రానికి 22 అడుగుల పొడవైన ఇనుప చట్రము అవసరమవుతుందని తన అనుభవంతోనే చెబుతాడు.

ఔత్సాహిక గణితము - నిత్యజీవితంలో వైశాల్యము మరియు చుట్టుకొలత

డైనింగ్ టేబుల్ తయారీలో వృత్త ఖండములను ఉపయోగించుట.



భవన నిర్మాణముల యందు సంయుక్త ఆకారాలను ఉపయోగించుట.

02_8th_Maths_Telugu_Measurements_Chap_2.indd 50 31-07-2020 12:45:14

వృత్తం, త్రిభుజం, చతురస్రం, దీర్ఘ చతురస్రం, ట్రెపీజియం, సమాంతర చతుర్భుజం మొదలగు కొన్ని ఆకారముల చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యమును కనుగొనుటను మనం ముందే నేర్చుకొన్నాం. ఈ పాఠంలో వృత్త భాగాలు, వృత్త చాపం పొడవు, వృత్త ఖండం మరియు కొన్ని సంయుక్త ఆకారాల వైశాల్యం మరియు చుట్టుకొలతలను కనుగొనుటను చూస్తాం.

పునశ్చరణ

ఉపాధ్యాయుడు విద్యార్థులతో 7 సెం.మీ వ్యాసార్థం గల ఒక వృత్త వైశాల్యమును కనిపెట్టమని అడిగెను. చాలామంది విద్యార్థులు పద్ధతి 1 లో ఉన్న విధంగా సాధించెను, కానీ కొద్ది మంది విద్యార్థులు పద్ధతిలో 2 లో ఉన్న విధంగా సాధించిరి.

పద్ధతి:1	పద్ధతి:2
వృత్త వైశాల్యం, A $= \pi r^2$ చ.ప్రమా $= \frac{22}{7} \times 7 \times 7$ = 154 చ.సెం.మీ	వృత్త వైశాల్యం, A $= \pi r^2$ చ.ప్రమా = 3.14×7×7 = 153.86 చ.సెం.మీ

తరువాత వారు క్రింది విధంగా సంభాషించుకొనిరి:

సుధ : ఈ రెండు సమాధానాలలో ఏది సరైనది, గురువు గారు?

ఉపాధ్యాయుడు : రెండు సమాధానాలు దాదాపుగా సమానం అవుతుంది.

సుధ : ఒకే ప్రశ్నకు రెండు సమాధానాలను పొందుట ఏ విధంగా సాధ్యమగును? సార్?

ఉపాధ్యాయుడు : నిజంగా దీనికి $\pi \times 7 \times 7 = 49\pi$ పై చ.సెం.మీ అనునది ఖచ్చితమైన సమాధానం అగును.

మీనా : చతురస్రం మరియు దీర్ఘ చతురస్రం మొదలగు ఆకారాల వైశాల్యాలను కనుగొనునప్పుడు మనమందరం ఒకే రకమైన జవాబును పొందెదము. కానీ వృత్త వైశాల్యము మాత్రం ఎందుకు వేరువేరుగా ఉన్నది?

ఉపాధ్యాయుడు : π విలువ ఎంత?

మీనా : π విలువ $\frac{22}{7}$ లేక 3.14

ఉపాధ్యాయుడు : నిజంగా దాని విలువ $\frac{22}{7}$ కాదు, 3.14 కాదు అవి π యొక్క రమారమి విలువలు మాత్రమే.

మీనా : అయితే, π యొక్క ఖచ్చిత విలువ ఎంత?

ఉపాధ్యాయుడు : π అనునది ఒక స్థిరాంకం. ఇది ఒక అంతమొందని ఆవర్తనం చెందని దశాంశ సంఖ్య అగును. కావున దాన్ని ఖచ్చితమైన విలువను ఉపయోగించకుండా, గణనను సులభతరం చేయుట కొరకు $\frac{22}{7}$ లేదా 3.14 లను π. యొక్క రమారమి విలువగా ఉపయోగిస్తాం.

ఆలోచించుము

1. $\frac{22}{7}$ మరియు 3.14 లు అకరణీయ సంఖ్యలగును. 'π' అనునది అకరణీయ సంఖ్య అవుతుందా? ఎందుకు?
2. 'π' దినమును మనము ఎప్పుడు వేడుకగా జరుపుకొంటాము? ఎందుకు?

మీనా : అట్లయితే వృత్త వైశాల్యం అన్నది ఎల్లప్పుడూ రమారమిగానే ఉంటుందా?

ఉపాధ్యాయుడు : లేదు, π కి ఏ విలువనూ ప్రతిక్షేపించనంతవరకు అది ఖచ్చిత సమాధానమగును. π కి $\frac{22}{7}$ లేదా 3.14 లను ప్రతిక్షేపించునపుడు లభించు సమాధానాలే రమారమిగా ఉంటాయి.

మీనా : కావున, పైన ఇవ్వబడిన లెక్కకు 49π చ.సెం.మీ అనునది సరైన జవాబగును. 154 చ.సెం.మీ మరియు 153.86 అనునవి రమారమి జవాబులగును. నేను చెప్పినది సరైనదా సార్.

ఉపాధ్యాయుడు : అవును నీవు చెప్పింది సరియే మీనా.

02_8th_Maths_Telugu_Measurements_Chap_2.indd 51 31-07-2020 12:45:14

మీకు తెలుసా?

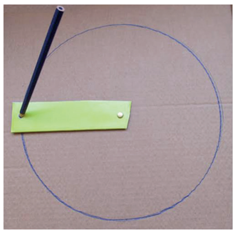
వృత్త పరిధి $2\pi r$ ప్రమాణాలు. దీనిని πd ప్రమాణాలు అని కూడా రాయవచ్చును. $\pi = 3.14$ (సుమారుగా) మరియు మూడు కంటే కొంచెం ఎక్కువ, కావున 'd' ప్రమాణం వ్యాసం కలిగిన ఒక వృత్త పరిధి అనునది దాని వ్యాసానికి మూడు రెట్ల కంటే కొంచెం ఎక్కువగా ఉంటుంది. ఇది కొన్ని సందర్భాలలో వృత్తం యొక్క చుట్టుకొలతను సుమారుగా గణించుటకు ఉపయోగపడుతుంది.

ఉదాహరణకు,

3 మీ వ్యాసం గల వృత్తాకార టేబుల్‌ని దానిచుట్టూ పూలమాలతో అలంకరించాలంటే 9 మీటర్ల కంటే కొంచెం ఎక్కువ పొడవైన పూలమాల అవసరమగును.

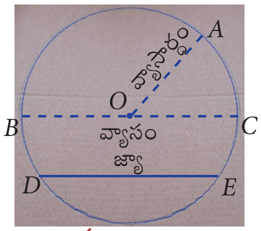
2.2 వృత్త భాగాలు

వృత్తం అనునది ఒక తలంలో గల ఒక స్థిరమైన బిందువు నుండి సమాన దూరంలో జరుగు బిందువు యొక్క నియమిత మార్గము అగును. స్థిర బిందువును వృత్త కేంద్రం అని, సమాన దూరాన్ని వృత్త వ్యాసార్థం అని అంటారు.



పటం. 2.1

ఇంకా, వృత్తంపై గల ఏదేని రెండు బిందువులను కలుపు రేఖాఖండాన్ని వృత్త జ్యా అని అంటారు. ఒక జ్యా వృత్తాన్ని రెండు భాగాలుగా విభజిస్తుంది. వృత్త కేంద్రం గుండా పోయే జ్యాను వ్యాసం అంటారు. ఒక వృత్తం యొక్క వ్యాసం ఆ వృత్తాన్ని రెండు సమాన భాగాలుగా విభజించును. ఇంకా ఇది వృత్తం యొక్క అతిపెద్ద జ్యా అవుతుంది.



పటం. 2.2

కృత్యము

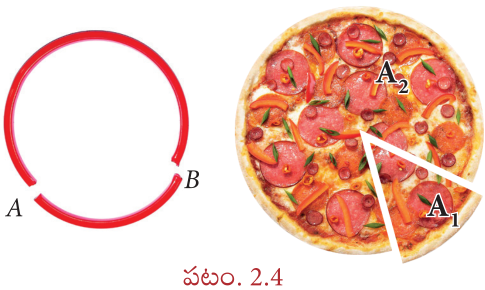
1. ఒక కాగితంలో గాజును ఉపయోగించి ఒక వృత్తమును గీచి దానిని కత్తిరించి తీయుము. వృత్త పరిధి పై ఏదేని రెండు బిందువులు A మరియు B లను గుర్తించుము. A మరియు B ల గుండా వృత్తమును మడుచుము. ఇప్పుడు లభించిన మడత రేఖ జ్యాను సూచిస్తుంది.
2. కాగితమును మడుచు పద్ధతిలో, ఒక వృత్తం యొక్క రెండు వ్యాసాలు మరియు దాని కేంద్రమును కనుగొనుము.
3. ఒక వృత్త వ్యాసమనునది దాని వ్యాసార్థానికి రెండింతలగును అనుదానిని సరిచూడుము.

2.2.1 వృత్తచాపము మరియు వృత్తసెక్టరు(త్రిజ్యాంతరము)

పటం 2.4లో ఇవ్వబడిన అద్దపు గాజు మరియు పిజ్జాలను బాగా గమనించండి. అవి రెండూ వృత్తాకారంలో ఉన్నప్పటికీ, గాజు వృత్తం యొక్క సరిహద్దును, పిజ్జా వృత్తము యొక్క సరిహద్దు లోపల ఆవరించబడిన (ఆవృతమైన) సమతలమును సూచిస్తున్నది. అనగా గాజు వృత్త పరిధిని, పిజ్జా వృత్త వైశాల్యాన్ని సూచిస్తున్నట్లు అమరినది.

పటం. 2.3

వాటి నుండి ఒక భాగమును పటం 2.5లో చూపినట్లు కత్తిరించి తీయునట్లుగా భావించుము. గాజు ముక్కలు ఒక్కొక్కటి వృత్త చాపమును సూచించును AB $\left(\overset{\frown}{AB}\right)$ అనునది లఘు లేదా అల్ప చాపాన్ని, BA ($\overset{\frown}{BA}$) అనునది అధిక చాపమును సూచిస్తున్నది.

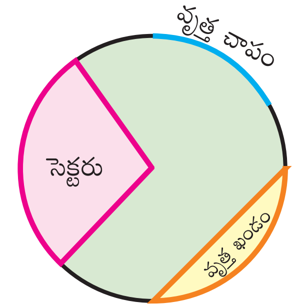


పటం. 2.4

02_8th_Maths_Telugu_Measurements_Chap_2.indd 52 31-07-2020 12:45:15

అదేవిధంగా పిజ్జా యొక్క భాగములు ఒక్కొక్కటి సెక్టరును (త్రిజ్యాంతరం) సూచించును. A_1 అనునది అల్ప సెక్టరును, A_2 అనునది అధిక సెక్టరును సూచిస్తున్నది.

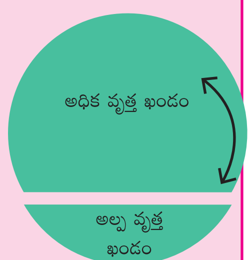
- ఒక వృత్త పరిధిలోని ఒక భాగమునే వృత్త చాపము అని అంటారు.
- ఒక చాపము మరియు దాని చివరి బిందువులను వృత్త కేంద్రంతో కలిపే వ్యాసార్థాల చేత ఆవరించబడిన ప్రాంతాన్ని సెక్టరు (త్రిజ్యాంతరం) అంటారు.
- ఒక జ్యా వృత్తాన్ని రెండు భాగాలుగా విభజిస్తుంది. ప్రతి భాగాన్ని వృత్త ఖండం అని అంటారు.



పటం. 2.5

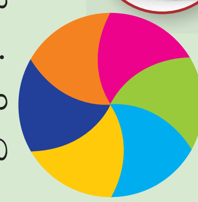
సూచన

అల్ప చాపము మరియు జ్యాచే ఆవరించబడిన ప్రాంతాన్ని **అల్ప వృత్తఖండమని** మరియు అధిక చాపము మరియు జ్యాచే ఆవరించబడిన ప్రాంతాన్ని **అధిక వృత్త ఖండం** అని పిలుస్తారు.



ఆలోచించుము

వృత్తాకార పటం ఆరు సమాన భాగాలుగా విభజించబడియున్నది. ఆ సమాన భాగాలను సెక్టరులు (త్రిజ్యాంతరాలు) అని చెప్పవచ్చునా? ఎందుకు?


పటం. 2.6

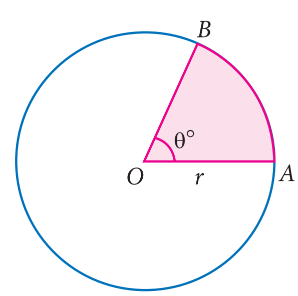
కేంద్ర కోణం

ఒక సెక్టరు, వృత్త కేంద్రం వద్ద ఏర్పరుచు కోణాన్ని కేంద్ర కోణం అంటారు. కేంద్ర కోణం యొక్క శీర్షం వృత్త కేంద్రం అగును. దానికి రెండు భుజాలుగా వ్యాసార్ధాలు కలవు. పటము 2.8లో ఛాయ చేయబడిన సెక్టరు నందు కేంద్ర కోణం $\angle AOB = \theta^\circ$ (theta అని చదవాలి) మరియు దాని రెండు భుజాలు OA మరియు OB లు వ్యాసార్థాలగును.

ఒక వృత్తం యొక్క కేంద్ర కోణం 360°. ఒక వృత్తమును 'n' సమాన సెక్టరులుగా విభజించినపుడు, లభించు ప్రతి సెక్టరు యొక్క వృత్త కేంద్ర కోణం $\theta^\circ = \dfrac{360^\circ}{n}$.

ఉదాహరణకు, అర్ధవృత్తం యొక్క కేంద్ర కోణం $= \dfrac{360^\circ}{2} = 180^\circ$ మరియు

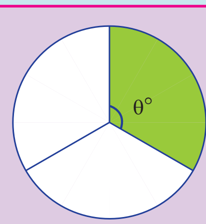
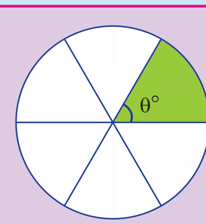
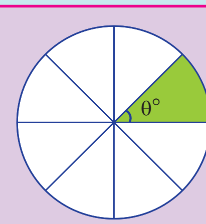
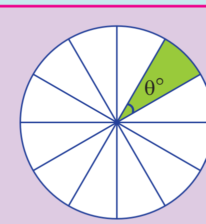
పావువృత్తం యొక్క కేంద్ర కోణం $= \dfrac{360^\circ}{4} = 90^\circ$.



పటం. 2.7

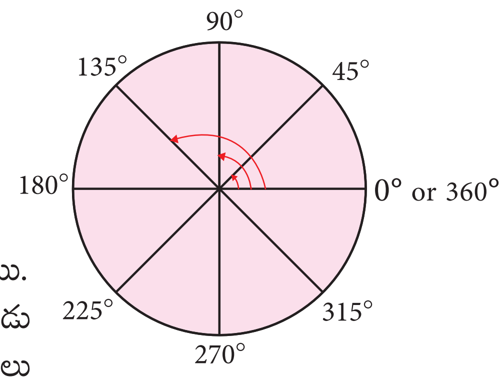
ప్రయత్నించుము

ఛాయ చేయబడిన సెక్టరుల యొక్క కేంద్ర కోణాన్ని కనుగొనుము (ప్రతి వృత్తం సమానమైన సెక్టరులుగా విభజింపబడినది.)

సెక్టరులు				
కేంద్రకోణం $\theta^\circ \left(= \dfrac{360^\circ}{n}\right)$	$\theta^\circ = 120^\circ$			

02_8th_Maths_Telugu_Measurements_Chap_2.indd 53 31-07-2020 12:45:19

2.2.2 వృత్త చాపము పొడవు మరియు సెక్టరు వైశాల్యం



పటం. 2.8

'r' ప్రమాణాలు వ్యాసార్ధం గల ఒక వృత్తం యొక్క

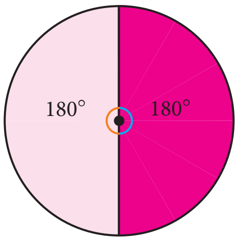
కేంద్ర కోణం = 360°

వృత్త పరిధి = $2\pi r$ ప్రమాణాలు

మరియు వృత్త వైశాల్యం = πr^2 చదరపు ప్రమాణాలు

అని మనం ముందే నేర్చుకొన్నాము.

మొదట ఒక అర్ధ వృత్తమును తీసుకొనుము. ఒక వృత్తాన్ని రెండు సమాన భాగాలు గల సెక్టరులుగా విభజించినపుడు రెండు అర్ధవృత్తాలు లభించును. అర్ధవృత్త చాపము పొడవు ఆ వృత్త పరిధిలో సగం ఉంటుంది.

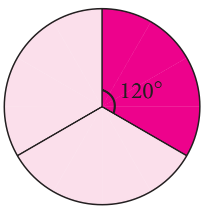


పటం. 2.9

$\therefore$ అర్ధ వృత్త చాపము పొడవు $= \frac{1}{2} \times 2\pi r = \frac{180^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$ ప్రమాణాలు.

అర్ధ వృత్త వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times \pi r^2 = \frac{180^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$ చదరపు ప్రమాణాలు

ఇప్పుడు, ఒక వృత్తాన్ని మూడు సమాన సెక్టరులుగా విభజించిన.

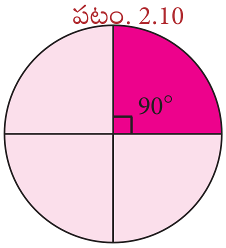


పటం. 2.10

ఇప్పుడు, ఈ సెక్టరు యొక్క చాపము పొడవు $= \frac{1}{3} \times 2\pi r = \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$ ప్రమాణాలు

మరియు సెక్టరు యొక్క వైశాల్యం $= \frac{1}{3} \times \pi r^2 = \frac{120^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$ చ.ప్ర॥.

అదేవిధంగా, ఒక వృత్తాన్ని 4 సమాన సెక్టరులుగా విభజించిన.



పటం. 2.11

$\therefore$ పావు వృత్త చాపము పొడవు $= \frac{1}{4} \times 2\pi r = \frac{90^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$ ప్రమాణాలు.

మరియు పావు వృత్త వైశాల్యం $= \frac{1}{4} \times \pi r^2 = \frac{90^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$ చ.ప్రమాణాలు

దీని నుండి మనం గ్రహించినదేమి?

ఒక సెక్టరు యొక్క కేంద్ర కోణానికి, ఆ వృత్తం యొక్క కేంద్ర కోణానికి మధ్యగల నిష్పత్తిలో వృత్తం యొక్క పరిధి మరియు వైశాల్యములను గమనించిన, వరుసగా ఆ సెక్టరు యొక్క చాపము పొడవు, దాని వైశాల్యమును కనుగొనవచ్చును.

అనగా, 'r' ప్రమాణాలు వ్యాసార్ధం గల ఒక సెక్టరు యొక్క కేంద్ర కోణం 'θ°' అనుకొనిన కేంద్ర కోణం θ° నకు 360° నకు మధ్య గల నిష్పత్తి $\frac{\theta^\circ}{360^\circ}$.

> $\therefore$ సెక్టరు యొక్క చాపము పొడవు, $l = \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$ ప్రమాణాలు. మరియు
>
> సెక్టరు యొక్క వైశాల్యం, $A = \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$ చదరపు ప్రమాణాలు.

ఆలోచించుము

$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ మరియు $\frac{1}{4}$, లచే గుణించుటకు బదులుగా $\frac{180^\circ}{360^\circ}, \frac{120^\circ}{360^\circ}$ మరియు $\frac{90^\circ}{360^\circ}$ లతో క్రమంగా గుణించారు. ఎందుకు?

02_8th_Maths_Telugu_Measurements_Chap_2.indd 54 31-07-2020 12:45:22

సూచన

1. r ప్రమాణాలు వ్యాసార్థంగా గల ఒక వృత్తాన్ని n సమాన సెక్టరులుగా విభించినపుడు లభించు

ప్రతి సెక్టరు యొక్క చాపము పొడవు $= \frac{1}{n} \times 2\pi r$ ప్రమాణాలు మరియు

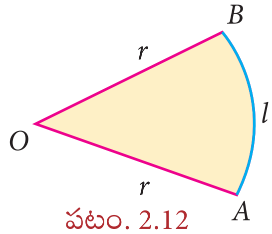
ప్రతి సెక్టరు యొక్క వైశాల్యం $= \frac{1}{n} \times \pi r^2$ చదరపు ప్రమాణాలు

2. ఇంకా, సెక్టరు యొక్క వైశాల్యం $= \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{\theta^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r\right) \times r$

$= \left(\frac{1}{2} \times l\right) \times r = \frac{lr}{2}$ చదరపు ప్రమాణాలు

2.2.3 సెక్టరు యొక్క చుట్టుకొలత



పటం. 2.12

ఒక సంవృత (మూయబడిన) భాగపు హద్దు యొక్క మొత్తం పొడవునే దాని చుట్టుకొలత అంటారని మనకు ముందే తెలుసుకదా? సెక్టరు యొక్క హద్దు ఏది? రెండు వ్యాసార్థాలు (OA మరియు OB) మరియు ఒక చాపము $(\overset{\frown}{AB})$

కావున, సెక్టరు యొక్క చుట్టుకొలత, = చాపము పొడవు + రెండు వ్యాసార్థాల పొడవు

$P = l + 2r$ ప్రమాణాలు

$\therefore$ సెక్టరు యొక్క చుట్టుకొలత, $P = l + 2r$ ప్రమాణాలు.

మీకు తెలుసా?

గణిత శాస్త్ర చరిత్రలో తమిళులకు ఎప్పుడూ మొదటి స్థానం కలదు. వృత్త వైశాల్యమును కొనుగొను పద్ధతిని కొన్ని వేల సంవత్సరాల క్రితమే "కనక్కధికారం" **'கணக்கதிகாரம்'** అనబడే గంధ్రంలో తమిళులు పాట రూపంలో రచించెను.

> **"வட்டத்தரை கொண்டு விட்டத்தரை தாக்கச்**
> **சட்டெனத் தோன்றும் குழி"**

భావము:

'வட்டத்தரை' అనునది చుట్టుకొలతలో సగాన్ని, **'விட்டத்தரை'** అనునది వ్యాసంలో సగమైన వ్యాసార్థాన్ని మరియు **'குழி'** అనునది వైశాల్యమును సూచించును. అనగా చుట్టుకొలతలో సగాన్ని, వ్యాసంలో సగమైన వ్యాసార్థముతో గుణించిన వృత్త వైశాల్యం లభించును

వృత్త వైశాల్యం = **வட்டத்தரை** × **விட்டத்தரை**

$= \frac{1}{2}$ చుట్టుకొలత $\times \frac{1}{2}$ వ్యాసము $= \left(\frac{1}{2} \times 2\pi r\right) \times r$

$\therefore$ వృత్త వైశాల్యము, $A = \pi r^2$ చదరపు ప్రమాణాలు.

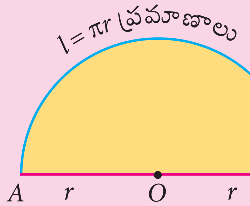
02_8th_Maths_Telugu_Measurements_Chap_2.indd 55 31-07-2020 12:45:25

సూచన

1. అర్ధ వృత్తం చుట్టుకొలత

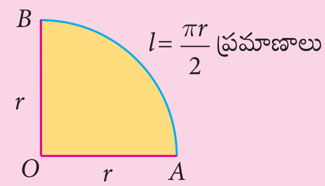
$P = l + 2r$ ప్రమాణాలు

$= \pi r + 2r = (\pi + 2)r$ ప్రమాణాలు



2. పావు వృత్తం చుట్టుకొలత

$P = l + 2r \quad = \frac{\pi r}{2} + 2r = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) r$ ప్రమాణాలు



ఉదాహరణ 2.1

ఒక సెక్టరు యొక్క వ్యాసార్ధం 21 సెం.మీ మరియు దాని కేంద్ర కోణం 120° అయిన, దాని (i) చాపము పొడవు (ii) వైశాల్యం (iii) చుట్టుకొలత కనుగొనండి. $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

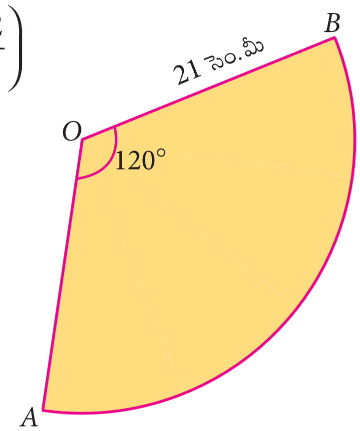
సాధన:

వ్యాసార్ధము, $r = 21$ సెం.మీ మరియు కేంద్రకోణము, $\theta = 120^\circ$.

(i) చాపము పొడవు , $l = \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \times 2\pi r$ ప్రమాణాలు

$= \frac{120^\circ}{360^\circ} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$

= 44 సెం.మీ (ఉజ్జాయింపుగా)



పటం. 2.13

(ii) సెక్టరు యొక్క వైశాల్యం, $A = \frac{\theta^\circ}{360^\circ} \times \pi r^2$ చదరపు ప్రమాణాలు

$= \frac{120^\circ}{360^\circ} \times \frac{22}{7} \times 21 \times 21$

$A = 462$ సెం.మీ (ఉజ్జాయింపుగా)

మరొక పద్ధతి:

సెక్టరు యొక్క వైశాల్యం

$A = \frac{lr}{2}$ చ.ప్రమాణాలు

$= \frac{44 \times 21}{2} = 462$ సెం.మీ^{2}

(iii) సెక్టరు యొక్క చుట్టుకొలత, $P = l + 2r$ ప్రమాణాలు

$= 44 + 2 \times 21$

$= 44 + 42 = 86$ సెం.మీ (ఉజ్జాయింపుగా)

ఉదాహరణ 2.2

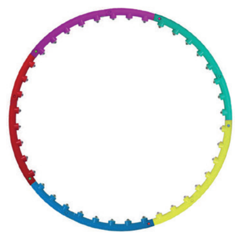
35 సెం.మీ వ్యాసార్ధం గల వృత్తాకార జిమ్నాస్టిక్ వలయమును 5 సమాన చాపాలుగా విభజించి వివిధ రంగులతో పూయబడినది. అయితే ప్రతి వృత్త చాపము పొడవును కనుగొనండి.

సాధన:

వ్యాసార్ధము, $r = 35$ సెం.మీ మరియు $n = 5$.

ప్రతి చాపము పొడవు, $l = \frac{1}{n} \times 2\pi r$ ప్రమాణాలు

$= \frac{1}{5} \times 2 \times \pi \times 35 \; = 14\pi$ సెం.మీ.

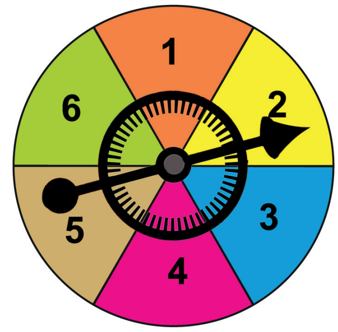


పటం. 2.14

02_8th_Maths_Telugu_Measurements_Chap_2.indd 56 31-07-2020 12:45:28

ఉదాహరణ 2.3

7.5 సెం.మీ వ్యాసార్థం గల ఒక స్పిన్నర్ 6 సమాన సెక్టరులుగా విభజింపబడినది. అయిన ఒక్కొక్క సెక్టరు వైశాల్యమును కనుగొనండి?



పటం. 2.15

సాధన:

వ్యాసార్ధము, $r = 7.5$ సెం.మీ మరియు $n = 6$.

సెక్టరు యొక్క వైశాల్యం, $A = \frac{1}{n} \times \pi r^2$ చదరపు ప్రమాణాలు

$$= \frac{1}{6} \times \pi \times 7.5 \times 7.5$$

$$= 9.375\pi \text{ చ.సెం.మీ.}$$

ఉదాహరణ 2.4

కమలేష్ వద్ద 70సెం.మీ వ్యాసార్థం గల వృత్తాకార డైనింగ్ టేబుల్, తరుణ్ వద్ద 140 సెం.మీ వ్యాసార్థం గల పావు వృత్తాకార డైనింగ్ టేబుల్ కలవు. అయినా ఎవరి డైనింగ్ టేబుల్ ఎక్కువ వైశాల్యాన్ని కలిగి ఉన్నది? $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

పటం. 2.16

సాధన:

కమలేష్ వద్ద గల డైనింగ్ టేబుల్ వైశాల్యం = πr^2 చ.ప్రమా

$$= \frac{22}{7} \times 70 \times 70$$

$$A = 15400 \text{ చ.సెం.మీ (సుమారుగా)}$$

తరుణ్ వద్దగల పావు వృత్తాకార డైనింగ్ టేబుల్ వైశాల్యం

$$= \frac{1}{4}\pi r^2 = \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times 140 \times 140$$

$$A = 15400 \text{ చ.సెం.మీ (సుమారుగా)}$$

ఇద్దరి డైనింగ్ టేబుళ్ళ వైశాల్యం సమానంగా ఉన్నది.

పటం. 2.17

ఆలోచించుము

ఒక వృత్తం యొక్క వ్యాసార్థం రెండింతలైన లభించు కొత్త వృత్తం యొక్క వైశాల్యము ఏమగును?

ఉదాహరణ 2.5

7 సెం.మీ వ్యాసం గల నాలుగు పతకములను పటం 2.18లో చూపిన విధంగా ఉంచబడినది. పతకముల మధ్యలో షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతపు వైశాల్యాన్ని కనుగొనుము. $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

పటం. 2.18

02_8th_Maths_Telugu_Measurements_Chap_2.indd 57 31-07-2020 12:45:29

సాధన:

వ్యాసము, $d = 7$ సెం.మీ, కనుక $r = \frac{7}{2}$ సెం.మీ.

షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతపు వైశాల్యం = చతురస్ర వైశాల్యం – 4 × పావువృత్త వైశాల్యం

$$= a^2 - 4 \times \frac{1}{4}\pi r^2$$

$$= (7 \times 7) - \left(4 \times \frac{1}{4} \times \frac{22}{7} \times \frac{7}{2} \times \frac{7}{2}\right)$$

$= 49 - 38.5 = 10.5$ చ.సెం.మీ (సుమారుగా)

అభ్యాసము 2.1

1. **ఖాళీలను పూరింపుము:**

   (i) వృత్త పరిధికి, దాని వ్యాసానికి మధ్య గల నిష్పత్తి ________.

   (ii) ఒక వృత్తంపై గల ఏదేని రెండు బిందువులను కలిపే రేఖ ____________.

   (iii) ఒక వృత్తపు అతిపెద్ద జ్యా ___________ అగును.

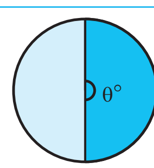
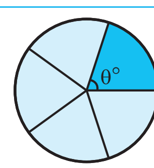
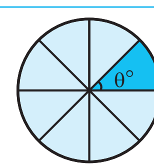
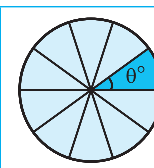
   (iv) వ్యాసం 24 సెం.మీ గా గల వృత్త వ్యాసార్ధం ___________.

   (v) వృత్త పరిధిలోని ఒక భాగమునే ___________ అంటారు.

2. **క్రింది వాటిని జతపరుచుము:**

(i) వృత్త వైశాల్యం	-	(a) $\frac{1}{4}\pi r^2$
(ii) వృత్త పరిధి	-	(b) $(\pi + 2)r$
(iii) సెక్టరు వైశాల్యం	-	(c) πr^2
(iv) అర్ధ వృత్త చుట్టుకొలత	-	(d) $2\pi r$
(v) పావు వృత్త వైశాల్యం	-	(e) $\frac{\theta°}{360°} \times \pi r^2$

3. షేడ్ చేయబడిన సెక్టరు యొక్క కేంద్ర కోణాన్ని కనుగొనండి. (ప్రతి వృత్తము సమాన సెక్టరులుగా విభజింపబడినది.)

సెక్టరులు				
కేంద్రకోణం ($\theta°$)				

4. కింద ఇవ్వబడిన కొలతలను కలిగిన సెక్టరుల యొక్క చాపము పొడవు, వైశాల్యము మరియు చుట్టుకొలతను కనుగొనండి..(π=3.14)

   (i) కేంద్ర కోణం 45°, r = 16 సెం.మీ (ii) కేంద్ర కోణం 120°, d =12.6 సెం.మీ

5. క్రింద ఇవ్వబడిన కొలతలను కలిగిన సెక్టరుల వైశాల్యమును కనుగొనండి.

   (i) చాపము పొడవు = 48 మీ, r = 10 మీ (ii) చాపము పొడవు = 50 సెం.మీ, r = 13.5 సెం.మీ

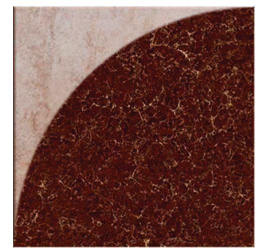
02_8th_Maths_Telugu_Measurements_Chap_2.indd 58 31-07-2020 12:45:31

6. క్రింద ఇవ్వబడిన కొలతలను కలిగిన సెక్టరుల కేంద్ర కోణాన్ని కనుగొనండి. $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

(i) వైశాల్యము = 462 సెం.మీ^{2}, r = 21 సెం.మీ (ii) చాపము పొడవు = 44 మీ, r = 35 మీ

7. 120 వ్యాసార్ధం గల వృత్తాన్ని 8 సమాన సెక్టర్లుగా విభజించిన, ప్రతి సెక్టరు యొక్క చాపము పొడవును కనుగొనండి.

8. 70 సెం.మీ వ్యాసార్ధం గల వృత్తాన్ని 5 సమాన సెక్టర్లుగా విభజించినట్లైతే, ప్రతి సెక్టరు యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.

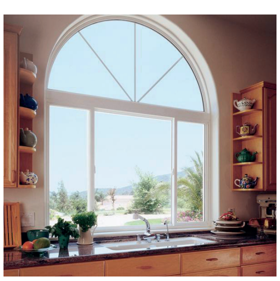


9. దాము తన ఇంటిలో 30 సెం.మీ భుజ కొలత కలిగిన చతురస్రాకార టైల్స్‌ని పరిచెను. ఆ టైల్ పైన ఆకృతి పటంలో చూపిన విధంగా ఉన్నది. అయిన దానిలో గల సెక్టరు వైశాల్యమును కనుగొనండి. $(\pi = 3.14)$.

10. కేంద్రకోణం 45° మరియు వ్యాసార్ధం 56సెం.మీ గా గల 8 సమాన సెక్టరు ఆకార గ్రానైట్ రాళ్ళతో పటంలో చూపినట్లు వృత్తము ఏర్పరచబడినది. అయిన ప్రతి సెక్టరు వైశాల్యమును కనుగొనండి. $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

2.3 సంయుక్త ఆకారములు

మనం నిత్యజీవితంలో వృత్తం, త్రిభుజం, చతురస్రం, దీర్ఘచతురస్రం, సమ చతుర్భుజం మొదలగు ఆకారాలలో అపరిమితమైన సంఖ్యలో వస్తువులను ఉపయోగిస్తున్నామని తెలుసు కదా! ఇంకా వాటిని వేరువేరుగా ఉపయోగించడమే కాకుండా రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ ఆకారాలను ఒకటిగా చేర్చి కొత్త ఆకారాలలోను ఉపయోగిస్తున్నాం.

			
కిటికీ అద్దం	నమూనా ఇల్లు	ఆహ్వాన పత్రిక	లాకర్

పై చిత్రముల నుండి నీవు ఏమి గమనించితివి?

కిటికీ అద్దం ఆకారము దీర్ఘచతురస్రం పైన అర్ధ వృత్తాన్ని ఉంచినట్లుగా, నమూనా ఇంటి యొక్క ముందు భాగం చతురస్రం పైన త్రిభుజాన్ని ఉంచినట్లుగాను ఉన్నది.

ఆహ్వాన పత్రిక మరియు లాకర్‌లను తయారుచేయుటకు ఉపయోగించిన ఆకారాలను తెలపండి.

ఈ విధంగా, రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ సమతల ఆకారాలను, ఒక ఆకారపు ఏదైనా ఒక భుజాన్ని అదే పొడవు గల మరొక ఆకారపు భుజముతో ఒకటిగా చేర్చి తయారు చేయబడు కొత్త ఆకారాలనే సంయుక్త ఆకారాలు అంటారు.

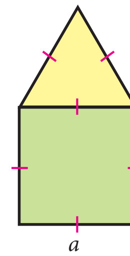
02_8th_Maths_Telugu_Measurements_Chap_2.indd 59 31-07-2020 12:45:31

2.3.1 సంయుక్త ఆకారముల చుట్టుకొలత

సంయుక్త ఆకారాల చుట్టుకొలత అనునది ఆ సంవృత ఆకారం చుట్టూ హద్దులుగా గల అన్ని భుజాల పొడవుల మొత్తం అగును.

ఉదాహరణకు, a ప్రమాణాలు భుజంగా గల ఒక చతురస్రం మరియు a ప్రమాణాలు గల ఒక సమభుజ త్రిభుజాన్ని ఒకటిగా కలిపి ఏర్పరచిన సంయుక్త ఆకారాన్ని పటం 2.23లో గమనించవచ్చును.

చతురస్రమునకు 4 భుజాలు మరియు త్రిభుజమునకు 3 భుజాలు వంతున మొత్తం 7 భుజాలు ఉన్నప్పటికీ వాటిని ఒకటిగా కలిపి ఏర్పరచిన సంయుక్త అకారమునకు చుట్టూ హద్దుగాగల భుజముల సంఖ్య 5 మాత్రమే, 7 భుజాలు కాదు. కావున ఇవ్వబడిన సంయుక్త ఆకారపు చుట్టుకొలత $5a$ ప్రమాణాలు అవుతుంది.



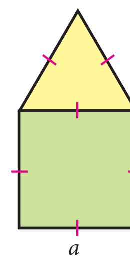
పటం. 2.19

2.3.2 సంయుక్త ఆకారముల వైశాల్యం

సంయుక్త ఆకారముల వైశాల్యమును కనుగొనుటకు, ఆ ఆకారమును మనకు ముందే తెలిసిన ఆకారములుగా విభజించి, వాటి వైశాల్యములను వేర్వేరుగా కనుగొని, అన్నిటినీ కూడవలెను. అనగా, సంయుక్త ఆకారాన్ని ఏర్పరచు అన్ని సాధారణ ఆకారముల వైశాల్యముల మొత్తం అగును.

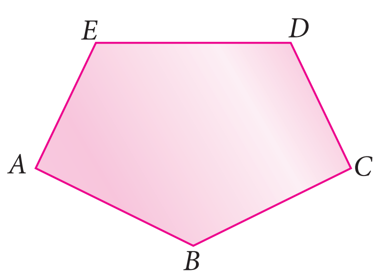
పటం 2.24లో ఇవ్వబడిన సంయుక్త ఆకారపు వైశాల్యమును కనుగొనుటకు, చతురస్ర వైశాల్యమును, త్రిభుజ వైశాల్యమును వేరువేరుగా కనుగొని వాటిని కూడవలెను.

మనం నిత్యజీవితంలో ఉపయోగించే సంయుక్త ఆకారములలో క్రమరహిత బహుభుజిలే ఎక్కువగా ఉంటుంది. వాటి వైశాల్యములను కనుగొనుటకు, వాటిలో గల సాధారణ ఆకారముల వైశాల్యములను వేర్వేరుగా కనుగొని వాటిని కూడవలెను.

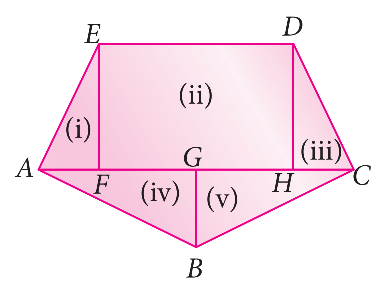


పటం. 2.20

ఉదాహరణకు, క్రమరహిత బహుభుజి ఆకారంలో గల ఒక పొలమును క్రింది ఇవ్వబడినట్లు సాధారణ ఆకారములుగా విభజించడం ద్వారా దాని వైశాల్యమును కనుగొనవచ్చును.



పటం. 2.21



పటం. 2.22

మీకు తెలుసా?

మూడు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ భుజములతో ఏర్పరచబడిన సంవృత సమతల ఆకారమునే బహుభుజి అంటారు. కొన్ని బహుభుజిలను క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడింది.

భుజాల సంఖ్య	3	4	5	6	7	8	9	10
బహుభుజి పేరు	త్రిభుజం	చతుర్భుజం	పంచభుజి	షడ్భుజి	సప్త భుజి	అష్ట భుజి	నవ భుజి	దశ భుజి

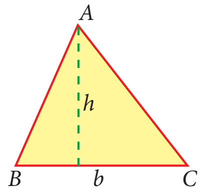
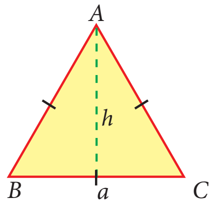
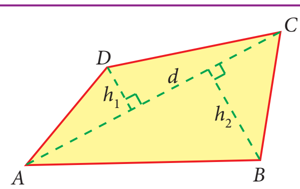
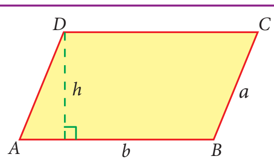
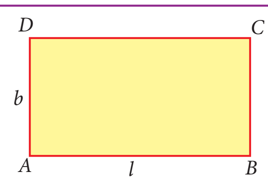
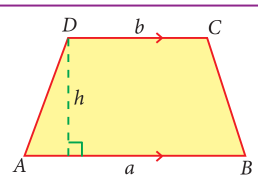
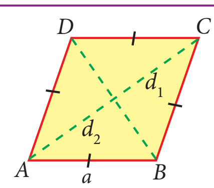
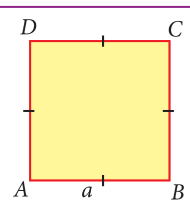
బహుభుజి యొక్క అన్ని భుజాలు మరియు అన్ని కోణాలు సమానంగా ఉంటే దానిని 'క్రమబహుభుజి' అంటారు. ఉదాహరణలు: సమ భుజ త్రిభుజం, చతురస్రం మొదలగునవి. ఇతర బహుభుజిలను 'క్రమరహిత బహుభుజిలు' అంటారు. ఉదాహరణ: విషమ బాహు త్రిభుజం, దీర్ఘ చతురస్రం.

02_8th_Maths_Telugu_Measurements_Chap_2.indd 60 31-07-2020 12:45:31

ఆలోచించుము

సమబాహు చతుర్భుజము లోని అన్ని భుజాలు సమానం. ఇది ఒక క్రమబహుభుజి అవుతుందా?

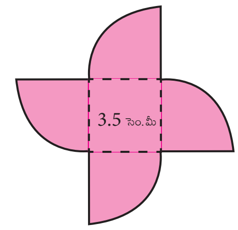
సంయుక్త పటముల వైశాల్యం మరియు చుట్టుకొలతలను కనుగొనుట కొరకు, ముందు తరగతులలో నేర్చుకొన్న కొన్ని సమతల పటముల వైశాల్యం మరియు చుట్టుకొలతలను కనుగొను సూత్రములు క్రింద ఇవ్వబడినవి.

వ.సం	ఆకారము	పేరు	వైశాల్యం (చ.ప్రమాణాలు)	చుట్టుకొలత (ప్రమాణాలు)
1		త్రిభుజం	$\frac{1}{2}\times b\times h$	మూడు భుజాల మొత్తం
2		సమభుజ త్రిభుజం	$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \left(h=\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)$	$3a$
3		చతుర్భుజము	$\frac{1}{2}\times d\times(h_1+h_2)$	నాలుగు భుజాల మొత్తం
4		సమాంతర చతుర్భుజం	$b\times h$	$2(a+b)$
5		దీర్ఘ చతురస్రం	$l\times b$	$2(l+b)$
6		సమలంబ చతుర్భుజం	$\frac{1}{2}\times h\times(a+b)$	నాలుగు భుజాల మొత్తం
7		సమబాహు చతుర్భుజము	$\frac{1}{2}\times d_1\times d_2$	4a
8		చతురస్రం	a^2	4a

02_8th_Maths_Telugu_Measurements_Chap_2.indd 61 31-07-2020 12:45:34

ఉదాహరణ 2.6

పటం 2.27లో ఇవ్వబడిన సంయుక్త ఆకారపు చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యాన్ని కనుగొనండి. $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$



పటం. 2.23

సాధన:

పావువృత్త వ్యాసార్థము, $r = 3.5$ సెం.మీ మరియు చతురస్ర భుజము, $a = 3.5$ సెం.మీ.

ఇవ్వబడిన సంయుక్త ఆకారము, 4 పావు వత్తములను ఒక చతురస్రం యొక్క ప్రతి భుజానికి కలపబడి ఏర్పరచబడింది. దాని హద్దులుగా 4 వ్యాసార్థములు మరియు 4 పావు వృత్త చాపములు కలవు.

(i) సంయుక్త ఆకారపు చుట్టుకొలత

= 4 $\times$ పావు వృత్త చాపముల పొడవు + 4 $\times$ వ్యాసార్థము

$$= \left(4 \times \frac{1}{4} \times 2\pi r\right) + 4r$$

$$= \left(4 \times \frac{1}{4} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 3.5\right) + (4 \times 3.5)$$

= 22 + 14 = 36 సెం.మీ (సుమారుగా)

(ii) సంయుక్త ఆకారపు వైశాల్యం

= చతురస్ర వైశాల్యం + 4 $\times$ పావు వృత్త వైశాల్యం

$$= a^2 + \left(4 \times \frac{1}{4} \pi r^2\right)$$

$$= (3.5 \times 3.5) + \left(\frac{22}{7} \times 3.5 \times 3.5\right)$$

A = 12.25+38.5 = 50.75 సెం.మీ^{2} (సుమారుగా)

ఉదాహరణ 2.7

ఒక తాళం చెవి గొలుసును భుజం కొలత 5 సెం.మీ గా గల చతురస్రముతో ఒక సమభుజ త్రిభుజము మరియు ఒక అర్ధవృత్తం పటం 2.30లో చూపినట్లు కలిపి తయారు చేయబడింది. అయినా దాని వైశాల్యం కనుగొనుము. $\left(\pi = 3.14, \sqrt{3} = 1.732\right)$

పటం. 2.24

సాధన:

చతురస్రం భుజం కొలత = 5 సెం.మీ

అర్ధ వృత్త వ్యాసం = 5 సెం.మీ $\Rightarrow$ వ్యాసార్ధం = 2.5 సెం.మీ

సమభుజ త్రిభుజ భుజం = 5 సెం.మీ

$\therefore$ తాశం చెవి గొలుసు యొక్క వైశాల్యం = అర్ధవృత్తం వైశాల్యం + చతురస్రం వైశాల్యం + సమభుజ త్రిభుజం వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2}\pi r^2 + a^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 3.14 \times 2.5 \times 2.5\right) + (5 \times 5) + \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \times 5 \times 5\right)$$

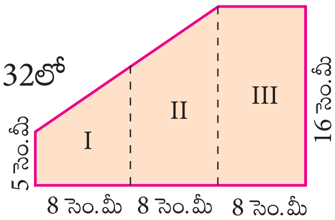
$$= 9.81 + 25 + 10.83$$

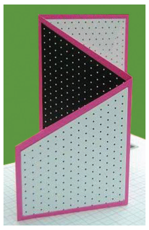
= 45.64 సెం.మీ^{2} (సుమారుగా)

02_8th_Maths_Telugu_Measurements_Chap_2.indd 62 31-07-2020 12:45:36

ఉదాహరణ 2.8

మూడు మడతలు కలిగిన ఒక ఆహ్వాన పత్రిక పటం 2.32లో ఉన్నట్లు కొలతలను కలిగియున్నది. దాని వైశాల్యమును కనుగొనండి.





పటం. 2.25

సాధన:

భాగము I మరియు II లు సమలంబ చతుర్భుజములగును. అదేవిధంగా వాటి ఏకీకృత రూపం కూడా సమలంబ చతుర్భుజం అగును.

ఏకీకృత సమలంబ చతుర్భుజం యొక్క సమాంతర భుజాలు (I మరియు II) 5 సెం.మీ మరియు 16 సెం.మీ

దాని ఎత్తు, $h = 8 + 8 = 16$ సెం.మీ

దీర్ఘ చతురస్రం పొడవు (III) = 16 సెం.మీ

దీర్ఘ చతురస్రం వెడల్పు = 8 సెం.మీ

$\therefore$ ఆహ్వాన పత్రిక వైశాల్యం = ఏకీకృత సమలంబ చతుర్భుజం వైశాల్యం + దీర్ఘ చతురస్రం వైశాల్యం

$$= \frac{1}{2} \times h \times (a+b) + l \times b$$

$$= \frac{1}{2} \times 16 \times (5+16) + 16 \times 8$$

$$= 168 + 128 = 296 \text{ సెం.మీ}^2$$

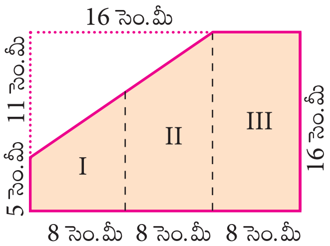
ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతి:

ఆహ్వాన పత్రిక వైశాల్యం = బాహ్య దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యం − లంబకోణ త్రిభుజం వైశాల్యం

$$= (l \times b) - \left(\frac{1}{2} \times b \times h\right)$$

$$= (24 \times 16) - \left(\frac{1}{2} \times 11 \times 16\right)$$

$$= 384 - 88 = 296 \text{ సెం.మీ}^2$$



పటం. 2.26

ఉదాహరణ 2.9

శీను తన వంట గదిలో వేయుటకు పటం 2.34 లో ఉన్న విధంగా ఒక ఫ్లోర్‌మ్యాటును కొనదలిచెను. ఫ్లోర్ మ్యాట్ ధర ఒక చదరపు అడుగుకి ₹ 20 వంతున మొత్తం ఫ్లోర్ మ్యాట్ కొనుటకు అయ్యే ఖర్చు ఎంత?

పటం. 2.27

సాధన:

ఫ్లోర్‌మ్యాట్‌ని క్రింది విధంగా రెండు దీర్ఘచతురస్రాలుగా విభజించవచ్చు

02_8th_Maths_Telugu_Measurements_Chap_2.indd 63 31-07-2020 12:45:37

∴ ఫ్లోర్ మ్యాట్ వైశాల్యం

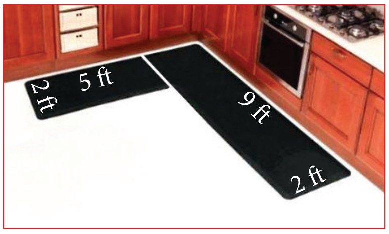
= దీర్ఘచతురస్రం I వైశాల్యం + దీర్ఘచతురస్రం II వైశాల్యం

$= (l_1 \times b_1) + (l_2 \times b_2)$

$= (5\times2)+(9\times2) = 10+18 = 28$ చ.అడుగులు

ఒక చదరపు అడుగు ఫ్లోర్‌మ్యాట్ ధర = ₹ 20

∴ మొత్తం ఫ్లోర్ మ్యాట్ కొనుటకు అయ్యే ఖర్చు = 28 × 20 = ₹ 560.



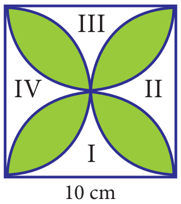
పటం. 2.28

ప్రయత్నించుము

పై ఉదాహరణలో ఇవ్వబడిన ఫ్లోర్‌మ్యాట్‌ను రెండు సమలంబ చతుర్భుజములుగా విభజించి మీ సమాధానమును సరిచూడుము.

ఉదాహరణ 2.10

పటం 2.29లో ఇవ్వబడినట్లు భుజం కొలత 10సెం.మీ గా గల చతురస్రంలో గల షేడ్ చేయబడిన భాగపు వైశాల్యమును కనుగొనండి.



పటం. 2.29

సాధన:

షేడ్ చేయబడని భాగాన్ని పటంలో ఇవ్వబడినట్లు I, II, III మరియు IV అని తీసుకొనుము.

భాగం I మరియు IIIల వైశాల్యం = చతురస్ర వైశాల్యం – రెండు అర్ధవృత్తములు వైశాల్యం

$= a^2 - \left(2\times\frac{1}{2}\pi r^2\right)$

$= (10\times10) - \left(\frac{22}{7}\times5\times5\right)$ = 100 – 78.57 = 21.43 సెం.మీ^{2} (సుమారుగా)

అదేవిధంగా భాగం II మరియు IV ల వైశాల్యం = 21.43 సెం.మీ^{2} (సుమారుగా)

∴ షేడ్ చేయబడని భాగం వైశాల్యం (I, II, III మరియు IV)

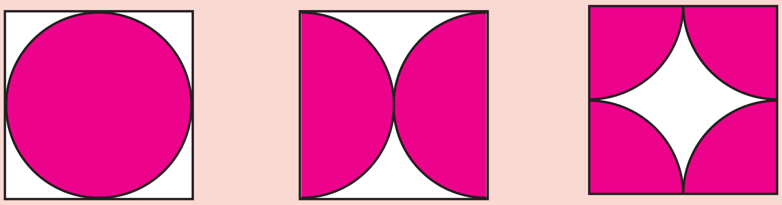
= 21.43 ×2 = 42.86 సెం.మీ^{2} (సుమారుగా)

∴ షేర్ చేయబడిన భాగం వైశాల్యం = చతురస్రం వైశాల్యం – షేడ్ చేయబడని భాగం వైశాల్యం

= 100 – 42.86 = 57.14 సెం.మీ^{2} (సుమారుగా)

మీకు తెలుసా?

1. కింద ఇవ్వబడిన *a* ప్రమాణాలు భుజం కొలత కలిగిన ప్రతి చిత్రంలోను షేడ్ చేయబడిన భాగపు వైశాల్యం సమానమని నిరూపించండి.

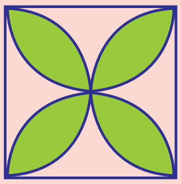


02_8th_Maths_Telugu_Measurements_Chap_2.indd 64 31-07-2020 12:45:38

2. 'a' ప్రమాణాలు భుజము గల ఒక చతురస్రమునుంచి అతిపెద్ద వృత్తమును కత్తిరించిగా చతురస్రములో మిగిలిన వైశాల్యము సూమారుగా $\frac{3}{14}a^2$ చదరపు $\left(\pi=\frac{22}{7}\right)$ ప్రమాణాలు.

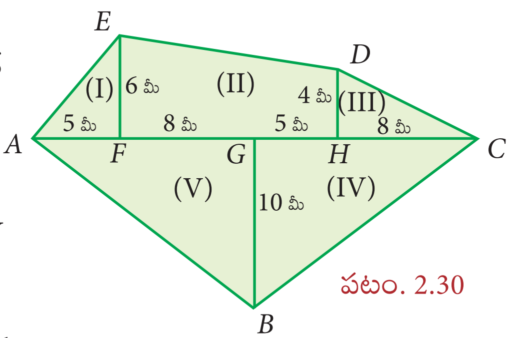
3. 'a' ప్రమాణాలు గల చతురస్రము నుంచి కత్తిరించిన అతిపెద్ద వృత్తము వైశాల్యము = $\frac{11}{14}a^2$ చదరపు ప్రమాణాలు (సూమారుగా)

4. $\pi=\frac{22}{7}$ అయిన, పటంలో ఇవ్వబడిన a ప్రమాణాలు భుజం కొలతగా గల ఒక చతురస్రంలో షేడ్ చేయబడని భాగపు వైశాల్యం సుమారుగా $\frac{3}{7}a^2$ చదరపు ప్రమాణాలు మరియు షేడ్ చేయబడిన భాగపు వైశాల్యం $\frac{4}{7}a^2$ చదరపు ప్రమాణాలు అని నిరూపించండి.



ఉదాహరణ 2.11

పటంలో ఇవ్వబడిన విధంగా కొలతలను కలిగిన క్రమరహిత బహుభుజి ఆకృతిలో గల పొలము వైశాల్యం కనుగొనండి.



పటం. 2.30

సాధన:

ఇవ్వబడిన పొలములో నాలుగు త్రిభుజములు (I, III, IV & V) ఒక సమలంబ చతుర్భుజం (II) కలదు.

త్రిభుజం (I) వైశాల్యం $=\frac{1}{2}\times b\times h=\frac{1}{2}\times 5\times 6=15$ మీ^{2}

సమలంబ చతుర్భుజం (II) వైశాల్యం $=\frac{1}{2}h(a+b)=\frac{1}{2}\times 13\times(6+4)=65$ మీ^{2}

త్రిభుజం (III) వైశాల్యం $=\frac{1}{2}\times b\times h=\frac{1}{2}\times 8\times 4=\frac{32}{2}=16$ మీ^{2}

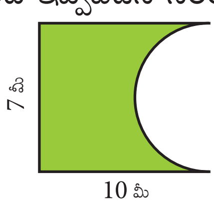
త్రిభుజం (IV) వైశాల్యం) $=\frac{1}{2}\times b\times h=\frac{1}{2}\times 13\times 10=65$ మీ^{2}

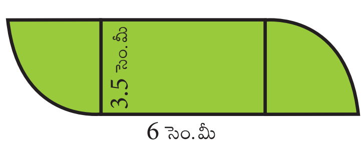
త్రిభుజం (V) వైశాల్యం $=\frac{1}{2}\times b\times h=\frac{1}{2}\times 13\times 10=65$ మీ^{2}

$\therefore$ పొలము వైశాల్యం $=15+65+16+65+65\ =226$ మీ^{2}

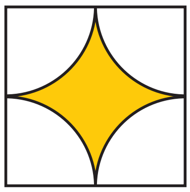
అభ్యాసము 2.2

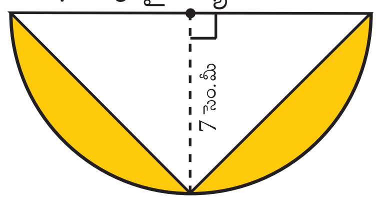
1. క్రింద ఇవ్వబడిన సంయుక్త ఆకారముల చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యమును కనుగొనండి.. $\left(\pi=\frac{22}{7}\right)$

(i) 

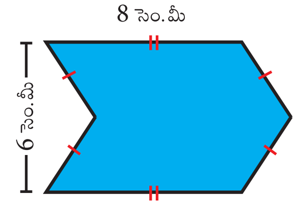
(ii) 

2. క్రింది పటములలో షేడ్ చేయబడిన భాగపు వైశాల్యమును కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$)

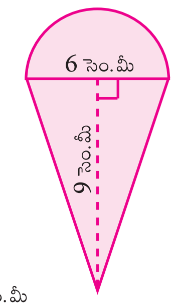
(i) 

(ii) 

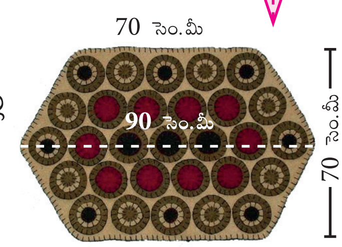
3. పటంలో ఇవ్వబడినట్లు, రెండు సమాంతర చతుర్భుజాలను ఒకటిగా కలిపి ఏర్పరచిన సంయుక్త ఆకృతి యొక్క వైశాల్యము కనుగొనండి.



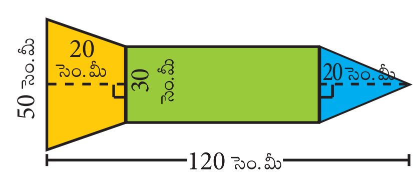
4. 6 సెం.మీ వ్యాసం గల అర్ధ వృత్తమును, భూమి 6 సెం.మీ మరియు ఎత్తు 9 సెం.మీ గా గల త్రిభుజమును పటంలో చూపినట్లు కలిపి ఏర్పరిచిన సంయుక్త ఆకారపు వైశాల్యము కనుగొనండి. ($\pi = 3.14$)



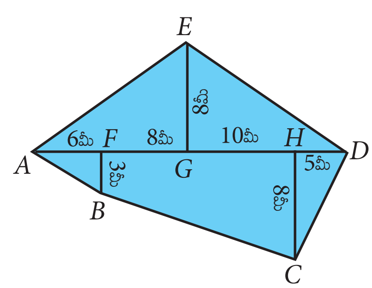
5. షడ్భుజి ఆకృతిలో గల ఒక గడప తివాచి (డోర్‌మ్యాట్ పటంలో ఇవ్వబడినట్లు కొలతలను కలిగినది దాని వైశాల్యమును కనుగొనండి.



6. ఒక రాకెట్టు (క్షిపణి) చిత్రము పటంలో ఇవ్వబడినట్లు కొలతలను కలిగియున్నది. దాని వైశాల్యమును కనుగొనండి.



7. క్రింద ఇవ్వబడిన క్రమరహిత బహుభుజి ఆకృతిలో గల పొలముల వైశాల్యాలను కనుగొనండి.



2.4 త్రిమితీయ (3-D) ఆకారములు (త్రిపరిమాణ ఆకారములు)

ఒక కాగితంలో ₹ 2 నాణెము, ₹ 10 కాగితం మరియు చతురస్రాకార బిస్కెట్టులను ఉంచి వాటి చుట్టూ గీతను గీయుము.

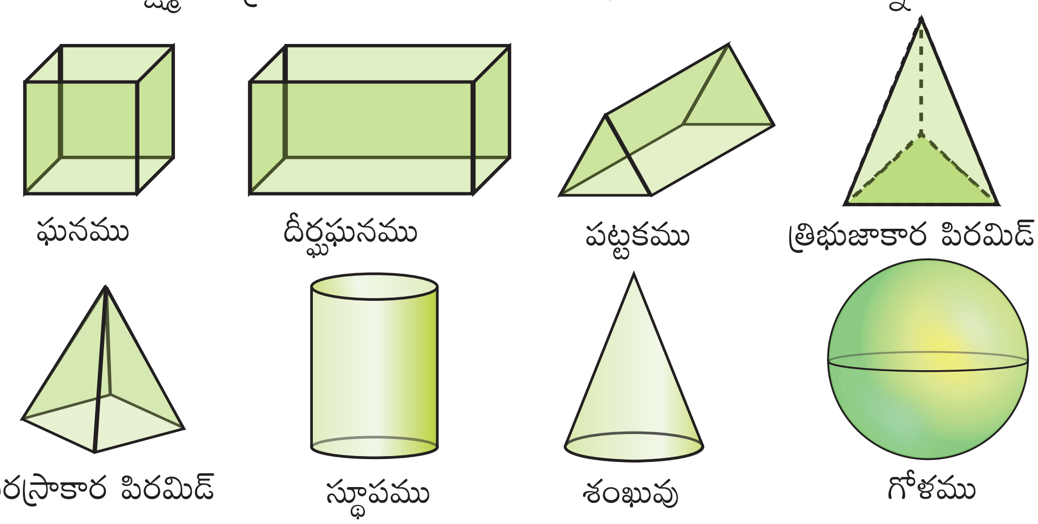
పటం. 2.31

02_8th_Maths_Telugu_Measurements_Chap_2.indd 66 31-07-2020 12:45:41

మీరు గీచిన ఆకారములు ఏవి? **వృత్తం, దీర్ఘచతురస్రం** మరియు **చతురస్రం**. ఈ ఆకారములు సమతల పటములను సూచిస్తున్నది. ఇంకా ఈ సమతల పటములకు పొడవు మరియు వెడల్పు మొదలగు రెండు పరిమాణములు కలవు. ఇప్పుడు మీరు గీసిన ఆకారముల పైన క్రమంగా కొన్ని రెండు రూపాయల నాణెములు, పది రూపాయల కాగితములు మరియు చతురస్రాకార బిస్కెట్టులను పటంలో చూపినట్టుగా ఒకదానిపైన ఒకటిని ఉంచుము.

పటం. 2.32

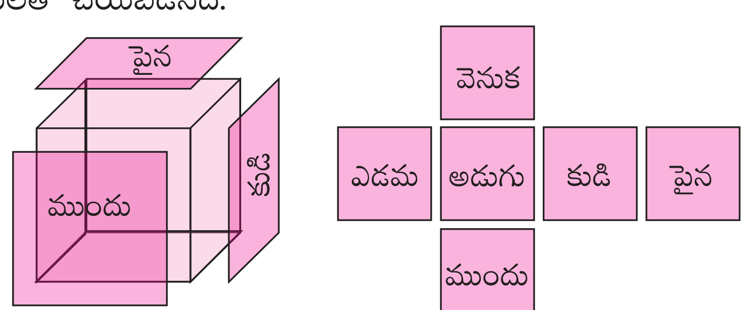
ఇప్పుడు మీరు ఏ ఆకారములను పొందినారు? స్థూపము, దీర్ఘ ఘనము మరియు ఘనచతురస్రం. ఈ ఆకారములు మొత్తంగా సమతలంలో అమరకుండా గాలిలో కొంత స్థలమును ఆక్రమించియున్నది. అనగా అవి పొడవు మరియు వెడల్పులతో పాటు మూడవ పరిమాణంగా ఎత్తును కలిగి ఉంది. ఈ విధంగా పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తు (లోతు) మొదలగు మూడు పరిమాణములను కలిగిన ఆకారములను త్రిమితీయ ఆకారములు అంటారు. దీనిని సూక్ష్మంగా త్రీడీ ఆకారములు అంటారు. 3-D ఆకారములకు కొన్ని ఉదాహరణలు



పటం. 2.33

2.4.1 ముఖములు, అంచులు మరియు శీర్షములు

క్రింది ఆకారమును పరిశీలించండి. దాని పేరు ఏమి? ఘనచతురస్రం. ఘనచతురస్రం అనునది 6 చతురస్రాకార తలములతో చేయబడినది.



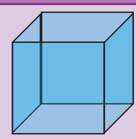
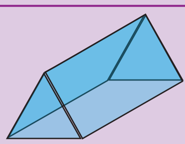
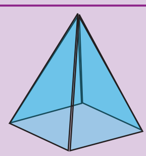
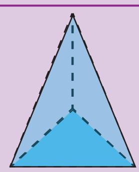
పటం. 2.34

ఈ 6 చతురస్రాకార తలములు ఘనచతురస్రం అగును. ఘనచతురస్రం యొక్క ఏదేని రెండు ముఖములను కలిపే రేఖను **అంచు** మరియు దాని మూడు అంచులను కలిపే ప్రతిమూలాను **శీర్షము** అని అంటారు. కావున ఒక **సమఘనములో** 6 **ముఖాలు,** 12 **అంచులు మరియు** 8 **శీర్షములు** గలవు.

02_8th_Maths_Telugu_Measurements_Chap_2.indd 67 31-07-2020 12:45:42

ప్రయత్నించుము

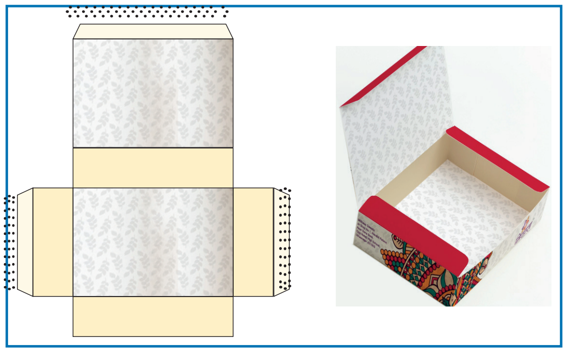
క్రింది బహుముఖ ఫలకముల ముఖములు (F), అంచులు (E) మరియు శీర్షములు (V) సంఖ్యను పట్టికీకరించుము. ఇంకా F+V–E ను కనుగొనండి.

ఘనాకారములు	పేరు	F	V	E	F+V–E
	ఘనము	6	8	12	
	దీర్ఘఘనము				
	త్రిభుజాకార పట్టకం				
	చతురస్రాకార పిరమిడ్				
	త్రిభుజాకార పిరమిడ్				

పై పట్టిక నుండి నీవు ఏమి గమనించితివి? అన్ని సందర్భములలో F+V–E =2 అగుటను మనం గమనించవచ్చును. ఇది అన్ని బహుముఖి ఫలకములకు సత్యమగును. ఈ సంబంధము F+V-E =2 ను "ఆయిలర్ సూత్రం" అందురు.

2.4.2 త్రిమితీయ ఆకారములను తయారుచేయు వలలు

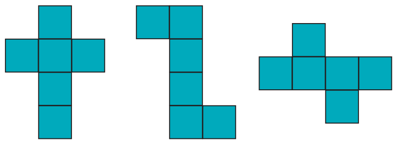
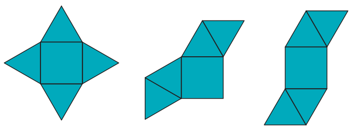
మనం తీపి పదార్థాలను కొనునపుడు, అంగడి వాడు కొన్ని మడతలు గల చదరమైన అట్టను తీసుకొని పటంలో చూపినట్లు మడిచి ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార పెట్టను (దీర్ఘ ఘనము) తయారు చేస్తాడు. తరువాత అతడు తీపిపదార్థాలను ఆ పెట్టెలో పెట్టి మనకు ఇస్తాడు.



పటం. 2.35

ఓరగానున్న మడతలను వదిలి (చుక్కల గీతలు), ఆ పెట్టెను తయారుచేయుట కొరకు రూపకల్పన చేయబడిన చదరమైన అట్టను వల రూపం అంటారు.

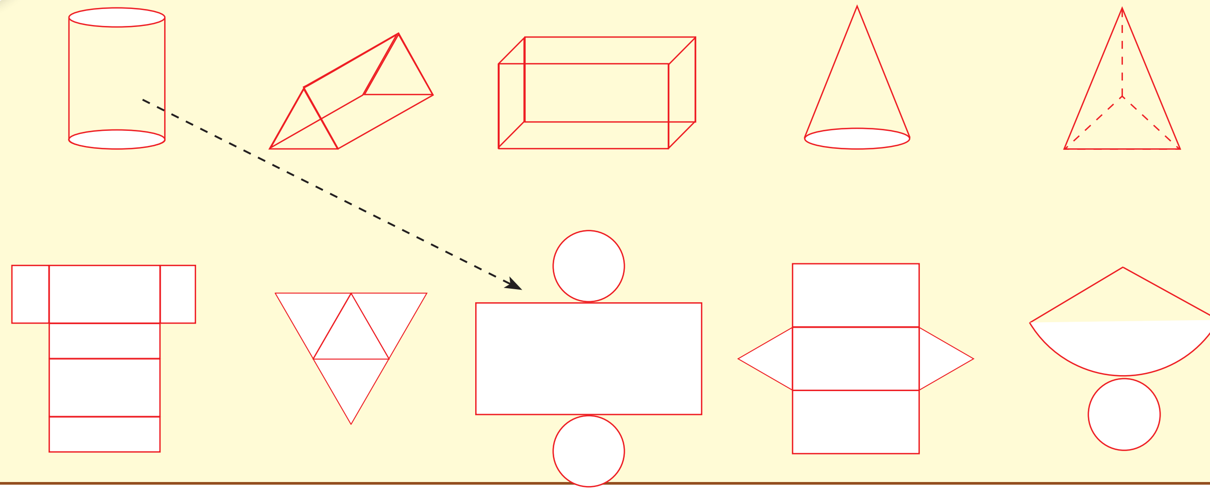
ఉదాహరణకు క్రింది వల రూపాలు ఘన చతురస్రము మరియు చతురస్రాకార పిరమిడ్‌లను తయారు చేస్తుంది.

	
సమఘనముకు వలలు	చతురస్రాకార పిరమిడ్‌కు వలలు

02_8th_Maths_Telugu_Measurements_Chap_2.indd 68 31-07-2020 12:45:42

కృత్యము

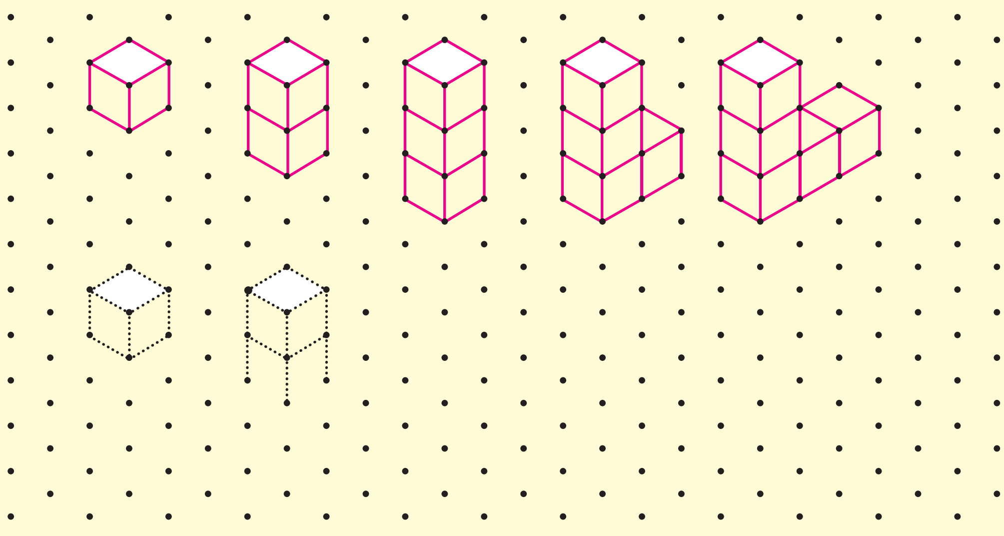
క్రింది ఆకారములకు సంబంధించిన వల రూపాలను గీతల ద్వారా జతపరచండి.



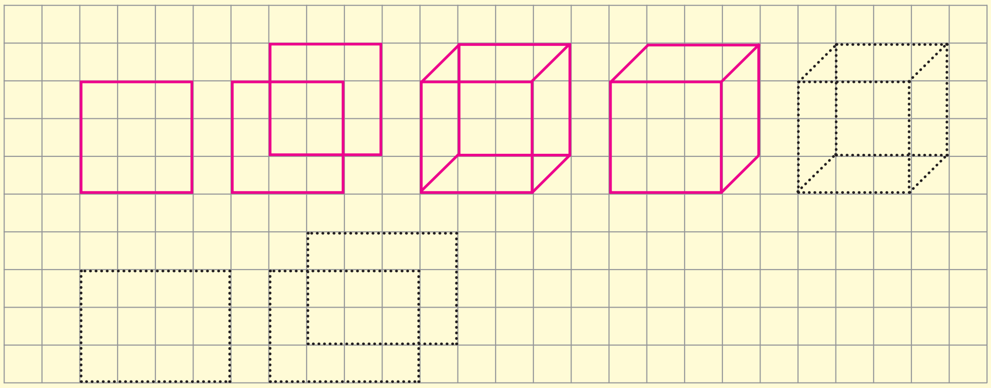
2.4.3 సమాన మాపము గల (isometric) చుక్కల పటము మరియు గళ్ళ కాగితం ఉపయోగించి 3-D ఆకారములను గీయుట.

కృత్యము

1. ఇవ్వబడిన ప్రతి ఘన ఆకారములను సమాన మాపము గల చుక్కల పటములో గీయుము.



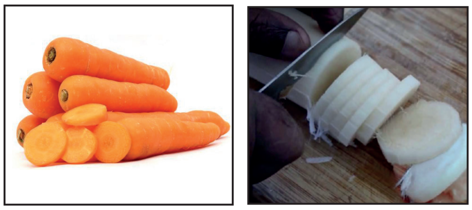
2. ఇవ్వబడిన ప్రతి ఘనాకారములను గళ్ళ కాగితంలో గీయుము.



02_8th_Maths_Telugu_Measurements_Chap_2.indd 69 31-07-2020 12:45:42

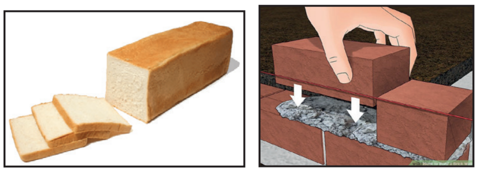
2.4.4 ఘనాకారముల అడ్డుకోత

వంట కొరకు కూరగాయలను కోయునపుడు వాటిలో కొన్ని సమతల ఆకారములను మనం చూడవచ్చును. ఉదాహరణకు క్యారెట్ మరియు అరటిదంటు అడ్డుకోత రూపము వృత్తమగును.



పటం. 2.36

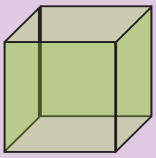
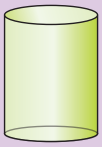
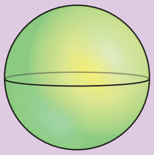
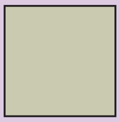
అదేవిధంగా బ్రెడ్ మరియు ఇటుకరాయిల అడ్డుకోత రూపము చతురస్రం మరియు దీర్ఘ చతురస్రములగుటను మనం చూడవచ్చును.



పటం. 2.37

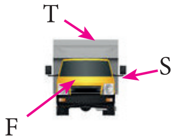
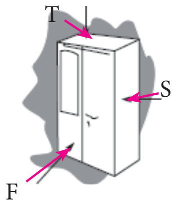
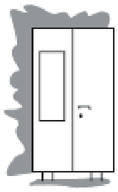
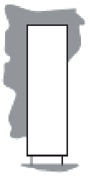
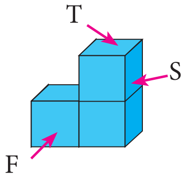
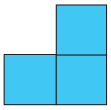
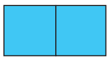
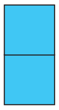
కృత్యము

కింది ఘనాకారముల అడ్డుకోత రూపము నుండి లభించు ద్విపరమాణ ఆకారములను (2-D) గీచి, వాటి పేర్లను వ్రాయండి.

ఘనాకారములు			
2-D ఆకారము			
పేరు	చతురస్రం		

2.4.5 3-D ఆకారముల విభిన్న రూపాలు

ఒక 3D ఆకారమును విభిన్న స్థానముల నుండి చూసినపుడు, భిన్నమైన రూపాలలో కనిపిస్తుంది వేర్వేరు స్థానముల నుండి 3D ఆకారమును చూచినపుడు మన కంటికి కనబడు దృశ్యమే 3D ఆకారము యొక్క రూపమగును. ముందు దృశ్యం, పై భాగ దృశ్యం మరియు ప్రక్క వైపు దృశ్యం మొదలుగునవి కొన్ని రకాల దృశ్యములగును. కొన్ని వస్తువుల విభిన్న దృశ్యాలను క్రింద ఇవ్వబడినది

వస్తువులు	ముందు దృశ్యం	పై భాగ దృశ్యం	ప్రక్క వైపు దృశ్యం
			
			
			

02_8th_Maths_Telugu_Measurements_Chap_2.indd 70 31-07-2020 12:45:43

అభ్యాసము 2.3

1. ఖాళీలను పూరింపుము:

   (i) ఒక దీర్ఘ ఘనము యొక్క మూడు పరిమాణములు ______________.

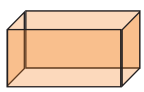
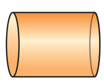
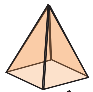
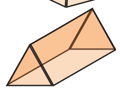
   (ii) రెండు కంటే ఎక్కువ అంచులు కలుసుకొను బిందువును ___________ అంటారు.

   (iii) ఒక సమఘనమునకు ___________ ముఖములు కలవు.

   (iv) ఒక ఘనస్థూపం యొక్క అడ్డుకోత రూపము ___________ అవుతుంది.

   (v) ఒక 3-D ఆకారం యొక్క వల రూపము ఆరు చతుర్రసాకార తలములను కలిగి ఉంటే దానిని _______ అని పిలుస్తారు.

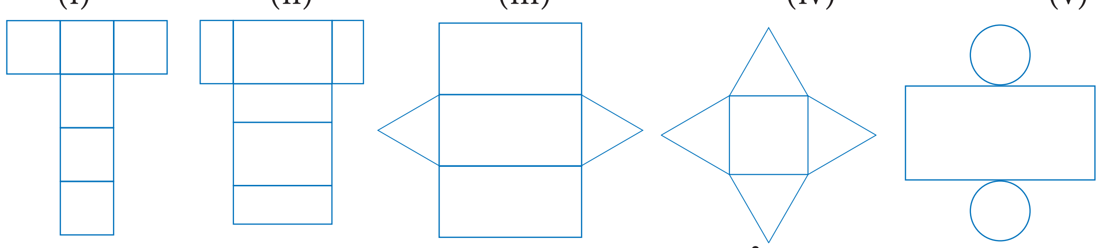
2. క్రింది వానిని జతపరచండి :

(i)		-	(అ) స్థూపము
(ii)		-	(ఆ) దీర్ఘ ఘనము
(iii)		-	(ఇ) త్రిభుజాకార పట్టకము
(iv)		-	(ఈ) చతురస్రాకార పిరమిడ్

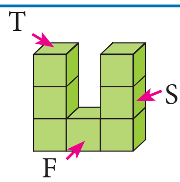
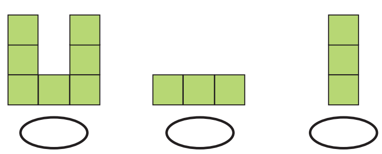
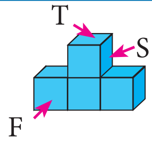
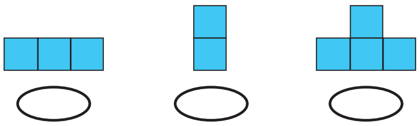
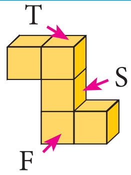
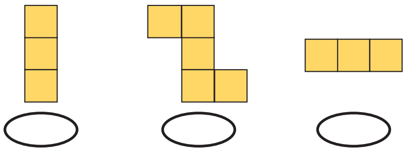
E64KN

3. క్రింది వల రూపాలు ఏ 3-D ఆకారములను సూచించును? వాటిని గీయుము.

(i) (ii) (iii) (iv) (v)



4. ప్రతి ఘనాకారమునకు మూడు దృశ్యములు ఇవ్వబడినది. వాటిలో ఒక్కొక్క దానికి సంబంధించిన పై భాగ దృశ్యం (T), ముందు దృశ్యం (F) మరియు ప్రక్క వైపు దృశ్యం (S)లను గుర్తించండి.

ఘనము	మూడు రకాల దృశ్యాలు
	
	
	

02_8th_Maths_Telugu_Measurements_Chap_2.indd 71 31-07-2020 12:45:43

5. క్రింద ఇవ్వబడిన పట్టికలో గల సమాచారమునకు ఆయిలర్ సూత్రమును సరి చూడండి.

వ.సం.	ముఖములు	శీర్షములు	అంచులు
(i)	4	4	6
(ii)	10	6	12
(iii)	12	20	30
(iv)	20	13	30
(v)	32	60	90

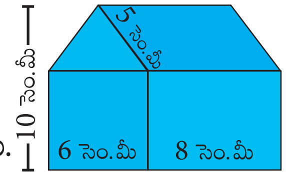
అభ్యాసము 2.4

ఇతర అభ్యసన సమస్యలు

1. ఒక గ్రంథాలయ ప్రవేశం నందు రెండు తలుపులు అమర్చబడి ఉన్నవి. తలుపును సులభంగా తెరుచుటకొరకు, దానిని అమర్చబడిన గోడ నుండి 6 అడుగుల దూరంలో తలుపు అడుగు భాగంలో ఒక చక్రం అమర్చబడినది. ఒక తలుపును 90° కొలతకు తెరుచునపుడు చక్రము ఎంత దూరము జరుగుతుంది? $(\pi = 3.14)$.

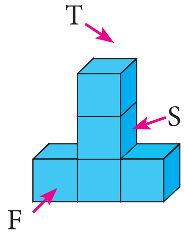
2. ఒక వ్యక్తి 150మీ వృత్తాకార ట్రాక్‌ను అతని యొక్క సాధారణవేగముతో 9నిముషాలలో పూర్తిచేసెను. 3నిముషాలలో అతను ప్రయాణించిన దూరమును కనుగొనుము $(\pi = 3.14)$.

3. ప్రక్కపటములో ఇవ్వబడిన ఇల్లు యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.

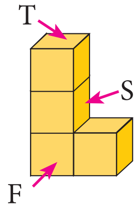


4. క్రిందివ్వబడిన ఘనాకృతుల యొక్క పై,ముందు మరియు ప్రక్క వీక్షణను గీయుము.

(i)



(ii)

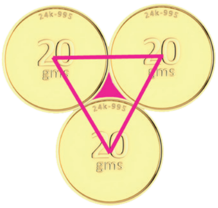


సవాలాత్మక ప్రశ్నలు

5. గుణ, తన గదికి 3 అడుగుల వెడల్పు గల ఒక తలుపును, నాదన్ తన గదికి ఒక్కొక్కటి $1\frac{1}{2}$ అడుగు వెడల్పు గల రెండు తలుపులను బిగించెను. తలుపులన్నీ మూసి ఉన్న స్థితి నుండి 120° వరకు తెరవ వచ్చును. అయినా ఎవరి తలుపును తెరిచి మూయుటకు తక్కువ వైశాల్యము గల తలము అవసరమగును?

6. 15 మీ × 8 మీ కొలతలు గల దీర్ఘచతురస్రాకార పొలము నందు 4 మూలల్లో మరియు మధ్యలో 3 మీ పొడవు గల త్రాడుతో ఆవులు కట్టబడి ఉన్నవి. ఏ ఆవు చేతనూ పైరు మేయబడకుండా ఉండు పొలం వైశాల్యమును కనుగొనండి. $(\pi = 3.14)$

7. ఒక్కొక్కటి 6 సెం.మీ వ్యాసము గల మూడు సర్వసమాన నాణెములను పటంలో చూపినట్లు పెట్టబడినది. నాణెములకు మధ్యలో షేడ్ చేయబడిన ప్రాంతపు వైశాల్యమును కనుగొనండి. $(\pi = 3.14)$ $(\sqrt{3} = 1.732)$



02_8th_Maths_Telugu_Measurements_Chap_2.indd 72 31-07-2020 12:45:44

8. ఆయిలర్ సూత్రమును ఉపయోగించి తెలియని వాటిని కనుక్కోండి.

వ.సం	ముఖములు	శీర్షములు	అంచులు
(i)	?	6	14
(ii)	8	?	10
(iii)	20	10	?

సారాంశం

- వృత్తం పై గల ఏదేని రెండు బిందువులను కలిపే రేఖా ఖండాన్ని "జ్యా" అంటారు.
- ఒక వృత్త వ్యాసం, ఆ వృత్తమును రెండు సమాన వృత్త ఖండాలుగా విభజించును. ఇంకా అది వృత్తం యొక్క అతిపెద్ద జ్యా అగును.
- వృత్త పరిధిలోని ఒక భాగమునే వృత్త చాపము అంటారు.
- ఒక చాపము మరియు దాని చివరి బిందువులను వృత్త కేంద్రంతో కలిపే వ్యాసార్ధాల చేత ఆవరింపబడిన ప్రాంతాన్ని సెక్టరు (త్రిజ్యాంతరం) అంటారు.
- ఒక సెక్టరు ఆ వృత్త కేంద్రం వద్ద ఏర్పరచు కోణాన్ని కేంద్ర కోణం అందురు.
- సంయుక్త ఆకారముల చుట్టుకొలత అనునది ఆ సంవృత ఆకారము చుట్టూ హద్దులుగా గల అన్ని భుజాల పొడవుల మొత్తం అవుతుంది.
- సంయుక్త ఆకారముల వైశాల్యం అనునది, ఆ సంయుక్త ఆకారమును ఏర్పరచు అన్ని సాధారణ ఆకారముల వైశాల్యముల మొత్తము అగును.
- పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తు (లోతు) మొదలగు మూడు పరిమాణములను కలిగియున్న ఆకారములను త్రిమితీయ ఆకారాలు అంటారు. సూక్ష్మంగా 3-D ఆకారములు అంటారు.
- ఒక సమ ఘనములో 6 ముఖములు, 12 అంచులు మరియు 8 శీర్షములు ఉంటుంది.

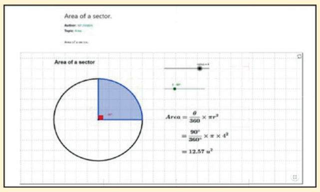
అంతర్జాల కృత్యము

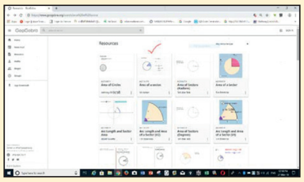
సోపానము-1 బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్ చేసి **www.Geogebra.com** టైపు చేయండి లేదా క్రింద ఇవ్వబడిన **QR** కోడ్‌ని స్కాన్ చేయండి.

సోపానము-2 **search column** వద్ద **Area of sector** అని టైప్ చేయండి.

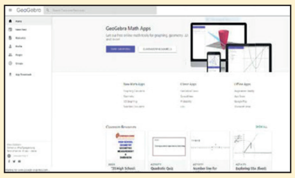
సోపానము-3 **radius slide** మరియు **degree slide** లను జరుపుట ద్వారా భిన్నమైన ఫలితాలను పొందవచ్చును.

ఈ కృత్యము ద్వారా సెక్టరు యొక్క చుట్టుకొలత మరియు వైశాల్యమును కనుగొను పద్ధతిని తెలుసుకొనవచ్చును.

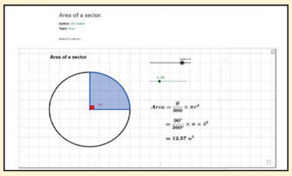




Step 1



Step 2



Step 3

Go through the remaining worksheets given for this chapter

Web URL Measurement (measurements links)

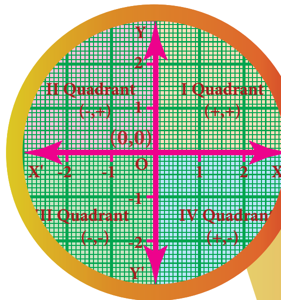
https://www.geogebra.org/m/FSqNDNxN

*Pictures are indicatives only.

*If browser requires, allow Flash Player or Java Script to load the page.

02_8th_Maths_Telugu_Measurements_Chap_2.indd 73 31-07-2020 12:45:45

3 బీజగణితము



అభ్యసన లక్ష్యాలు

- ❖ సమాసముల యొక్క సంకలనము మరియు తీసివేతలను జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొనుట.
- ❖ పూర్ణ సంఖ్యల గుణకములతో బీజీయ సమాసములను ఎలా గుణించాలో తెలుసుకొనుట.
- ❖ ఏక పదుల ద్వారా బీజీయ సమాసములను ఎలా భాగించాలో తెలుసుకొనుట.
- ❖ $(a+b)^2, (a-b)^2, (a^2-b^2)$ మరియు $(x+a)(x+b)$ సర్వసమీకరణములను జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొనుట.
- ❖ $(a+b)^3, (a-b)^3, (x+a)(x+b)(x+c)$ సర్వసమీకరణాలను అర్థం చేసుకొనుట మరియు సమస్యల సాధనలలో వాటిని అనువర్తించుట.
- ❖ (a^3+b^3) మరియు (a^3-b^3) రకపు సమాసాలను కారణాంకపరుచుటను తెలుసుకొనుట.
- ❖ ఏకఘాత సమీకరణములలో అమరిన వాక్య రూపంలో గల సమస్యలను సాధించుట.
- ❖ గ్రాఫులో బిందువులను గుర్తించుటను నేర్చుకొనుట.
- ❖ సరళ ఏకఘాత ప్రమేయాల గ్రాఫ్‌ను గీయుట నేర్చుకొనుట.

పునశ్చరణ:

స్థిరరాశులు, చరరాశులు, గుణకాలు, సజాతి పదాలు, విజాతి పదాలు, సంఖ్యా సమాసములు మరియు బీజీయ సమాసముల గూర్చి కింది తరగతులలో నేర్చుకొనియున్నాము. తరువాత బీజీయ సమాసం పై కొన్ని ప్రాథమిక పరిక్రియలైన సంకలనము, వ్యవకలనము చేసియున్నాము. ఇప్పుడు, వాటిని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొని మరియు అభ్యసనాన్ని విస్తృత పరచుకొందాము

ఇంకను బీజీయ సమాసాల గుణకారం మరియు బాగహారము మరియు బీజీయ సర్వసమీకరణాల గూర్చి నేర్చుకొందాము.

క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానలిమ్ము:

1. క్రింది సమూహములలో గల పదాల సంఖ్యను వ్రాయము

   (i) $x+y+z-xyz$ (ii) m^2n^2c

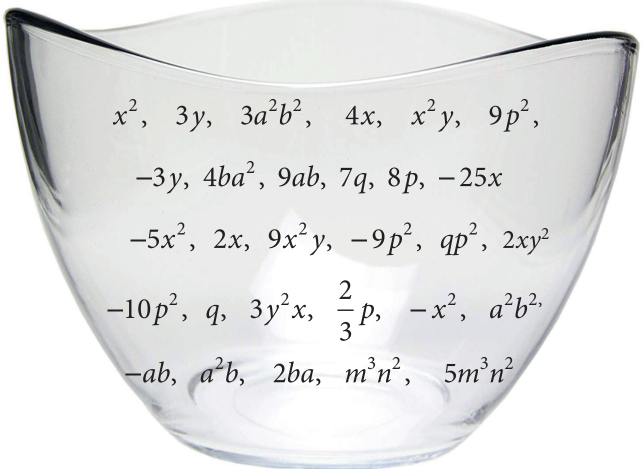
   (iii) $a^2b^2c-ab^2c^2+a^2bc^2+3abc$ (iv) $8x^2-4xy+7xy^2$

2. క్రింది సమాసములలో ప్రతి పదము యొక్క సంఖ్యా గుణకాన్ని గుర్తించుము.

   (i) $2x^2-5xy+6y^2+7x-10y+9$ (ii) $\frac{x}{3}+\frac{2y}{5}-xy+7$

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 74 31-07-2020 12:51:41

3. క్రింది వాటిలో సజాతి పదాలను కనుగొనుము:



సజాతి పదాలు

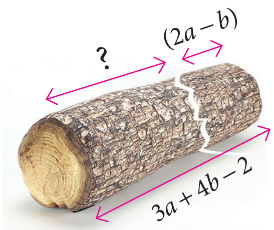
పదాల యొక్కచరరాశులతో పాటు వాటి ఘాతాంకములు కూడ సమానం కావలెను.

ఉదాహరణలు: $x^2, 4x^2$

$a^2b^2, -5a^2b^2$

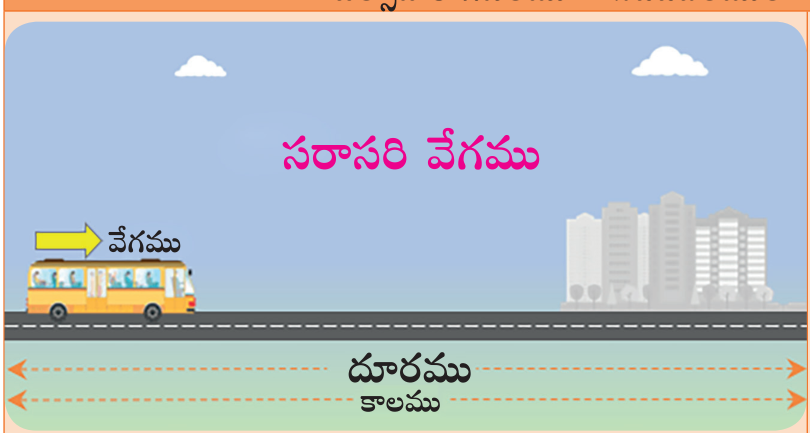
$2m, -7m$

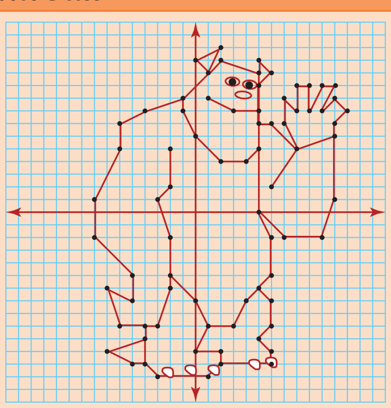
4. కూడుము: $2x, 6y, 9x-2y$
5. సూక్ష్మీకరింపుము: $(5x^3y^3 - 3x^2y^2 + xy + 7) + (2xy + x^3y^3 - 5 + 2x^2y^2)$
6. త్రిభుజము యొక్క భుజములు వరుసగా $2x-5y+9$, $3y+6x-7$ మరియు $-4x+y+10$ అయిన త్రిభుజ చుట్టుకొలతను కనుగొనుము.
7. $6mn$ నుండి $-2mn$ తీసివేయుము.
8. $4a^2 - 3ab + b^2$ నుండి $6a^2 - 5ab + 3b^2$ ను తీసివేయుము..
9. ఒక కొయ్య దుంగ పొడవు $(3a+4b-2)$ మరియు దాని నుండి తొలగించిన ముక్క పొడవు $(2a-b)$ అయిన మిగిలిన కొయ్య దుంగ పొడవు ఎంత?



10. ఒకడబ్బాలో 'x' లీటర్ల నూనె కలదు. మరొక డబ్బాలో $(3x^2+6x-5)$ లీటర్ల నూనె కలదు. అంగడివాడు రెండవ డబ్బాలో $(x+7)$ లీటర్ల నూనెను అదనంగా కలిపెను. తరువాత రెండవ డబ్బా నుండి (x^2+6) లీటర్ల నూనెను అమ్మెను. అయిన రెండవ డబ్బాలో మిగిలిన నూనె ఎంత?

ఔత్సాహిక గణితము – నిజజీవితములో బీజగణితము





ఏక ఘాత సమీకరణాలును వేగము, దూరము, కాలము మరియు సరాసరి సమీకరణమును వాడుతారు.

చిత్రలేఖనంలో గ్రాఫ్‌లను ఉపయోగిస్తారు.

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 75 31-07-2020 12:51:48

3.1 పరిచయం:

ఇచ్చిన పరిస్థితిని పరిశీలిద్దాం. గణేష్ అతని తోటలో మొక్కలు నాటాడు. అతను ఒక్కొక్క వరుసలో 5 మొక్కలు చొప్పున 10 వరుసలు నాటాడు. అతను ఎన్ని మొక్కలు నాటాడో చెప్పగలరా?

అవును మొత్తము మొక్కల సంఖ్య అనునది ఒక్కొక్క వరుసలోని మొక్కల సంఖ్య మరియు వరుసల సంఖ్యల లబ్ధము అని మనకు తెలుసు.

కావున, మొత్తము మొక్కల సంఖ్య = 10 వరుసలు x ఒక్కొక్క వరుసలో 5 మొక్కలు = $10 \times 5 = 50$ మొక్కలు.

అదేవిధంగా, డేవిడ్ కొన్ని మొక్కలు నాటాడు. కాని మొత్తము వరుసల సంఖ్య గాని మరియు ఒక్కొక్క వరుసలోని మొక్కల సంఖ్య కాని తెలియదు అయితే మొత్తం మొక్కల సంఖ్యను ఎలా వ్యక్తపరుస్తావు?

తెలియని రాశులను 'x' మరియు 'y' లుగా పిలుస్తాము.

కావున మొత్తము మొక్కల సంఖ్య = 'x' వరుసలు x ఒక్కొక్క వరుసలోని 'y' మొక్కలు

= '$x \times y$' = xy మొక్కలు

ఈ పరిస్థితిని విస్తృతి పరుస్తాము. రహీమ్ ఒక్కొక్క వరుసలో $3y^2$ మొక్కలు చొప్పున $(2x^2+5x-7)$ వరుసలలో మొక్కలు నాటాడు. ఇప్పుడు రహీమ్ నాటిన మొత్తము మొక్కల సంఖ్య కనుగొనడానికి పై ఆలోచన ఉపయోగపడుతుంది.

మొత్తము మొక్కల సంఖ్య = $(2x^2+5x-7)$ వరుసలు×ఒక్కొక్క వరుసలోని $3y^2$ మొక్కలు

$= 3y^2 \times (2x^2+5x-7)$

పై బీజీయ సమాసముల యొక్క లబ్ధాన్ని ఎలా కనుగొంటాము?

ఇప్పుడు పై బీజీయ సమాసము లబ్ధమును కనుగొనడాన్ని నేర్చుకొందాము.

గమనిక

బహుపది	ఒక ప్రత్యేక రకమైన బీజీయ సమాసమును బహుపది అంటారు. ఒక బహుపదిలో అన్ని చరరాశుల యొక్క ఘాతాంకములు పూర్ణాంకాలలో మాత్రమే ఉంటుంది. $a^2+2ab+b^2$ $\quad$ $4x^2+3x-7$ 1) ఒక చరరాశిచే భాగించుట. ఉదా $4x^2-\frac{5}{1+x}$ ఒక బహుపది కాదు. 2) ఋణాత్మక ఘాతములు. ఉదా. $7x^{-2}+5x-6$ ఒక బహుపది కాదు. 3) భిన్న ఘాతములు. ఉదా. $3x^3+4x^{\frac{1}{2}}+5$ ఒక బహుపది కాదు.
ఏక పది	ఒక సమాసంలో ఒక పదము మాత్రమే ఉండిన దానిని ఏకపది అని అందురు. ఉదాహరణలు: $4x,\ 3x^2y,\ -2y^2$.
ద్విపది	ఒక సమాసములో రెండు పదములు మాత్రమే ఉండిన దానిని ద్విపది అని అందురు. ఉదాహరణలు: $2x+3,\ 5y^2+9y,\ a^2b^2+2b$.
త్రిపది	ఒక సమాసములో మూడు పదములు మాత్రమే ఉండిన దానిని త్రిపది అని అందురు. ఉదాహరణలు: $2a^2b-8ab+b^2,\ m^2-n^2+3$.

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 76 31-07-2020 12:51:51

3.2 బీజీయ సమాసముల గుణకారము

బీజీయ సమాసములను గుణించే ముందు కింద ఇవ్వబడిన సోపానాలను అనుసరించాలి.

సోపానము 1 పదముల గుర్తులను మొదట గుణించవలెను. అనగా సజాతి గుర్తుల లబ్ధము ధనాత్మకము మరియు విజాతి గుర్తుల లబ్ధము ఋణాత్మకము.

సజాతి గుర్తులు	$(+)\times(+)=+$	$(-)\times(-)=+$
విజాతి గుర్తులు	$(+)\times(-)=-$	$(-)\times(+)=-$

సోపానము 2 పదాల సదృశ గుణకాలను గుణించుట.

సోపానము 3 ఘాతాంక న్యాయాలను ఉపయోగించి చరరాశి కారణంకములను గుర్తించుట.

x ఒక చరరాశి మరియు m, n లు రెండు ధన పూర్ణసంఖ్యలు అయితే

$$x^m \times x^n = x^{m+n}$$

ఉదాహరణకు: $x^3 \times x^4 = x^{3+4} \quad = x^7$

ఆలోచించుము

ప్రతి బీజీయ సమాసము ఒక బహుపది. ఈ వాక్యము సరైనదేనా? ఎందుకు?

మీకు తెలుసా?

బహుపది అనునది ఒక ప్రత్యేకమైన బీజీయసమాసము బీజీయ సమాసానికి మరియు బహుపదికి మధ్య భేదము.

బీజీయ సమాసము

వాటి చరరాశుల ఘాతాంకము పూర్ణసంఖ్యలు, భిన్నాలు, ఋణ ఘాతాంకాలను కలిగి ఉంటుంది.

ఉదాహరణ: $4x^{3/2}-3x+9$, $2y^2+\frac{5}{y}-3$, $3x^2-4x+1$

బహుపదులు

వాటి చరరాశుల ఘాతాంకము పూర్ణాంకములను మాత్రమే కలిగి ఉండును.

ఉదాహరణ: $4x^2-3x+9$

$2y^6+5y^3-3$

గమనిక

రెండు పదాల లబ్ధాన్ని ( ), చుక్క (.) లేక $\times$ తో సూచిస్తారు.

ఉదాహరణకు, $4x^2$ మరియు xy ల గుణకారాన్ని కింది ఏదైనా ఒక విధానములో వ్రాయవచ్చును.

$(4x^2)(xy)$	$4x^2\times xy$	$4x^2(xy)$	$(4x^2)\times xy$	$4x^2\cdot xy$

3.2.1 రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ ఏకపది సమాసముల గుణకారము

గీత ఒక్కొక్కటి ₹ 5 విలువచేసే 3 కలములను కొనెను. అయితే ఆమె దుకాణదారుడికి ఎంత చెల్లించాలి?

గీత దుకాణదారుడికి చెల్లించ వలసినది $= 3 \times$ ₹ 5

$=$ ₹ 15

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 77 31-07-2020 12:51:55

కలముల సంఖ్య x మరియు ఒక్కొక్క కలము ఖరీదు ₹ y, ఒక్కొక్క కలము @ ₹ 5y చొప్పున గీత $(3x^2)$ కలములను కొన్న వెల

$$= (3x^2) \times 5y$$
$$= (3 \times 5)(x^2 \times y)$$
$$= ₹\ 15x^2y$$

@ - అనునది ఒక్క దాని వేల (at the rate of)

ఉదాహరణ: 3.1

ఒక దీర్ఘ చతురస్రాకార చిత్రలేఖనము యొక్క పొడవు మరియు వెడల్పులు వరుసగా $4xy^3$ మరియు $3x^2y$ అయితే దాని వైశాల్యమును కనుగొనుము.

$3x^2y$

$4xy^3$

సాధన:

దీర్ఘచతురస్రాకార చిత్రలేఖనం యొక్క వైశాల్యము

$A = (l \times b)$ చదరపు ప్రమాణాలు

$= (4xy^3) \times (3x^2y)$

$= (4 \times 3)(x \times x^2)(y^3 \times y)$

$A = 12x^3y^4$ చదరపు ప్రమాణాలు.

ఉదాహరణ: 3.2

$2x^2y^2, 3y^2z$ మరియు $-z^2x^3$ ల లబ్ధాన్ని కనుగొనుము.

సాధన:

మనకు, $(2x^2y^2) \times (3y^2z) \times (-z^2x^3)$

$= (+) \times (+) \times (-)(2 \times 3 \times 1)(x^2 \times x^3)(y^2 \times y^2)(z \times z^2)$

$= -6x^5y^4z^3$.

ప్రయత్నించుము

లబ్ధాలను కనుగొనుము

(i) $3ab^2, -2a^2b^3$

(ii) $4xy, 5y^2x, (-x^2)$

(iii) $2m, -5n, -3p$

3.2.2 ఒక బహుపదిని ఏకపదితో గుణించుట

ఒక వీధిలో 'a' అంగళ్ళు కలవు. ప్రతి అంగడిలో 8 బుట్టలలో 'x' ఆపిల్ పండ్లు, 3 బుట్టలలో 'y' కమలా పండ్లు మరియు 5 బుట్టలలో 'z' అరటి పండ్లు ఉన్నాయి. అయితే మొత్తము అరటి, కమల మరియు ఆపిల్ పండ్ల సంఖ్య.

$= a \times (8x + 3y + 5z)$

$= a(8x) + a(3y) + a(5z)$

(విభాగన్యాయం ఉపయోగించి)

$= 8ax + 3ay + 5az$

మీకు తెలుసా?

ఏకపది × ఏకపది	= ఏకపది
ద్విపది × ఏకపది	= ద్విపది
ద్విపది × ద్విపది	= ద్విపది/బహుపది
బహుపది × ఏకపది	= బహుపది

గమనిక

విభాగ న్యాయము	a ఒక స్థిర రాశి, x మరియు y లు చలరాశులు అయితే $a(x + y) = ax + ay$ ఉదాహరణకు $5(x + y) = 5x + 5y$

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 78 31-07-2020 12:52:02

ఉదాహరణ: 3.3

$3x^2y$ మరియు $(2x^3y^3 - 5x^2y + 9xy)$ లను గుణించండి.

సాధన:

ఇప్పుడు $(3x^2y) \times (2x^3y^3 - 5x^2y + 9xy)$

$= 3x^2y(2x^3y^3) - 3x^2y(5x^2y) + 3x^2y(9xy)$

బహుపదిలోని ప్రతి పదమును ఏక పదిచే గుణించగా

$= (3\times 2)(x^2 \times x^3)(y \times y^3) - (3\times 5)(x^2 \times x^2)(y \times y) + (3 \times 9)(x^2 \times x)(y \times y)$

$= 6x^5y^4 - 15x^4y^2 + 27x^3y^2$

ఆలోచించుము

$3+(4x-7y) \neq 12x-21y$ ఎందుకు

ఉదాహరణ: 3.4

రామ్ అనే వ్యక్తి ఒక బ్యాంకులో 'x', ₹ 2000ల కాగితాలను, 'y', ₹ 500 ల కాగితాలను, z, ₹ 100 ల కాగితాలను జమచేసాడు మరియు రామ్ జమచేసిన సొమ్ముకు $3xy$ రెట్లు వేలన్ జమ చేసాడు. అయితే వేలన్ బ్యాంకులో జమచేసిన సొమ్ము ఎంత?

సాధన:

రామ్ జమచేసిన సొమ్ము $= (x \times ₹2000 + y \times ₹500 + z \times ₹100)$

$= ₹(2000x + 500y + 100z)$

వేలన్ జమచేసిన సొమ్ము $= 3xy$ రెట్లు $\times$ రామ్ జమచేసిన సొమ్ము

$= ₹\, 3xy \times (2000x + 500y + 100z)$

$= (3 \times 2000)(x \times x \times y) + (3 \times 500)(x \times y \times y) + (3 \times 100)(x \times y \times z)$

$= ₹(6000x^2y + 1500xy^2 + 300xyz)$

ప్రయత్నించుము

(i) $(5x^2 + 7x - 3)$ ను $-4x^2$ చే

(ii) $(10x - 7y + 5z)$ ను $6xyz$ చే

(ii) $(ab+3bc-5ca)$ ను $3a^2bc$ చే

(iv) $(4m^2 - 3m + 7)$ ను $-5m^3$ చే గుణించుము

3.2.3 రెండు ద్విపదుల గుణకారము

ఒక దీర్ఘచతురస్రాకార పూలపాన్పు పొడవు దాని అసలు పొడవు కంటే 5 ప్రమాణాలు తగ్గించబడినది. మరియు దాని వెడల్పు అసలు వెడల్పు కంటే 3 ప్రమాణాలు పెంచబడినదని పరిగణిస్తే దీర్ఘచతురస్రాకార పూలపాన్పు వైశాల్యము ఎంత?

దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము $= l \times b$

$A = (l-5) \times (b+3)$ చదరపు ప్రమాణాలు.

ఇక్కడ మనము ఎలా గుణిస్తాము?

ఇప్పుడు రెండు ద్విపదులను ఎలా గుణించాలో నేర్చుకుందాము.

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 79 31-07-2020 12:52:06

$(x+y)$ మరియు $(p+q)$ లు రెండు ద్విపదులయితే వాటి లబ్దాన్ని క్రింది ఇచ్చిన విధంగా కనుగొనవచ్చును.

(i) అడ్డు (సమాంతర) విభాగ విధానము

$(x+y)\,(p+q) = x(p+q) + y(p+q)$

$= xp + xq + yp + yq$

(ii) నిలువ (లంబ) విభాగ విధానము

$$\begin{array}{r} x + y \\ p + q \\ \hline xq + yq \\ xp + yp \quad \\ \hline = xp + xq + yp + yq \end{array}$$

(iii) గ్రిడ్ విధానము

$\times$	x	y
p	xp	yp
q	xq	yq

$= xp + xq + yp + yq$

(iv) రేకుల (FOIL) విధానము

మనము నేరుగా ఈ విధంగా చేయగలము, $(x+y)\,(p+q) = x(p) + x(q) + y(p) + y(q)$

వెలుపలి చివరి మొదట లోపలి

కనుక పై దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము $A = (l-5)\times(b+3)$

(అడ్డువిభాగవిధానము) $= l(b+3) - 5(b+3)$

$A = (lb + 3l - 5b - 15)$ చ.ప్ర॥.

మరొక పద్ధతి

గ్రిడ్ విధానము

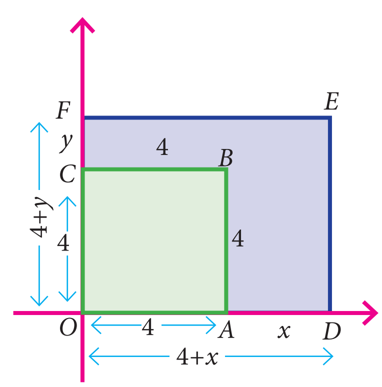
$\times$	l	-5
b	lb	$-5b$
3	$3l$	-15

$= (lb + 3l - 5b - 15)$

మరొక ఉదాహరణను చూద్దాం. ఇచ్చిన పటములో OABC చతురస్రములో, $OA = 4$ ప్రమాణాలు ; $OC = 4$ ప్రమాణాలు

$OABC$ చతురస్ర వైశాల్యము $= 4 \times 4$

$A = 16$ చదరపు ప్రమాణాలు



చతురస్ర భుజాలు వరుసగా 'x' ప్రమాణాలు మరియు 'y' ప్రమాణాలు పెంచినట్లు అయితే. మనకు $OD=(4+x)$ ప్రమాణాలు మరియు $OF=(4+y)$ ప్రమాణాలు భుజములుగా గల $ODEF$ దీర్ఘ చతురస్రము లభించును.

ఇప్పుడు, $ODEF$ దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము $= (4+x)\;(4+y)$

(FOIL విధానము ప్రకారము) $A = 16 + 4y + 4x + xy$ చదరపు ప్రమాణాలు

(అన్నియు విజాతి పదములు కావున వీటిని కూడలేము)

ఉదాహరణ: 3.5

$(2x+5y)$ మరియు $(3x-4y)$ లను గుణించుము.

సాధన:

అడ్డు విభాగ విధానము ప్రకారము

$(2x+5y)\,(3x-4y) = 2x\,(3x-4y) + 5y\,(3x-4y)$

$= 6x^2 - 8xy + 15xy - 20y^2$

$= 6x^2 + 7xy - 20y^2$ (సజాతి పదాలు సూక్ష్మీకరణ)

మరొక పద్ధతి

గ్రిడ్ విధానము

$\times$	$2x$	$5y$
$3x$	$6x^2$	$15xy$
$-4y$	$-8xy$	$-20y^2$

$= 6x^2 - 8xy + 15xy - 20y^2$

$= 6x^2 + 7xy - 20y^2$

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 80 31-07-2020 12:52:10

ప్రయత్నించుము

గుణించండి

(i) $(a-5)$ మరియు $(a+4)$

(ii) $(a+b)$ మరియు $(a-b)$

(iii) (m^4+n^4) మరియు $(m-n)$

(iv) $(2x+3)(x+4)$

(v) $(3x+7)(x-5)$

(vi) $(x-2)(6x-3)$

ఆలోచించుము

(i) $3x^2(x^4-7x^3+2)$ అను సమాసము యొక్క గరిష్ఠ అంతస్తు ఎంత?

(ii) $-5y^2+2y-6=-(5y^2+2y-6)$? అగునా? కానిచో తప్పును సరిచేయుము.

అభ్యాసము 3.1

1. పట్టికను పూరించుము.

$\times$	$2x^2$	$-2xy$	x^4y^3	$2xyz$	$(__)xz^2$
x^4					
$(___)$			$4x^5y^4$		
$-x^2y$					
$2y^2z$					$-10xy^2z^3$
$-3xyz$					
$(___)$				$-14xyz^2$	

2. క్రింది పదాల లబ్ధంను కనుగొనుము.

   $-2mn, (2m)^2, -3mn$ (ii) $3x^2y, -3xy^3, x^2y^2$

3. $l=4pq^2$, $b=-3p^2q$, $h=2p^3q^3$ అయితే $l\times b\times h$ విలువను కనుగొనుము.

4. విస్తరించుము

   (i) $5x(2y-3)$ (ii) $-2p(5p^2-3p+7)$

   (iii) $3mn(m^3n^3-5m^2n+7mn^2)$ (iv) $x^2(x+y+z)+y^2(x+y+z)+z^2(x-y-z)$

5. క్రింది వాటికి లబ్ధాలను కనుగొనండి.

   (i) $(2x+3)(2x-4)$ (ii) $(y^2-4)(2y^2+3y)$

   (iii) $(m^2-n)(5m^2n^2-n^2)$ (iv) $3(x-5)\times 2(x-1)$

6. క్రింది వాటిలో లోపించిన పదమును కనుగొనుము.

   (i) $6xy\times_________=-12x^3y$ (ii) $_________\times(-15m^2n^3p)=45m^3n^3p^2$

   (iii) $2y(5x^2y-___+3___)=10x^2y^2-2xy+6y^3$

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 81 31-07-2020 12:52:19

7. క్రింది వాటిని జతపరుచుము:

a) $4y^2 \times -3y$ (i) $20x^2y - 20x$

b) $-2xy(5x^2 - 3)$ (ii) $5x^3 - 5xy^2 + 5x^2y$

c) $5x(x^2 - y^2 + xy)$ (iii) $4x^2 - 9$

d) $(2x+3)(2x-3)$ (iv) $-12y^3$

e) $5x(4xy - 4)$ (v) $-10x^3y + 6xy$

A) iv, v, ii, i, iii B) v, iv, iii, ii, i C) iv, v, ii, iii, i D) iv, v, iii, ii, i

8. ఒక కారు $(x+30)$ కి.మీ/గం స్థిరవేగముతో ప్రయాణిస్తున్నది. ఈ కారు $(y+2)$ గంటలలో ప్రయాణించిన దూరమును కనుగొనుము. (సూచన: దూరము= వేగము×కాలము)

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

9. $7p^3$ మరియు $(2p^2)^2$ ల లబ్దము

(A) $14p^{12}$ (B) $28p^7$ (C) $9p^7$ (D) $11p^{12}$

10. $-3m^3n \times 9(__) = ________ m^4n^3$ లబ్దంలో లోపించిన పదాలు.

(A) $mn^2, 27$ (B) $m^2n, 27$ (C) $m^2n^2, -27$ (D) $mn^2, -27$

11. ఒక చతురస్ర వైశాల్యము $36x^4y^2$ అయిన దాని భుజము ____________

(A) $6x^4y^2$ (B) $8x^2y^2$ (C) $6x^2y$ (D) $-6x^2y$

12. దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము $48m^2n^3$ మరియు దాని పొడవు $8mn^2$ అయిన దాని వెడల్పు __________.

(A) $6\,mn$ (B) $8m^2n$ (C) $7m^2n^2$ (D) $6m^2n^2$

13. దీర్ఘ చతురస్ర పొలము వైశాల్యము $(a^2 - b^2)$ చదరపు ప్రమాణాలు దాని వెడల్పు $(a-b)$ అయితే దాని పొడవు ___________

(A) $a-b$ (B) $a+b$ (C) a^2-b (D) $(a+b)^2$

3.3 బీజీయ సమాసముల భాగాహారము:

మునుపటి భాగంలో మనము బీజీయ సమాసాలను కూడడం, తీసివేయడం, గుణించడం నేర్చుకొన్నాము. ఇప్పుడు మనము బీజీయ సమాసాలకు సంబంధించిన మరొక ప్రాథమిక పరిక్రియ "**భాగాహారము**" నేర్చుకోబోతున్నాము. భాగాహారం అనేది గుణకారము యొక్క వ్యతిరేక పరిక్రియ అని మనకు తెలుసు.

ఇప్పుడు ఒక బంతి వెల ₹5 అయిన 10 బంతులు వెల $= 10 \times 5$

$= ₹\ 50$

10 బంతులు కొనడానికి మన వద్ద ₹50 ఉన్నట్లు అయితే

ఒక్కొక్క బంతి వెల $= ₹\ \frac{50}{10}$

$= ₹5$

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 82 31-07-2020 12:52:27

పైన సంఖ్యల భాగాహారమును చూసాము. కాని ఒక బీజీయ సమాసాన్ని మరొక బీజీయ సమాసముతో ఎలా భాగిస్తావు?

సాధారణంగా ఘాతాంకాల న్యాయాల సహాయంతో బీజీయ సమాసములకు కూడా ఇదే పద్ధతిని అనుసరించాలి.

'x' ఒక చరరాశి మరియు m, nలు స్థిరరాశులు అయితే, $x^m \div x^n = x^{m-n}$ అవుతుంది. ఇక్కడ $m > n$

3.3.1 ఒక ఏకపదిని మరొక ఏకపదిచే భాగించుట

ఒక ఏకపది $10p^4$ ను మరొక ఏకపది $2p^3$ చే భాగించిన మనకు

$$10p^4 \div 2p^3$$

$$\frac{10p^4}{2p^3} = \frac{\overset{5}{\cancel{10}} \times p \times \cancel{p} \times \cancel{p} \times \cancel{p}}{\cancel{2} \times \cancel{p} \times \cancel{p} \times \cancel{p}}$$ (ఘాతాంకాల విస్తరణ)

=5p లభించును.

ఆలోచించుము

ఇవి సరియగునా?

(i) $\frac{x^3}{x^8} = x^{8-3} = x^5$

(ii) $\frac{10m^4}{10m^4} = 0$

(iii) ఒక ఏకపదిని అదే ఏకపదిచే భాగిస్తే '1' వస్తుందా?

అయినప్పటికి, మనము ఘాతాంక న్యాయాలను అనుసరించి కూడా భాగాహారాన్ని క్రింది విధంగా చేయవచ్చును.

$$\frac{10p^4}{2p^3} = 5p^{4-3}$$

$$= 5p$$

$$\boxed{\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}}$$

ఉదాహరణ: 3.6

వేలు తన స్క్రాప్ బుక్‌లో ఒక పేజీలో $4xy$ బొమ్మలను అతికించాడు. అదే విధముగా $100x^2y^3$ బొమ్మలను అతను అతికించడానికి ఎన్ని పేజీలు అవసరము? (x,y ధన పూర్ణ సంఖ్యలు)

సాధన:

మొత్తము బొమ్మల సంఖ్య $= 100x^2y^3$

ఒక్కొక్క పేజీలోని బొమ్మల సంఖ్య $= 4xy$

అవసరమైన మొత్తం పేజీల సంఖ్య $= \dfrac{\text{మొత్తము బొమ్మల సంఖ్య}}{\text{ఒక్కొక్క పేజీలోని బొమ్మల సంఖ్య}}$

$$= \frac{\overset{25}{\cancel{100}}x^2y^3}{\cancel{4}xy} = 25x^{2-1}y^{3-1}$$

$= 25xy^2$ పేజీలు

ప్రయత్నించుము

భాగించండి.

(i) $12x^3y^2 \div x^2y$ (ii) $-20a^5b^2 \div 2a^3b^7$ (iii) $28a^4c^2 \div 21ca^2$

(iv) $(3x^2y)^3 \div 6x^2y^3$ (v) $64m^4(n^2)^3 \div 4m^2n^2$ (vi) $(8x^2y^2)^3 \div (8x^2y^2)^2$

(vii) $81p^2q^4 \div \sqrt{81p^2q^4}$ (vii) $(4x^2y^3)^0 \div \frac{(x^3)^2}{x^6}$

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 83 31-07-2020 12:52:33

3.3.2 ఒక బహుపదిని ఏక పదిచే భాగించుట

ఒక బహుపదిని ఏక పదిచే భాగించడానికి, బహుపదిలోని ప్రతి పదాన్ని ఏక పదిచే భాగించాలి.

ఉదాహరణ: 3.7

$(5y^3 - 25y^2 + 8y)$ ను $5y$ చే భాగించండి.

సాధన:

లెక్క ప్రకారము, $(5y^3 - 25y^2 + 8y) \div 5y$

$$= \frac{5y^3 - 25y^2 + 8y}{5y}$$

$$= \frac{5y^3}{5y} - \frac{25y^2}{5y} + \frac{8y}{5y}$$

$$= y^{3-1} - 5y^{2-1} + \frac{8}{5}$$

$$= y^2 - 5y + \frac{8}{5}$$

ఆలోచించుము

కింది భాగాహారాలు సరైనవేనా?

(i) $\frac{4y+3}{4} = y + 3$ (ii) $\frac{5m^2+9}{9} = 5m^2$

(iii) $\frac{2x^2+8}{4} = 2x^2 + 2$. సరి కానిచో, సరి చేయుము.

ప్రయత్నించుము

(i) $(16y^5 - 8y^2) \div 4y$

(ii) $(p^5q^2 + 24p^3q - 128q^3) \div 6q$

(iii) $(4m^2n + 9n^2m + 3mn) \div 4mn$

3.4 కొన్ని సాధారణ దోషాలను నివారించుట

వ.సం	దోషము	సరియైనది	కారణము
1.	$2xx = 2x$	$2xx = 2 \times x^1 \times x^1 = 2x^2$	చరరాశుల యొక్క లబ్ధము.
2.	$-3x - 4x = -1x$	$-3x - 4x = -7x$	ఒకే గుర్తులున్న కారణాంకాలను కూడాలి మరియు అదే గుర్తును ఉంచాలి.
3.	$4y + 3y + y = 7y$	$4y + 3y + y = 8y$	ఒక పదము యొక్క గుణకము 1ని సాధారణంగా వ్రాయరు. 1y ను y గా వ్రాస్తారు.
4.	$5x + 3x = 8x^2$	$5x + 3x = 8x$	సజాతి పదాలను కూడేటప్పుడు లేక తీసివేయునపుడు చరరాశులను యధాతథంగా వుంచి సజాతి పదాల గుణకాలను మాత్రమే కూడాలి లేక తీసివేయాలి.
5.	$9x + 1 = 10x$	$9x + 1 = 9x + 1$	విజాతి పదాలను కూడలేము లేక తీసివేయలేము.
6.	$3x + 4y = 7xy$	$3x + 4y = 3x + 4y$	విజాతి పదాలను కూడలేము.
7.	$3(4x+9) = 12x + 9$	$3(4x+9) = 12x + 27$	3 అనే సామాన్య కారణాంకము రెండు పదాలను గుణిస్తున్నది.
8.	$5 + (3y-4) = 15y - 20$	$5 + (3y-4) = 5 + 3y - 4$	పదాల మధ్య ఉన్నది కూడిక గుర్తు కాని, గుణకారం గుర్తు కాదు.
9.	$(-7x^2 + 2x + 3) = -(7x^2 + 2x + 3)$	$-7x^2 + 2x + 3 = -(7x^2 - 2x - 3)$	(–1) ను సామాన్య కారణాంకముగా వేరు చేస్తే అన్నీ పదాల గుర్తులు మారును.

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 84 31-07-2020 12:52:39

10.	$(2x)^2 = 2x^2$	$(2x)^2 = 2^2 \times x^2 = 4x^2$	బ్రాకెట్లో ఉన్న అన్ని ప్రాథమిక కారణంకాలకు ఒకే ఉమ్మడి ఘాతాంకం ఉండును.
11.	$(2x-5)(3x-4)$ $= 6x^2 + 20$	$(2x-5)(3x-4)$ $= 2x(3x-4) - 5(3x-4)$ $= 6x^2 - 8x - 15x + 20$ $= 6x^2 - 23x + 20$	విభాగ న్యాయము అనుసరించవలెను.
12.	$(x-9)^2 = x^2 - 9^2$	$(x-9)^2 = (x-9)(x-9)$ $= x^2 - 2(x)(9) + 9^2$ $= x^2 - 18x + 81$	$(a+b)^2, (a-b)^2$ సర్వ సమీకరణాలను ఉపయోగించి ద్విపదిల లబ్దము.
13.	$\frac{p^2}{p^5} = p^{5-2} = p^3$	$\frac{p^2}{p^5} = \frac{1}{p^{5-2}} = \frac{1}{p^3}$	ఘాతాంక న్యాయంను అనుసరించి $x^m \div x^n = x^{m-n}$, ఇక్కడ $m > n$
14.	$\frac{x^2+5}{5} = x^2$	$\frac{x^2+5}{5} = \frac{x^2}{5} + \frac{5}{5}$ $= \frac{x^2}{5} + 1$	హారముచే సమాసము యొక్క ప్రతి పదమును భాగించవలెను.
15.	$\frac{5\cancel{m^2}}{5\cancel{m^2}} = 0$	$\frac{5m^2}{5m^2} = 1$	ఒక పదమును అదే పదముచే భాగించబడిన 1 వచ్చును.

అభ్యాసము 3.2

1. క్రింది ఖాళీలను పూరింపుము

   (i) $\frac{18m^4(__)}{2m^3n^3} = _____ mn^5$ (ii) $\frac{l^4m^5n^{(_)}}{2lm^{(_)}n^6} = \frac{l^3m^2n}{(__)}$ (iii) $\frac{42a^4b^5(__)}{6a^4b^2} = (__)b^{(_)}c^2$

2. సత్యమా? (లేక) అసత్యమా తెలుపుము?

   (i) $8x^3y \div 4x^2 = 2xy$ (ii) $7ab^3 \div 14ab = 2b^2$

3. భాగించుము

   (i) $27y^3 \div 3y$ (ii) $x^3y^2 \div x^2y$ (iii) $45x^3y^2z^4 \div (-15xyz)$ (iv) $(3xy)^2 \div 9xy$

4. సూక్ష్మీకరించుము

   (i) $\frac{3m^2}{m} + \frac{2m^4}{m^3}$ (ii) $\frac{14p^5q^3}{2p^2q} - \frac{12p^3q^4}{3q^2}$

5. భాగించుము

   (i) $(32y^2 - 8yz)$ ను $2y$ చే (ii) $(4m^2n^3 + 16m^4n^2 - mn)$ ను $2mn$ చే

   (iii) $5xy^2 - 18x^2y^3 + 6xy$ ను $6xy$ చే (iv) $81(p^4q^2r^3 + 2p^3q^3r^2 - 5p^2q^2r^2)$ ను $(3pqr)^2$ చే

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 85 31-07-2020 12:52:47

6. క్రింది వాటిలో దోషములను గుర్తించి వాటిని సరిచేయుము.

(i) $7y^2 - y^2 + 3y^2 = 10y^2$ (ii) $6xy + 3xy = 9x^2y^2$

(iii) $m(4m-3) = 4m^2 - 3$ (iv) $(4n)^2 - 2n + 3 = 4n^2 - 2n + 3$

(v) $(x-2)(x+3) = x^2 - 6$ (vi) $-3p^2 + 4p - 7 = -(3p^2 + 4p - 7)$

7. ప్రవచనము A: $24p^2q$ ను $3pq$ చే భాగించిన భాగఫలము $8p$.

ప్రవచనము B: $\frac{(5x+5)}{5}$ యొక్క సూక్ష్మీకరణ $5x$.

(i) A మరియు B రెండునూ సత్యము (ii) A సత్యము కాని B అసత్యము

(iii) A అసత్యము కాని B సత్యము (iv) A మరియు B రెండునూ అసత్యము

8. ప్రవచనము A: $4x^2 + 3x - 2 = 2(2x^2 + \frac{3x}{2} - 1)$, ప్రవచనము B: $(2m-5)-(5-2m) = (2m-5)+(2m-5)$

(i) A మరియు B రెండునూ సత్యము (ii) A సత్యము కాని B అసత్యము

(iii) A అసత్యము కాని B సత్యము (iv) A మరియు B రెండునూ అసత్యము

3.5 సర్వసమీకరణములు

మనము క్రింది తరగతిలో ప్రామాణిక బీజీయ సర్వసమీకరణాల గూర్చి అధ్యయనం చేశాము. ఒక సర్వసమీకరణం అనేది దానిలోని చరరాశికి బదులుగా ఏ విలువను ప్రతిక్షేపించిన అది తృప్తిపరచే ఒక సమీకరణం. ఇప్పుడు మనము మనకు తెలిసిన నాలుగు సర్వ సమీకరణాలను గుర్తుకు తెచ్చుకుందాం.

$(a+b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ $(a-b)^2 \equiv a^2 - 2ab + b^2$

$(a^2 - b^2) \equiv (a+b)(a-b)$ $(x+a)(x+b) \equiv x^2 + (a+b)x + ab$

ఒక సర్వసమీకరణమును సూచించుటకు $\equiv$ గుర్తుకు బదులుగా $=$ గుర్తును ఏటువంటి గందరగోళం లేకుండా ఉపయోగించవచ్చును.

ప్రయత్నించుము

క్రింది వాటిని విస్తరించుము.

(i) $(p+2)^2 =$ .... (ii) $(3-a)^2 =$ ....

(iii) $(6^2 - x^2) =$ .... (iv) $(a+b)^2 - (a-b)^2 =$ ....

(v) $(a+b)^2 = (a+b) \times$ .... (vi) $(m+n)(.....) = m^2 - n^2$

(vii) $(m + ...)^2 = m^2 + 14m + 49$ (viii) $(k^2 - 49) = (k + \ldots)(k - \ldots)$

(ix) $m^2 - 6m + 9 =$ .... (x) $(m-10)(m+5) =$ ....

గమనిక

x=1 నకు $7x + 3$=10 అనునది ఒకేఒక సాధన, కాని అదే సమయంలో ప్రతి x యొక్క విలువ $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$. ను తృప్తిపరుచును. కావున $7x + 3$=10 అనునది ఒక సమీకరణము $(x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$ ఒక సర్వసమీకరణము. ఒక సర్వసమీకరణము సమీకరణమగును కాని దీని విపర్యయము సత్యముకాదు.

3.5.1 సర్వసమీకరణాల అనువర్తనము.

సర్వసమీకరణాలు అనేది బీజీయ సమాసాలు మరియు సంఖ్యల గుణకారమునకు సంబంధించిన సమస్యలను సాధించడానికి ఒక ప్రత్యామ్నాయ పద్ధతిని ఇస్తాయి.

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 86 31-07-2020 12:52:52

ఉదాహరణ: 3.8

$(a+b)^2$ సర్వసమీకరణమును ఉపయోగించి $(3a+4c)^2$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన: $(3a+4c)^2$ ను $(a+b)^2$ తో పోల్చగా మనకు $a=3a, b=4c$ వచ్చును.

ఇప్పుడు $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$\therefore$ $(3a+4c)^2 = (3a)^2 + 2(3a)(4c) + (4c)^2$ (a మరియు b స్థానాలలో ప్రతిక్షేపించగా)

$= 3^2 a^2 + (2 \times 3 \times 4)(a \times c) + 4^2 c^2$

$(3a+4c)^2 = 9a^2 + 24ac + 16c^2$

ఆలోచించుము

ఏది సరి అయినది?

$(3a)^2$ కు సమానమైనది

(i) $3a^2$ (ii) 3^2a

(iii) $6a^2$ (iv) $9a^2$

ఉదాహరణ: 3.9

$(a-b)^2$ సర్వసమీకరణమును ఉపయోగించి 998^2 విలువను కనుగొనండి.

సాధన: 998 ను $(1000-2)$ గా వ్యక్తపరచవచ్చునని మనకు తెలుసు.

$\therefore$ $(998)^2 = (1000-2)^2$

ఇది $(a-b)^2$ రూపంలో ఉన్నది. కనుక $a=1000$, $b=2$ వచ్చును.

ఇప్పుడు $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(1000-2)^2 = (1000)^2 - 2(1000)(2) + (2)^2$

$= 1000000 - 4000 + 4$

$(998)^2 = 996004$

ఉదాహరణ: 3.10

$(a+b)(a-b)$ సర్వసమీకరణమును ఉపయోగించి $(3x+5y)(3x-5y)$ ను సూక్ష్మీకరించుము.

సాధన: లెక్కప్రకారం $(3x+5y)(3x-5y)$

$(a+b)(a-b)$ తో పోల్చగా మనకు $a=3x$ $b=5y$ వచ్చును.

ఇప్పుడు $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

$(3x+5y)(3x-5y) = (3x)^2 - (5y)^2$ (a మరియు b విలువలను ప్రతిక్షేపించగా)

$= 3^2 x^2 - 5^2 y^2$

$(3x+5y)(3x-5y) = 9x^2 - 25y^2$

ఉదాహరణ: 3.11

a^2-b^2 సర్వసమీకరణమును ఉపయోగించి y^2-16 ను విస్తరించుము.

సాధన: y^2-16 ను y^2-4^2 గా వ్రాయవచ్చును.

దీనిని a^2-b^2 తో పోల్చగా $a=y, b=4$ వచ్చును

ఇప్పుడు $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

$y^2 - 4^2 = (y+4)(y-4)$

$y^2 - 16 = (y+4)(y-4)$

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 87 31-07-2020 12:53:00

ఉదాహరణ: 3.12

$(x+a)(x+b)$ సర్వసమీకరణమును ఉపయోగించి $(5x+3)(5x+4)$ను సూక్ష్మీకరించుము

సాధన: లెక్కప్రకారం

$(5x+3)(5x+4)$ దీనిని $(x+a)(x+b)$ తో పోల్చగా, $x=5x$ మరియు $a=3,\ b=4$ వచ్చును

కావున $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$ (x, a మరియు b విలువలను ప్రతిక్షేపించగా)

$$(5x+3)(5x+4) = (5x)^2 + (3+4)(5x) + (3)(4)$$
$$= 5^2x^2+(7)(5x)+12$$
$$(5x+3)(5x+4)=25x^2+35x+12$$

ప్రయత్నించుము

తగిన సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి విస్తరించుము.

(i) $(3p+2q)^2$ (ii) $(105)^2$ (iii) $(2x-5d)^2$

(iv) $(98)^2$ (v) $(y-5)(y+5)$ (vi) $(3x)^2-5^2$

(vii) $(2m+n)(2m+p)$ (viii) 203×197

(ix) $(x-2)$ భుజంగా గల చతురస్రం యొక్క వైశాల్యాన్ని కనుగొనుము.

(x) పొడవు $(y+4)$ మరియు వెడల్పు $(y-3)$ గా గల దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యాన్ని కనుగొనుము.

3.6. ఘన సర్వసమీకరణాలు

I. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

ఇప్పుడు మనము దానిని నిరూపిద్దాం:

LHS $=(a+b)^3$

$=[(a+b)(a+b)](a+b)$ (విస్తరణ రూపం)

$=(a+b)^2(a+b)$

$=(a^2+2ab+b^2)(a+b)$ (సర్వసమీకరణమును ఉపయోగించి)

$=a(a^2+2ab+b^2)+b(a^2+2ab+b^2)$ (విభాగ న్యాయమును ఉపయోగించి)

$=a^3+2a^2b+ab^2+ba^2+2ab^2+b^3$

$=a^3+(2a^2b+ba^2)+(ab^2+2ab^2)+b^3$ (సజాతి పదాలను సమూహములుగా చేసిన)

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$=RHS$

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

కాబట్టి మనము ప్రత్యక్ష గుణకారం ద్వారా ఘన సర్వసమీకరణాలన్నీ ఋజువు చేసినాము.

మరొక పద్ధతి

$\times$	a^2	$2ab$	b^2
a	a^3	$2a^2b$	ab^2
b	a^2b	$2ab^2$	b^3

$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

కృత్యము

ఉపాధ్యాయుని సహాయంతో $(a+b)^3$ యొక్క నిరూపణను మనము చిత్రీకరించ వచ్చును.

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 88 31-07-2020 12:53:07

II. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

ప్రత్యక్ష గుణకారం ద్వారా ఈ సర్వసమీకరణమును నిరూపించవచ్చును.

L.H.S $(a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b)$

$= (a-b)^2 \times (a-b)$

$= (a^2 - 2ab + b^2)(a-b)$

$= a(a^2 - 2ab + b^2) - b(a^2 - 2ab + b^2)$

$= a^3 - 2a^2b + ab^2 - ba^2 + 2ab^2 - b^3$

$= a^3 - 2a^2b + ba^2 + ab^2 + 2ab^2 - b^3$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$= RHS$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

కావున, మనము నిరూపించాము.

మరొక పద్ధతి

$\times$	a^2	$-2ab$	b^2
a	a^3	$-2a^2b$	ab^2
$-b$	$-a^2b$	$2ab^2$	$-b^3$

$= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^2b = ba^2$ అనునది గుణకార స్థిత్యంతరము

III. $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$ అనే సర్వసమీకరణము మనకు తెలుసు. దీనిని $(x+c)$ అనే ద్విపదితో గుణిస్తాము. అప్పుడు మనకు

$(x+a)(x+b)(x+c) = \left[(x+a)(x+b)\right](x+c)$ వస్తుంది.

$= (x^2 + (a+b)x + ab) \times (x+c)$

$= x\left[x^2 + (a+b)x + ab\right] + c\left[x^2 + (a+b)x + ab\right]$ (విభాగన్యాయము)

$= x^3 + (a+b)x^2 + abx + cx^2 + (a+b)xc + abc$

$= x^3 + ax^2 + bx^2 + abx + cx^2 + acx + bcx + abc$

$= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$ (x^2, x పదాలను ఒకటిగా కలిపిన)

$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$

కనుక, ఘన సర్వ సమీకరణాలను సంక్షిప్తంగా చూపిన.

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$

ఉత్పాదనలు:

పై సర్వసమీకరణాలను క్రింది విధంగా ఉత్పాదించవచ్చును:

(i) $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$

(ii) $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$

(iii) $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

(iv) $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

ఏలా? దీనిని ప్రయత్నించుము

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 89 31-07-2020 12:53:14

3.6.3 ఘన సర్వసమీకరణాల అనువర్తనాలు

I. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ అనే సర్వ సమీకరణాన్ని ఉపయోగించుట

ఉదాహరణ: 3.13

విస్తరించుము: $(x+4)^3$

సాధన:

$(x+4)^3$ ను $(a+b)^3$ తో పోల్చగా మనకు $a = x$, $b = 4$ వచ్చును

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ అని మనకు తెలుసు

$(4)^2 = 4 \times 4 = 16$

$(4)^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

$(x+4)^3 = (x)^3 + 3(x)^2(4) + 3(x)(4)^2 + (4)^2$ (a, b విలువలను ప్రతిక్షేపించగా)

$= (x)^3 + 3x^2(4) + 3(x)(16) + 64$

$(x+4)^3 = x^3 + 12x^2 + 48x + 64$

$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ నుపయోగించి విస్తరించుము.

ఉదాహరణ: 3.14

$(103)^3$ విలువను కనుగొనుము

సాధన:

ఇప్పుడు, $(103)^3 = (100+3)^3$ ను

$(a+b)^3$ తో పోల్చగా $a = 100, b = 3$ వచ్చును.

$(a+b)^3 \quad = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ (a, b విలువలను ప్రతిక్షేపించగా)

$(100+3)^3 \quad = (100)^3 + 3(100)^2(3) + 3(100)(3)^2 + (3)^3$

$= 1000000 + 3(10000)(3) + 3(100)(9) + 27$

$= 1000000 + 90000 + 2700 + 27$

$(103)^3 \quad = 1092727$

II. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ అనే సర్వసమీకరణాన్ని ఉపయోగించుట.

ఉదాహరణ: 3.15

విస్తరించుము: $(y-5)^3$

సాధన:

$(y-5)^3$ ను $(a-b)^3$, తో పోల్చగా $a = y, b = 5$ వచ్చును.

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(y-5)^3 = (y)^3 - 3(y)^2(5) + 3(y)(5)^2 - (5)^3$

$= (y)^3 - 3y^2(5) + 3(y)(25) - 125$

$(y-5)^3 = y^3 - 15y^2 + 75y - 125$

$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$ నుపయోగించి విస్తరించుము.

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 90 31-07-2020 12:53:20

ఉదాహరణ: 3.16

$(98)^3$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన: ఇప్పుడు, $(98)^3 = (100-2)^3$

దీనిని $(a-b)^3$ తో పోల్చగా, మనకు $a = 100, b = 2$ వచ్చును.

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(100-2)^3 = (100)^3 - 3(100)^2(2) + 3(100)(2)^2 - (2)^3$$

$$= 1000000 - 3(10000)(2) + 3(100)(4) - 8$$

$$= 1000000 - 60000 + 1200 - 8$$

$$= 941192$$

III. $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$ సర్వ సమీకరణాన్ని ఉపయోగించుట.

ఉదాహరణ: 3.17

విస్తరించుము $(x+3)(x+5)(x+2)$

సాధన: ఇవ్వబడినది $(x+3)(x+5)(x+2)$

$(x+a)(x+b)(x+c)$ తో పోల్చగా, మనకు, $x = x$, $a = 3$, $b = 5$, $c = 2$ వచ్చును.

$(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$ తో పోల్చగా

$$(x+3)(x+5)(x+2) = (x)^3 + (3+5+2)(x)^2 + (3\times5 + 5\times2 + 2\times3)x + (3)(5)(2)$$

$$= x^3 + 10x^2 + (15+10+6)x + 30$$

$$(x+3)(x+5)(x+2) = x^3 + 10x^2 + 31x + 30$$

ప్రయత్నించుము

విస్తరించుము : (i) $(x+5)^3$ (ii) $(y-2)^3$ (iii) $(x+1)(x+4)(x+6)$

అభ్యాసము 3.3

1. విస్తరించుము
   (i) $(3m+5)^2$ (ii) $(5p-1)^2$ (iii) $(2n-1)(2n+3)$ (iv) $4p^2 - 25q^2$
2. విస్తరించుము
   (i) $(3+m)^3$ (ii) $(2a+5)^3$ (iii) $(3p+4q)^3$ (iv) $(52)^3$ (v) $(104)^3$
3. విస్తరించుము
   (i) $(5-x)^3$ (ii) $(2x-4y)^3$ (iii) $(ab-c)^3$ (iv) $(48)^3$ (v) $(97xy)^3$
4. సూక్ష్మీకరించుము $(p-2)(p+1)(p-4)$
5. ఘనము యొక్క భుజము $(x+1)$ సెం.మీ. అయిన ఘనము యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.
6. దీర్ఘఘనము యొక్క కొలతలు వరుసగా $(x+2), (x-1)$ మరియు $(x-3)$ అయిన దీర్ఘఘనము యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 91 31-07-2020 12:53:27

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

7. $x^2-y^2 = 16$ మరియు $(x+y) = 8$ అయిన $(x-y)$ ____________

   (A) 8 (B) 3 (C) 2 (D) 1

8. $\dfrac{(a+b)(a^3-b^3)}{(a^2-b^2)} =$ ____________

   (A) a^2-ab+b^2 (B) a^2+ab+b^2 (C) $a^2+2ab+b^2$ (D) $a^2-2ab+b^2$

9. $(p+q)(p^2-pq+q^2) =$ ______________

   (A) p^3+q^3 (B) $(p+q)^3$ (C) p^3-q^3 (D) $(p-q)^3$

10. $(a-b)=3$ మరియు $ab=5$ అయిన $a^3-b^3 =$ _____________

    (A) 15 (B) 18 (C) 62 (D) 72

11. $a^3+b^3 = (a+b)^3 -$ ___________

    (A) $3a(a+b)$ (B) $3ab(a-b)$ (C) $-3ab(a+b)$ (D) $3ab(a+b)$

3.7 కారణాంకపరుచుట

ఏదైనా సంఖ్యను రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ సంఖ్యలు లబ్ధంగా తెలియజేయు దానిని కారణాంక విభజన అని అందురు. 12 అనే సంఖ్యను ప్రధానకారణాంకాల లబ్ధము $12 = 2 \times 2 \times 3$ గా వ్రాయవచ్చును. దీనినే ప్రధాన కారణంగా విభజన అని అందురు. బీజీయ సమాసమును ఎలా కారణాంక విభజన చేస్తావు? అవును, ఒక బీజీయ సమాసాన్ని రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ సమాసముల లబ్ధముగా తెలిపిన దాని కారణాంక విభజన అని అందురు.

గమనిక

1 మరియు అదే సంఖ్యచే భాగించబడే (లేక) రెండు కారణాంకాలు మాత్రమే కలిగిన సంఖ్యలను ప్రధానసంఖ్యలు అంటారు. ఉదాహరణ: 2, 3, 5. 7. 11, ...

రెండు కంటే ఎక్కువ కారణాంకాలు కలిగిన సంఖ్యలను సంయుక్తసంఖ్యలు అంటారు. ఉదాహరణ: 4, 6, 8, 9, 10, 12, ...

ఉదాహరణకు,

(i) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, ఇక్కడ $(a+b)$ మరియు $(a-b)$ లు a^2-b^2 యొక్క రెండు కారణాంకాలు.

(ii) $5y+30 = 5(y+6)$ ఇక్కడ 5 మరియు $(y+6)$ లు $5y+30$ యొక్క రెండు కారణాంకాలు.

ఏదైనా సమాసమును $(1) \times$ (సమాసము) గా కారణాంక విభజన చేయవచ్చును.

ఉదాహరణకు, a^2-b^2 ను కూడా క్రింది విధంగా కారణాంక విభజన చేయవచ్చును

$(1)\times\left(a^2-b^2\right)$ లేక $(-1)\times\left(b^2-a^2\right)$

ఎందుకనగా, ‘1’ అనునది అన్ని సంఖ్యలకు మరియు సమాసములకు ఒక కారణాంకం అవుతుంది.

కనుక, సమాసములను విభజన చేయునప్పుడు, ‘1’ కాకుండా రెండు లేక అంతకన్నా ఎక్కువ కారణాంకాలను పొందడానికి తగిన కారణాంక విభజన పద్ధతిని అనుసరిస్తాము. సమాసము నుండి అన్ని సామాన్య కారణాంకాలు పొందిన వెంటనే కారణాంక విభజన చేయు ప్రక్రియను ఆపివేయాలి మరియు జాబితాను రూపొందించాలి.

రకం 1: ఒక్కొక్క పదము నుండి సామాన్య కారణాంకమును బయటకు తీసి కారణాంకపరుచుట.

ఉదాహరణ: 3.18

కారణాంకపరుచుము: $4x^2y+8xy$

సాధన:

ఇప్పుడు, $4x^2y+8xy$ దీనిని,

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 92 31-07-2020 12:53:31

$= (2\times2\times x\times x\times y) + (2\times2\times2\times x\times y)$ గా వ్రాసిన

సామాన్య కారణాంకము $2, 2, x, y$ ను బయటకు తీసిన మనకు

$= 2\times2\times x\times y(x+2)$

$= 4xy(x+2)$

రకం 2: ఒక్కొక్క పదము నుండి సామాన్య ద్విపద కారణాంకమును బయటకు తీసి కారణాంకపరచుట.

ఉదాహరణ: 3.19

(i) కారణాంకపరుచుము: $(2x+5)(x-y)+(4y)(x-y)$	(ii) కారణాంకపరుచుము $3n(p-2)+4(2-p)$
సాధన: ఇవ్వబడిన $(2x+5)(x-y)+(4y)(x-y)$ సామాన్య ద్విపద కారణాంకము $(x-y)$ ను బయటకు తీయగా $(x-y)(2x+5+4y)$ వచ్చును.	**సాధన:** ఇవ్వబడిన $3n(p-2)+4(2-p)$ (– ను సామాన్యపరచగా) $3n(p-2)-4(p-2)$ సామాన్య ద్విపద కారణాంకము $(p-2)$ ను బయటకు తీయగా $(p-2)(3n-4)$ వచ్చును.

రకం 3: ఒకటిగా చేర్చి కారణాంకపరచుట

కొన్ని సమయాలలో, ఇచ్చిన సమాసములోని పదాలు ఒక ఉమ్మడి కారణాంకాన్ని కలిగిన పదాలను మాత్రం ఒకటిగా చేర్చి ఆ పదాలలో గల ఉమ్మడి కారణాంకమును బయటకు తీయడం ద్వారా సులభంగా కారణాంకపరచవచ్చును.

ఉదాహరణ: 3.20

కారణాంకపరుచుము : $x^2 + yz + xy + xz$

సాధన:

మనకు $x^2 + yz + xy + xz$

పదాలను తగిన విధముగా వర్గీకరించిన, $= (x^2+xy)+(yz+xz)$

$= x(x+y)+z(y+x)$

$= x(x+y)+z(x+y)$ (సంకలన స్థిత్యంతరము)

$= (x+y)(x+z)$ (సామాన్య కారణాంకము $(x+y)$ ను బయటకు తీసిన)

రకం 4: సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి కారణాంక విభజన చేయడం.

(i) $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ (ii) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ (iii) $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

ఉదాహరణ: 3.21

కారణాంకపరుచుము : $x^2+8x+16$

సాధన:

ఇప్పుడు, $x^2+8x+16$ దీనిని x^2+8x+4^2 గా వ్రాసిన

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$ తో పోల్చిన మనకు $a=x$, $b=4$ వచ్చును.

$(x^2)+2(x)(4)+(4)^2=(x+4)^2$

$x^2+8x+16=(x+4)^2$

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 93 31-07-2020 12:53:38

$(x+4)$, $(x+4)$ లు రెండు కారణాంకములు.

ఉదాహరణ: 3.22

కారణాంకాలుగా విభజించండి: $49x^2 - 84xy + 36y^2$

సాధన:

ఇప్పుడు $49x^2 - 84xy + 36y^2 = 7^2x^2 - 84xy + 6^2y^2$

$= (7x)^2 - 2(7x)(6y) + (6y)^2$

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ తో పోల్చగా, మనకు $a = 7x$, $b = 6y$ వచ్చును.

$(7x)^2 - 2(7x)(6y) + (6y)^2 = (7x - 6y)^2$

$\therefore \quad 49x^2 - 84xy + 36y^2 = (7x - 6y)^2$

$(7x-6y)$, $(7x-6y)$ లు రెండు కారణాంకములు.

ప్రయత్నించుము

కారణాంకాలను కనుగొనుము

కారణాంకము 1	కారణాంకము 2	లబ్ధము	మొత్తము
		35	12
		-40	-3
		60	-17
		-51	+14
		-32	-4

ఉదాహరణ: 3.23

కారణాంకాలుగా విభజించండి: $49x^2 - 64y^2$

సాధన:

ఇప్పుడు $49x^2 - 64y^2 = 7^2x^2 - 8^2y^2$

$= (7x)^2 - (8y)^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ తో పోల్చగా, మనకు $a = 7x$, $b = 8y$ వచ్చును.

$(7x)^2 - (8y)^2 = (7x + 8y)(7x - 8y)$

$(7x+8y)$, $(7x-8y)$ లు రెండు కారణాంకములు.

రకం 5: 5 $(ax^2 + bx + c)$ సమాసమును కారణాంకాలుగా విభజించుట.

ఉదాహరణ: 3.24

కారణాంకాలుగా విభజించండి: $x^2 + 8x + 15$

లబ్ధము = 15	మొత్తము = 8	
1×15 = 15	1+15 = 16	
3 × 5 = 15	**3+5 = 8**	✓

సాధన:

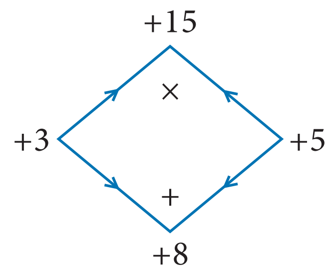
$x^2 + 8x + 15$ అను సమాసము $ax^2 + bx + c$ రూపంలో ఉన్నది.

కాబట్టి, మనకు $a = 1, b = 8, c = 15$ వచ్చును.

ఇప్పుడు లబ్ధము $= a \times c$ మరియు మొత్తం $= b$

$= 1 \times 15 \qquad b = 8$

$= 15$



$= x^2 + 8x + 15$

$= x^2 + 3x + 5x + 15$ (మధ్య పదము $8x$ ను $3x+5x$ గా వ్రాసిన)

$= (x^2 + 3x) + (5x + 15)$

$= x(x+3) + 5(x+3)$ (సామాన్య కారణాంకము $(x+3)$ ను బయటకు తీసిన)

$x^2 + 8x + 15 = (x+3)(x+5)$

ఆలోచించుము

$x^2 - 4(x-2) = (x^2 - 4)(x-2)$

ఇది సరియా? కానిచో సరిచేయుము.

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 94 31-07-2020 12:53:45

($x+3$), ($x+5$) లు రెండు కారణాంకములు.

ఉదాహరణ: 3.25

కారణాంకాలుగా విభజించండి : $7c^2+2c-5$

సాధన:

ఇవ్వబడినది $7c^2+2c-5$

ఇది ax^2+bx+c రూపంలో ఉన్నది

మనకు $a=7,\ b=2,\ c=-5$ వచ్చును.

ఇప్పుడు లబ్ధము $=a\times c=7\times(-5)=-35$ మరియు మొత్తం $b=2$

$=7c^2+2c-5$

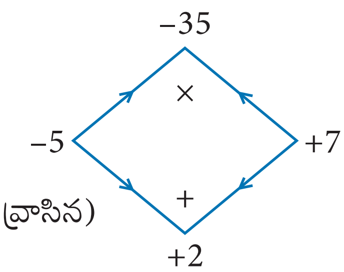
$=(7c^2-5c)+(7c-5)$ (మధ్య పదము $2c$ ను $-5c+7c$ గా వ్రాసిన)

$=c(7c-5)+1(7c-5)$

$=(7c-5)(c+1)$

($7c-5$), ($c+1$) లు రెండు కారణాంకములు.

లబ్ధము = –35	మొత్తము = 2
$1\times(-35)=-35$	$1-35=-34$
$-1\times35=-35$	$-1+35=34$
$5\times(-7)=-35$	$5-7=-2$
$-5\times7=-35$	**$-5+7=2$** ✓



ప్రయత్నించుము

క్రింది వాటిని కారణాంకాలుగా విభజించండి:

1) $3y+6$ 2) $10x^2+15y^2$ 3) $7m(m-5)+1(5-m)$ 4) $64-x^2$ 5) x^2-3x+2

6) $y^2-4y-32$ 7) $p^2+2p-15$ 8) $m^2+14m+48$ 9) x^2-x-90 10) $9x^2-6x-8$

3.7.4 ఘన సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి కారణాంకాలుగా విభజించండి.

ఈ ఘన సర్వసమీకరణాలు

(i) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ (ii) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

పై సర్వసమీకరణాల యొక్క కారణాంక విభజన రూపాలు.

I. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ ను ఉపయోగించి కారణాంకపరుచుము.

ఉదాహరణ: 3.26

$x^3+15x^2+75x+125$ ను కారణాంకపరుచుము.

సాధన:

ఇవ్వబడినది $x^3+15x^2+75x+125$

దీనిని $x^3+15x^2+75x+5^3$ గా వ్రాయవచ్చును.

$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$ తో పోల్చగా

$a=x,\ b=5$ అగును.

$(x)^3+3(x)^2(5)+3(x)(5)^2+(5)^3=(x+5)^3$

గా ఇచ్చిన సమీకరణమును వ్యక్తపరచవచ్చును.

$=(x+5)(x+5)(x+5)$ మూడు కారణాంకములు.

గమనిక

$8a^3=2\times2\times2\times a^3$

$=2^3a^3=(2a)^3$

గమనిక

ఖచ్చిత ఘనసంఖ్యలు

$x\times x\times x$ రూపంలో వ్రాయ గల సంఖ్యను ఖచ్చిత ఘన సంఖ్య అంటారు.

ఉదాహరణలు

$8=2\times2\times2=2^3$

$27=3\times3\times3=3^3$

$125=5\times5\times5=5^3$

ఇక్కడ 8,27,125 లు కొన్ని ఖచ్చిత ఘనసంఖ్యలు.

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 95 31-07-2020 12:53:51

II. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ ను ఉపయోగించి కారణాంకపరుచుము.

ఉదాహరణ: 3.27

$8p^3 - 12p^2q + 6pq^2 - q^3$ ను కారణాంకపరుచుము.

సాధన: ఇవ్వబడినది $8p^3 - 12p^2q + 6pq^2 - q^3$

దీనిని $(2p)^3 - 12p^2q + 6pq^2 - (q)^3$ గా వ్రాయవచ్చును.

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a-b)^3$ తో పోల్చగా, $a = 2p, b = q$ అగును.

$(2p)^3 - 3(2p)^2(q) + 3(2p)(q)^2 - (q)^3 = (2p-q)^3$ గా ఇచ్చిన సమీకరణమును వ్యక్తపరచవచ్చును.

$= (2p-q), (2p-q), (2p-q)$ మూడు కారణాంకములు.

అభ్యాసము 3.4

1. సామాన్య కారణాంకమును బయటకు తీయడం ద్వారా ఈ క్రింది వాటిని కారణాంక విభజన చేయండి.

(i) $18xy - 12yz$ (ii) $9x^5y^3 + 6x^3y^2 - 18x^2y$ (iii) $x(b-2c) + y(b-2c)$

(iv) $(ax+ay)+(bx+by)$ (v) $2x^2(4x-1) - 4x + 1$ (vi) $3y(x-2)^2 - 2(2-x)$

(vii) $6xy - 4y^2 + 12xy - 2yzx$ (viii) $a^3 - 3a^2 + a - 3$ (ix) $3y^3 - 48y$ (x) $ab^2 - bc^2 - ab + c^2$

2. క్రింది సమాసములను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

(i) $x^2 + 14x + 49$ (ii) $y^2 - 10y + 25$ (iii) $c^2 - 4c - 12$ (iv) $m^2 + m - 72$ (v) $4x^2 - 8x + 3$

3. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ సర్వసమీకరణమును ఉపయోగించి క్రింది సమాసాలను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

(i) $64x^3+144x^2+108x+27$ (ii) $27p^3+54p^2q+36pq^2+8q^3$

4. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ సర్వసమీకరణములను ఉపయోగించి క్రింది సమాసాలను కారణాంకాలుగా విభజించండి.

(i) $y^3-18y^2+108y-216$ (ii) $8m^3-60m^2n+150mn^2-125n^3$

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

5. $9x^2+6xy$ యొక్క కారణాంకాలు

(A) $3y, (x+2)$ (B) $3x, (3x+3y)$ (C) $6x, (3x+2y)$ (D) $3x, (3x+2y)$

6. $4-m^2$ యొక్క కారణాంకాలు

(A) $(2+m)(2+m)$ (B) $(2-m)(2-m)$ (C) $(2+m)(2-m)$ (D) $(4+m)(4-m)$

7. $(x+4)$ మరియు $(x-5)$ లు ___________ యొక్క కారణాంకములు.

(A) x^2-x+20 (B) $x^2-9x-20$ (C) x^2+x-20 (D) x^2-x-20

8. x^2-5x+6 యొక్క కారణాంకములు $(x-2)(x-p)$ అయిన p విలువ __________.

(A) -3 (B) 3 (C) 2 (D) -2

9. $1-m^3$ యొక్క కారణాంకములు

(A) $(1+m), (1+m+m^2)$ (B) $(1-m), (1-m-m^2)$ (C) $(1-m), (1+m+m^2)$ (D) $(1+m), (1-m+m^2)$

10. x^3+y^3 యొక్క ఒక కారణాంకము

(A) $(x-y)$ (B) $(x+y)$ (C) $(x+y)^3$ (D) $(x-y)^3$

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 96 31-07-2020 12:53:55

అభ్యాసము 3.5

ఇతర అభ్యసన సమస్యలు

1. తీసివేయుము: $5y^2(x^2y^3-2x^4y+10x^2)$ నుండి $-2(xy)^2(y^3+7x^2y+5)$
2. గుణించుము: $\left(4x^2+9\right)$ మరియు $\left(3x-2\right)$
3. $5a^2b^2$ రూపాయిల మీద $4ab$ సంవత్సరాలకు 7b% వార్షిక వడ్డీ రేటున బారువడ్డీని కనుగొనుము.
4. ఒక నోట్ పుస్తకము వెల ₹ 10 ab బాబు దగ్గర ₹ $\left(5a^2b+20ab^2+40ab\right)$ రూపాయిలు ఉన్నవి. అయితే అతను ఎన్ని నోటు పుస్తకములు కొనగలడు?
5. కారణాంకాలుగా విభజించండి : $\left(7y^2-19y-6\right)$

సవాళాత్మక సమస్యలు

6. ఒక కాంట్రాక్టర్ ఒక ఇంటికి వైరింగ్ చేయడానికి కావలసిన వైర్‌ను ఆర్డర్ చేయడానికి, దాని పరిమాణాన్ని నిర్ధారించడానికి $4x^2+11x+6$ అను సమాసాన్ని ఉపయోగించెను. గదుల సంఖ్య $(x+2)$ అని అతనికి తెలుసు మరియు పై సమాసము గదుల సంఖ్యను వెలుపలకు వెళ్ళే మార్గాల సంఖ్యతో గుణించగా వచ్చే సంఖ్యను (outlets) 'x' పదాలలో కనుగొనుము. (సూచన: కారణాంకాలుగా విభజించుము $4x^2+11x+6$)
7. ఒక తాపివాడు ఒక గది నేల వైశాల్యము తెలియజేయడానికి x^2+6x+8 సమాసమును ఉపయోగించాడు. గది పొడవును $(x+4)$ తో సూచిస్తే x పదాలలో ఆ గది యొక్క వెడల్పు ఎంత?
8. లోపించిన పదమును కనుగొనుము: $y^2+(_)x+56=(y+7)(y+_)$
9. కారణాంకాలుగా విభజించండి: $16p^4-1$
10. కారణాంకాలుగా విభజించండి: $3x^3-45x^2y+225xy^2-375y^3$

3.8 ఒక చరరాశి ఏకఘాత సమీకరణము

3.8.1 పరిచయం:

బీజగణితములో మనము ముందుగా నేర్చుకొన్న విషయాలను గుర్తుచేసుకొందాం.

దీర్ఘచతురస్రము చుట్టుకొలతను కనుగొను సూత్రము ఏది? పొడవును 'l' చే, వెడల్పును 'b' చే చుట్టుకొలతను 'P' చే సూచించిన P = 2(l + b). ఈ సూత్రములో 2 స్థిరసంఖ్య, కాని P, l మరియు b లు స్థిరరాశులు కావు. ఎందుకనగా దీర్ఘచతుస్ర పరిమాణంపై అవి ఆధారపడి యుండును. P, l మరియు b లను **చరరాశులు** అంటారు. వివిధ దీర్ఘచతురస్రాలకు P, l మరియు b విలువలు మారుతుంది. 2 అనునది **స్థిర సంఖ్య** (ఇది ఎటువంటి దీర్ఘచతుస్రమునకు మారదు).

ఒక **బీజీయ సమాసము** అనునది చలరాశులు, స్థిరరాశులు మరియు ప్రక్రియ గుర్తులతో కూడిన (ప్లస్ మరియు మైనస్ లాంటివి) ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ బీజీయ పదాలను కలిగిన ఒక గణిత పదాల సమూహము.

ఉదాహరణ: బీజీయ సమాసము $4x^2 + 5x + 7xy + 100$ లో మొదటి పదము $4x^2$ లో స్థిర సంఖ్య 4 మరియు చరరాశి x^2 గలదు. $7xy$ పదములో గల స్థిరసంఖ్య ఏది? ఈ సమాసములోని చివరి పదములో చరరాశి గలదా?

పదంలోని చలరాశితో గల "సంఖ్యా భాగములను **గుణకాలు** అంటారు. $4x^2 + 5x + 7xy + 100$ నందు మొదటి పదము గుణకము 4 మరియు చరరాశి x^2. రెండవ పద గుణకము ఏది? ఇది 5. xy పద గుణకము 7.

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 97 31-07-2020 12:53:58

3.8.2 బీజీయ సమాసాలను రూపొందించుట

ఇప్పుడు మనము కొన్ని వాక్యములను బీజీయ భాషలో అనువదించుట మరియు సమాసాలను ఏ విధంగా రూపొందించాలో పునశ్చరణ చేసుకొందాం. కొన్ని ఉదాహరణలు:

ప్రవచనము	సమాసము	వివరణ
8 మరియు 7 ల మొత్తము	$8 + 7$	దీనిని సూక్ష్మీకరించినపుడు ఒక సంఖ్య లభించును. ఇది ఒక సంఖ్యా సమాసము
x మరియు 7 ల మొత్తము	$x + 7$	$x + 7$ అను ఒక బీజీయ సమాసము లభించును. x అనునది చరరాశి.
16, y చే భాగించబడినది	$\frac{16}{y}$	ఇచ్చట y ఒక చరరాశి
ఒక సంఖ్యకు మూడు రెట్లకన్నా ఎక్కువ	$3p+1$	ఇచ్చట p ఒక చరరాశి; p గుణకము 3
ఒక సంఖ్య మరియు అదే సంఖ్యలో 5 తక్కువల లబ్ధము	$x(x - 3)$	ఇచ్చట x అనునది సమాసములో ఒకే సంఖ్య (లబ్ధమునకు మనము బ్రాకెట్స్‌ను వాడుతాము)

3.8.3 సమీకరణాలు

రెండు సమాసాల సమానత్వమును ఏర్పరచు ప్రవచనమును **సమీకరణము** అంటారు. ఈ సమాసాలను "సమాన" గుర్తుకు చెరొక వైపున వ్రాస్తారు.

ఉదాహరణకు $2x + 7 = 17$ ఒక సమీకరణము (x ఒక చరరాశి) సమాన గుర్తుకు ఎడమచేతి వైపున (LHS) $2x + 7$ మరియు కుడిచేతి వైపున (RHS) 17 గలదు.

ఏకఘాత సమీకరణము

ఒక సమీకరణములో ఒకే ఒక చరరాశి మరియు దాని గరిష్ట ఘాతము 1 గా గల దానిని ఏకఘాత సమీకరణము అంటారు. ఉదాహరణ $3x - 7 = 10$.

ఒకటి లేదా అంతకంటే ఎక్కువ చరరాశులుగల ఏకఘాత సమీకరణాలు

ఒక ప్రవచనమును గణిత పదాల రూపంలో ఏర్పరచిన దానిని ఒక సమీకరణము అంటారు. మరికొన్ని ఉదాహరణలు:

(i) **25 ను పొందుటకు ఒక సంఖ్యకు 5 ను కలపబడినది.**

ఈ ప్రవచనమును $x + 5 = 25$ గా వ్రాస్తారు.

ఈ $x + 5 = 25$ సమీకరణము ఒక చరరాశి x తో ఏర్పడినది. x యొక్క గరిష్ట ఘాతము 1. కావున దీనిని ఒక చరరాశి గల **ఏకఘాత సమీకరణం** అంటారు.

కావున ఒక సమీకరణములో ఒకే ఒక చరరాశి ఉండి దాని యొక్క గరిష్ట ఘాతము '1' అయిన ఆ సమీకరణమును ఒక చరరాశి గల ఏకఘాత సమీకరణము అంటారు.

ఉదాహరణలు: $5x - 2 = 8$, $3y + 24 = 0$

ఈ ఒక చరరాశి ఏకఘాత సమీకరణమును **సరళ సమీకరణము** అని కూడా అంటారు.

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 98 31-07-2020 12:54:00

(ii) **రెండు సంఖ్యల మొత్తము 45**

ఈ ప్రవచనమును $x + y = 45$ గా వ్రాయవచ్చును.

ఈ $x + y = 45$ సమీకరణము గరిష్ఠ ఘాతము '1' గా కలిగిన రెండు చరరాశులు x మరియు y లతో రూపొందించబడినది. కావున దీనిని రెండు చరరాశుల ఏకఘాత సమీకరణము అంటారు.

ఈ తరగతిలో మనము ఒక చరరాశి ఏకఘాత సమీకరణాలను సాధించుటను మాత్రమే నేర్చుకోబోతున్నాము. మిగిలిన రకాల సమీకరణాలను సాధించుటను మనము పై తరగతులలో నేర్చుకొంటాము.

గమనిక

ఒకటి లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ ఘాతం కలిగిన (2,3....మొదలగు.) చరరాశులతో రూపొందించిన సమీకరణాలను వర్గ, త్రిఘాత సమీకరణాలు అని వరుసగా నిర్వచిస్తారు.

ఉదాహరణలు: (i) $x^2 + 4x + 7 = 0$ ఒక వర్గ (ద్విఘాత) సమీకరణము

(ii) $5x^3 - x^2 + 3x = 10$ ఒక త్రిఘాత సమీకరణము

ప్రయత్నించుము

క్రింది వానిలో ఏవి ఏకఘాత సమీకరణాలో గుర్తించుము.

(i) $2 + x = 19$ (ii) $7x^2 - 5 = 3$ (iii) $4p^3 = 12$ (iv) $6m+2$ (v) $n=10$

(vi) $7k - 12 = 0$ (vii) $\frac{6x}{8} + y = 1$ (viii) $5 + y = 3x$ (ix) $10p+2q=3$ (x) x^2-2x-4

క్రింది ప్రవచనములను ఏకఘాత సమీకరణములుగా మార్చుము.

ఉదాహరణ: 3.28

దత్తసంఖ్యకు 7 కలుపగా 19 వచ్చును.

సాధన:

ఆ సంఖ్యను ' n ' అనుకొందాము.

ఈ సంఖ్యకు 7 కలుపగా $n + 7$ అగును.

దీని ఫలితము 19

కావున ఈ సమీకరణము $n + 7 = 19$

ఉదాహరణ: 3.29

ఒక సంఖ్యకు 4 రెట్లు మరియు 18 ల మొత్తము 28

సాధన:

ఒక సంఖ్యను ' x ' అనుకొందాము

ఈ సంఖ్యకు 4 రెట్లు $4x$

18 కలుపగా $18 + 4x$ వచ్చును

దీని ఫలితము 28

కావున ఈ సమీకరణము $18 + 4x = 28$.

ఆలోచించుము

(i) t(t – 5)=10 ఒక ఏకఘాత సమీకరణమా? ఎందుకు?

(ii) $x^2 = 2x$ ఏకఘాత సమీకరణమా? ఎందుకు?

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 99 31-07-2020 12:54:03

ప్రయత్నించుము

క్రింది ప్రవచనములను ఏకఘాత సమీకరణములుగా మార్చుము.

1. ఒక సంఖ్య మరియు 5ల లబ్ధము నుండి 8 తీసివేయగా 32 లభించును.
2. మూడు వరుస పూర్ణసంఖ్యల మొత్తము 78.
3. పీటర్ వద్ద ఒక రెండు వందల రూపాయల నోటు గలదు. ఒకేరకమైన 17 పుస్తకాలను కొన్న తరువాత అతని వద్ద ₹60 మిగిలినది.
4. ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము యొక్క భూకోణాలు సమానము మరియు శీర్ష కోణము 80^0.
5. ఒక త్రిభుజము ABC లో $\angle A$, $\angle B$ కన్నా 10^0 ఎక్కువ. $\angle C$, $\angle A$ కు మూడురెట్లు. కోణము B లో సమీకరణమును వ్యక్తపరచుము.

3.8.4 ఏకఘాత సమీకరణ సాధన

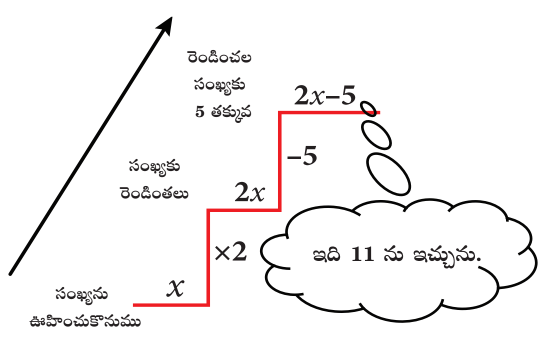
ఒక సమీకరణములో రెండు వైపులా సమానంగా ఉండేలా ఆ సమీకరణములోని చలరాశిని భర్తీచేసే విలువను సమీకరణం యొక్క సాధన లేదా మూలం అంటారు.

ఉదాహరణ: $2x = 10$

ఈ సమీకరణమును $x = 5$ విలువ తృప్తిపరచునని మనము కనుగొనవచ్చును. $x = 5$ ను సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించిన, LHS విలువ RHS విలువకు సమానమగును. కావున $x = 5$ ఈ సమీకరణముకు సాధన అగును. x యొక్క ఇతర విలువలకు ఈ సమీకరణము తృప్తి చెందదని గమనించుము. కావున $x = 5$ ను ఈ సమీకరణం యొక్క సాధన అంటారు.

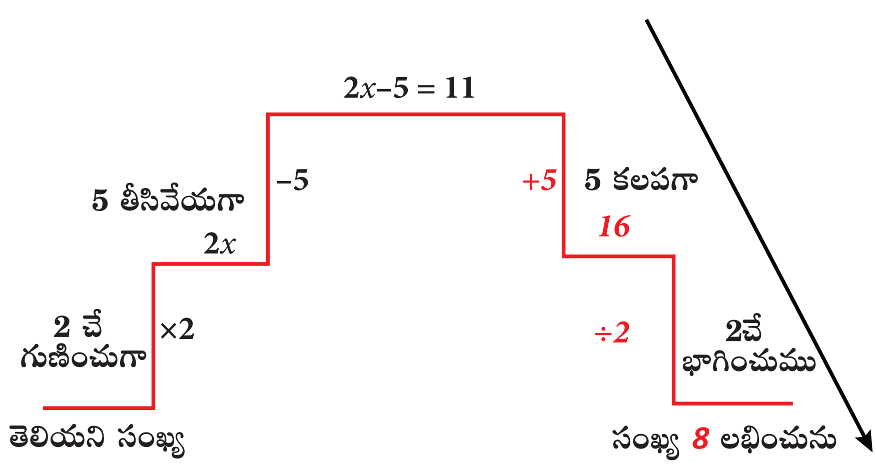
(i) DO-UNDO పద్ధతి:

ప్రవచనము (దత్తాంశము)	నీవు ఆలోచించుము
ఒక సంఖ్య యొక్క రెండింతలకు 5 తక్కువ 11 అగును.	కావలసిన సంఖ్య ఒక తెలియని సంఖ్య. దీనిని x అనుకొందాం. ఈ సంఖ్యకు రెండింతలు $2x$. 5 తక్కువని $2x - 5$. దీని ఫలితము 11 వచ్చును.



ఈ సమీకరణము ఏర్పడుటను క్రింది విధముగా దృశ్యమానం చేసుకోవచ్చు.

x సంఖ్యను వ్యవకలనం, గుణకారం వంటి ప్రక్రియల ద్వారా $2x - 5 = 11$ గా లభించును. x విలువను తిరిగి పొందుటకు మనము చేసిన క్రియలను *'undo'* చేయవలెను. సమీకరణమును రూపొందించుటకు *'do'* క్రియను మరియు సాధనకు *'undo'* క్రియను చేయవలెను.



03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 100 31-07-2020 12:54:04

ఉదాహరణ: 3.30

(a) $x - 7 = 6$ సమీకరణమును సాధించుము. (b) $3x = 51$ సమీకరణమును సాధించుము.

సాధన:

ఇచ్చిన, $x - 7 = 6$

$x - 7 + 7 = 6 + 7$ (7 ను ఇరువైపుల కలుపగా)

$x = 13$

సాధన: $3x = 51$ (దత్తాంశము)

$3 \times x = 51$

$\frac{3 \times x}{3} = \frac{51}{3}$ (ఇరువైపులా 3చే భాగించగా)

$x = 17$

(ii) స్థానమార్పు పద్ధతి (Transposition method)

ఒక సంఖ్యను సమీకరణమునకు ఒక వైపు నుండి మరోవైపుకు మార్పుచేయుటను స్థానమార్పు పద్ధతి అంటారు.

పై ఉదాహరణకు, 7 ను సమీకరణమునకు ఇరువైపులా కూడుట అనునది ఎడమచేతి వైపుగల −7 యొక్క సంకలన విలోమమును +7గా మార్చి, దీనిని కుడిచేతి వైపు కలుపుట (కూడుట)కు సమానము.

$x - 7 = 6$

$x = 6 + 7$

$x = 13$

ఆలోచించుము

ఏకఘాత సమీకరణమునకు ఒకటి కన్నా ఎక్కువ సాధనలు లభించునా?

ఈ విధముగా 3 చే ఇరువైపులా భాగించుట అనేది LHS లోగల సంఖ్య 3ను తొలగించి దాని యొక్క విలోమము 1/3 చే RHS ను గుణించుటకు సమానం మరియు దాని విపర్యయము.

ఉదాహరణకు (i) $6x = 12$

$x = \frac{12}{6}$

$x = 2$

(ii) $\frac{y}{7} = 10$

$y = 10 \times 7$

$y = 70$

గమనిక

ఇచ్చిన ఏకఘాత సమీకరణమును క్రమపరుచుట అనగా సజాతి పదాలను సమానత్వ గుర్తుకు ఒకే వైపున చేర్చి అక్కడ వ్యక్తపరచిన గుర్తుల ఆధారంగా ప్రాథమిక అంకగణిత ప్రక్రియలు చేయడం.

ఉదాహరణ: 3.31

$2x + 5 = 9$ సాధించుము.

సాధన:

$2x + 5 = 9$

$2x = 9 - 5$

$2x = 4$

$x = \frac{4}{2} = 2$

ఉదాహరణ: 3.32

$\frac{4y}{3} - 7 = \frac{2y}{5}$ సాధించుము.

సాధన:

(సజాతి పదాలను వరుసపరుచగా)

$\frac{4y}{3} - \frac{2y}{5} = 7$

ప్రయత్నించుము

1. 'x' మరియు 'y' లను సాధించుము.

(i) $2x = 10$ (ii) $3 + x = 5$

(iii) $x - 6 = 10$ (iv) $3x + 5 = 2$

(v) $\frac{2x}{7} = 3$ (vi) $-2 = 4m - 6$

(vii) $4(3x - 1) = 80$ (viii) $3x - 8 = 7 - 2x$

(ix) $7 - y = 3(5 - y)$ (x) $4(1 - 2y) - 2(3 - y) = 0$

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 101 31-07-2020 12:54:08

$$\frac{20y-6y}{15}=7$$

$$14y=7\times 15$$

$$y=\frac{\cancel{7}\times 15}{\cancel{14}_{2}}$$

$$y=\frac{15}{2}$$

ఆలోచించుము

1. "ఒక శూన్యేతర సంఖ్యచే సమీకరణమునకు ఇరువైపులా గుణించబడిన లేదా భాగించబడిన సాధనలో ఏదేని మార్పు వచ్చునా?
2. "రెండు వేర్వేరు సంఖ్యలచే సమీకరణమునకు ఇరువైపులా గుణించిన లేదా భాగించబడినది సమీకరణం ఏమగును?

అభ్యాసము 3.6

1. **ఖాళీలను పూరింపుము**

   (i) $x+5=12$ సమీకరణములో x విలువ ______.

   (ii) $y-9=(-5)+7$. సమీకరణములో y విలువ ______.

   (iii) $8m=56$ సమీకరణములో m విలువ ______.

   (iv) $\frac{2p}{3}=10$ సమీకరణములో p విలువ ______.

   (v) ఒక చలరాశి గల ఏకఘాత సమీకరణమునకు ______ సాధనలు గలవు.

2. **సత్యమా లేదా అసత్యమా వ్రాయుము.**

   (i) ఒక సంఖ్యను సమీకరణమునకు ఒక వైపు నుండి మరొక వైపునకు మార్పు చేయు పద్ధతిని స్థానమార్పు పద్ధతి (transposition) అంటారు.

   (ii) ఒక చలరాశి గల ఏకఘాత సమీకరణం ఘాతము 2 గల ఒకే చలరాశిని కలిగి ఉండును.

3. **జతపరుచుము**

(a) $\frac{x}{2}=10$	(i) $x=4$
(b) $20=6x-4$	(ii) $x=1$
(c) $2x-5=3-x$	(iii) $x=20$
(d) $7x-4-8x=20$	(iv) $x=\frac{8}{3}$
(e) $\frac{4}{11}-x=\frac{-7}{11}$	(v) $x=-24$

   (A) (i), (ii), (iv), (iii), (v)　　(B) (iii), (iv), (i), (ii), (v)

   (C) (iii), (i), (iv), (v), (ii)　　(D) (iii), (i), (v), (iv), (ii)

4. x మరియు y కనుగొనుము: (i) $\frac{2x}{3}-4=\frac{10}{3}$　(ii) $y+\frac{1}{6}-3y=\frac{2}{3}$　(iii) $\frac{1}{3}-\frac{x}{3}=\frac{7x}{12}+\frac{5}{4}$

5. x కనుగొనుము: (i) $-3(4x+9)=21$　(ii) $20-2(5-p)=8$　(iii) $(7x-5)-4(2+5x)=10(2-x)$

6. x మరియు m లను కనుగొనుము: (i) $\frac{3x-2}{4}-\frac{(x-3)}{5}=-1$　(ii) $\frac{m+9}{3m+15}=\frac{5}{3}$

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 102 31-07-2020 12:54:15

3.8.5 ఏకఘాత సమీకరణ వాక్యరూప సమస్యలు

వాక్యరూపంలోని సమస్యలను సాధించేటప్పుడు వాక్యములను సమీకరణములుగా మార్చుటయే సవాలైన విభాగము. ఇటువంటి సమస్యలను సేకరించి వాటిని సాధించుటకు ప్రయత్నించుము.

ఉదాహరణ: 3.33

రెండు సంఖ్యల మొత్తము 36 మరియు ఒక సంఖ్య రెండవ సంఖ్య కన్నా 8 ఎక్కువ. ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

సాధన:

చిన్న సంఖ్యను x మరియు పెద్ద సంఖ్యను $x+8$ గా తీసుకొందాం.

దత్తాంశం : రెండు సంఖ్యల మొత్తము = 36

$$x + (x+8) = 36$$
$$2x + 8 = 36$$
$$2x = 36 - 8$$
$$2x = 28$$
$$x = \frac{28}{2} = 14$$

కావున,

(i) చిన్న సంఖ్య, $x = 14$

(ii) పెద్ద సంఖ్య, $x + 8 = 14 + 8 = 22$

ఉదాహరణ: 3.34

ఒక బస్సులోని 56 ప్రయాణీకులలో కొంత మంది వద్ద ₹8 టికెట్, మిగిలిన వారి వద్ద ₹10 టికెట్ గలదు. ఈ ప్రయాణీకుల నుంచి వసూలైన నగదు మొత్తము ₹500 . ఒక్కొక్క రకం టికెట్‌లు గల ప్రయాణీకుల సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన:

₹8 టికెట్ గల ప్రయాణీకుల సంఖ్య y అనుకొందాం. అప్పుడు ₹10 టికెట్ గల ప్రయాణికుల సంఖ్య $(56-y)$.

ప్రయాణికుల నుండి వసూలైన నగదు మొత్తం = ₹500

కావున,
$$y \times 8 + (56 - y) \times 10 = 500$$
$$8y + 560 - 10y = 500$$
$$8y - 10y = 500 - 560$$
$$-2y = -60$$
$$y = \frac{60}{2}$$
$$y = 30$$

కావున, ప్రయాణికుల సంఖ్య,

(i) ₹8 టికెట్లు గల ప్రయాణికుల సంఖ్య = 30

(ii) ₹10 టికెట్లు గల ప్రయాణికుల సంఖ్య $= 56 - 30 = 26$

ఉదాహరణ: 3.35

ఒక దీర్ఘచతురస్ర పొలం పొడవు దాని వెడల్పు కన్నా 9మీ ఎక్కువ. ఆ పొలం చుట్టుకొలత 154మీ అటిన ఆ పొలం యొక్క పొడవు మరియు వెడల్పులను కనుగొనుము.

సాధన:

పొలం వెడల్పు 'x' అనుకొందాం. పొడవు $(x+9)$ మీ అగును.

చుట్టుకొలత P = 2 (పొడవు + వెడల్పు) $= 2(x + 9 + x) = 2(2x + 9)$

దత్తాంశం నుండి, $2(2x + 9) = 154$.

$$4x + 18 = 154$$
$$4x = 154 - 18$$
$$4x = 136$$
$$x = 34$$

కావున,

(i) దీర్ఘచతురస్ర పొలం యొక్క వెడల్పు = 34మీ

(ii) దీర్ఘచతురస్ర పొలం యొక్క పొడవు $= x+9 = 34+9 = 43$మీ

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 103 31-07-2020 12:54:17

ఉదాహరణ: 3.36

ఒక చెక్కముక్క పొడవు 2మీ. ఒక వడ్రంగి ఈ చెక్కను రెండు ముక్కలుగా, మొదటి ముక్క రెండవ ముక్క రెండింతలకు 40సెం.మీ తక్కువగా ఉండునట్లు కోసెను. చిన్న ముక్క పొడవు ఎంత?

సాధన:

మొదటి ముక్క పొడవు x సెం.మీ అనుకొందాం.

మొదటి ముక్క పొడవు (200 సెం.మీ - x సెం.మీ) అనగా $(200 - x)$ సెం.మీ అనుకొందాం.

దత్త ప్రవచనం ప్రకారం (మీటరును సెంటీమీటరుగా మార్చుము),

మొదటి ముక్క = రెండవ ముక్క రెండింతలకు 40 సెం.మీ తక్కువ

ఆలోచించుము

ఒక వేళ రెండవ ముక్క x అనుకొంటే. మొదటి ముక్క $(200 - x)$ అగును. దీనిలో ఏ విధంగా సొపానాలు మారును? వీటి సమాధానము కూడ వేరుగా ఉండునా?

$$x = 2\times(200 - x) - 40$$
$$x = 400 - 2x - 40$$
$$x + 2x = 360$$
$$3x = 360$$
$$x = \frac{360}{3}$$
$$x = 120$$

అందువలన,

(i) మొదటి ముక్క పొడవు 120 సెం.మీ మరియు

(ii) రెండవ ముక్క పొడవు 200 సెం.మీ - 120 సెం.మీ = 80 సెం.మీ, ఇది చిన్న ముక్క.

ఉదాహరణ: 3.37

ఒక తల్లి గారి వయస్సు ఆమె కూతురి వయస్సుకు 5 రెట్లు. 2 సంవత్సరాల తరువాత, ఆ తల్లి వయస్సు తన కూతురి వయస్సుకు నాలుగు రెట్లు. వారి ప్రస్తుత వయస్సులను కనుగొనుము.

సాధన:

వయస్సు / వ్యక్తి	ప్రస్తుతము	2 సం॥ తరువాత
కూతురు	x	$x+2$
తల్లి	$5x$	$5x+2$

దత్త నిబంధన : రెండు సం॥ తరువాత, తల్లి వయస్సు = కూతురి వయస్సుకు 4 రెట్లు

$$5x+2 = 4(x+2)$$
$$5x+2 = 4x+8$$
$$5x - 4x = 8-2$$
$$x = 6$$

కూతురి ప్రస్తుత వయస్సు = 6 సం॥

తల్లి ప్రస్తుత వయస్సు = $5x = 5 \times 6 = 30$ సం॥

ఉదాహరణ: 3.38

ఒక భిన్నం యొక్క హారము దాని లవము కన్నా 3 ఎక్కువ. లవమునకు '2' హారమునకు '9' కలుపగా, ఆ భిన్నము $\frac{5}{6}$ గా మారినది. అసలు భిన్నమును కనుగొనుము.

సాధన:

అసలు భిన్నము $\frac{x}{y}$ అనుకొందాం.

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 104 31-07-2020 12:54:19

లెక్క ప్రకారం $y = x + 3$ (హారము = లవము + 3).

కావున భిన్నమును $\frac{x}{x+3}$ గా వ్రాయవచ్చును. దత్త నియమము (నిబంధన) ప్రకారం, $\frac{x+2}{(x+3)+9} = \frac{5}{6}$

అడ్డ గుణకారం చేయగా, $6(x+2) = 5(x+3+9)$

$$6x+12 = 5(x+12)$$

$$6x+12 = 5x+60$$

$$6x - 5x = 60 - 12$$

$$x = 60 - 12$$

$$x = 48.$$

అసలు భిన్నము $\frac{x}{x+3} = \frac{48}{48+3} = \frac{48}{51}$.

ఉదాహరణ: 3.39

రెండు అంకెల సంఖ్యలోని అంకెల మొత్తము 8. ఆ సంఖ్యకు 18 కలిపినపుడు ఫలిత సంఖ్యలో ఆ అంకెలు తారుమారయితే ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన:

రెండంకెల సంఖ్యను xy అనుకొందాం. (అనగా x పదుల స్థానం, y ఒకట్ల స్థానం)

దీని విలువ $10x + y$

లెక్కలో ఇచ్చిన ప్రకారం $x + y = 8$ దీని నుండి $y = 8 - x$

$$10x + y = 10x + 8 - x$$

$$= 9x + 8.$$

ఫలిత సంఖ్య yx దీని విలువ $10y + x$

$$= 10(8 - x) + x$$

$$= 80 - 9x$$

ఇచ్చిన ప్రకారం, దత్త సంఖ్యకు 18 కలుపగా క్రొత్త సంఖ్య వచ్చును.

$$(9x + 8) + 18 = 80 - 9x$$

దీనిని సూక్ష్మీకరించగా $9x + 9x = 80 - 8 - 18$

$$18x = 54$$

$$x = 3 \Rightarrow y = 8 - 3 = 5$$

రెండు అంకెల సంఖ్య $xy = 10x+y \Rightarrow 10(3)+5 = 30+5 = 35$

ఉదాహరణ: 3.40

రాజన్ తన ఇంటి నుంచి మోటార్ బైక్‌లో 35కి.మీ/గం వేగంతో తన కార్యాలయమునకు 5 నిమిషాలు ఆలస్యంగా చేరెను. ఒక వేళ అతను 50కి.మీ/గం వేగంతో వెళ్ళినట్లైతే అతను తన కార్యాలయమునకు త్వరగా 4 నిమిషాలు ముందు చేరగలడు. అతని ఇంటికి కార్యాలయమునకు గల దూరమును కనుగొనుము.

సాధన:

వేగము 1 = 35 కి.మీ/గం॥
వేగము 2 = 50 కి.మీ/గం॥

దూరమును 'x' కి.మీ (అనుకొందాము కాలము = $\frac{\text{దూరము}}{\text{వేగము}}$)

35 కి.మీ/గం వేగముతో 'x' కి.మీ ప్రయాణమునకు తీసుకొన్న సమయము $T_1 = \frac{x}{35}$ గం॥

50 కి.మీ/గం వేగముతో 'x' కి.మీ ప్రయాణమునకు తీసుకొన్న సమయము $T_2 = \frac{x}{50}$ గం॥

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 105 31-07-2020 12:54:22

లెక్క ప్రకారం సమయములలో వ్యత్యాసము

$= 4-(-5)$

$= 4+5 = 9$ నిమిషాలు

$= \frac{9}{60}$ గంటలు (నిమిషాలను గంటలలో మార్పు చేయగా)

ఇచ్చిన, $T_1 - T_2 = \frac{9}{60}$

$$\frac{x}{35} - \frac{x}{50} = \frac{9}{60}$$

$$\frac{10x - 7x}{350} = \frac{9}{60}$$

$$\frac{3x}{350} = \frac{9}{60}$$

$$x = \frac{9}{60} \times \frac{350}{3}$$

అతని కార్యాలయమునకు దూరము $x = 17\frac{1}{2}$ కి.మీ.

అభ్యాసము 3.7

1. ఖాళీలను పూరింపుము:

(i) $ax+b=0$ సమీకరణ సాధన ______.

(ii) a మరియు b లు ధన పూర్ణసంఖ్యలైన $ax = b$ సమీకరణ సాధన ఎల్లప్పుడు ______.

(iii) ఒక సంఖ్య నుంచి ఆ సంఖ్యలో 6వ వంతు తీసివేయగా 25 వచ్చును. ఆ సంఖ్య ______.

(iv) ఒక త్రిభుజ కోణాలు 2:3:4 నిష్పత్తిలో ఉంటే గరిష్ట మరియు కనిష్ట కోణాల వ్యత్యాసము ______.

(v) $a + b = 23$ సమీకరణంలో. a విలువ 14 అయిన b విలువ ______.

2. సత్యమా లేదా అసత్యమా తెల్పుము

(i) ఒక సంఖ్య మరియు ఆ సంఖ్యకు రెండు రెట్ల మొత్తము 48ను $y+2y = 48$ గా వ్రాయవచ్చును.

(ii) $5(3x+2) = 3(5x-7)$ ఒక చలరాశి ఏకఘాత సమీకరణము.

(iii) $x = 25$ అనునది ఒక సంఖ్యకు ఒకటిలో 3 వ వంతు ఆ సంఖ్య కన్నా 10 తక్కువ అను సమీకరణ సాధన.

3. ఒక సంఖ్య మరొక సంఖ్యకు 7రెట్లు మరియు వాటి వ్యత్యాసము 18 అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

4. మూడు వరుస బేసి సంఖ్యల మొత్తము 75. వానిలో గరిష్ట సంఖ్య ఏది?

5. ఒక దీర్ఘచతురస్రము పొడవు దాని వెడల్పులో $\frac{1}{3}$ వ వంతగును. దీని చుట్టుకొలత 64మీ అయిన ఆ దీర్ఘచతురస్ర పొడవు మరియు వెడల్పులను కనుగొనుము.

6. ₹5 మరియు ₹10 ల నోట్లు మొత్తము 90 కలవు. దాని మొత్తం విలువ ₹500 అయిన వివిధ నోట్ల సంఖ్యలను కనుగొనుము.

7. తేన్మొయి ప్రస్తుత వయస్సు మురళి ప్రస్తుత వయస్సుకు 5సం॥ ఎక్కువ. 5 సంవత్సరాల క్రితం వారి వయస్సుల నిష్పత్తి 3:2 అయిన వారి ప్రస్తుత వయస్సులను కనుగొనుము.

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 106 31-07-2020 12:54:26

8. ఒక సంఖ్యలో గల రెండంకెల మొత్తము 9. ఆ సంఖ్య నుంచి 27 తీసివేయగా ఆ సంఖ్యలోని అంకెలు తారుమారగును. ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

9. ఒక భిన్నము యొక్క హారము, లవము కన్నా 8 ఎక్కువ. లవమునకు 17 కలిపి హారము 1 తక్కువైన ఆ భిన్నము $\frac{3}{2}$ గా మారినది. అసలు భిన్నమును కనుగొనుము.

10. ఒక రైలుబండిని 60 కి.మీ/గం వేగంతో నడిపిన అది గమ్యస్థానమును నిర్దేశిత సమయం కంటే 15 నిమిషాలు ఆలస్యంగా చేరును. కాని దానిని 85 కి.మీ/గం వేగంతో నడిపిన 4 నిమిషాలు మాత్రమే ఆలస్యమగును. ఆ రైలుబండి ప్రయాణించవలసిన దూరమును కనుగొనుము.

సవాళాత్మక ప్రశ్నలు

11. ఒక సంఖ్య మరియు దాని సగముల మొత్తము 30 అయిన ఆ సంఖ్య ______.
(A) 15 (B) 20 (C) 25 (D) 40

12. ఒక త్రిభుజ బాహ్యకోణము 120° మరియు దాని అంతరాభిముఖ కోణాలలో ఒక కోణము 58° మరొక అంతరాభిముఖ కోణము ________.
(A) 62° (B) 72° (C) 78° (D) 68°

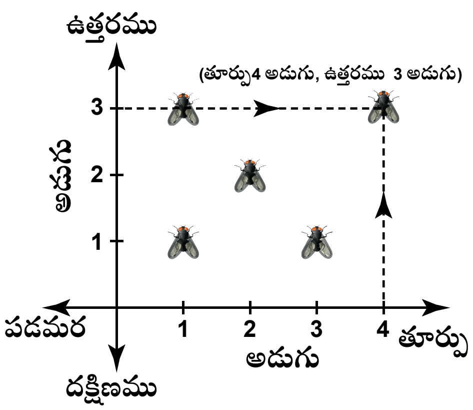
13. ఏ కొంత నగదుకు ఒక సంవత్సరములో 5% సం॥ వడ్డీ చొప్పున సాధారణ వడ్డీ ₹500 లభించును.
(A) 50000 (B) 30000 (C) 10000 (D) 5000

14. రెండు సంఖ్యల క.సా.గు. (LCM) మరియు గ.సా.భా (HCF) ల లబ్ధము 24. దీనిలో ఒక సంఖ్య 6 అయిన రెండవ సంఖ్య ________.
(A) 6 (B) 2 (C) 4 (D) 8

15. మూడు వరుససంఖ్యలలో అతిపెద్దసంఖ్య $x+1$, అయిన, అతిచిన్నసంఖ్య
(A) x (B) $x+1$ (C) $x+2$ (D) $x-1$

3.9 రేఖా చిత్రము (Graph)

3.9.1 పరిచయము

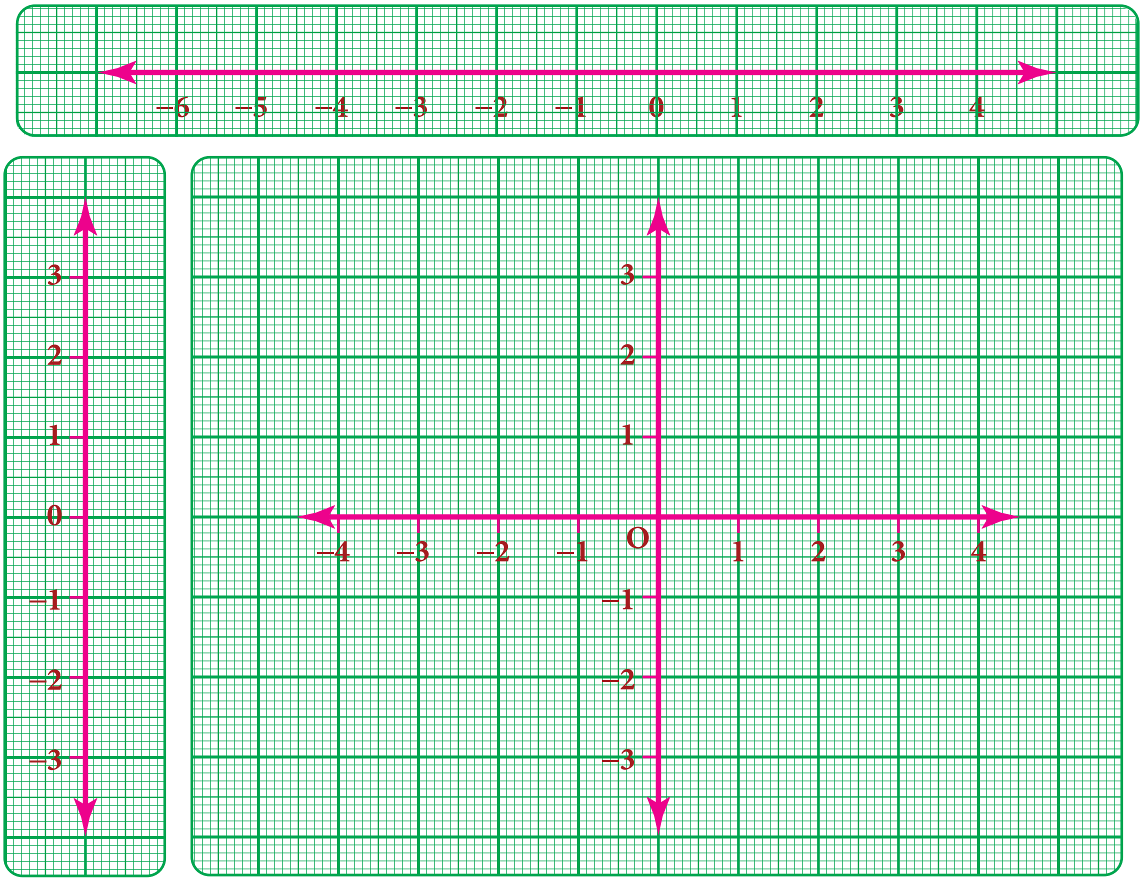


17వ శతాబ్దంలో ఒక ప్రసిద్ధ గణితశాస్త్రజ్ఞుడు రెనేడెస్కార్టెస్ అనారోగ్యానికి గురయ్యినప్పుడు అతను మంచముపై నుంచి ఒక కీటకము ఒక మూలలో ఎగురుతూ పైకప్పుపై వివిధ ప్రదేశాలలో కూర్చోవడం గమనించాడు. అతడు ఆ ప్రదేశాలను గుర్తించాలనుకొన్నాడు. వెంటనే అతను గది యొక్క పైతలమును ఒక కాగితములో గీచి క్షితిజ సమాంతర మరియు నిలువు రేఖలను సృష్టించాడు. ఆ లంబరేఖల ఆధారంగా అతను కీటక కదలికలను తూర్పు, పడమర, ఉత్తర మరియు దక్షిణ దిక్కులలో ఆ ప్రదేశాలను అర్థం చేసుకొన్నాడు. అతను ఆ ప్రదేశమును తలంలో (x,y) అని అన్నాడు. ఇందులో (x) క్షితిజ సమాంతర దిశలోని (తూర్పు) విలువను, (y) నిలువు దిశలో (ఉత్తర) విలువను సూచించును. ఈ విధముగా గ్రాఫ్ అనే భావన ఉనికిలోకి వచ్చినది.

3.9.2 గ్రాఫ్ కాగితములు (Graph sheets)

గ్రాఫ్ అనునది రెండు సంఖ్యల మధ్య గల సంబంధమును సూచించు ఒక దృశ్యమాన పద్ధతి. క్రింది తరగతిలో పూర్ణసంఖ్యలను క్షితిజ సమాంతర రేఖపై గుర్తించుట నేర్చుకొన్నాము. ఇప్పుడు మరొక సంఖ్యారేఖను నిలువుగా తీసుకొనవలెను. పటంలో చూపిన విధంగా గ్రాఫ్ కాగితంలో 0 (సున్న) వద్ద పరస్పర లంహరేఖలను మనము తీసుకొనవలెను, గ్రాఫ్ కాగితములో దట్టమైన రేఖల వెంబడి ఈ సంఖ్యారేఖలను మరియు పూర్ణసంఖ్యలను గుర్తించవలెను.

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 107 31-07-2020 12:54:27



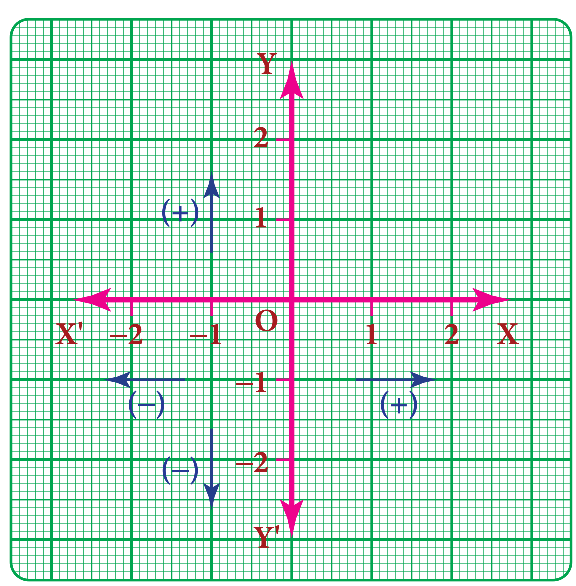
ఈ లంబ రేఖల ఖండన బిందువు ‘O’ ఒక మూల బిందువు (0,0) ను సూచించును.

నిరూపక వ్యవస్థ (Cartesian system)

రెనేడెస్కార్టస్ (Rene Descartes) వ్యవస్థ నందు ఒక బిందువును క్షితిజ సమాంతర మరియు క్షితిజ లంబ కొలతల సహాయంతో గుర్తిస్తారు. ఆయన గౌరవార్థం ఈ వ్యవస్థను **కార్టీజియన్ వ్యవస్థ**గా తీసుకొన్నారు. క్షితిజ సమాంతర రేఖను XOX' గా సూచించి, X-అక్షమని పిలుస్తారు. క్షితిజ లంబరేఖను YOY' గా సూచించి Y-అక్షమని పిలుస్తారు. ఈ రెండు అక్షాలను నిరూపక అక్షాలు అంటారు. ఆ అక్షాలను కలిగిన తలమును నిరూపక తలం లేదా **కార్టీజియన్** తలం అంటారు.

3.9.3 గ్రాఫ్‌లోని గుర్తులు (Signs in the graphs)

1. ఒక బిందువు యొక్క X-నిరూపకము OX వెంబడి ధనాత్మకము మరియు OX' వెంబడి ఋణాత్మకమగును.
2. ఒక బిందువు యొక్క Y-నిరూపకము OY వెంబడి ధనాత్మకము మరియు OY' వెంబడి ఋణాత్మకమగును.



3.9.4 క్రమయుగ్మాలు (Ordered pairs)

ఒక బిందువు తలంలో ఒక స్థానమును సూచించును. ఒక బిందువును (a,b) అను జతచే ఒక ప్రత్యేక క్రమంలో జాబితాపరుస్తాము. దీనినే క్రమయుగ్మము అంటారు. ఇందులో ‘a’ అనునది X-అక్షం వెంబడి, ‘b’ అనునది Y-అక్షం వెంబడి దూరమును సూచించును. ఈ (a,b) క్రమయుగ్మము బిందువును తలంలో ఖచ్చితంగా గుర్తించుటకు ఉపకరించును. ఈ విధమైన జత సంఖ్యలచే ప్రతి బిందువును ఖచ్చితంగా గుర్తించుటకు వీలగును. (a,b) (b,a) అనునవి వేర్వేరు

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 108 31-07-2020 12:54:29

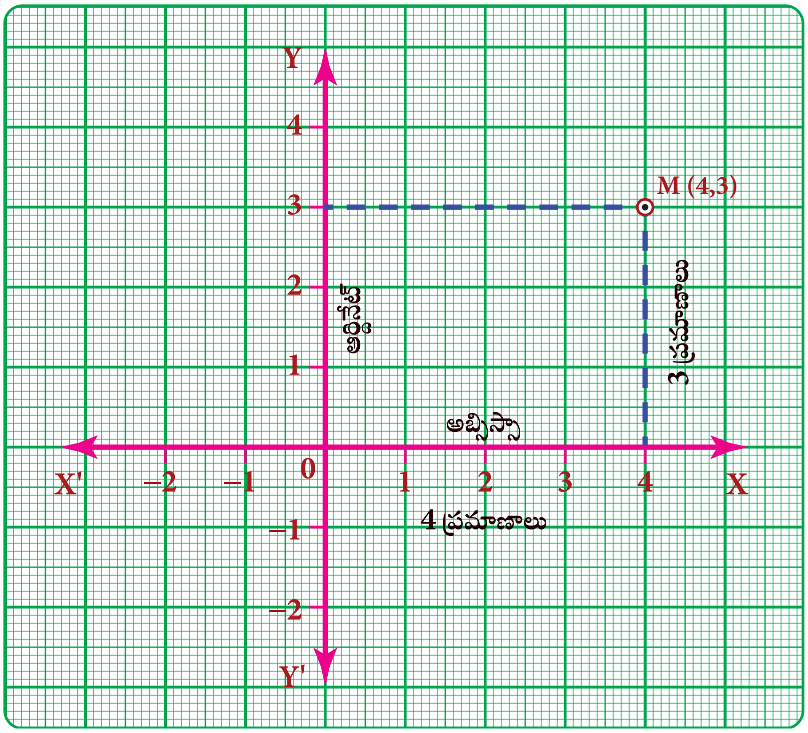
క్రమమును సూచించును. కావున అవి సమానం కాదని స్పష్టంగా తెలియును.

XOX' మరియు YOY' నిరూపక్షాలు. 'M' ను (4,3) గా తీసుకొని తలంలో గుర్తించుటకు

(i) నీవు (ఎల్లప్పుడు) ఒక బిందువు O వద్ద (దీనిని మూల బిందువు (*origin*) గా పిలుచుటకు మనము అంగీకరించాము)ప్రారంభించవలెను,

(ii) మొదటగా, క్షితిజ సమాంతర దిశ వెంబడి (ఇది *x*-అక్షము దిశ) 4 ప్రమాణములు కదలవలెను.

(iii)*y*- అక్షము దిశలో 3 ప్రమాణములు కదలవలెను.



M ను చేరుటకు మనము ప్రయోగించు విధమును అవగాహన చేసుకొనుటకు, దీనిని (4,3) చే సూచిస్తారు.

4ను M యొక్క *x*-నిరూపకమని, 3ను M యొక్క *y*-నిరూపకమని అంటారు.

x-నిరూపకమునకు అబ్సిస్సా (abscissa) అని, *y*-నిరూపకమునకు ఆర్డినేట్ (ordinate) అని వాడుక పేర్లు కలవు. (4.3) ఒక క్రమయుగ్మము.

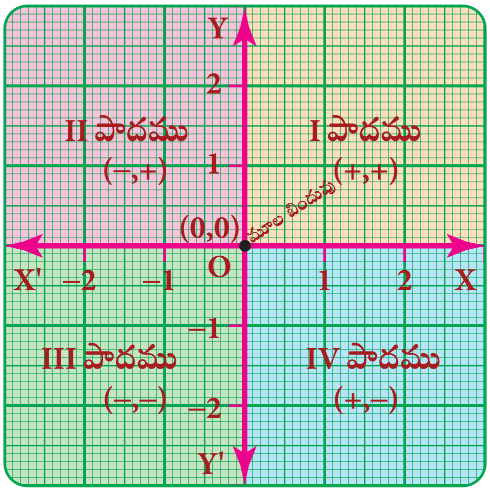
ఆలోచించుము

(4,3) కు బదులు (3,4) వ్రాసి దీనిని గుర్తించుము. ఇది మరల 'M' ను సూచించునా?

3.9.5 పాదములు (Quadrants)

నిరూపకాక్షాలు గ్రాఫ్ తలమును విభజించు నాలుగు భాగములను పాదములు (quadrants) అంటారు. ఈ భాగములకు ధనాత్మక X అక్షము నుంచి ప్రారంభించి అపసవ్య దిశలో పేర్లివ్వడం ఒక సాంప్రదాయము.

పాదము	గుర్తు (సంజ్ఞ)
I XOY తలము	$x>0$, $y>0$, నిరూపకాలు (+,+) ఉదాహరణలు: (5,7) (2,9) (10,15)
II X'OY తలము	$x<0$, $y>0$ నిరూపకాలు (–,+) ఉదాహరణలు: (–2,8) (–1,10) (–5,3)
III X'OY' తలము	$x<0$, $y<0$ నిరూపకాలు (–,–) ఉదాహరణలు: (–2,–3) (–7,–1) (–5,–7)
IV XOY' తలము	$x>0$, $y<0$ నిరూపకాలు (+,–) ఉదాహరణలు: (1,–7) (4,–2) (9,–3)



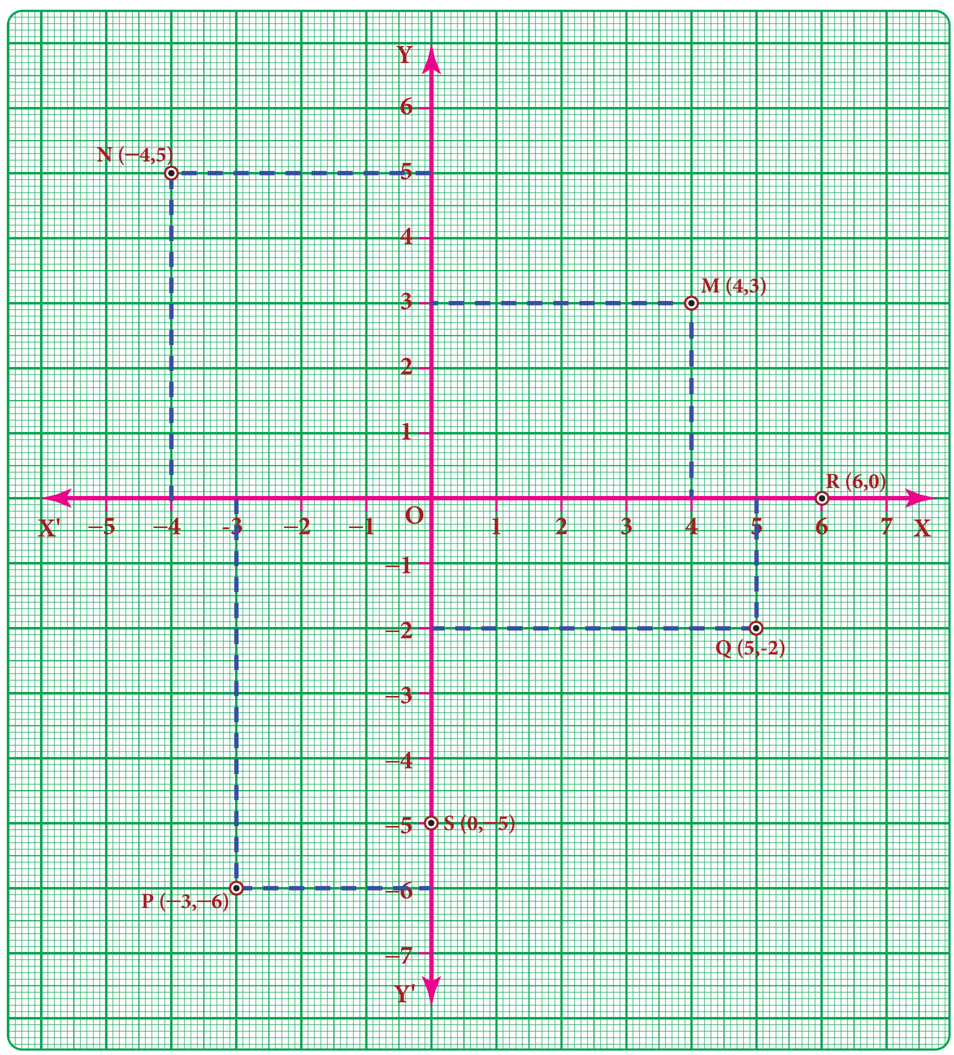
03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 109 31-07-2020 12:54:29

అక్షాలపై గల బిందువుల నిరూపకాలు:

- y=0 అయితే $(x, 0)$ నిరూపకము 'x'-అక్షముపై గల బిందువు.
  ఉదాహరణకు (2, 0) (–5, 0) (7,0) లు 'x'-అక్షముపై బిందువులు.
- x=0 అయితే (0,y) నిరూపకము 'y'- అక్షముపై గల బిందువు.
  ఉదాహరణకు (0, 3) (0,–4) (0, 9) లు 'y'-అక్షముపై బిందువులు.

3.9.6 రేఖాచిత్రములో ఇవ్వబడిన బిందువులను గుర్తించుట

క్రింది బిందువులను పరిగణనలోకి తీసుకొనుము (4,3), (–4,5), (–3,–6), (5,–2), (6,0), (0,–5)



(i) (4,3) గుర్తించుట

M(4,3) ను చేరుటకు మూలబిందువు O వద్ద ప్రారంభించి, 4 ప్రమాణములు OX వెంబడి, ఇక్కడ నుంచి 3 ప్రమాణాలు OY నకు సమాంతరముగా కదలవలెను.

(ii) (–4,5) గుర్తించుట

N(–4,5) ను చేరుటకు మూలబిందువు వద్ద ప్రారంభించి, 4 ప్రమాణములు OX' వెంబడి, మరియు –4 నుండి OY కు సమాంతరముగా 5 ప్రమాణాలు కదలవలెను.

(iii) (– 3, – 6) గుర్తించుట

P(-3,-6) ను చేరుటకు మూలబిందువు నుండి 3 ప్రమాణములు OX' వెంబడి మరియు –3 నుండి 6 ప్రమాణాలు OY' కు సమాంతరముగా కదలవలెను.

(iv) (5,–2) గుర్తించుట

Q(5,–2) ను చేరుటకు మూలబిందువు నుండి 5 ప్రమాణములు OX వెంబడి మరియు 5 నుండి 2 ప్రమాణాలు OY' కు సమాంతరముగా కదలవలెను.

(v) (6,0) మరియు (0, – 5) లను గుర్తించుట

దత్త బిందువు (6, 0) లో X-నిరూపకము 6 మరియు Y-నిరూపకము 0(సున్న). కావున ఈ బిందువు x-అక్షముపై ఉంటుంది. R(6, 0) ను చేరుటకు మూలబిందువు నుండి 6 ప్రమాణములు OX వెంబడి కదలవలెను.

దత్త బిందువు (0,–5) నందు X-నిరూపకము 0(సున్న) మరియు Y- నిరూపకము –5. కావున ఈ బిందువు Y- అక్షముపై ఉంటుంది. S (0,–5) ను చేరుటకు మూలబిందువు నుండి 5 ప్రమాణములు OY' వెంబడి కదలవలెను.

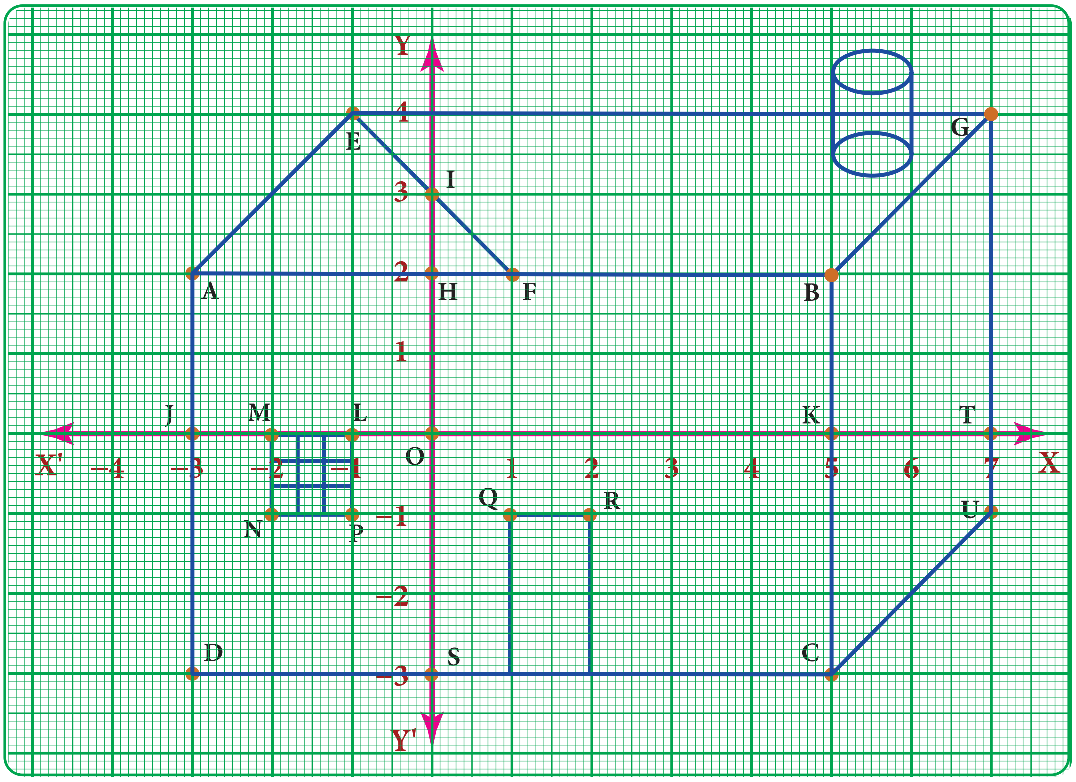
03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 110 31-07-2020 12:54:30

ప్రయత్నించుము

1. క్రింది పట్టికను పూరించుము

వ.సం	బిందువు	X-నిరూపకము గుర్తు	Y-నిరూపకము గుర్తు	పాదము
1	(−7,2)			
2	(10,−2)			
3	(−3,−7)			
4.	(3,1)			
5.	(7,0)			
6.	(0,−4)			

2. క్రింద ఇవ్వబడిన పటంలో గుర్తించిన బిందువుల నిరూపకములను వ్రాయుము.



అభ్యాసము 3.8

1 **ఖాళీలను పూరించుము:**

(i) X-అక్షము మరియు Y-అక్షము __________ వద్ద ఖండించుకొనును.

(ii) మూడవ పాదంలో గల బిందువు నిరూపకములు ఎల్లప్పుడు__________.

(iii) (0, −5) __________ అక్షముపై గల బిందువు.

(iv) y- అక్షముపై x-నిరూపకము ఎల్లప్పుడు __________ .

(v) Y-అక్షానికి సమాంతరముగా గల రేఖలలోని బిందువుల __________ నిరూపకాలు సమానము.

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 111 31-07-2020 12:54:30

2. **సత్యమా లేదా అసత్యమా వ్రాయుము:**

(i) (−10,20) రెండవ పాదంలో ఉంటుంది.

(ii) (−9, 0) x- అక్షముపై గల బిందువు.

(iii) మూలబిందువు నిరూపకాలు (1,1).

3 మూలబిందువులను గ్రాఫ్ కాగితముపై గుర్తించకుండా వాటి పాదములను కనుగొనుము.

(3, −4), (5,7), (2,0), (−3, −5), (4, −3), (−7,2), (−8,0), (0,10), (−9,50).

4 గ్రాఫ్ కాగితముపై క్రింది బిందువులను గుర్తించుము.

A(5,2), B(−7, −3), C(−2,4), D(−1,−1), E(0, −5), F(2,0), G(7, −4), H(−4,0), I(2,3), J(8,−4), K(0,7).

5 గ్రాఫ్ కాగితముపై గుర్తించిన వివిధ ఆకారాల నిరూపకములను 5 వ్రాయుము

a) నక్షత్రము ________

b) పక్షి ________

c) ఎరుపు రంగు వృత్తము ________

d) డైమండ్ ________

e) త్రిభుజము ________

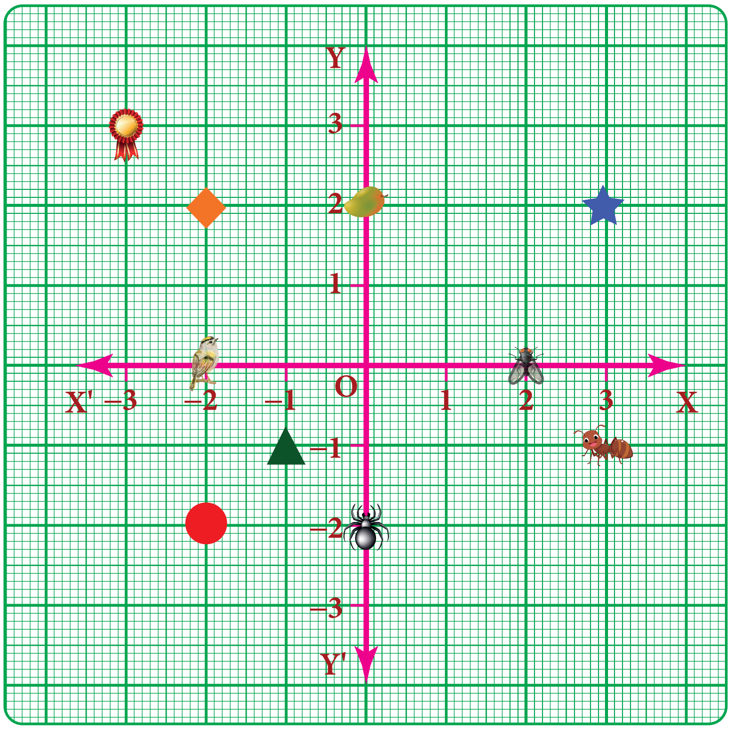
f) చీమ ________

g) మామిడిపండు ________

h) ఈగ ________

i) పతకము ________

j) సాలెపురుగు ________



3.9.7 సరళ రేఖను పొందుటకు:

మనకు గ్రాఫ్‌లో బిందువులను గుర్తించుటకు తెలుసు. గ్రాఫ్‌లో గల బిందువులు వేర్వేరు క్రమంలో అమరియుంటాయి. ఏదేని రెండు బిందువులను కలుపగా సరళరేఖ వచ్చును.

ఉదాహరణ 3.41

A (-2,6) మరియు B (4,-3) బిందువులను కలపడం ద్వారా సరళరేఖను గీయుము.

సాధన:

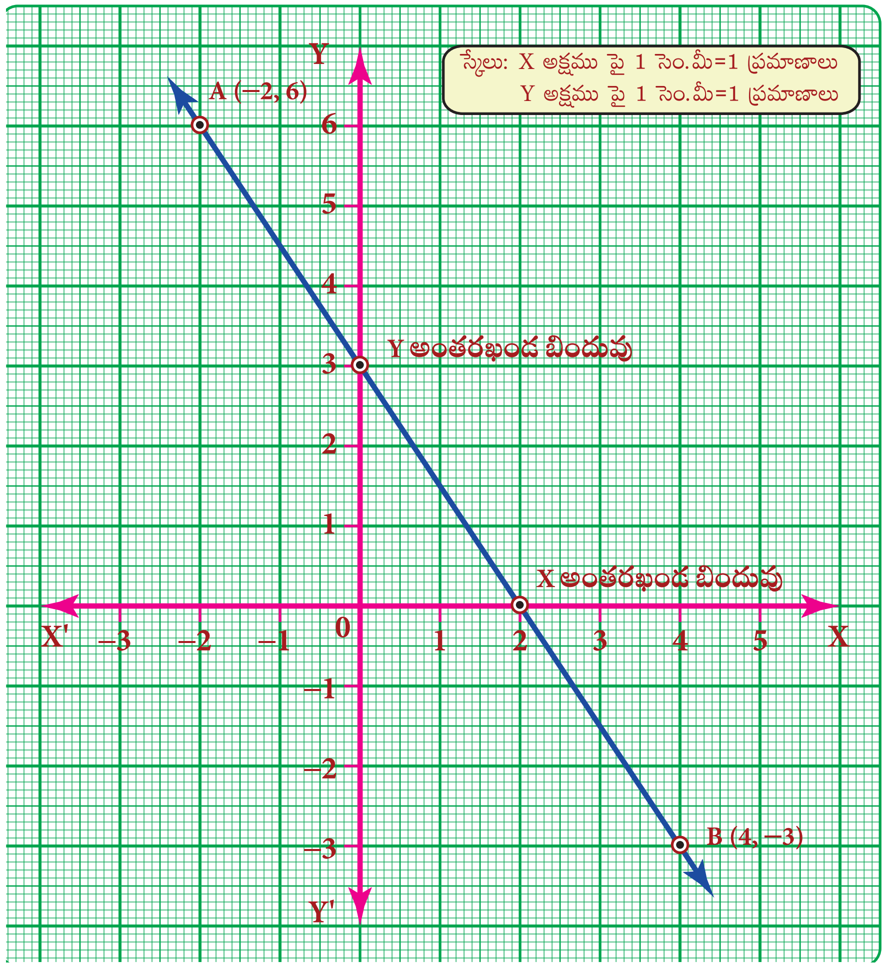
మొదటి బిందువు A (−2,6) ను రెండవ పాదంలో గుర్తించుము. రెండవ బిందువు B (4,−3) ను నాల్గవ పాదంలో గుర్తించుము.

బిందువు A మరియు బిందువు B లను కొలబద్దతో కలిపి పొడిగించుము. మనకు సరళరేఖ లభించును.

గమనిక:

ఈ సరళ రేఖ X అక్షమును (2,0) వద్ద మరియు Y అక్షమును (0,3) వద్ద ఖండిస్తుంది.

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 112 31-07-2020 12:54:32

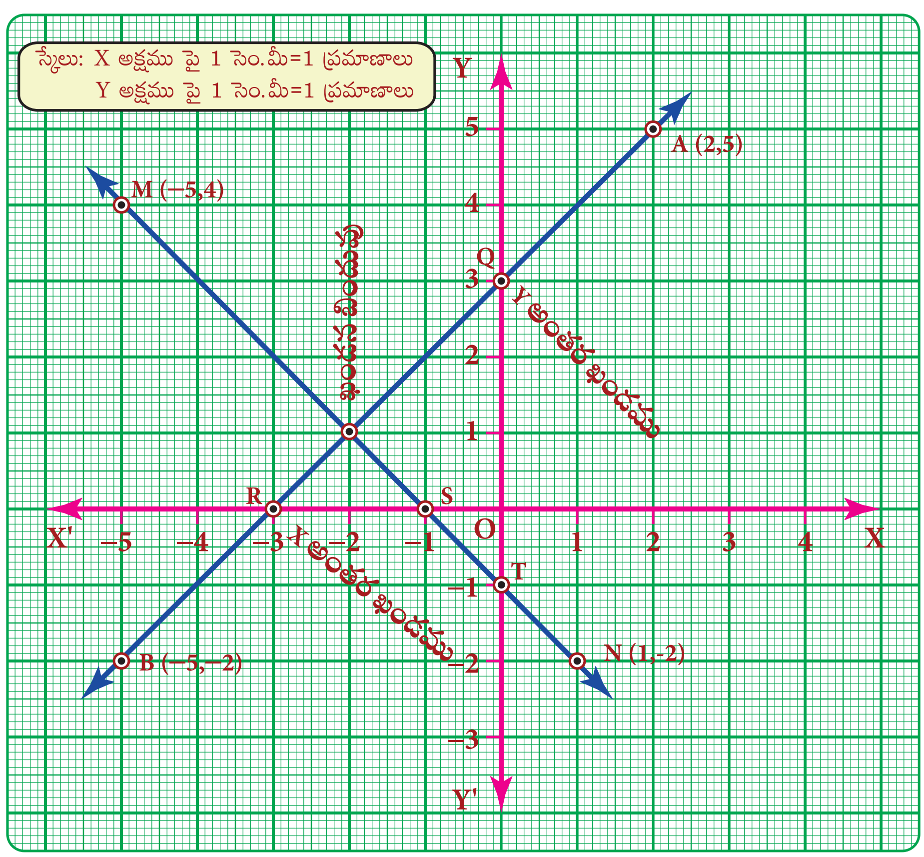


ఉదాహరణ 3.42

A(2, 5) B(−5,−2) M(−5, 4) N(1,−2) బిందువులను కలపడం ద్వారా సరళరేఖలను గీచి ఖండన బిందువులను కనుగొనుము.

సాధన:

A మరియు B ఒక జత బిందువులను I మరియు III పాదములలో గుర్తించుము. వాటిని కలిపి పొడిగించగా AB సరళరేఖ లభించును. M మరియు N అను మరో జత బిందువులను II మరియు IV పాదములలో గుర్తించుము. వాటిని కలిపి పొడిగించగా MN సరళరేఖ లభించును.



03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 113 31-07-2020 12:54:33

ఈ సరళరేఖలు P(−2,1) వద్ద ఖండించుకొంటాయి.

(i) AB సరళరేఖను, నిరూపకాక్షాలను ఖండించును అనగా x-అక్షమును R(−3,0) వద్ద మరియు y-అక్షమును Q(0,3) వద్ద ఖండించును.

(ii) MN సరళరేఖ, నిరూపకాక్షాలను ఖండించును అనగా x-అక్షమును S(−1,0) వద్ద మరియు y-అక్షమును T(0,−1) వద్ద ఖండించును.

3.9.8 నిరూపకాక్షాలకు సమాంతర రేఖలు

- ఒక సరళరేఖ X-అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉన్నట్లైతే, ఆ సరళరేఖ X అక్షముపై ఉన్న ప్రతి బిందువు నుండి సమాన దూరంలో ఉంటుంది. దీనిని y = c గా సూచిస్తారు.
- ఒక సరళరేఖ Y-అక్షమునకు సమాంతరముగా ఉన్నట్లైతే, ఆ సరళరేఖ Y అక్షముపై ఉన్న ప్రతి బిందువు నుండి సమాన దూరంలో ఉంటుంది. దీనిని x = k గా సూచిస్తారు. (i) $x = 5$ గ్రాఫ్‌ను గీయుము.

ఉదాహరణ 3.43

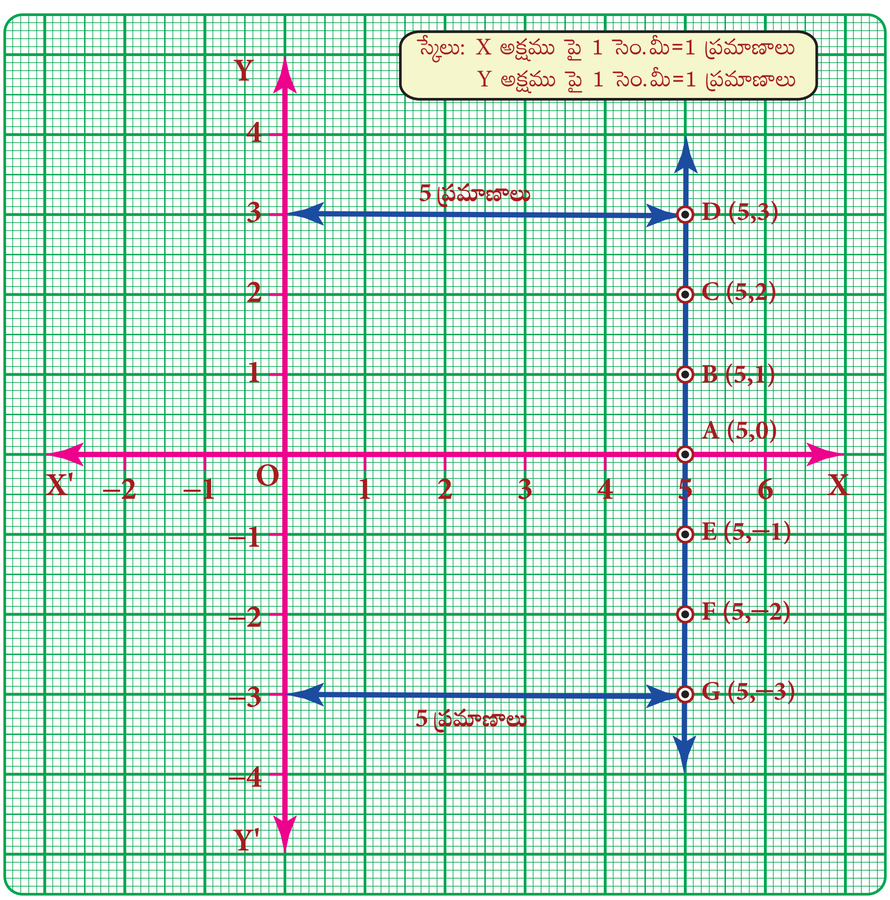
$x = 5$ రేఖా చిత్రమును గీయుము

సాధన:

x=5 అనగా y యొక్క ఏ విలువకైనా x నిరూపకము ఎల్లప్పుడూ 5 అగును. కావున y-నిరూపకమును ఏదో ఒక విలువగా తీసుకొని క్రింది విధముగా పట్టికీకరించుము.

X	5	5	5	5	5
Y	−2	−1	0	2	3

ఇవ్వబడిన x =5 (స్థిరము)కు y ఏ విలువైనా తీసుకొనవచ్చును. ఎందుకు?



గమనిక

X=0, - Y అక్షమును సూచించును

Y=0, X అక్షమును సూచించును

ఆలోచించుము

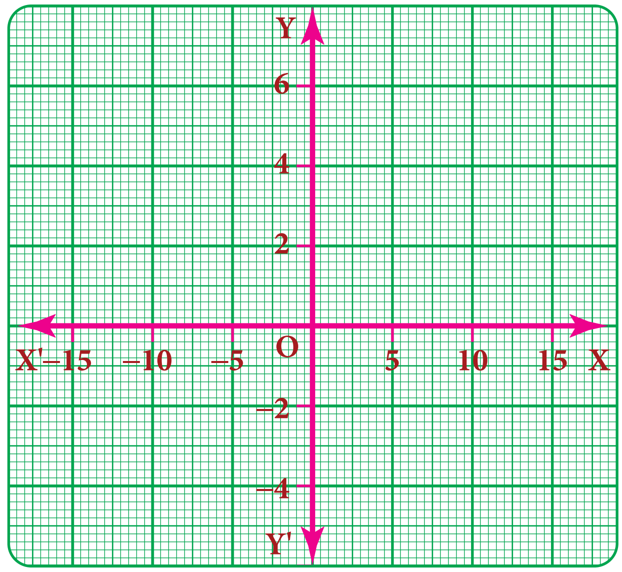
(5, −10) (0, 5) (5, 20) బిందువులలో ఏవి X = 5 సరళరేఖపై ఉంటాయి?

A(5,0) B(5,1) C(5,2) D(5,3) E(5,-1) F(5,-2) G(5,-3) బిందువులను గ్రాఫ్‌లో గుర్తించి వాటిని కలుపుము. Y అక్షము నుంచి 5 ప్రమాణాల దూరంలో Y అక్షమునకు సమాంతరముగా ఒక సరళరేఖ

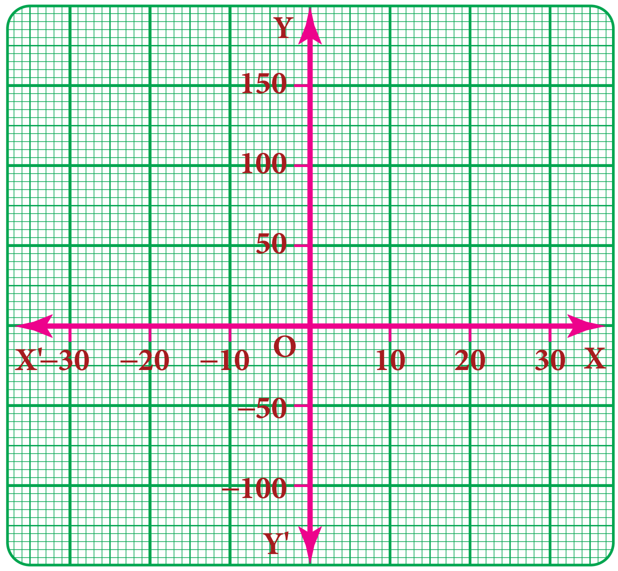
03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 114 31-07-2020 12:54:34

3.9.9 గ్రాఫ్‌లో స్కేలు:

y' అనునది 'x' యొక్క పెద్ద గుణకమైన సందర్భములో గ్రాఫ్ గీయునపుడు సాధారణంగా తీసుకొను ప్రమాణాలు 'y' నిరూపకమును గుర్తించుటకు సరిపోదు మరియు విపర్యయము. ఈ సందర్భములో అవసరమునకు తగినట్లు రెండు నిరూపకక్షాలపై స్కేలు అనే భావనను మనము ఉపయోగిస్తాము. గ్రాఫ్ కాగితములో కుడివైపు మూలలో అనుకూలమైన స్కేలును సూచిస్తాము. కొన్ని ఉదాహరణలు క్రింద ఇవ్వబడినవి.



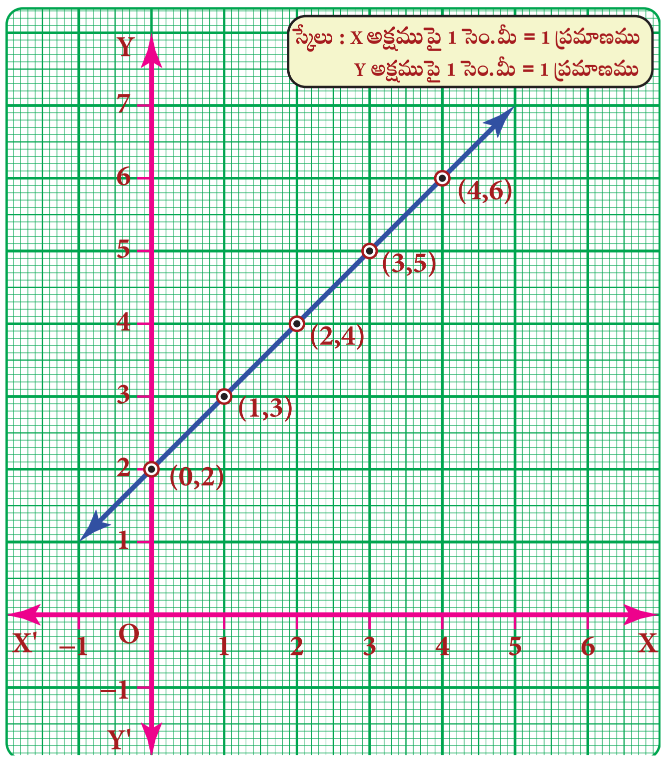
ఉదాహరణ 1 X - అక్షముపై 1 సెం.మీ = 5 ప్రమాణాలు
Y - అక్షముపై 1 సెం.మీ = 2 ప్రమాణాలు.



ఉదాహరణ 2 X అక్షముపై 1 సెం.మీ = 10 ప్రమాణాలు.
Y అక్షముపై 1 సెం.మీ = 50 ప్రమాణాలు

3.10 సరేఖీయ రేఖాచిత్రము (Linear graph)

3.10.1 సరేఖీయ క్రమావర్తనము



నిరూపక తలములో (0, 2), (1, 3), (2, 4), (3, 5) బిందువులను గుర్తించుము. నీవు ఏమి గమనించితివి? అవన్నీ ఒక రేఖపై గలవు. వానిలో ఏదో ఒక క్రమావర్తనము (pattern) గలదు. ప్రతి క్రమయుగ్మములో y- నిరూపకమును చూడుము. 2 = 0+2; 3 = 1+2; 4 = 2+2; 5 = 3+2; 6 = 4+2 ప్రతి జతలోను y-నిరూపకము x-నిరూపకము కన్నా 2 ఎక్కువగా ఉన్నది. ప్రతి బిందువులోని నిరూపకములు ఒకే విధమైన సంబంధమును వాని మధ్య కలిగియున్నవి. గుర్తించిన బిందువులన్నీ ఒక సరళరేఖపై గలవు!

ఈ విధంగా బిందువులన్నీ ఒక సరళరేఖపై గుర్తింపబడు సందర్భములో, రేఖీయ క్రమావర్తనము (*pattern*) గలదని మనము చెప్పవచ్చును.

ఈ ఉదాహరణలో ప్రతి క్రమయుగ్మములో y విలువ = x విలువ + 2 అని మనము చూస్తున్నాము. కావున రేఖీయ క్రమావర్తనమును $y = x + 2$ అను బీజీయ సమీకరణముతో సూచించవచ్చును. ఇటువంటి సమీకరణమును రేఖీయ సమీకరణము (*linear equation*) అని మరియు దీని రేఖాచిత్రమును సరేఖీయ రేఖాచిత్రమని పిలుస్తారు (*linear graph*).

ఒక చరరాశి వేరొక చరరాశి(చరరాశుల)పై ఆధారపడినట్లయితే ఏకఘాత సమీకరణములో ఒకటి (లేదా ఎక్కువ) చరరాశులను ఉపయోగిస్తాము.

మనము ట్యాక్సీలో ఎంత ఎక్కువ దూరం ప్రయాణిస్తే అంత ఎక్కువ చెల్లించాలి. ప్రయాణించిన దూరం అనునది స్వతంత్ర చలరాశికు ఒక ఉదాహరణ. ట్యాక్సీ చార్జీ దూరముపై ఆధారపడును. కావున దీనిని అస్వతంత్ర చలరాశి అంటారు.

ఎక్కువ విద్యుచ్ఛక్తిని ఉపయోగించినవారి విద్యుత్ బిల్లు ఎక్కువగా ఉంటుంది. వాడుకున్న విద్యుచ్ఛక్తి అనునది స్వతంత్ర చరరాశికి ఉదాహరణ మరియు బిల్లు అనునది సహజంగానే అస్వతంత్ర చలరాశి అగును.

3.10.2 రెండు చరరాశులు గల రేఖీయ ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రము

జ్యామితిలో మనము సమాంతర రేఖలు, ఖండన రేఖలు మొదలగువానిని గుర్తించియున్నాము. కాని అవి వాస్తవముగా ఎంత దూరంలో లేదా ఎక్కడ గలవని ఎప్పుడూ చర్చించలేదు. రేఖాచిత్రములను గీయుట అనునది మనకు రేఖలను స్థానీకరించుటకు ఉపయోగపడును. ఒక సరళ సమీరణము యొక్క గ్రాఫ్ గీయుటకు మనకు కనీసము రెండు బిందువులు కావలెను. కాని రెండు కన్నా ఎక్కువ బిందువులను ఉపయోగించుట సురక్షితము. (ఎందుకు?) బిందువులను ఎన్నుకొనప్పుడు సున్నాతో బాటు ధనాత్మక మరియు ఋణాత్మక విలువలను తీసుకొనుట మంచిది. ఏదేని జత బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖ ఏకైకము.

ఉదాహరణ 3.44

$y = 5x$ రేఖా చిత్రమును గీయుము.

x	-3	-1	0	2	3
y	-15	-5	0	10	15

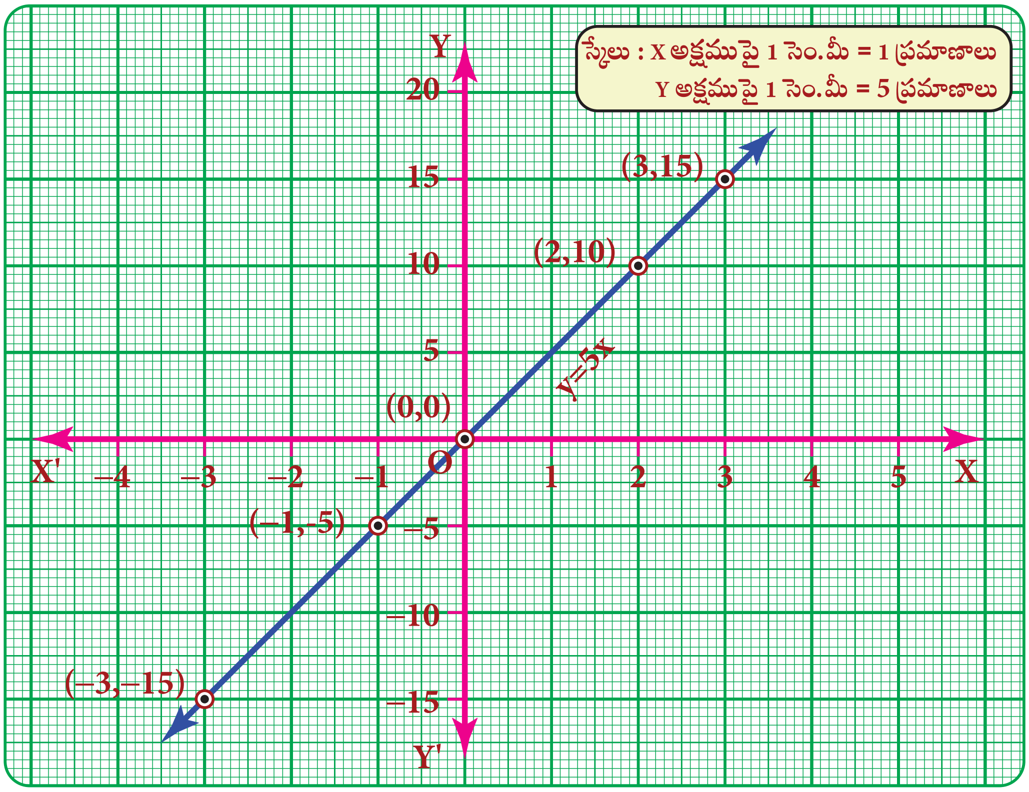
సాధన:

ఇచ్చిన సమీకరణము $y = 5x$

అనగా ఏదేని x విలువకు, y విలువ ఐదురెట్లగును.

x	$y = 5x$
-3	$y = 5 \times (-3) = -15$
-1	$y = 5 \times (-1) = -5$
0	$y = 5 \times (0) = 0$
2	$y = 5 \times (2) = 10$
3	$y = 5 \times (3) = 15$

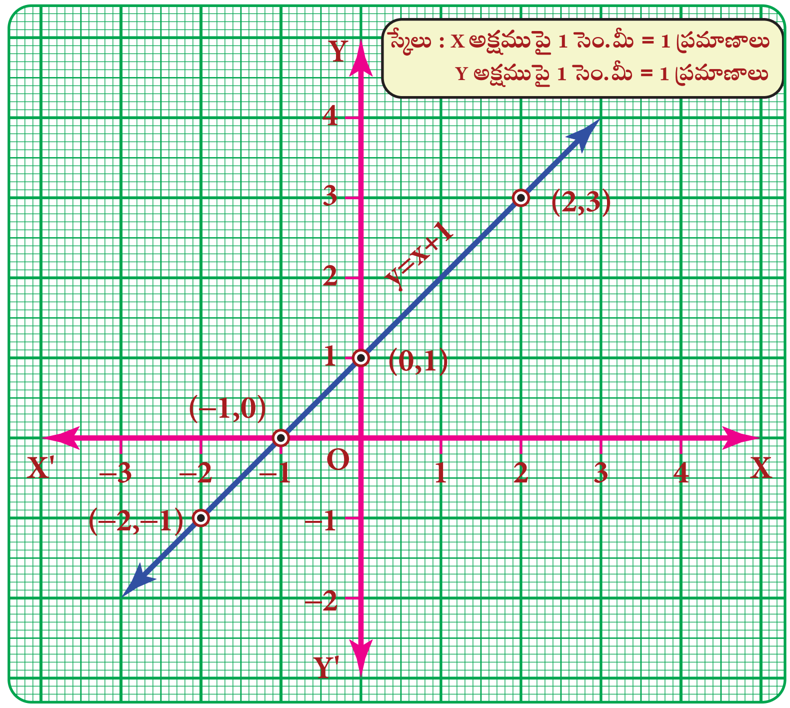
$(-3,-15)$ $(-1,-5)$ $(0,0)$ $(2,10)$ $(3,15)$ బిందువులను గుర్తించుము



03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 116 31-07-2020 12:54:36

ఉదాహరణ 3.45

$y = x + 1$ సమీకరణమునకు రేఖాచిత్రమును గీయుము.



ఒక జత x మరియు y విలువలను ఎంచుకోవడం ద్వారా ప్రారంభించుము. ఈ ఎంపిక మొదటగా

(i) y సున్నా అయిన x ఏమగును మరియు

(ii) y సున్నా అయిన x ఏమగును అని చూడుటకు ఉపయోగపడును.

దీని తరువాత మనము ఒకటి లేదా రెండు కన్నా ఎక్కువ విలువలను కనుగొనవలెను.

మనము కనీసము రెండు కన్నా ఎక్కువ క్రమయుగ్మాలను కనుగొంటాము. సులభముగా గ్రాఫ్ గీయుటకు భిన్న రూపంలోని విలువలను నివారిస్తాము. మనము సరిపోవు విలువను ఊహించుకొంటాము.

x	$y = x+1$
-2	$y = -2+1 = -1$
-1	$y = -1+1 = 0$
0	$y = 0+1 = 1$
1	$y = 1+1 = 2$
2	$y = 2+1 = 3$

x	-2	-1	0	1	2
y	-1	0	1	2	3

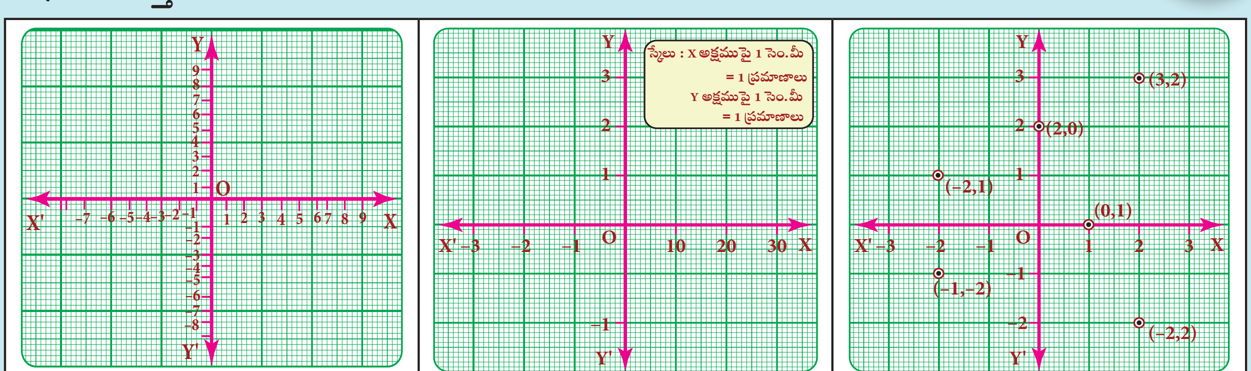
గమనిక

గ్రాఫ్ యొక్క ధోరణి (దిశ) తీసుకొను స్కేలుపై ఆధారపడి విభిన్నంగా ఉంటుంది.

ప్రస్తుతము మనకు $(-2,-1)$ $(-1, 0)$ $(0, 1)$ $(1, 2)$ **మరియు** $(2, 3)$ అను ఐదు బిందువులు గలవు.

ప్రయత్నించుము

దోషాలను గుర్తించి సరిచూచుట



(i) (ii) (iii)

అభ్యాసము 3.9

1. క్రింది ఖాళీలను పూరించుము.

(i) $y = px$, $p \in z$ ఎల్లప్పుడూ __________ బిందువు ద్వారా పోవును.

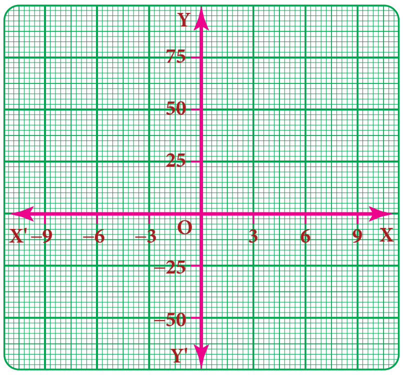
(ii) $x = 4$ మరియు $y = -4$ రేఖల ఖండన బిందువు __________.

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 117 31-07-2020 12:54:38

(iii) ఇవ్వబడిన గ్రాఫ్ స్కేలు,

x- అక్షముపై 1 సెం.మీ = ------- ప్రమాణాలు

y- అక్షముపై 1 సెం.మీ = ------- ప్రమాణాలు



2. సత్యమా లేదా అసత్యమా తెల్పుము.

(i) (1,1) (2,2) (3,3) బిందువులు ఒకే సరళరేఖపై గల బిందువులు.

(ii) $y = -9x$ మూలబిందువు ద్వారా వెళ్ళదు.

3. (2, 2) ద్వారా పోవు రేఖ అక్షాలను (2, 0) మరియు (0, 2) ల వద్ద ఖండించునా?

4. ఒక సరళరేఖ (4, –2) బిందువు గుండా పోవును మరియు Y- అక్షమును (0, 2) వద్ద ఖండించును. ఈ రేఖపై రెండవ పాదంలోని ఒక బిందువును కనుగొనుము.

5. P(5, 3) Q(–3, 3) R(–3, –4) మరియు S బిందువులు దీర్ఘచతురస్రమును ఏర్పరచిన, S నిరూపకములను కనుగొనుము.

6. ఒక సరళరేఖ (6, 0) మరియు (0, 6) బిందువుల గుండా పోవును. మరియు మరొక రేఖ (–3,0) మరియు (0, –3) ల గుండా పోవును. ఏ బిందువులను కలుపగా సమలంబ చతుర్భుజం లభించును?

7. (–3, 7) (2, –4) మరియు (4,6) (–5,–7) బిందువులను కలిపే రేఖల ఖండన బిందువును కనుగొనుము. మరియు ఈ రేఖలు అక్షాలను ఖండించు బిందువులను కనుగొనుము.

8. క్రింది సమీకరణాలకు గ్రాఫ్‌ను గీయుము. (i) $x = -7$ (ii) $y = 6$

9. (i) $y = -3x$ ii) $y = x-4$ iii) $y = 2x+5$ ల గ్రాఫ్ గీయుము.

10. విలువలను కనుగొనుము

a) $y = x + 3$

x	0		–2	
y		0		–3

b) $2x + y - 6 = 0$

x	0		–1	
y		0		–2

c) $y = 3x+1$

x	–1	0	1	2
y				

అభ్యాసము 3.10

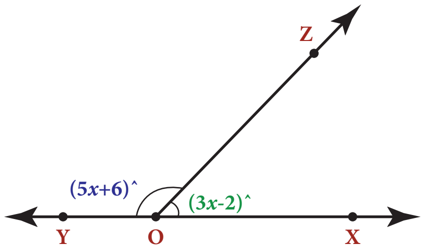
ఇతర అభ్యసన సమస్యలు

1. మూడు సంఖ్యల మొత్తము 58. రెండవ సంఖ్య, మొదటి సంఖ్య యొక్క రెండులో 5వ వంతునకు మూడురెట్లు మరియు మూడవ సంఖ్య మొదటి సంఖ్య కన్నా 6 తక్కువ అయిన ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

2. త్రిభుజము ABC లో $\angle B$ కొలత, $\angle A$ కొలతలో రెండులో 3 వ వంతు. $\angle C$ కొలత $\angle A$ కన్నా 20^0 ఎక్కువ. ఈ మూడు కోణాల కొలతలను కనుగొనుము.

3. 5y–2 మరియు 4y+9 లు సమద్విబాహు త్రిభుజ రెండు సమ భుజాలు. మూడవ భుజము 2y+5 ప్రమాణాలు. 'y' ని కనుగొని, త్రిభుజ చుట్టుకొలతను కనుగొనుము.

4. ప్రక్క పటములో XOZ మరియు ZOY కోణాలు రేఖీయ ద్వయము. x యొక్క విలువను కనుగొనుము.



5. క్రింద ఇవ్వబడిన సమాచారమునకు గ్రాఫ్ గీయుము.

చతురస్ర భుజము (సెం.మీ)	2	3	4	5	6
వైశాల్యము (చ.సెం.మీ)	4	9	16	25	36

ఈ గ్రాఫ్ రేఖీయ సంబంధమును తెలుపునా?

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 118 31-07-2020 12:54:38

సవాళాత్మక ప్రశ్నలు

6. ఆరోహణ క్రమములో మూడు వరుస పూర్ణసంఖ్యలను వరుసగా 2, 3 మరియు 4 లచే గుణించబడినది. వాటి లబ్ధముల మొత్తము 74, ఆ మూడు సంఖ్యలను కనుగొనుము.
7. ఒక క్షేత్ర పర్యటనకు 331 విద్యార్థులు వెళ్ళారు. ఆరు బస్సులు పూర్తిగా నింపబడినవి మరియు 7 విద్యార్థులు ఒక వ్యానులో ప్రయాణించారు. ప్రతి బస్సులో గల విద్యార్థుల సంఖ్య ఎంత?
8. ఒక వ్యాపారస్తుని వద్దనున్న 22 వస్తువులలో కొన్ని పెన్సిల్‌లు, కొన్ని బాల్‌పెన్‌లు కలవు. ప్రతి ఒక పెన్సిల్‌ను ₹15 కు మరియు ప్రతి ఒక బాల్‌పెన్‌ను ₹20 కు ఒక నిర్ధిష్ట రోజున అమ్మెను. వ్యాపారస్తుని వద్ద అమ్మిన మొత్తము ₹380 గలదు. అతను ఎన్ని పెన్సిల్‌ను అమ్మెను?
9. $y = x, y = 2x, y = 3x$ మరియు $y = 5x$ రేఖల గ్రాఫ్‌ను ఒకే గ్రాఫ్ కాగితములో గీయుము. ఈ గ్రాఫ్‌లో ఏదేని ప్రత్యేకతను నీవు గుర్తించగలవా?
10. కుంభాకార బహుభుజి యొక్క కోణాల సంఖ్యను మరియు భుజాల సంఖ్యను పరిగణనలో తీసుకొని క్రింది విధంగా పట్టికీకరించుము.

బహుభుజి పేరు	కోణాల సంఖ్య	భుజాల సంఖ్య

దీనిని ఉపయోగించి గ్రాఫ్ గీచి కోణముల సంఖ్యకు మరియు భుజాల సంఖ్యకు మధ్యగల సంబంధమును విశదీకరించుము.

సారాంశము

- రెండు బీజీయ సమాసముల లబ్ధాన్ని కనుగొనేటప్పుడు క్రింది వాటిని అనుసరిస్తాము.
  పదాల గుర్తులను గుణించాలి.
  పదాల అనురూప గుణకాలను గుణించాలి.
  ఘాతాంక న్యాయాలను ఉపయోగించి చరరాశి కారణాంకాలను గుణించాలి.
- ఒక ఏకపదిచే ఒక బహుపదిని భాగించడానికి, బహుపదిలోని ప్రతి పదమును ఏకపదిచే భాగించాలి.
- సర్వ సమీకరణము: ఒక సమీకరణంలోని చలరాశులకు బదులుగా ఏ విలువనైన ప్రతిక్షేపించడం ద్వారా సమీకరణము తృప్తి పరచబడితే దానిని సర్వసమీకరణము అని అందురు.
  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\quad (x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$
  $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
  $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ $\quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
  $(x+b)(x+b)(x+c) = x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ca)x + abc$
- **కారణాంక విభజన:** ఒక బీజీయ సమాసాన్ని లేక అంతకన్నా ఎక్కువ బీజీయ సమాసాల లబ్ధంగా వ్యక్తపరిస్తే దానిని కారణాంక విభజన అని అందురు.
- గరిష్ట ఘాతము ఒకటిగా గల ఏక చలరాశి గల సమీకరణమును ఏక చలరాశి గల ఏకఘాత సమీకరణము అంటారు.
- ఒక సమీకరణము యొక్క రెండు వైపుల సమానమగునట్లు ఆ సమీకరణంలోని చలరాశి నందు తీసుకొనబడు విలువను ఆ సమీకరణం యొక్క సాధన లేదా మూలం అని అంటారు.
- గ్రాఫ్ గీయుట అనునది సంఖ్యల మధ్య సంబంధమును సూచించు ఒక దృశ్యమాన పద్ధతి.
- క్షితిజ సమాంతరరేఖను XOX' గా సూచించి దానిని X- అక్షమని పిలుస్తారు. క్షితిజ లంబరేఖను YOY' గా సూచించి దానిని Y- అక్షమని పిలుస్తారు. ఈ రెండు అక్షాలను **నిరూపకక్షాలని** అంటారు. x అక్షము మరియు y అక్షము గల తలమును నిరూపక తలం లేదా **కార్టీజియన్ తలం** అంటారు.
- ఒక బిందువును 'a' మరియు 'b' అను రెండు సంఖ్యలచే ఒక ప్రత్యేక క్రమంలో జతచేసి (a,b) అను జతచే సూచిస్తారు. ఇచ్చట 'a' అనునది X-అక్షము వెంబడి దూరమును మరియు 'b' అనునది Y- అక్షము వెంబడి దూరమును సూచించును. దీనినే (a,b) అను క్రమయుగ్మము అంటారు.
- నిరూపకక్షాలు గ్రాఫ్ యొక్క తలమును నాలుగు భాగాలుగా విభజించును. వీటినే పాదములు అంటారు.
- ఏకఘాత సమీకరణము యొక్క రేఖాచిత్రమును "సరేఖీయ రేఖాచిత్రము అంటారు.

03_8th_Maths_Telugu_Algebra_Chap_3.indd 119 31-07-2020 12:54:41

అంతర్జాల కృత్యము (ICT CORNER)

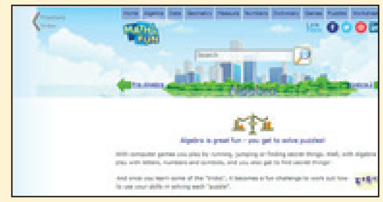
ఈ కృత్యము ద్వారా బీజగణితం, వాటి ప్రక్రియలను మరియు ధర్మాల అధ్యయనం గురించి తెలుసుకొంటాము.

సోపానం – 1 బ్రౌజర్‌ను తెరిచి క్రింది ఇచ్చిన (URL) ను టైప్ చేయండి.

సోపానం - 2 ఏదైనా ఒక బ్రౌజర్‌ను తెరచి క్రింది ఇచ్చిన QR CODE ను టైప్ చేసి బీజగణితము, ఘాతాలు,బహుపదులు మరియు వర్గ సమీకరణాలు మొదలైన వాటిలోని ప్రాథమిక అంశాలు గురించి తెలుసుకోవడానికి ఈ లింక్‌ను క్లిక్ చేయండి.

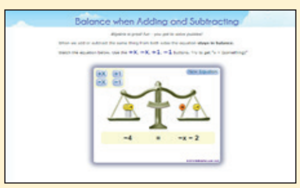
సోపానం- 3 ఉదాహరణకు "Balance While adding and subtracting" పై క్లిక్ చేయండి.

సోపానం - 4 ఇదేవిధంగా బీజగణిత భావనలను అన్నింటిని నేర్చుకోవచ్చును.

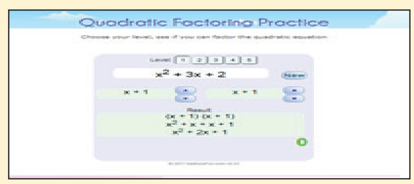


సోపానము 1

సోపానము 2



సోపానము 3



సోపానము 4

AZR3S

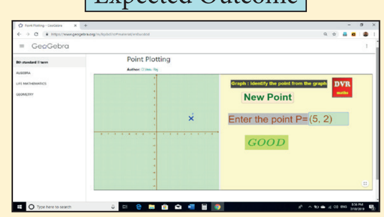
Web URL **Algebra:**
https://www.mathsisfun.com/algebra/index.html
*Pictures are indicatives only.
*If browser requires, allow Flash Player or Java Script to load the page.

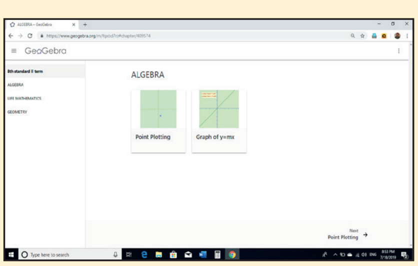
అంతర్జాల కృత్యము (ICT CORNER)

సోపానం – 1 బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్ చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన URL లింకును టైపు చేయండి లేదా QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము. "ALGEBRA" అనే పేరు మీద జియోజిబ్రా అను వర్క్‌బుక్ ఓపెన్ అగును. "Point Plotting" అను పేరు గల వర్క్‌షీట్‌పై క్లిక్ చేయుము.

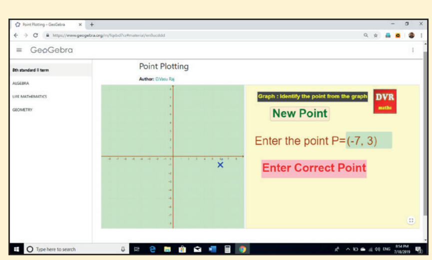
సోపానం - 2 ఇవ్వబడిన వర్క్‌షీట్ నందు "New point" పై క్లిక్ చేయగా ఒక క్రొత్త బిందువు మీకు లభించును. ఇన్‌పుట్ బాక్స్‌నందు సరైన బిందువును ఉంచి Enter బటన్ నొక్కుము.

Expected Outcome





సోపానము 1



సోపానము 2

OJYE7

Browse in the link
Algebra:
https://www.geogebra.org/m/fqxbd7rz#chapter/409574 or Scan the QR Code.

4 జీవనాధార గణితము

అభ్యసన లక్ష్యాలు

- లాభము మరియు నష్టము మరియు బారువడ్డీల భావన పునశ్చరణ.
- శాతము, లాభము మరియు నష్టము, అధికవ్యయము, రుసుము మరియు GSTల భావనను సమస్యల సాధనలో ఉపయోగించుట.
- చక్రవడ్డీ గురించి తెలుసుకొనుట మరియు చక్రవడ్డీని క్రమానుగత పద్ధతి ద్వారా మరియు సూత్రము ద్వారా కనుగొనుట మరియు వీటిని సాధారణ సమస్యల్లో ఉపయోగించుట.
- రెండు సంవత్సరాలకు మరియు మూడు సంవత్సరాలకు బారువడ్డీ మరియు చక్రవడ్డీల మధ్య గల తేడాలను కనుగొనుట.
- అనులోమ మరియు విలోమ అనుపాతములు పునశ్చరణ.
- మిశ్రమచలత్వమును తెలుసుకొనుట దానిని సమస్య సాధనకు ఉపయోగించుట.
- కాలము – పని సమస్యలను సాధించుట.

4.1 పరిచయము

8వ తరగతిలో గణిత పీరియడ్‌లో జరిగిన సంభాషణలు క్రింద ఇవ్వబడినవి.

ఉపాధ్యాయుడు: ప్రియమైన విద్యార్థులారా! పతాక దినోత్సవం సందర్భంగా డబ్బు వసూలు చేయగా 7వ తరగతిలో 40 మంది విద్యార్థులలో 32 మంది, మన తరగతిలో 50 మంది విద్యార్థులలో 42 మంది ధనసహాయం చేశారు. ఎవ్వరు ఎక్కువ ధనసహాయం చేశారని మీరెవరైనా చెప్పగలరా?

శంకర్: అయ్యా! 40 లో 32 అనగా $\frac{32}{40}$ మరియు 50లో 42 అనగా $\frac{42}{50}$. వీటి సజాతి భిన్నాలు వరుసగా $\frac{160}{200}$ మరియు $\frac{168}{200}$. కావున, మన తరగతి విద్యార్థులు ఎక్కువ ధనసహాయం చేశారు.

ఉపాధ్యాయుడు: శంకర్ బాగా చెప్పావు. వీటిని పోల్చుటకు మరొక పద్ధతి కలదా?

బుమ్రా: అవును అయ్యా! 'శాతము'లను ఉపయోగించ వచ్చును $\frac{32}{40} = \frac{32}{40} \times 100 = 80\ \%$ మరియు $\frac{42}{50} = \frac{42}{50} \times 100 = 84\%$ మన తరగతి యొక్క సహాయము, 7వ తరగతి కన్నా 4% ఎక్కువ.

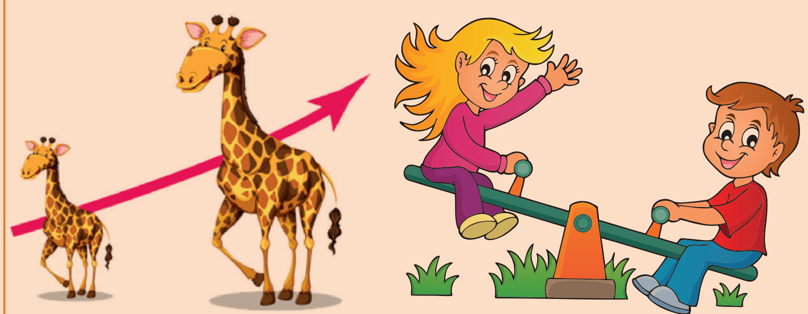
ఉపాధ్యాయుడు: బుమ్రా! చక్కగా చేశావు. నీవు చెప్పినది ఖచ్చితంగా సరైనది. శాతమును వేరెక్కడ ఎక్కువగా ఉపయోగిస్తామని మీలో ఎవరైనా చెప్పగలరా?

భువి: అవును అయ్యా! నేను మా నాన్న ద్వారా శాతమును లాభము మరియు నష్టము, రుసుములను లెక్కించుటలోను, పన్ను (ఉదా: GST), వడ్డీ, వృద్ధి మరియు తగ్గుదలను లెక్కించుటలోను మరియు పోల్చదగిన ప్రతి చోట చాలా సందర్భాలలోను ఉపయోగిస్తారని తెలుసుకొన్నాను.

ఉపాధ్యాయుడు: భువి బాగా చెప్పావు. మనము ఈ అధ్యాయములో శాతమును ఉపయోగించి పైన తెలియచేసిన విషయాలను నేర్చుకోబోతున్నాము.

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 121 31-07-2020 13:05:11

పై సంభాషణ ఆధారంగా శాతము యొక్క అనువర్తనమును విభిన్న సందర్భాలలో మరియు మన నిత్య జీవతంలో సాధారణంగా చూస్తున్నామని తెలుస్తున్నది.

ఔత్సాహిక గణితము – నిత్యజీవితంలో జీవనాధార గణితము	
	
చక్రవడ్డీ ద్వారా ధనము వేగంగా అభివృద్ధి చెందును	కాలక్రమేణా జిరాఫీ యొక్క పెరుగుదల అనులోమానుపాతమునకు ఒక ఉదాహరణ మరియు తూగుడు బల్ల (see-saw) విలోమానుపాతమునకు ఉదాహరణ.

వీటిని ప్రయత్నించుము

క్రింది సంఖ్యలకు సూచించిన శాత విలువలను కనుగొనుము.

సంఖ్య / %	60	240	660	852	1200
10%					
20%					
25%					
$33\frac{1}{3}\%$					

4.2 శాతము యొక్క అనువర్తన వాక్యరూప సమస్యలు

శాతము అనగా నూరు చొప్పున లేదా నూటికి, దీనిని % అనే గుర్తుచే సూచిస్తారని మనకు తెలుసు. $x\%$ ను $\frac{x}{100}$ అని సూచిస్తారు. దీనిని పరిమాణములను సులభంగా పోల్చుటకు ఉపయోగిస్తారు. వాక్యరూపంలోని సమస్యల సాధనలో దీని యొక్క ఉపయోగమును తెలుసుకొంటాము.

ఉదాహరణ: 4.1

600లలో $x\%$ అనేది 450 అయితే, x విలువను కనుగొనుము.

సాధన:

$$x\% \text{ లో } 600 = 450$$

$$\frac{x}{100} \times 600 = 450$$

$$x = \frac{450}{6}$$

$$x = 75$$

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 122 31-07-2020 13:05:14

ఉదాహరణ: 4.2

ఒక సంఖ్య 25% తగ్గి 120 గా మారినది. ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన:

ఆ సంఖ్యను x అనుకొందాం.

ఇచ్చిన, $x - \frac{25}{100}x = 120$

$$\frac{100x - 25x}{100} = 120$$

$$\frac{75x}{100} = 120$$

$$\Rightarrow x = \frac{120 \times 100}{75}$$

$$x = 160$$

మీకు తెలుసా?

ప్రారంభ పరిమాణం A మరియు ఈ పరిమాణం x % క్షీణించిన మనకు లభించు పరిమాణం D= $\left(1-\frac{x}{100}\right)$ A

మరోక పద్ధతి: పై సూత్రమునుపయోగించి,

$$D = \left(1-\frac{25}{100}\right)A \quad \Rightarrow 120 = \frac{75}{100} \times A$$

$$A = 120 \times \frac{100}{75} = 160$$

ఉదాహరణ: 4.3

అఖిల ఒక పరీక్షలో 80% మార్కులు సాధించెను. ఆమె మార్కులు 576 అయితే ఆ పరీక్ష గరిష్ట మార్కును కనుగొనుము.

సాధన:

గరిష్ట మార్కులు x అనుకొందాం.

ఇప్పుడు, x లో $80\% = 576$

$$\frac{80}{100} \times x = 576$$

$$\Rightarrow x = 576 \times \frac{100}{80}$$

$$x = 720 \text{ మార్కులు}$$

కావున, ఈ పరీక్ష గరిష్ట మార్కులు =720.

ఉదాహరణ: 4.4

ఒక కి.గ్రా మినప పప్పు ధర 20% వృద్ధి చెంది ₹96 అయితే, దాని యొక్క ఒక కి.గ్రా అసలు ధరను కనుగొనుము.

సాధన:

ఒక కి.గ్రా మినప పప్పు ధర ₹ x అనుకొందాం.

20% వృద్ధి చెందిన తరువాత $= x + \frac{20}{100}x = \frac{120x}{100}$

$$96 = \frac{120x}{100}$$

$$\therefore x = \frac{96 \times 100}{120}$$

$\therefore$ అసలు ధర = ₹80

మీకు తెలుసా?

ప్రారంభ పరిమాణము A మరియు ఈ పరిమాణంలో వృద్ధి x % అయిన, మనకు లభించు పరిమాణం

$$I = \left(1+\frac{x}{100}\right) A$$

మరోక పద్ధతి: పై సూత్రమునుపయోగించి,

$$I = \left(1+\frac{20}{100}\right)A$$

$$\Rightarrow 96 = \frac{120}{100} \times A$$

$$A = 96 \times \frac{100}{120}$$

A = ₹80

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 123 31-07-2020 13:05:23

ప్రయత్నించుము

1. ఒక రోజులో 10 గంటలు అనునది ఎంత శాతము?
2. ₹350 ను P, Q మరియు R లకు Q కు లభించిన దానిలో 50% P కు మరియు R కు లభించిన దానిలో 50% Q కు చెందునట్లు విభజించుము.

ఆలోచించుము

200, 600గా వృద్ధి చెందుట అనునది స్పష్టంగా 200% వృద్ధి అవునా? (సరిచూడుము). పట్టణ ట్రాఫిక్ (రవాణా) పోలీసు కమీషనర్ ఈ సంవత్సరం ప్రమాదాలు 200% క్షీణించచినదని చాలా గర్వంగా నివేదికను సమర్పించారు. ఈ నివేదికలో ఈ సంవత్సరంలో ప్రమాదాలు 600 నుండి 200కు తగ్గినదని తెలియజేసెను. ఈ తగ్గుదల పైన తెలియజేసినట్లు 200 శాతమా? సమర్ధించుము.

ఉదాహరణ: 4.5

ఒక వ్యక్తి ఆదాయము 10% వృద్ధి చెంది మరియు తరువాత 10% తగ్గినది. అతని యొక్క ఆదాయ మార్పును కనుగొనుము.

సాధన:

ఆ వ్యక్తి యొక్క ఆదాయము ₹ x అనుకొందాం.

10% వృద్ధి చెందిన తరువాత అతని ఆదాయము

$$₹\, x+\left(\frac{10}{100}\times x\right) = ₹\frac{110}{100}\, x \text{ (or) } ₹\frac{11}{10}\, x$$

10% క్షీణించిన తరువాత అతని ఆదాయము ₹

$$₹\frac{11x}{10} - \frac{10}{100}\left(\frac{11x}{10}\right)$$

$$\frac{11x}{10} - \frac{11x}{100} = \frac{110x-11x}{100} = ₹\frac{99x}{100}$$

∴ చివరగా అతని ఆదాయములో మార్పు $= x - \frac{99x}{100} = \frac{x}{100}$

∴ మార్పు శాతము $= \frac{\frac{x}{100}}{x}\times 100\% = 1\%$

మరోక పద్ధతి:

ఆ వ్యక్తి యొక్క ఆదాయమును ₹100 గా తీసుకొందాం.

10% వృద్ధి చెందిన తరువాత అతని ఆదాయము

$$100 + 100 \times \frac{10}{100} = ₹110.$$

తరువాత 10% క్షీణించినపుడు ఆదాయము

$$110 - 110 \times \frac{10}{100} = 110 - 11 = ₹99$$

∴ చివరగా ఆదాయములో మార్పు = 100 − 99 = 1

∴ మార్పు శాతము $= \frac{1}{100}\times 100\% = 1\%$.

ఆదాయము 1% తగ్గినది

గమనిక

దత్త రెండు సంఖ్యలలో ఒక సంఖ్య $x\%$ వృద్ధి లేదా క్షీణించిన మరియు మరొక సంఖ్య $y\%$ వృద్ధి లేదా క్షీణించిన, ఆ సంఖ్యల లబ్దము $\left(x+y+\frac{xy}{100}\right)\%$ వృద్ధి లేదా క్షీణించును. క్షీణతకు ఋణాత్మక గుర్తును ఉపయోగించుము. మరియు ఋణాత్మక గుర్తు ఉన్నచో క్షీణత అని ఊహించుకొనుము.

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 124 31-07-2020 13:05:32

అభ్యాసము 4.1

1. క్రింది ఖాళీలను పూరించండి:

(i) x లో 30% అనునది 150 అయిన x __________.

(ii) 2 నిమిషాలు అనునది గంటలో __________% శాతము.

(iii) x లో x% అనునది 25 అయిన x _________.

(iv) ఒక పాఠశాలలో మొత్తం 1400 మంది విద్యార్థులలో 420 మంది బాలికలు అయితే, పాఠశాలలోని బాలురల శాతము _________.

(v) 0.5252 అనునది _________%.

2. గీత గీయబడిన ప్రతి భాగమును శాతములో మార్చి వ్రాయుము.

(i) కేక్‌లోని ఒక సగభాగమును పిల్లలకు పంచబడినది.

(ii) అపర్ణ ఒక పోటీలో 10కి 7.5 పాయింట్‌లు సాధించెను.

(iii) విగ్రహము స్వచ్ఛమైన వెండితో తయారు చేయబడినది.

(iv) 50 విద్యార్థులలో 48 మంది ఆటల పోటీలో పాల్గొన్నారు.

(v) 3లో 2 వ్యక్తులు మాత్రమే ఒక ముఖాముఖిలో ఎంపిక చేయబడ్డారు.

3. 48 అనునది ఏ సంఖ్యలో 32%?

4. 400లో 30% లో 25% ఎంత?

5. ₹300000 కొన్న కారును ₹200000 కు అమ్మబడినది. కారు విలువలోని తగ్గుదల శాతమును కనుగొనుము.

6. ఒక సంఖ్య యొక్క 75% మరియు 60% వ్యత్యాసము 82.5 అయితే, ఆ సంఖ్యలో 20% విలువను కనుగొనుము.

7. ఒక సంఖ్యలో 18% పెరుగుదల 236 అయితే ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

8. ఒక సంఖ్యలో 20% తగ్గుదల 80 అయితే ఆ సంఖ్యను కనుగొనుము.

9. ఒక సంఖ్యలో 25% పెరిగిన తరువాత 20% తగ్గిన ఆ సంఖ్యలోని మార్పును కనుగొనుము.

10. ఒక తరగతిలో బాలుర మరియు బాలికల నిష్పత్తి 5:3. ఒక పరీక్షలో 16% బాలురులు మరియు 8% బాలికలు ఉత్తీర్ణులు కాలేదు. తరగతి ఉత్తీర్ణత శాతమును కనుగొనుము.

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

11. 250 లీటర్లలో 12% అనునది 150 లీటర్లలో _________ కు సమానం.

(A) 10% (B) 15% (C) 20% (D) 30%

12. ఒక పాఠశాలలో జరిగిన ఎన్నికలలో A, B మరియు C అనే ముగ్గురు విద్యార్థులు వరుసగా 153, 245 మరియు 102 ఓట్లను పొందిరి. గెలిచిన విద్యార్థి పొందిన ఓట్ల శాతము ____________.

(A) 48% (B) 49% (C) 50% (D) 45%

13. 10000 లో 25% లో 15% = ____________.

(A) 375 (B) 400 (C) 425 (D) 475

14. ఒక సంఖ్య యొక్క 60% నుండి 60 తీసివేసినచో 60 లభించిన ఆ సంఖ్య

(A) 60 (B) 100 (C) 150 (D) 200

15. 48 లో 48% = x లో 64%, అయితే x =

(A) 64 (B) 56 (C) 42 (D) 36

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 125 31-07-2020 13:05:33

4.3 లాభము మరియు నష్టము, రుసుము, అధనపు ఖర్చులు మరియు GST

4.3.1 లాభము మరియు నష్టము:

ప్రయత్నించుము

1. ఒక వస్తువుయొక్క అమ్మకపుధర దాని కొన్నధర కన్న తక్కువ అయిన ________ లభించును.
2. ఒక వస్తువును ₹5000కు కొని ₹4850కు అమ్మిన లాభమా లేదా నష్టమా? ఎంత శాతము?
3. ఒక వస్తువుయొక్క కొన్నధర మరియు అమ్మినధరల నిష్పత్తి 5:7 అయిన లాభశాతము________

కొన్న ధర (C.P)

ఒక వస్తువును కొనుటకు చెల్లించిన మొత్తమును **కొన్నధర** (C.P) అంటారు

అమ్మకపు ధర (S.P)

ఒక వస్తువును అమ్మి పొందిన మొత్తమును **అమ్మకపు ధర** (*S.P*) అంటారు.

లాభము

అమ్మిన ధర, కొన్న ధర కన్నా ఎక్కువైనచో **లాభము** వచ్చును.

లాభము = అమ్మిన ధర – కొన్న ధర (*S.P – C.P*)

నష్టము

అమ్మిన ధర, కొన్న ధర కన్నా తక్కువైనచో **నష్టము** వచ్చును.

నష్టము = కొన్న ధర – అమ్మిన ధర (*C.P – S.P*)

లాభము లేదా నష్టములను ఎల్లప్పుడూ కొన్న ధర ఆధారంగా గణిస్తారు.

సూత్రాలు:

(i) లాభ శాతము $= \left(\frac{\text{లాభము}}{\text{కొన్నధర}} \times 100\right)\%$

(ii) నష్ట శాతము $= \left(\frac{\text{నష్టము}}{\text{కొన్నధర}} \times 100\right)\%$

(iii) అమ్మినధర $= \frac{(100 + \text{లాభము}\%)}{100} \times$ కొన్న ధర (లేదా) కొన్న ధర $= \left(\frac{100}{100 + \text{లాభము}\%}\right) \times$ అమ్మిన ధర

(iv) అమ్మిన ధర $= \frac{(100 - \text{నష్టము}\,\%)}{100} \times$ కొన్న ధర (లేదా) కొన్న ధర $= \frac{100}{(100 - \text{నష్టము}\%)} \times$ అమ్మిన ధర

4.3.2 రుసుము (Discount):

దుకాణాదారులు వారి యొక్క అమ్మకమును ధరను పెంచుటకు గాను ఆడి నెల మరియు పండుగ సమయాలలో వస్తువుపై గుర్తించిన ధర నుండి కొంత శాతమును తగ్గిస్తారు. ఈ తగ్గింపును **'రుసుము' (ముదరా)** అంటారు.

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 126 31-07-2020 13:05:34

గుర్తింపు ధర (Marked price)

పెద్ద దుకాణాలలో మరియు డిపార్ట్‌మెంటల్ స్టోర్‌లలో ప్రతి వస్తువుపై ధర గుర్తించబడి ఉండును. ఈ విధంగా గుర్తించబడిన ధరనే **'గుర్తింపు ధర'** అంటారు.

ఈ గుర్తింపు ధర ఆధారంగా దుకాణాదారుడు రుసుమును ప్రకటిస్తాడు. గుర్తింపు ధర నుండి రుసుమును తగ్గించి కొనుగోలుదారుడు చెల్లించు ధరను **అమ్మకపు ధర** అంటారు.

అమ్మిన ధర = గుర్తింపు ధర – రుసుము

4.3.3 అధికవ్యయము (Overhead Expenses):

దుకాణాదారులు, వ్యాపారస్తులు మరియు చిల్లర వర్తకులు కొన్ని యంత్ర పరికరాలు, గృహోపకరణాలు, ఏలక్ట్రానిక్ వస్తువులు మొదలగు వాటిని కొను సమయంలో వాటిపై మరమ్మత్తులకు, రవాణాకు మరియు కార్మికులకు అదనంగా ఖర్చు చేస్తారు. ఈ ఖర్చులనే అధికవ్యయము అంటారు. ఈ అధికవ్యయములు కొన్న ధరలో చేర్చబడుతాయి.

∴ మొత్తం కొనుగోలు ధర = కొన్నధర + అధికవ్యయములు

$$\text{రుసుము } \% = \frac{\text{రుసుము}}{\text{గుర్తింపు ధర}} \times 100\%$$

4.3.4 వస్తువు మరియు సేవల పన్ను (GST):

వస్తువు మరియు సేవల పన్ను అనునది మన భారతదేశంలో ఇంచుమించు అన్ని రకాల వస్తువులు మరియు దేశీయ వినియోగ సేవల మీద విధించబడు సాధారణ పన్ను విధానము. (GST) ను వినియోగదారుడు మరియు వర్తకుల నుంచి వసూలు చేయబడును. మరియు ఈ పన్ను ప్రభుత్వమునకు ఒక ఆదాయ వనరు. మూడు రకములైన (GST) కలదు. అవి: కేంద్ర GST (CGST), రాష్ట్ర GST (SGST) మరియు సమగ్ర GST (IGST). కేంద్రపాలిత ప్రాంతములకు UTGST కలదు.

GST ను కేంద్రము మరియు రాష్ట్రములు సమానంగా పంచుకొంటాయి. GST నుంచి గ్రుడ్లు, తేనె, పాలు, ఉప్పు మొదలగు చాలా రకాల ఉత్పత్తులను మినహాయించారు. పెట్రోల్, డీసెల్ మొదలగు ఉత్పత్తులు GST విధానంలోకి రావు. మరియు వాటికి వేరుగా పన్ను విధిస్తారు. GST కౌన్సిల్ దాదాపుగా 1300 వస్తువులు మరియు 500 రకాల సేవలను 5%, 12%, 18% మరియు 28% అను నాలుగు రకాల పన్ను శ్లాబులో ఉంచారు.

ఉదాహరణ: 4.6

రంజిత్ ₹16150 కు వాషింగ్ మిషన్‌ను కొని ₹1350 రవాణాకు ఖర్చు చేశాడు. తరువాత ₹19250 లకు అమ్మాడు. లాభము లేదా నష్ట శాతమును కనుగొనుము.

సాధన:

వాషింగ్ మిషన్ మొత్తపు కొన్న ధర = కొన్న ధర + అదనపు ఖర్చు

= 16150 + 1350 = ₹17500

అమ్మిన ధర = ₹19250

కావున, అమ్మిన ధర > కొన్న ధర (S.P > C.P.)

$$\text{లాభశాతము} = \left(\frac{\text{లాభము}}{\text{కొన్న ధర}}\times 100\right)\% = \left(\frac{19250-17500}{17500}\times 100\right)\%$$

$$= \frac{1750}{17500}\times 100 = 10\%$$

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 127 31-07-2020 13:05:35

ఉదాహరణ: 4.7

ఒక LED TV అమ్మకపు ధర దాని యొక్క కొన్న ధరలో $\frac{5}{4}$ వంతుకు సమానము. అయితే, లాభశాతమును కనుగొనుము.

సాధన:

LED TV కొన్న ధర ₹ x అనుకొందాం.

$$\therefore \text{ అమ్మిన ధర } = \frac{5}{4}x$$

$$\text{లాభము } = \text{ అమ్మిన ధర } - \text{ కొన్న ధర } = \frac{5}{4}x - x = \frac{x}{4}$$

$$\therefore \text{ లాభము } \% = \left(\frac{\text{లాభము}}{\text{కొన్నధర}} \times 100\right)\%$$

$$= \left(\frac{x/4}{x} \times 100\right)\% = \left(\frac{1}{4} \times 100\right)\% = 25\%$$

ఉదాహరణ: 4.8

16 పెట్టెల స్ట్రాబెర్రి కొన్న ధర 20 పెట్టెల అమ్మకపు ధరకు సమానము. లాభము లేదా నష్టమును కనుగొనుము.

సాధన:

ఒక పెట్టె స్ట్రాబెర్రి కొన్న ధర ₹ x అనుకొందాం.

20 పెట్టెల స్ట్రాబెర్రి కొన్న ధర = $20x$ మరియు

20 పెట్టెల స్ట్రాబెర్రి అమ్మిన ధర = 16 పెట్టెల స్ట్రాబెర్రి కొన్న ధర = $16x$

అమ్మిన ధర < కొన్న ధర, కావున నష్టము వచ్చును.

నష్టము = కొన్న ధర − అమ్మిన ధర $= 20x - 16x = 4x$

$$\therefore \text{ నష్ట శాతము } = \left(\frac{\text{నష్టము}}{\text{కొన్నధర}} \times 100\right)\%$$

$$= \left(\frac{4x}{20x} \times 100\right)\%$$

$$\therefore \text{ నష్ట శాతము } = 20\ \%$$

మీకు తెలుసా?

x వస్తువుల కొన్న ధర = y వస్తువుల అమ్మిన ధర, అయితే లాభము % = $\left(\frac{x-y}{y} \times 100\right)\%$ సమాధానము ఋణాత్మకము అయితే దానిని నష్టముగా పరిగణించాలి. (ఈ సూత్రమును ఉదాహరణ 4.8కి ఉపయోగించుము మరియు సమాధానమును సరిచూడుము).

ఉదాహరణ: 4.9

దుకాణాదారుడు సైకిల్‌ను ₹4275 లకు అమ్మగా 5% నష్టము వచ్చినది. 5% లాభమును పొందుటకు సైకిల్‌ను అమ్మవలసిన ధరను కనుగొనుము.

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 128 31-07-2020 13:05:40

సాధన:

సైకిల్ అమ్మకపు ధర $= ₹4275$

నష్టము $= 5\%$

$\therefore$ కొన్న ధర $= \frac{100}{(100 - \text{నష్టము}\%)} \times$ అమ్మిన ధర

$= \frac{100}{95} \times 4275 = ₹4500$

కొన్న ధర $= ₹4500$ మరియు కావాలసిన లాభము $= 5\%$

$\therefore$ కావాలసిన అమ్మకపు ధర $= \frac{100 + gain\%}{100} \times$ కొన్న ధర

$= \frac{100+5}{100} \times 4500 = 105 \times 45 = ₹4725$

కావున కావాలసిన అమ్మకపు ధర ₹4725.

ఉదాహరణ: 4.10

ఒక దుకాణాదారుడు తన యొక్క అమ్మకమును పెంచుటకు శీతాకాలంలో రైన్‌కోట్ ధరను ₹1060 నుండి ₹901 కు తగ్గించెను. అతనిచ్చిన రుసుము రేటును కనుగొనుము.

సాధన:

ఇవ్వబడిన రుసుము = గుర్తింపు ధర − అమ్మకపు ధర

$= 1060 - 901$

$= ₹159$

$\therefore$ రుసుము % $= \left(\frac{159}{1060} \times 100\right)$

$= 15\%$

ఆలోచించుము

ఒక దుకాణాదారుడు మార్కర్ బోర్డు ధరను కొన్న ధర కంటే 15% ఎక్కువగా గుర్తించాడు. మరియు రుసుము గుర్తింపు ధరలో 15% ప్రకటించెను. ఈ లావాదేవిలో అతనికి లాభము లేదా నష్టము వచ్చునా?

ఉదాహరణ: 4.11

ఒక వస్తువుపై ఇచ్చు 25% మరియు 20% వరుస రుసుములకు సమానమగు ఒకే ఒక రుసుమును కనుగొనుము.

సాధన:

ఒక వస్తువు గుర్తింపు ధర ₹100 అనుకొందాం.

మొదటి రుసుము 25% $= 100 \times \frac{25}{100} = ₹25.$

$\therefore$ మొదటి రుసుము తరువాత ధర $= 100 - 25 = ₹75.$

రెండవ రుసుము 20% $= 75 \times \frac{20}{100} = ₹15.$

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 129 31-07-2020 13:05:45

$\therefore$ రెండవ రుసుము తరువాత ధర $= 75 - 15 =$ ₹60.

ఫలిత అమ్మకపు ధర $=$ ₹60.

$\therefore$ రెండు వరుస రుసుములకు సమానమగు ఒకే ఒక రుసుము $= (100\text{-}60)\% = 40\%$.

గమనిక

a % మరియు b % అను రెండు వరుస రుసుములిచ్చినప్పుడు,

కొన్న ధర $= \left(1-\dfrac{a}{100}\right)\left(1-\dfrac{b}{100}\right)\times$ గుర్తింపు ధర

a %, b % మరియు c % అను మూడు వరుస రుసుములకు సమానమగు

ఒక రుసుము శాతము $= \left\{1-\left(1-\dfrac{a}{100}\right)\left(1-\dfrac{b}{100}\right)\left(1-\dfrac{c}{100}\right)\right\}\times 100\%$

(ఈ సూత్రమును ఉదాహరణ 4.11 కు ఉపయోగించుము మరియు సమాధానమును సరిచూడుము).

ఉదాహరణ: 4.12

ఒక వర్తకుడు వాటర్ హీటరును 18% GST తో కలిపి ₹10502 కు అమ్మెను. మరియు 11% లాభమును పొందెను. వాటర్ హీటర్ యొక్క గుర్తింపు ధరను, లాభమును మరియు GST ను కనుగొనుము.

సాధన:

గుర్తింపు ధరను ₹ x అనుకొందాం.

$$x+\frac{18x}{100} = 10502$$

$$\frac{118x}{100} = 10502$$

$\therefore$ గుర్తింపు ధర, x $=$ ₹8900.

18% GST $=$ ₹10502 – ₹8900 $=$ ₹1602 (or)

$= 8900 \times \dfrac{18}{100} =$ ₹1602

ఉదాహరణ: 4.13

ఒక కుటుంబము ఒక హోటల్‌లో ఆహారమునకు ₹350 వెచ్చించారు. మరియు అదనంగా 5% GST చెల్లించారు. CGST మరియు SGST ను లెక్కించుము.

సాధన:

ఆహారమునకు వెచ్చించినది $=$ ₹350

5% GST ను సమానంగా విభజిస్తే కేంద్ర మరియు రాష్ట్ర ప్రభుత్వాలకు 2.5% చొప్పున చెల్లిస్తారు.

$\therefore$ CGST $=$ SGST $= 350 \times \dfrac{2.5}{100} =$ ₹8.75

అభ్యాసము 4.2

1. క్రింది ఖాళీలను పూరించుము.

(i) లాభము లేదా నష్ట శాతమును ప్రతిసారి ________ మీద లెక్కిస్తారు.

(ii) ఒక మొబైల్ ఫోనును 20% లాభముతో ₹8400 కు అమ్మెను. అయితే మొబైల్‌ఫోను కొన్నధర ________.

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 130 31-07-2020 13:05:49

(iii) ఒక వస్తువును $7\frac{1}{2}\%$ నష్టముతో ₹555 లకు అమ్మెను. ఆ వస్తువు కొన్నధర ________

(iv) ఒక మిక్సర్ గ్రైండర్‌ను ₹4500 గుర్తించి, రుసుముతో ₹4140 లకు అమ్మెను.
రుసుము రేటు ________

(v) 5% GST తో ₹575 ధర కలిగిన షర్ట్ మరియు ₹325 ధర కలిగిన T-షర్ట్‌ల బిల్లు మొత్తము ________

2. ఒక వస్తువును 820 అమ్మగా 10% నష్టము వచ్చినది. కొన్నధరను కనుగొనుము.

3. ఒక వస్తువును ₹810 కు అమ్మగావచ్చు లాభము మరియు ఆ వస్తువును ₹530 కు అమ్మగా వచ్చు నష్టము సమానమైనప్పుడు ఆ వస్తువు కొన్నధరను కనుగొనుము.

4. 10 కొలబద్దల అమ్మినధర, 15 కొలబద్దల కొన్న ధరకు సమానమయితే లాభశాతము కనుగొనుము.

5. కొన్ని వస్తువులను ₹15 కు 2 చొప్పున కొని వానిని ₹25 కు 3 చొప్పున అమ్మబడినది. లాభశాతమును కనుగొనుము..

6. ఒక వ్యక్తి ఒక స్పీకరును ₹768 లకు అమ్మితే 20% నష్టము వచ్చును. 20% లాభము పొందుటకు ఆ స్పీకరును అమ్మవలసిన ధరను కనుగొనుము.

7. x, y, z లను కనుగొనుము.

వ.సం	వస్తువు	గుర్తింపు ధర	అమ్మిన ధర	రుసుము
(i)	పుస్తకము	₹225	x	8%
(ii)	LED TV	y	₹11970	5%
(iii)	డిజిటల్ గడియారము	₹750	₹615	z

8. క్రింద ఇచ్చిన దత్తాంశమునకు మొత్తము బిల్లును కనుగొనుము.

వ.సం	వస్తువు	గుర్తింపు ధర	రుసుము	GST
(i)	స్కూలు బ్యాగ్	₹500	5%	12%
(ii)	హేర్‌డ్రయిర్	₹2000	10%	28%

9. ఒక బ్రాండెడ్ AC గుర్తింపు ధర ₹38000. వినియోగదారునికి రెండు అవకాశములు ఇవ్వబడినది.

(i) ₹38000 అమ్మకపు ధరతో బాటు ₹3000 విలువ గల ఆకర్షణీయ బహుమతులు లేదా

(ii) ఉచిత బహుమతి లేకుండా 8% రుసుము

ఈ రెండింటిలో ఏది లాభదాయకమైన అవకాశము?

10. ఒక పరుపు గుర్తింపు ధర ₹7500 మరియు 10% మరియు 20% రెండు వరుస రుసుములు ఇవ్వబడినవి. వినియోగదారుడు చెల్లించవలసిన మొత్తమును కనుగొనుము.

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 131 31-07-2020 13:05:50

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

11. ఒక పండ్ల విక్రయదారుడు పండ్లను ₹200 అమ్మగా ₹40 లాభము పొందెను. అతని లాభశాతము

(A) 20% (B) 22% (C) 25% (D) $16\frac{2}{3}$ %

12. ఒక స్త్రీ పూలకుండీని ₹528 అమ్మి 20% లాభము పొందెను. 25% లాభము పొందుటకు అమ్మవలసిన ధర

(A) ₹500 (B) ₹550 (C) ₹553 (D) ₹573

13. ఒక వ్యక్తి ఒక వస్తువును ₹150 కొనెను మరియు కొన్న ధరలో 12% అదనపు ఖర్చు చేసెను. 5% లాభము పొందుటకు అమ్మవలసిన ధరను కనుగొనుము.

(A) ₹180 (B) ₹168 (C) ₹176.40 (D) ₹85

14. ఒక టోపి ధర ₹210, 16% రుసుముతో కొన్నట్లైతే గుర్తింపు ధరను కనుగొనుము.

(A) ₹243 (B) ₹176 (C) ₹230 (D) ₹250

15. 20% మరియు 25% వరుస రుసుములకు సమానమగు ఒకే ఒక రుసుము.

(A) 40% (B) 45% (C) 5% (D) 22.5%

4.4 చక్రవడ్డీ (Compound Interest)

ఈ విశ్వంలో అతి శక్తివంతమైన బలము ________. ఈ సామెతను నీవు ఎలా పూర్తిచేస్తావు? ప్రపంచ ప్రఖ్యాతిగాంచిన భౌతికశాస్త్రవేత్త ఆల్బర్ట్ ఐన్‌స్టీన్ ఈ సామెతను చక్రవడ్డీ అను పదముతో పూర్తిచేసారు.

చక్రవడ్డీ.

డబ్బును అప్పుగా లేదా సాధారణవడ్డీకి ($I = \frac{PNR}{100}$) డిపాజిట్ చేసిన, వడ్డీను ఒకేవిధంగా అసలుపై లోను (loan) లేదా డిపాజిట్ కాలం అంతా లెక్కిస్తారు.

ప్రయత్నించుము

1. ఇచ్చిన అసలుకు బారువడ్డీను కనుగొనుటకు సూత్రము___________.
2. ₹900 కు 8% p.a. చొప్పున 73రోజులకు అగు బారువడ్డీను కనుగొనుము.
3. ఎన్ని సంవత్సరములలో .₹2000 10% p.a. చొప్పున ₹3600 అగును?

తపాలా కార్యాలయములలో, బ్యాంకులలో, ఇన్సూరన్స్ కంపెనీలు మరియు ఆర్థికపరమైన సంస్థలలో మరొక విధానమున వడ్డీని లెక్కిస్తారు. ఇచ్చట. మొదటి కాల వ్యవధిలో (6 నెలలు తీసుకొనిన) లెక్కించిన వడ్డీని అసలుతో కలిపి తరువాత కాలవ్యవధికి (తరువాత 6 నెలలు) అసలుగా పరిగణిస్తారు. ఈ ప్రక్రియను ఋణదాతకు మరియు గ్రహీతకు మధ్య ఒప్పందము చేసుకొన్న కాలమంతా లెక్కిస్తారు.

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 132 31-07-2020 13:05:52

నిర్ధేశించిన కాలం తరువాత మొత్తమును మరియు ఋణంగా తీసుకొన్న లేదా డిపాజిట్ చేసిన నగదుకు గల భేదమును చక్రవడ్డీ అంటారు. దీనిని సంక్షిప్తంగా C.I. అని సూచిస్తారు. చక్రవడ్డీ, బారువడ్డీ కన్నా ఎక్కువగా ఉంటుంది. ఎందుకనగా అసలు ప్రతి కాలవ్యవధికి మారుతూ ఉంటుంది.

వడ్డీని, అసలుకు కలిపే కాలవ్యవధిని మార్పిడికాలం (conversion period) అంటారు. ఉదాహరణకు మార్పిడి కాలం త్రైమాసికం (quarterly) అనగా సంవత్సరమునకు నాలుగు సార్లు వడ్డీని అసలుతో కలుపుతారు. ఈ సందర్భములో సంవత్సర వడ్డీరేటును 1/4 వంతు చేస్తారు. మరియు ఋణకాలమునకు నాలుగురెట్లు సార్లు వడ్డీని అసలుతో కలుపుతారు.

బారువడ్డీలో పూర్తి కాలవ్యవధికి అసలు మారదు. కాని చక్రవడ్డీలో మార్పిడికాలం ఆధారంగా అసలు మారుతూ ఉంటుంది. మొదటి మార్పిడి కాలమునకు సాధారణ వడ్డీ మరియు చక్రవడ్డీ సమానము.

విశ్లేషణ 1

₹20000 పై సంవత్సరమునకు 10% వడ్డీ చొప్పున సంవత్సరమునకు వడ్డీ లెక్కించునపుడు 4 సం॥లకు వచ్చు చక్రవడ్డీని లెక్కించుము. మరియు ఈ చక్రవడ్డీని బారువడ్డీ(సరళవడ్డీ)తో పోల్చుము.

చక్రవడ్డీ గణన

మొదటి సంవత్సరమునకు అసలు = ₹20000

మొదటి సంవత్సరమునకు వడ్డీ $\left(\frac{20000\times10\times1}{100}\right)$ = ₹2000

మొదటి సంవత్సరమునకు మొత్తము (P+I) = ₹22000

రెండవ సంవత్సరమునకు అసలు = ₹22000

రెండవ సంవత్సరమునకు వడ్డీ $\left(\frac{22000\times10\times1}{100}\right)$ = ₹2200

రెండవ సంవత్సరమునకు మొత్తము = ₹24200

మూడవ సంవత్సరమునకు అసలు = ₹24200

మూడవ సంవత్సరమునకు వడ్డీ $\left(\frac{24200\times10\times1}{100}\right)$ = ₹2420

మూడవ సంవత్సరమునకు మొత్తము = ₹26620

ఇది నాల్గవ సంవత్సరమునకు అసలు = ₹26620

నాల్గవ సంవత్సరమునకు వడ్డీ $\left(\frac{26620\times10\times1}{100}\right)$ = ₹2662

∴ నాల్గవ సంవత్సరమునకు మొత్తము = ₹29282

∴ నాలుగు సంవత్సరాలకు చక్రవడ్డీ = A – P = 29282 – 20000

= ₹9282

బారువడ్డీ గణన

పునశ్చరణ,

బారువడ్డీ, $I = \frac{PNR}{100}$

ఇచ్చుట, P = ₹20000

N = 4 సం॥లకు

R = 10%

$\therefore I = \frac{20000\times4\times10}{100}$

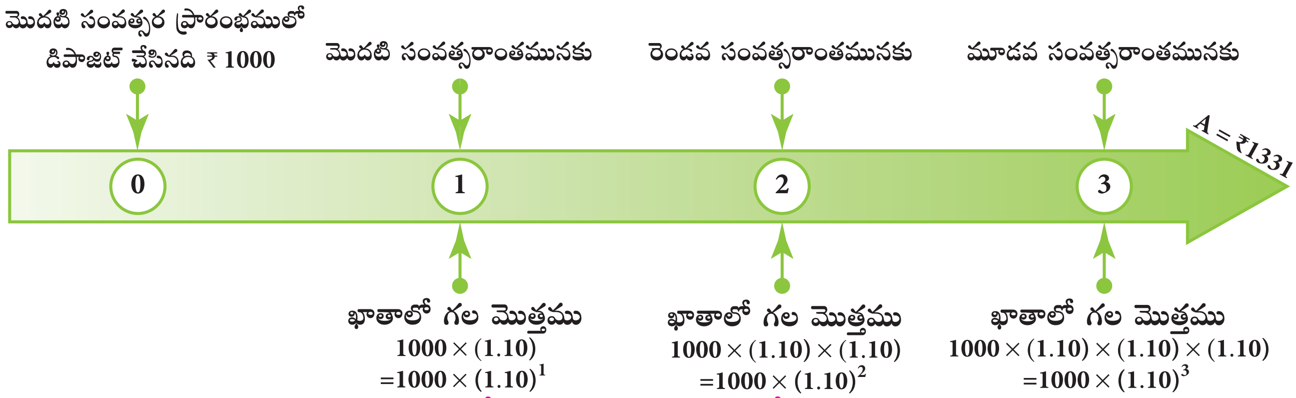
కావున, I = ₹ 8000

పై గణనను పరిశీలించినట్లైతే C.I గణన అనునది 1.1తో పునరావృత గుణకారము 20000 (×1.1), 22000 (×1.1), 24200 (×1.1), 26620 (×1.1) లాగా 4 సంవత్సరములకు గణించుట, చక్రవడ్డీ (₹9282) చాలా వేగముగా పెరుగునని మరియు సాధారణ వడ్డీ కన్నా (₹8000) ఎక్కువని మనము గమనించగలము. పై పద్ధతిని పాటించినట్లయితే సమయం ఎక్కువ అవుతుంది. కావున మొత్తమును మరియు చక్రవడ్డీని సులభముగా గణించుటకు సూత్రము గలదు.

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 133 31-07-2020 13:05:55

విశ్లేషణ 2

₹1000 కు 10% సంవత్సర వడ్డీ చొప్పున సంవత్సరమునకు వడ్డీ లెక్కించేటప్పుడు 3 సంవత్సరములకు మొత్తమును మరియు చక్రవడ్డీని గణించుము.



ఈ ఫ్లోచార్ట్ 10% వడ్డీ చొప్పున సంవత్సరమునకు చక్రీయమగుటను సూచిస్తున్నది.

ఈ క్రమము,మొదటి సంవత్సరమునకు మొత్తము$P\left(1+\frac{r}{100}\right)$రెండవ సంవత్సరమునకు $P\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)$, మూడవ సంవత్సరమునకు $P\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)\left(1+\frac{r}{100}\right)$ ఇలాగే కొనసాగును.

సాధారణంగా n సంవత్సరములకు $A=P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$, ఇచ్చట $A=1000\left(1+\frac{10}{100}\right)^3$ =₹1331. కావున చక్రవడ్డీ C.I = ₹331.

మీకు తెలుసా?

1626లో పీటర్‌మిన్యూట్ నాపింగర్ ఇండియన్లను 24 డాలర్లకు మన్‌హాటన్ ద్వీపమును తనకు అమ్మేటట్లు ఒప్పించాడు. స్థానిక అమెరికావారు 24 డాలర్లను బ్యాంకు ఖాతాలో 5% వడ్డీరేటున నెలకొకసారి చక్రీయమగునట్లు పొదుపు చేసినట్లైతే 2020 సంవత్సరమునకు వారి ఖాతాలో 5.5 బిలియన్లు (550 కోట్లు) డాలర్లుకు పైగా ఉంటుంది. ఇది చక్రవడ్డీ యొక్క శక్తి.

క్రింద ఇవ్వబడిన సూత్రాలు ఇచ్చిన కాల వ్యవధిలో చక్రవడ్డీని సులభంగా గణించుటకు ఉపయోగపడును.

(i) వడ్డీ సంవత్సరమునకు చక్రీయమగునప్పుడు,

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

A అనునది మొత్తము, P అనునది అసలు, r అనునది సంవత్సరమునకు వడ్డీరేటు మరియు n అనునది సంవత్సరముల సంఖ్య మరియు చక్రవడ్డీ = మొత్తము – అసలు.

(ii) వడ్డీ అర్ధ సంవత్సరమునకు చక్రీయమగునప్పుడు,

$$A = P\left(1+\frac{r}{200}\right)^{2n}$$

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 134 31-07-2020 13:06:02

(iii) వడ్డీ త్రై మాసమునకు చక్రీయమగునప్పుడు,

$$A = P\left(1+\frac{r}{400}\right)^{4n}$$

(iv) వడ్డీ సంవత్సరాంతమునకు చక్రీయమయ్యి కాని వడ్డీరేటు ప్రతి సంవత్సరమునకు మారునపుడు

$$A = P\left(1+\frac{a}{100}\right)\left(1+\frac{b}{100}\right)\left(1+\frac{c}{100}\right)...$$

ఇచ్చట a, b మరియు c అనునది వరుసగా మొదటవ, రెండవ, మూడవ సం॥లకు వడ్డీరేటులు.

(v) వడ్డీని సంవత్సరమునకు చక్రీయమయ్యి, కాలము $a\frac{b}{c}$ సంవత్సరాలు అను భిన్నమైనప్పుడు

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{a}\left(1+\frac{\frac{b}{c}\times r}{100}\right)$$

(గణన యంత్రము (calculator) ను పెద్ద గణనలను చేయుటకు మరియు సమాధానమును సరిచూచుటకు ఉపయోగించుము.)

ఉదాహరణ: 4.14

క్రింద ఇచ్చిన దత్తాంశమునకు చక్రవడ్డీని కనుగొనుము.

(i) అసలు = ₹4000, r = 5% p.a, n = 2 సం॥, వడ్డీ సంవత్సరమునకు చక్రీయమగును.

(ii) అసలు = ₹5000, r = 4% p.a, n = $1\frac{1}{2}$ సం॥, వడ్డీ అర్ధ సంవత్సరమునకు చక్రీయమగును.

(iii) అసలు = ₹30000, మొదటి సం॥కు r = 7%, రెండవ సం॥కు r = 8% వడ్డీ సంవత్సరమునకు చక్రీయమగును.

(iv) అసలు = ₹10000, r = 8% p.a, n = $2\frac{3}{4}$ సం॥, వడ్డీ సంవత్సరమునకు చక్రీయమగును.

సాధన:

(i) మొత్తము, $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}$

$$= 4000\left(1+\frac{5}{100}\right)^{2}$$

$$= 4000\times\frac{21}{20}\times\frac{21}{20}$$

$$A = ₹4410$$

$$\therefore C.I = A - P = 4410 - 4000 = ₹410$$

(ii) మొత్తము, $A = P\left(1+\frac{r}{200}\right)^{2n} = 5000\left(1+\frac{4}{200}\right)^{2\times\frac{3}{2}} = 5000\times\frac{51}{50}\times\frac{51}{50}\times\frac{51}{50}$

$$= 51\times 10.2\times 10.2$$

$$= ₹5306.04$$

$$\therefore C.I = A - P = ₹5306.04 - ₹5000$$

$$= ₹306.04$$

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 135 31-07-2020 13:06:10

(iii) మొత్తము, $A = P\left(1+\frac{a}{100}\right)\left(1+\frac{b}{100}\right)$

$= 3000\left(1+\frac{7}{100}\right)\left(1+\frac{8}{100}\right)$

$= 30000 \times \frac{107}{100} \times \frac{108}{100}$

$= ₹34668$

$\therefore$ C.I = A – I =34668-30000 = ₹4668.

(iv) మొత్తము, $A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{a}\left(1+\frac{\frac{b}{c}\times r}{100}\right) = 10000\left(1+\frac{8}{100}\right)^{2}\left(1+\frac{\frac{3}{4}\times 8}{100}\right)$

$= 10000\left(\frac{27}{25}\right)^{2}\left(\frac{53}{50}\right)$

$= 10000 \times \frac{27}{25} \times \frac{27}{25} \times \frac{53}{50}$

A $= ₹12363.84$

$\therefore$ C.I = A – P $= 12363.84 - 10000 = ₹2363.84$

4.4.1 చక్రవడ్డీ సూత్ర అనువర్తనములు

చక్రవడ్డీ సూత్రమును క్రింది సందర్భాలలో ఉపయోగిస్తారు.

(i) జనాభా పెరుగుదల $\left[P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}\right]$ లేదా తగ్గుదల $\left[P\left(1-\frac{r}{100}\right)^{n}\right]$ను కనుగొనుట.

(ii) కణ వృద్ధిరేటు ఇచ్చినప్పుడు కణాల వృద్ధిని కనుగొనుట.

(iii) యంత్రాలు, వాహనాలు, ఉపకరణాలు మొదలగువాని తరుగుదలను కనుగొనుట.

ఉదాహరణ: 4.15

రెండు సంవత్సరాల క్రితం ఒక మోటారు సైకిల్ ధర ₹70000 ధర 4% p.a. చొప్పున క్షీణించిన ప్రస్తుత ధరను కనుగొనుము.

సాధన:

ప్రస్తుత ధర $= P\left(1-\frac{r}{100}\right)^{n}$

$= 70000\left(1-\frac{4}{100}\right)^{2}$

$= 70000 \times \frac{96}{100} \times \frac{96}{100}$

$= ₹64512$

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 136 31-07-2020 13:06:16

ఉదాహరణ: 4.16

ఒక కల్చర్‌లో బాక్టీరియా మొదటి గంటకు 5% వృద్ధి, రెండవ గంటకు 8% క్షీణించి, మూడవ గంటకు 10% వృద్ధి చెందును. ప్రారంభంలో బాక్టీరియాల సంఖ్య 10000 అయిన మూడు గంటల అనంతరం బాక్టీరియాల సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన:

మూడు గంటల అనంతరము బాక్టీరియాల సంఖ్య

$$A = P\left(1+\frac{a}{100}\right)\left(1-\frac{b}{100}\right)\left(1+\frac{c}{100}\right) \text{ (క్షీణతకు '–')}$$

$$= 10000\left(1+\frac{5}{100}\right)\left(1-\frac{8}{100}\right)\left(1+\frac{10}{100}\right)$$

$$= 10000 \times \frac{105}{100} \times \frac{92}{100} \times \frac{110}{100}$$

$$A = ₹10626$$

ఉదాహరణ: 4.17

ఒక నగర జనాభా 6% సంవత్సరమునకు చొప్పున వృద్ధిచెందును. 2018 లో జనాభా 238765 అయితే 2016 మరియు 2020 లో జనాభాను కనుగొనుము.

సాధన:

2016లో జనాభా 'P' అనుకొందాము.

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

$$\Rightarrow 238765 = P\left(1+\frac{6}{100}\right)^2 = P\left(\frac{53}{50}\right)^2$$

$$\Rightarrow P = 238765 \times \frac{50}{53} \times \frac{50}{53}$$

$$\therefore P = 212500$$

2020లో జనాభా 'A' అనుకొందాము.

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

$$\therefore A = 238765\left(1+\frac{6}{100}\right)^2$$

$$= 238765 \times \frac{53}{50} \times \frac{53}{50}$$

$$= 95.506 \times 53 \times 53$$

$$A = 268276$$

∴ 2016లో జనాభా 212500 మరియు 2020 లో జనాభా 268276.

4.4.2 బారువడ్డీ (S.I) మరియు చక్రవడ్డీ (C.I) ల మధ్య వ్యత్యాసము

- మొదటి కాలవ్యవధిలో S.I మరియు C.I ల మధ్య తేడా లేదు.
- 2 సంవత్సరములకు S.I మరియు C.I ల మధ్య వ్యత్యాసము

$$C.I - S.I = P\left(\frac{r}{100}\right)^2$$

- 3 సంవత్సరములకు S.I మరియు C.I ల మధ్య వ్యత్యాసము

$$C.I - S.I = P\left(\frac{r}{100}\right)^2\left(3+\frac{r}{100}\right)$$

ఉదాహరణ: 4.18

C.I మరియు S.I ల మధ్య వ్యత్యాసమును కనుగొనుము.

(i) P = ₹5000, r = 4% సం॥నకు, n = 2 సంవత్సరాలు.

(ii) P = ₹8000, r = 5% సం॥నకు, n = 3 సంవత్సరాలు.

సాధన:

(i) $$C.I - S.I = P\left(\frac{r}{100}\right)^2 = 5000 \times \frac{4}{100} \times \frac{4}{100} = ₹8$$

(ii) $$C.I - S.I = P\left(\frac{r}{100}\right)^2\left(2+\frac{r}{100}\right)$$

$$= 8000 \times \frac{5}{100} \times \frac{5}{100} \times \left(3+\frac{5}{100}\right)$$

$$= 20 \times \frac{61}{20} = ₹61$$

అభ్యాసము 4.3

1. ఖాళీలను పూరించుము.

(i) ₹5000 లకు సం॥నకు 12% చొప్పున వడ్డీ చక్రీయమైన 2 సం॥లకు లభించు చక్రవడ్డీ ______________

(ii) ₹8000 లకు సం॥నకు 10% చొప్పున వడ్డీ అర్ధ సంవత్సరమునకు చక్రీయమయిన ఒక సంవత్సరమునకు వచ్చు చక్రవడ్డీ ______________

(iii) ఒక నగర జనాభా సంవత్సర వృద్ధి రేటు 10%. ఆ నగర ప్రస్తుత జనాభా 26620. మూడు సంవత్సరాల క్రితం జనాభా ______________

(iv) చక్రవడ్డీను త్రైమాసికమునకు లెక్కించునపుడు, మొత్తమును కనుగొను సూత్రము ______________

(v) అసలు ₹5000 లకు 8% వడ్డీరేటయిన 2 సంవత్సరములకు S.I మరియు C.I ల మధ్య వ్యత్యాసము ______________

2. సత్యమా లేదా అసత్యమా తెల్పుము.

(i) $P\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$ సూత్రముతో క్షీణత విలువను గణిస్తారు.

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 138 31-07-2020 13:06:27

(ii) ఒక మహానగర ప్రస్తుత జనాభా P మరియు సం॥నకు $r\%$ చొప్పున వృద్ధిచెందిన, n సంవత్సరాల క్రితం జనాభా $P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$.

(iii) ఒక యంత్రము యొక్క ప్రస్తుత ధర ₹16800, సం॥నకు 25% చొప్పున దీని విలువ క్షీణించును. 2 సంవత్సరాల తరువాత దాని విలువ ₹9450.

(iv) ₹1000 పై సం॥నకు 20% చొప్పున వడ్డీ సంవత్సరమునకు చక్రీయమయిన ₹1331 కావడానికి తీసుకొను సమయము 3 సంవత్సరములు.

(v) ₹16000 లకు సం॥నకు 20% చొప్పున, వడ్డీ త్రై మాసమునకు చక్రీయమయిన 9 నెలలకు లభించు వడ్డీ ₹2522.

3. ₹3200 లకు వడ్డీ సం॥నకు 2.5% చొప్పున సంవత్సరమునకు చక్రీయమయిన 2 సం॥లకు చక్రవడ్డీని కనుగొనుము.

4. ₹4000 లకు వడ్డీ సం॥నకు 10% చొప్పున సంవత్సరమునకు చక్రీయమయిన $2\frac{1}{2}$ సం॥లకు చక్రవడ్డీని కనుగొనుము.

5. కొంత నగదు సం॥నకు 4% చక్రవడ్డీ చొప్పున 2 సంవత్సరములకు ₹2028 అయినది. ఆ నగదును కనుగొనుము.

6. ఎన్ని సం॥లకు ₹3375, వడ్డీ సం॥నకు $13\frac{1}{3}$ % చొప్పున అర్ధ సంవత్సరమునకు చక్రీయమయ్యి ₹4096 అగును.

7. ₹15000 లకు 15%, 20% మరియు 25% వరుసగా I, II మరియు III సంవత్సరములకు వడ్డీరేటు చొప్పున చక్రవడ్డీని కనుగొనుము.

8. ₹5000 కు వడ్డీ సం॥నకు 2% చొప్పున అర్ధసంవత్సరమునకు చక్రీయమైనచో ఒక సంవత్సరమునకు C.I మరియు S.I ల మధ్య వ్యత్యాసమును కనుగొనుము.

9. ₹8000 కు వడ్డీ సంవత్సమునకు చక్రీయమైనచో 2సం॥లకు C.I మరియు S.I ల మధ్య తేడా ₹20. వడ్డీ రేటును కనుగొనుము.

10. వడ్డీ సం॥నకు 15% చొప్పున 3 సం॥లకు C.I మరియు S.I ల మధ్య తేడా ₹1134 అయినచో అసలును కనుగొనుము.

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

11. అసలుపై వడ్డీ ప్రతి రెండు నెలలకు చక్రీయమైన కాల మార్పిడిల సంఖ్య ____________.

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 12

12. ₹4400 సం॥నకు 10% వడ్డీ చొప్పున అర్ధ సంవత్సరమునకు చక్రీయమయ్యి ₹4851 అగుటకు తీసుకొను సమయము ________

(A) 6 నెలలు (B) 1 సం॥ (C) 1 సం॥ (D) 2 సం॥

13. ఒక యంత్రము ధర ₹18000 మరియు దీని ధర సం॥నకు $16\frac{2}{3}\%$ చొప్పున తరుగును. 2 సం॥ తరువాత దీని విలువ ________

(A) ₹12000 (B) ₹12500 (C) ₹15000 (D) ₹16500

14. కొంత నగదు 3 సం॥లకు 10% చొప్పున సంవత్సరమునకు చక్రీయమయ్యి ₹2662 అయితే ఆ నగదు ________

(A) ₹2000 (B) ₹1800 (C) ₹1500 (D) ₹2500

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 139 31-07-2020 13:06:29

15. కొంత నగదుకు 2సం॥లకు వడ్డీ సం॥నకు 2% చొప్పున లభించు సాధారణ మరియు చక్రవడ్డీల వ్యత్యాసము ₹1. ఆ నగదు ________

(A) ₹2000 (B) ₹1500 (C) ₹3000 (D) ₹2500

4.5 మిశ్రమ చలత్వము/ సమ్మేళన చలత్వము (Compound Variation)

సమ్మేళన చలత్వము నేర్చుకోవడానికి ముందు మనము అనులోమ మరియు విలోమానుపాతలను పునశ్చరణ చేసుకొందాము.

రెండు రాశులలో ఒక రాశిలోని పెరుగుదల లేదా తరుగుదలకు అనుగుణంగా మరోక రాశిలో పెరుగుదలలేదా తరుగుదల (ప్రభావం ఒకేవిధంగా) కలిగినట్లయితే అవి అనులోమానుపాతంలో ఉందని లేదా ప్రత్యక్ష చలత్వములో ఉందని అంటారు. మరోకవిధంగా, $y = kx$ అయినప్పుడల్లా x మరియు y లు ప్రత్యక్ష చలత్వములో గలదని అంటారు. ఇక్కడ, k అనునది అనుపాతస్థిరాంకమని అంటారు మరియు $k > 0$, y, x పై ఆధారపడినట్లు ఊహించుకొనిన $k = \frac{y}{x}$.

ఉదాహరణకు, జన్మదినవేడుకలో మీలో ఒకరు తనయొక్క ప్రతి స్నేహితునికి 2కలములు ఇవ్వదలచెను. కలములసంఖ్య అనేది వేడుకలో పాల్గొను తన స్నేహితుల సంఖ్యకు అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది. కదా? క్రిందివ్వబడిన పట్టిక ద్వారా ఈ విషయంను స్పష్టంగా అర్థంచేసుకొనవచ్చును.

స్నేహితుల సంఖ్య (x)	1	2	5	12	15
కలముల సంఖ్య (y)	2	4	10	24	30

ఈ సందర్భములో, అనుపాతస్థిరాంకము , $k = \frac{y}{x} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{10}{5} = \frac{24}{12} = \frac{30}{15} = 2$.

అనులోమానుపాతమునకు ఉదాహరణలు:

1. దూరము – కాలము (స్థిర వేగముతో ఉన్నప్పుడు) : దూరము అధికమైనప్పుడు, చేరుటకు పట్టు కాలము కూడా అధికమగును మరియు విపర్యయము కూడా.
2. కొనుగోలు – ఖర్చు చేయుట : ఒక కుటుంబంలో పండుగ కాలములలో వినియోగాల కొనుగోలు అధికమైన వారి ఖర్చు పరిమితి కూడా అధికమగును మరియు విపర్యయము కూడా
3. పని కాలము : సంపాదన: తక్కువ కాలము పనిచేసిన, సంపాదన కూడా తక్కువగును మరియు విపర్యయము కూడా.

రెండు రాశులలో ఒక రాశిలోని పెరుగుదల లేదా తరుగుదలకు అనుగుణంగా మరోక రాశిలో తరుగుదలలేదా పెరుగుదల (ప్రభావం వ్యతిరేకంగా) కలిగినట్లయితే అవి విలోమానుపాతంలో ఉందని లేదా పరోక్షచలత్వములో ఉందని అంటారు. మరోకవిధంగా, $xy = k$ అయినప్పుడల్లా x మరియు y లు పరోక్ష చలత్వములో గలదని అంటారు. ఇక్కడ, k అనునది అనుపాతస్థిరాంకమని అంటారు మరియు $k > 0$.

ఉదాహరణకు,ఒక పాఠశాలలోని ఒక తరగతికి చెందిన 30 మంది విద్యార్థులు ఆరోగ్య జాగృతి కార్యక్రమానికి ఒక గ్రామవీధులలో క్రమమైన పద్ధతిలో పోవునట్లు ఊహించుకొనుము. వారు నడిచే అడ్డువరుస మరియు నిలువవరుసల సంఖ్య విలోమానుపాతంలో ఉంటుందని తెలుసుకొనవచ్చును. క్రిందివ్వబడిన పట్టిక ద్వారా ఈ విషయంను స్పష్టంగా అర్థంచేసుకొనవచ్చును.

నిలువవరుసలోని విద్యార్థుల సంఖ్య (x)	1	2	3	5	6
అడ్డువరుసలోని విద్యార్థుల సంఖ్య (y)	30	15	10	6	5

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 140 31-07-2020 13:06:30

ఈ విషయమును మనము (5అడ్డు/6నిలువవరుసలు) గా మరియు (6అడ్డు/ 5నిలువవరుసలు) గా మ్యాపు చేయవచ్చును.

ఈ సందర్భములో అనుపాత స్థిరాంకము $k = 30$ అగును.

విలోమానుపాతమునకు ఉదాహరణలు:

1. ధర – వినియోగం: వస్తువుల ధర అధికమైన, దాని వినియోగం సహజముగానే తగ్గును మరియు విపర్యయము కూడా
2. పని వారు – కాలము: ఒక పని పూర్తిచేయుటకు అధిక పనివారిని నియమించిన, ఆ పని పూర్తి అగుటకు పట్టు కాలము తక్కువ అగును మరియు విపర్యయము కూడా.
3. వేగము – కాలము: (ఖచ్చిత దూరము ఇచ్చినప్పుడు) తక్కువ వేగముతో ప్రయానించునపుడు ఇచ్చిన దూరమును పూర్తిచేయుటకు ఎక్కువ కాలము పట్టును మరియు విపర్యయము కూడా.

ఇప్పుడు, అనులోమ మరియు విలోమానుపాతంలను ఉపయొగించి క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానమును ప్రయత్నించుము:

ప్రయత్నించుము

1. క్రింది ఉదాహరణలను, అనులోమానుపాతమా లేక విలోమానుపాతమమా అని వర్గీకరించుము.
   (i) పప్పు దినుసుల బరువు మరియు వాటి ధర.
   (ii) బస్సులో ప్రయాణించు దూరము మరియు టికెట్టు ధర.
   (iii) ఒక నిర్దిష్ట దూరాన్ని పూర్తిచేయడానికి అథ్లెట్ వేగం.
   (iv) నిర్ధిష్ట కాలములో నిర్మాణ పని పూర్తిచేయడానికి కావలసిన పని వారి సంఖ్య.
   (v) వృత్త వైశాల్యము మరియు దాని వ్యాసార్థము.
2. ఒక విద్యార్థి 15నిముషాలలో 21 పేజిలను టైపు చేయగలడు. ఇదేవేగముతో 84 పేజిలు టైపు చేయడానికి ఎంత సమయమును తీసుకొంటాడు?
3. ఒక పనిని 35స్త్రీలు 16 రోజులలో పూర్తి చేయగలరు. ఇదే పనిని 28 స్త్రీలు ఎన్ని రోజులలో పూర్తి చేయగలరు?

మనము ఇప్పుడు సమ్మేళన చలత్వమును నేర్చుకొందామా? రెండు లేదా అంతకన్న ఎక్కువ చలత్వములు కలిసివున్న సమస్యలు గలదు. దీనినే సమ్మేళన చలత్వము అంటారు. రెండు చలత్వములు గల వేర్వేరు సందర్భములు గలవు. అవి:

అనులోమ–అనులోమ, అనులోమ–విలోమ, విలోమ–అనులోమ, విలోమ–విలోమ.

గమనిక

అనులోమానుపాతము లేదా విలోమానుపాతము వర్తించని పరిస్థితులు ఉన్నాయి. ఉదాహరణకు ఒక కంటి ద్వారా ఒక చిలుకను చూడగలిగితే, అతను రెండు కళ్ళ ద్వారా రెండు చిలుకలను చూడగలడని అర్థము కాదు, అలాగే ఒక గారెను వేయించడానికి 5 నిమిషాల సమయం పడితే 20 గారెలను వేయించడానికి 100 నిమిషాలు పడుతుందని దీని అర్థం కాదు.

సమ్మేళన చలత్వము పై కొన్ని సమస్యలను ఇప్పుడు పరిష్కరించుకొందాం. ఇక్కడ, మనకు తెలిసిన పరిమాణాన్ని (రాశిని) తెలియని (x) తో పోలుస్తాము. దీనికి సంబంధించి కొన్ని పద్ధతులు ఆచరణలో ఉన్నాయి. దీని ద్వారా సంయుక్త వైవిధ్యముపై సమస్యలు పరిష్కరించబడతాయి. అవి:

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 141 31-07-2020 13:06:31

4.5.1 నిష్పత్తి పద్ధతి

ఈ పద్ధతిలో, మనము ఇచ్చిన దత్తాంశమును పోల్చి అవి అనులోమానుపాతములో ఉన్నవా! లేదా విలోమానుపాతములో ఉన్నాయో లేదో కనుగొంటాము. వాటి అనుపాతము కనుగొన్న పిదప క్రింది వాస్తవాన్ని ఉపయోగించవచ్చు.

అంత్యముల లబ్దము = మధ్యముల లబ్దము

ద్వారా తెలియని రాశి (x) విలువను పొందగలము.

4.5.2 గుణకార కారణాంక పద్ధతి:

దృష్టాంతం :

పురుషులు	గంటలు	రోజులు
a D x I	c D d	e f I

ఇక్కడ తెలియని పురుషుల సంఖ్య (x) ను, తెలిసిన గంటలు మరియు రోజులతో పోల్చబడుతుంది. పురుషులు మరియు గంటలు అనులోమానుపాతములో (D) ఉంటే, $\frac{d}{c}$ వలే గుణించే కారకాన్ని తీసుకోండి. (విలోమము తీసుకోండి) అలాగే, పురుషులు మరియు రోజులు విలోమానుపాతములో (I) ఉంటే, అప్పుడు కారకాన్ని $\frac{e}{f}$ (మార్పు లేదు) గా తీసుకోండి. ఈ విధంగా, తెలియని విలువ పురుషుల సంఖ్య (x) ను $x = a \times \frac{d}{c} \times \frac{e}{f}$. తో కనుగొనవచ్చును.

4.5.3 సూత్ర పద్ధతి:

ఇచ్చిన సమస్యలోని వివరములను మనుషులు (P) రోజులు (D) గంటలు (H) మరియు పని (W) అని గుర్తించుము. మరియు సూత్రమును ఉపయోగించుము.

$$\frac{P_1 \times D_1 \times H_1}{W_1} = \frac{P_2 \times D_2 \times H_2}{W_2}$$

ఇక్కడ పాదాంకము 1 గల రాశుల దత్తాంశములు సమస్య యొక్క మొదటి పాదము నుండి తీసుకొనవలెను. పాదాంకము 2 గల తెలియని విలువ రెండవ పాదము నందు చూడగలము. అనగా సూత్రములో P_1 మనుషులు, W_1 ప్రమాణముల పనిని, D_1 రోజులు, ప్రతి రోజుకు H_1 గంటలు పని చేయుదురు. అదేవిధముగా P_2 మనుషులు, W_2 ప్రమాణముల పనిని, D_2 రోజులు, రోజుకు H_2 గంటలు పని చేయుదురు. W_1 మరియు W_2 పనులను గుర్తించుటయే ఈ సమస్యలలో అతి కీలకమైనది. ఈ పద్ధతి తెలియని విలువ (x) త్వరగా కనుగొనుటకు సులభమైనది.

ఉదాహరణ: 4.19 (అనులోమ – అనులోమానుపాతములు)

ఒక కంపెనీవారు 15 మంది పనివారికి, 20 రోజులకు ₹6 లక్షలు చెల్లించినది. మరి 5 మంది పనివారికి, 12 రోజులకు ఎంత చెల్లించవలెను?

సాధన:

నిష్పత్తి పద్ధతి:

పనివారు	చెల్లించిన పైకము	రోజులు
15 D 5	6 D x D	20 12 D

ఇక్కడ, చెల్లించిన పైకము అను తెలియని విలువను కనుగొనుటకు పనివారి సంఖ్య మరియు రోజులను పోల్చుట ద్వారా తెలుసుకొందాము.

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 142 31-07-2020 13:06:32

సోపానము 1:

ఇక్కడ, తక్కువ రోజులు కనుక తక్కువ మొత్తము. కాబట్టి ఇది అనులోమానుపాతము

$\therefore$ 20 : 12 :: 6 : x ⟶ (1) నిష్పత్తి అగును.

సోపానము 2:

మరియు, తక్కువ పనివారు కనుక తక్కువ మొత్తము (చెల్లింపు). కాబట్టి ఇది కూడా అనులోమానుపాతము లో ఉన్నది.

$\therefore$ 15 : 5 :: 6 : x ⟶ (2) నిష్పత్తి అగును.

సోపానము 3:

(1) మరియు (2) కలుపుట ద్వారా

$$\left.\begin{array}{l}20:12\\15:5\end{array}\right\}::6:x$$

అంత్యముల లబ్ధము = మధ్యముల లబ్ధము అని మనకు తెలుసు

అంత్య పదములు		మధ్యపదములు		అంత్యములు
20	:	12 : 6	:	x
15	:	5		

కనుక, $20\times15\times x=12\times6\times5 \Rightarrow x=\dfrac{12\times6\times5}{20\times15}$ = ₹ 1.2 లక్షలు.

గుణకారకారణాంక పద్ధతి:

పనివారు	వేతనము (పని)	రోజులు
15	6	20
D 5	D x D	12 D

ఇక్కడ వేతనము (x) తెలియని విలువ దానిని పనివారు మరియు రోజులను పోల్చుట ద్వారా తెలుసుకొందుము.

సోపానము 1:

ఇక్కడ తక్కువ రోజులు కనుక తక్కువ వేతనము.

$\therefore$ గుణకార కారకము $\dfrac{12}{20}$ (విలోమము తీసుకొనుము)

సోపానము 2:

మరియు తక్కువ పనివారు కనుక తక్కువ వేతనము. కాబట్టి మరలా అనులోమానుపాతము.

$\therefore$ గుణకార కారకము $\dfrac{5}{15}$ (విలోమము తీసుకొనుము)

సోపానము 3:

$$\therefore x=6\times\frac{12}{20}\times\frac{5}{15} = ₹\ 1.2 \text{ లక్షలు}$$

సూత్ర పద్ధతి

ఇక్కడ, $P_1=15, D_1=20$ మరియు $W_1=6$, $P_2=5, D_2=12$ మరియు $W_2=x$

సూత్రమును ఉపయోగించిన, $\dfrac{P_1\times D_1}{W_1}=\dfrac{P_2\times D_2}{W_2}$

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 143 31-07-2020 13:06:35

లభించునది, $\frac{15\times 20}{6} = \frac{5\times 12}{x}$

$x \Rightarrow \frac{5\cdot\ 12\ \ 6}{15\cdot\ 20} =$ ₹ 1.2 లక్షలు.

ఉదాహరణ: 4.20 (అనులోమ - విలోమానుపాతములు)

180 మీ పొడవు గల చాపను 15 మంది స్త్రీలు 12 రోజులలో చేసిరి. అయిన 32 మంది స్త్రీలు 512 మీ పొడవు గల చాపను ఎన్ని రోజుల్లో పూర్తి చేయగలరు?

సాధన:

నిష్పత్తి పద్ధతి:

పొడవు (పని)	స్త్రీలు	రోజులు
180	15	12
D 512	32 *I*	*D* x *I*

ఇక్కడ తెలియని విలువ రోజులు (x)ను కనుగొనుటకు పొడవు మరియు స్త్రీల సంఖ్యతో దానిని పోల్చవలయును.

సోపానము 1:

ఇక్కడ ఎక్కువ పొడవు కనుక ఎక్కువ రోజులు. ఇది అనులోమానుపాతము అగును.

$\therefore$ నిష్పత్తి $180 : 512 :: 12 : x \longrightarrow$ (1)

సోపానము 2:

మరియు స్త్రీల సంఖ్య పెరుగుదల అనునది రోజుల తగ్గుదల అగును. కాబట్టి ఇది విలోమానుపాతము అగును.

$\therefore$ నిష్పత్తి $32 : 15 :: 12 : x \longrightarrow$ (2)

సోపానము 3:

(1) మరియు (2) కలుపుట ద్వారా

$$\left.\begin{matrix} 180 : 512 \\ 32 : 15 \end{matrix}\right\} :: 12 : x$$

అంత్యముల లబ్ధము = మధ్యముల లబ్ధము అని మనకు తెలియును.

అంత్యముల	:	మధ్యముల	:	అంత్యముల
180 32	: :	512 : 12 15		x

కాబట్టి, $180 \times 32 \times x = 512 \times 12 \times 15 \Rightarrow x = \frac{512 \times 12 \times 15}{180 \times 32} = 16$ రోజులు .

గుణకారకారణాంక పద్ధతి:

పొడవు (పని)	స్త్రీలు	రోజులు
180	15	12
D 512	32 *I*	*D* x *I*

ఇక్కడ తెలియని విలువ రోజుల సంఖ్య (x) దీనిని పొడవు మరియు స్త్రీల సంఖ్యతో పోల్చుట ద్వారా తెలుసుకొనగలము.

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 144 31-07-2020 13:06:35

సోపానము 1:

ఇక్కడ పొడవు పెరుగుదల అనగా రోజుల పెరుగుదల. కావున, ఇది అనులోమానుపాతము

$\therefore$ గుణకార కారకము $\dfrac{512}{180}$ (విలోమము తీసుకొనుము).

సోపానము 2:

మరియు స్త్రీల పెరుగుదల అనగా రోజుల తగ్గుదల, కావున ఇది విలోమానుపాతము.

$\therefore$ గుణకార కారకము $\dfrac{15}{32}$ (మార్పులేదు)

సోపానము 3:

$\therefore x = 12 \times \dfrac{512}{180} \times \dfrac{15}{32} = 16$ రోజులు.

కారణాంక పద్ధతి:

ఇక్కడ, $P_1 = 15$, $D_1 = 12$ మరియు $W_1 = 180$, $P_2 = 32$, $D_2 = x$ మరియు $W_2 = 512$

సూత్రమును ఉపయోగించుట ద్వారా, $\dfrac{P_1 \times D_1}{W_1} = \dfrac{P_2 \times D_2}{W_2}$

$\dfrac{15 \times 12}{180} = \dfrac{32 \times x}{512}$ మనకు లభించును,

$\Rightarrow\ 1 = \dfrac{32 \times x}{512} \quad \Rightarrow\ x = \dfrac{512}{32} = 16$ రోజులు.

వ్యాఖ్య: పైన ఇవ్వబడిన మూడు పద్ధతులలో ఏదేని ఒక దానిని ఉపయోగించి విద్యార్థులు సమాధానము ఇవ్వవచ్చును.

ప్రయత్నించుము

1. $x = y = 5$ మరియు $y = 5$ మరియు x అనుపాతములో ఉండిన, y స్థిర సంఖ్యను కనుగొనుము.
2. x మరియు y విలోమానుపాతములో వుండిన $x = 64$ మరియు $y = 0.75$ అయిన, స్థిర మార్పును కనుగొనుము.

కృత్యము

ఇచ్చిన వ్యాసార్థముతో వృత్తమును గీయుము. దీని వ్యాసార్థములను ఏదేని రెండు వరుస వ్యాసార్థముల జతల మధ్య కోణములు సమానముగా ఉండునట్లు గీయుము. 3 వ్యాసార్థముల వద్ద ప్రారంభించి 12 వ్యాసార్థవలల వరకు గీయుము. వ్యాసార్థముల సంఖ్యకు, వరుస వ్యాసార్థముల జతల మధ్యగల కోణములకు ఒక పట్టికను వ్రాయుము మరియు అవి విలోమానుపాతములో గలదాని సరిచూడండి.అనుపాతస్థిరాంకము ఏమి?

ఉదాహరణ: 4.21 (విలోమ – అనులోమ అనుపాతములు)

81 మంది విద్యార్థులు 448 మీ పొడవుగల గోడపై 56 రోజులలో పెయింటింగ్ పూర్తి చేయుదురు. 160 మీ పొడవుగల అలాంటి గోడపై 27 రోజులలో పూర్తి చేయుటకు ఎంత మంది విద్యార్థులు కావలెను?

సాధన:

గుణకారకారణాంక పద్ధతి:

విద్యార్థులు	రోజులు	గోడ పొడవు (పని)
81	56	448
I *D*	*I*	*D*
x	27	160

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 145 31-07-2020 13:06:39

సోపానము 1:

ఇక్కడ రోజుల తగ్గుదల అనగా విద్యార్థుల సంఖ్య పెరుగుదల కావున ఇది విలోమానుపాతము అగును.

$\therefore$ గుణకార కారకము $\frac{56}{27}$ అగును.

సోపానము 2:

మరియు, పొడవు తగ్గుదల అనగా విద్యార్థుల సంఖ్య తగ్గుదల, కనుక ఇది అనులోమానుపాతము అగును.

$\therefore$ గుణకార కారకము $\frac{160}{448}$ అగును.

సోపానము 3:

$\therefore x = 81 \times \frac{56}{27} \times \frac{160}{448}$

$x = 60$ విద్యార్థులు.

సూత్ర పద్ధతి:

ఇక్కడ, $P_1 = 81, D_1 = 56$ మరియు $W_1 = 448$

$P_2 = x, D_2 = 27$ మరియు $W_2 = 160$

సూత్రమును ఉపయోగించుట ద్వారా, $\frac{P_1 \times D_1}{W_1} = \frac{P_2 \times D_2}{W_2}$

మనకు లభించినది, $\frac{81 \times 56}{448} = \frac{x \times 27}{160}$

$$\Rightarrow x = \frac{81 \times 56}{448} \times \frac{160}{27}$$

$x = 60$ విద్యార్థులు.

ఉదాహరణ: 4.22 (విలోమ – విలోమ అనుపాతము)

48 మంది పురుషులు, రోజుకు 7 గంటల చొప్పున పని చేయుట ద్వారా, ఒక పనిని 24 రోజుల్లో పూర్తి చేయగలరు. అయిన 28 మంది, రోజుకు 8 గంటల చొప్పున పని చేయుట ద్వారా, అదే పనిని ఎన్ని రోజులలో పూర్తి చేయగలరు?

సాధన:

గుణకార కారణాంక పద్ధతి:

పురుషులు	గంటలు	రోజులు
48	7	24
I	*I*	*I* *I*
28	8	x

సోపానము 1:

ఇక్కడ పురుషుల సంఖ్య తగ్గుదల అనగా రోజుల సంఖ్య పెరుగుదల, కనుక ఇది విలోమానుపాతములో ఉన్నది.

$\therefore$ గుణకార కారకము $\frac{48}{28}$ అగును.

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 146 31-07-2020 13:06:42

సోపానము 2:

మరియు, గంటల పెరుగుదల అనగా రోజుల సంఖ్య తగ్గుదల, కనుక విలోమానుపాతములో ఉన్నవి.

$\therefore$ గుణకార కారకము $\frac{7}{8}$ అగును.

సోపానము 3:

$\therefore x = 24 \times \frac{48}{28} \times \frac{7}{8} = 36$ రోజులు.

సూత్ర పద్ధతి:

ఇక్కడ, $P_1 = 48, D_1 = 24, H_1 = 7$ మరియు $W_1 = 1$ (ఎందుకు?)

$P_2 = 28, D_2 = x, H_2 = 8$ మరియు $W_2 = 1$ (ఎందుకు?)

సూత్రము , $\frac{P_1 \times D_1 \times H_1}{W_1} = \frac{P_2 \times D_2 \times H_2}{W_2}$ ద్వారా

$\frac{48 \times 24 \times 7}{1} = \frac{28 \times x \times 8}{1}$ లభించును, $\Rightarrow x = \frac{48 \times 24 \times 7}{28 \times 8} = 36$ రోజులు

ప్రయత్నించుము

క్రింది వానిలో ఇవ్వబడిన వాటిలోని వ్యత్యాసమైన అనుపాతములను కనుగొనుము.

1. 24 మంది, 48 వస్తువులను 12 రోజులలో చేయగలరు. అయిన 6 మంది 6 రోజులలో _____ వస్తువులను చేయగలరు.
2. 4 కి.మీ పొడవు గల రోడ్డును 15 మంది పనివారు 4 గంటల్లో వేయగలరు. అయిన 8 కి.మీ పొడవు గల రోడ్డును 8 గం॥లలో వేయడానికి _____ మంది పనివారు కావలెను.
3. 25 మంది స్త్రీలు 12 గం॥ పని చేయుట ద్వారా ఒక పనిని 36 రోజులలో పూర్తి చేయగలరు. అయిన, 30 మంది స్త్రీలు _____ గంటలు ఖచ్చితముగా పని చేయుట ద్వారా 30 రోజులలో పని పూర్తి చేయగలరు.
4. ఒక క్యాంపులో 420 కి.గ్రా. బియ్యం, 98 మందికి 45 రోజులకు సరిపోవును. మరి 60 కి.గ్రా బియ్యం 42 మందికి _____ రోజులు వచ్చును.

4.6 కాలము మరియు పని

క్రింది ప్రశ్నకు సమాధానమును ఏవిధంగా కనుగొంటావు?

ఒక పనిని ఖని 2 గంటలలో మరియు విజి 3 గంటలలో పూర్తిచేస్తారు అయితే వారిద్దరు కలిసి పనిచేసిన ఆపనిని ఏంత సమయములో పూర్తిచేస్తారు. ఈ ప్రశ్నకు సమాధానమును ఈ పాఠ్యాంశములో నేర్చుకొందాము.

చేయవలసిన పనిని సాధారణముగా ఒక ప్రమాణంగా తీసుకొంటాము. గోడ నిర్మాణము, రోడ్డు నిర్మాణము,ట్యాంకును నింపడము లేదా ఖాళీ చేయుట మరియు నిర్దిష్ట మొత్తములో ఆహారమును భుజించుట అనునవిని పనిగా తీసుకొంటాము.

కాలమును గంటలలో, రోజులలో మొదలగు కొలతలలో కొలుస్తారు. ఇచ్చట ఒక పని అన్ని సమయంలలోఒకేవిధంగా జరుగునని మరియు గ్రూపులలో పనిని పూర్తి చేస్తున్నప్పుడు ప్రతి వ్యక్తి ఆ పనియొక్క సమయమును సమానముగా పంచుకొంటారని ఊహించుకొందాము.

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 147 31-07-2020 13:06:44

ఏకవస్తు మార్గము:

ఇద్దరు వ్యక్తులు X మరియు Y ఒక పనిని విడివిడిగా a మరియు b రోజులలో పూర్తి చేస్తారు. అయిన వారు ఒక రోజులో పూర్తిచేయు పని క్రమంగా $\frac{1}{a}$ మరియు $\frac{1}{b}$ అగును.

మరియు వారిరువురు కలిసి ఒక రోజులో చేయు పని $= \frac{1}{a}+\frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$

కావున, X మరియు Y ఇరువురు కలిసి ఆ పనిని $\frac{ab}{a+b}$ రోజులలో పూర్తి చేయగలరు.

ఉదాహరణ: 4.23

A మరియు B కలిసి ఒక పనిని 16 రోజులలో పూర్తి చేయగలరు. A మరియు B మాత్రము 48 రోజుల్లో పూర్తిచేసిన, A మాత్రము ఆ పనిని పూర్తిచేయుటకు ఎంత కాలము పట్టును?

సాధన:

$(A+B)$ యొక్క ఒకరోజు పని $= \frac{1}{16}$

A యొక్క ఒక రోజు పని $= \frac{1}{48}$

$\therefore$ B యొక్క ఒక రోజు పని $= \frac{1}{16} - \frac{1}{48}$

$= \frac{3-1}{48} = \frac{2}{48} = \frac{1}{24}$

$\therefore$ B మాత్రము 24 రోజుల్లో పూర్తి చేయును.

గమనిక

ఒక పని లేదా పనిని పూర్తిచేయడానికి తీసుకొన్న కాలము, వ్యక్తుల సంఖ్య, పని చేయగలవారి సామర్థ్యము, పని మొత్తం మరియు పనిని పూర్తి చేయడానికి రోజుకు గడిపిన కాలము వంటి వివిధ అంశాలపై ఆధారపడి ఉంటుంది.

ఉదాహరణ: 4.24

P మరియు Q ఒక పనిని క్రమంగా 20 రోజులు మరియు 30 రోజులలో పూర్తిచేయగలరు. ఇరువురు కలిసి పనిని ప్రారంభించిరి. కొంతకాలము తర్వాత Q పని నుండి వెళ్ళిపోయెను. మిగిలిన పనిని P మాత్రమే 5 రోజులలో పూర్తి చేసెను. అయిన Q పని ప్రారంభమైన ఎన్ని రోజుల తర్వాత విరమించుకొనెను?

సాధన:

P యొక్క ఒక రోజు పని $= \frac{1}{20}$ మరియు Q యొక్క ఒక రోజు పని $= \frac{1}{30}$

P యొక్క 5 రోజుల పని $= \frac{1}{20} \times 5 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4}$

మిగిలిన పని $= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ (ఎల్లప్పుడూ పూర్తి పని 1 అగును.)

ఈ మిగిలిన పని P మరియు Q ఇరువురు కలిసి చేసిరి.

P మరియు Q చేసిన ఒక రోజు పని $= \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{5}{60} = \frac{1}{12}$

వారిరువురు కలిసి పనిచేసిన రోజులు $= \frac{3/4}{1/12} = \frac{3}{4} \times \frac{12}{1} = 9$ రోజులు.

కావున, Q పని మొదలైన 9రోజుల తరువాత వెళ్ళిపోయెను.

ఉదాహరణ: 4.25

A ఒక పనిని B కంటే మూడు రెట్లు వేగంగా చేయగలడు. మరియు B తీసుకొన్న రోజుల కంటే 24 రోజులు తక్కువలో పనిని పూర్తి చేయగలడు. వారు కలిసి పనిని పూర్తిచేయగల సమయాన్ని కనుగొనండి.

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 148 31-07-2020 13:06:50

సాధన:

B ఒక పనిని 3 రోజుల్లో చేసిన, A దానిని ఒక రోజులో చేయగలడు. అంటే వారి భేదము 2 రోజులు. ఇక్కడ A మరియు B పని పూర్తి చేయడానికి ఇచ్చిన కాల వ్యత్యాసము 24 రోజులలో. A తీసుకొన్న సమయము $\frac{24}{2}=12$ మరియు B తీసుకొన్న సమయము $3\times12=36$ రోజులు. పనిని విడివిడిగా పూర్తి చేయగలడు.

కనుక, A మరియు B కలిసి పనిచేయుటకు పట్టు కాలము $=\frac{ab}{a+b}$ రోజులు

$$=\frac{12\times36}{12+36}=\frac{12\times36}{48}=9 \text{ రోజులు.}$$

గమనిక

A, $\frac{a}{b}$ కన్నా B ఇంతలు మంచి పనివాడు, అయిన A, $\frac{b}{a}$ యొక్క B వ వంతు కాలములో పనిని పూర్తిచేయును.

4.6.1 పని కొరకు డబ్బు పంచుకోవడం

వ్యక్తుల సమూహం వారి వ్యక్తిగత పని ఆధారంగా కొంత పని చేసినప్పుడు వారు డబ్బులో వాటాను పొందుతారు. సాధారణంగా **సంపాదించిన డబ్బు** ప్రతి ఒక్కరు చేసిన **మొత్తం పని** నిష్పత్తితో పనిచేసిన వ్యక్తులు పంచుకొంటారు.

మీకు తెలుసా?

- A మరియు B ఒక పని చేయుటకు తీసుకున్న కాలము నిష్పత్తి $\frac{1}{x}:\frac{1}{y}=y:x$ మరి వారి పని పూర్తి చేసిన నిష్పత్తి $x:y$. ఇదియే వారి వేతనముల నిష్పత్తియు అగును.
- ముగ్గురు వ్యక్తులు A, B మరియు C ఒక పనిని క్రమంగా x, y మరియు z రోజులలో పూర్తి చేయుదురు. అయిన వారి వేతనములను పంచు నిష్పత్తి $\frac{1}{x}:\frac{1}{y}:\frac{1}{z}$.

ఉదాహరణ: 4.26

X, Y మరియు Z ఒక పనిని క్రమముగా 4, 6 మరియు 10 రోజులలో పూర్తిచేయుదురు. X,Y మరియు Z కలిసి పని పూర్తిచేసిన, వారి విడివిడి వాటాలను కనుగొనుము. పని పూర్తిచేసినందుకు వారికి ₹ 31000 లభించినది.

సాధన:

వారందరూ సమానమైన రోజులు పనిచేసిరి. కావున వారి వాటా, వారు 1 రోజుకు పని చేయు వాటాయే అగును.

అనగా, $\frac{1}{4}:\frac{1}{6}:\frac{1}{10}=\frac{15}{60}:\frac{10}{60}:\frac{6}{60}=15:10:6$

ఇక్కడ మొత్తము భాగములు = 15 + 10 + 6 = 31

కావున, A వాటా $=\frac{15}{31}\times 31000$ = ₹ 15000 B వాటా $=\frac{10}{31}\times 31000$ = ₹ 10000 మరియు

C వాటా ₹ 31000 – (₹ 15000 + ₹ 10000)= ₹ 6000.

ప్రయత్నించుము

1. విక్రమ్ $\frac{1}{3}$ వంతు పనిని p రోజులలో చేయును. మరి అతను $\frac{3}{4}$ వంతు పనిని ________ రోజులలో పూర్తిచేయగలడు.

2. m మనుషులు ఒక పనిని n రోజులలో పూర్తిచేయగలరు. అయిన $4m$ మనుషులు అదేపనిని ________ రోజులలోను, మరియు $\frac{m}{4}$ మనుషులు అదేపనిని ________ రోజులలో పూర్తిచేయగలరు.

అభ్యాసము 4.4

1. క్రింది ఖాళీలను పూరింపుము:

(i) ఒక పనిని A అను వ్యక్తి 3 రోజులలో పూర్తిచేసెను. అదే పనిని B అను వ్యక్తి 6 రోజులలో పూర్తిచేయగలడు. అయిన వారిరువురు కలిసి ఆ పనిని చేయుటకు __________ రోజులు పట్టును.

(ii) 5మంది వ్యక్తులు 5 విధమైన పనిని 5 రోజులలో పూర్తిచేసినచో, 50 మంది వ్యక్తులు 50 రకములైన పనులను పూర్తిచేయుటకు __________ రోజులు అగును.

(iii) A ఒక పనిని 24 రోజులలో పూర్తిచేయును. A మరియు B కలిసి అదే పనిని 6 రోజులలో పూర్తిచేయగలరు. అయినచో B మాత్రమే అదే పనిని పూర్తిచేయుటకు __________ రోజులు అగును.

(iv) A మరియు B అను ఇద్దరు వ్యక్తులలో A మాత్రమే ఒక పనిని 35 రోజులలో పూర్తిచేయును. కాని B అను వ్యక్తి A కంటే 40% ఎక్కువ సామర్థ్యముతో పని చేయగలరు. అయితే B ఆ పనిని __________ రోజులలో పూర్తిచేయును.

(v) A ఒక పనిని పూర్తి చేయుటకు పట్టు రోజులు 10 అదే పనిని B అను వ్యక్తి 15 రోజులలో పూర్తిచేయగలరు. వారు ఆ పనిని పూర్తిచేయుటకు ₹200000 పొందినచో A అను వ్యక్తి పొందు మొత్తము __________

2. 210 మంది పురుషులు కలిసి రోజుకు 12 గంటలు చొప్పున ఒక పనిని 18 రోజులలో పూర్తిచేయగలరు. అదే పనిని రోజుకు 14 గంటలు చొప్పున 20 రోజులలో పూర్తిచేయుటకు ఎంత మంది పురుషులు కావలెను?

3. ఒక సిమెంటు కంపెనీలో 36 యంత్రముల సహాయముతో 12రోజులలో 7000 బస్తాల సిమెంటును ఉత్పత్తి చేసినచో 24 యంత్రాల సహాయముతో 18 రోజులలో ఎన్ని సిమెంటు బస్తాలు ఉత్పత్తి చేయగలము?

4. ఒక సోపు కంపెనీ రోజుకు 15 గంటలు చొప్పున 6 రోజులలో 9600 సోపులు తయారుచేయగలరు. 14400 సోపులు తయారుచేయుటకు రోజుకు 3 గంటలు అధికముగా పనిచేసినచో ఎన్ని రోజులలో పూర్తిచేయగలరు?

5. 135 టన్నుల సరకును 6 లారీలలో తరలించుటకు 5 రోజులు పట్టును. అదేవిధముగా 180 టన్నుల సరకును 4 రోజులలో తరలించుటకు ఎన్ని లారీలు అవసరము?

6. A ఒక పనిని పూర్తి చేయుటకు పట్టు సమయము 12 గంటలు. B మరియు C కలిసి చేయుటకు పట్టు సమయము 3 గంటలు. అదేవిధముగా A మరియు C కలిసి పని చేయుటకు పట్టు సమయము 6 గంటలైనా అదే పనిని B మాత్రమే పూర్తిచేయుటకు పట్టు సమయము ఎంత?

SEYHZ

7. A మరియు B కలిసి ఒక పనిని పూర్తి చేయుటకు పట్టు సమయము 12 రోజులు. B మరియు C అదే పనిని పూర్తి చేయుటకు పట్టు సమయము 15రోజులు. అదేవిధముగా A మరియు C పనిని పూర్తి చేయుటకు పట్టు సమయము 20 రోజులు. అయితే ఒక్కొక్కరు అదే పనిని పూర్తిచేయుటకు పట్టు కాలము ఎంత?

8. A అను వడ్రంగి ఒక కుర్చీని తయారుచేయుటకు 15నిమిషాలు అగును. B అను వడ్రంగి ఒక కుర్చీని తయారుచేయుటకు A కంటే 3నిమిషాలు ఎక్కువ తీసుకొనును. వారిద్దరు కలిసి 22 కుర్చీలు తయారుచేయుటకు పట్టు సమయము ఎంత?

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 150 31-07-2020 13:06:54

9. A ఒక పనిని 45 రోజులలో పూర్తిచేయగలడు. 15 రోజులు పని చేసిన పిదప, మిగిలి ఉన్న పనిని B మాత్రమే 24 రోజులలో పూర్తిచేసెను. వారిరువురు కలిసి పనిచేసిన, 80% పని పూర్తి అగుటకు పట్టుకాలము కనుగొనుము.

10. A, B కంటే మూడు రెట్లు వేగముగా పనిచేయగలడు. ఒక పనిని B 24 రోజులలో పూర్తిచేయగలడు. ఇద్దరు కలిసి అదేపనిని ఎన్ని రోజులలో చేయగలరు?.

అభ్యాసము 4.5

ఇతర అభ్యసన సమస్యలు

1. ఒక పండ్లవిక్రేత కొన్ని మామిడిఫండ్లను కొనగా 10% పండులు కుళ్ళిపోయినవి. మిగిలి నదానిలో అతను $33\frac{1}{3}\%$ పండ్లను అమ్మగా అతని వద్ద 240 పండ్లు మిగిలినవి. అతను మొదట కొన్న మామిడిపండ్లు ఎన్ని?

2. ఒక విద్యార్థి 31% మార్కులు పొంది 12 మార్కుల తేడాతో ఉత్తీర్ణుడు కాలేదు. ఉత్తీరణ శాతము 35%, అయిన పరీక్షయొక్క గరిష్టమార్కులు ఎంత?

3. సుల్తానా కిరాణా దుకాణము నుండి క్రింది వస్తువులను కొన్నది. ఆమె చెల్లించవలసిన మొత్తము బిల్లును కనుగొనుము.

(i) 5% GST తో ₹800 లకు ఔషదము

(ii) 12% GST తో ₹650 లకు సౌందర్యసాధన వస్తువులు.

(iii) 0% GST తో ₹900 లకు తృణధాన్యములు.

(iv) 18% GST తో ₹1750 కు సన్‌గ్లాస్.

(v) 28% GST తో ₹28500 లకు శీతలీకరణ యంత్రము.

4. P ఆదాయం Q కన్నా 25% ఎక్కువ అయిన Q ఆదాయము P కన్నా ఎంత శాతము తక్కువ?

5. వైదేగి రెండు చీరలను ఒక్కొక్కదానిని ₹2200 లకు అమ్మెను. ఒక చీర మీద 10% లాభము మరియు మరొక చీర మీద 12% నష్టము పొందెను. ఈ లావాదేవీలలో ఆమె పొందిన లాభ లేదా నష్ట శాతమును కనుగొనుము.

6. 32 మంది, రోజుకు 12 గంటలు చొప్పున పనిచేసి 15 రోజులలో పనిని పూర్తిచేయగలరు, రోజుకు 10గం॥ చొప్పున రెండింతల పనిని 24 రోజులలో పూర్తిచేయుటకు ఎంతమంది కావలయును?

7. అముదా ఒక చీరను 18 రోజులలో నేయగలదు. అంజలి, అముదా కన్నా రెండింతల పనితనము గలది. వారిరువురు కలిసి ఒక చీరను నేయుటకు ఎన్ని రోజులు పట్టును.

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 151 31-07-2020 13:06:55

8. P మరియు Q ఒక పనిని క్రమముగా 12 మరియు 15 రోజులలో పూర్తిచేయగలరు. P పనిని ఒంటరిగా ప్రారంభించెను. మరియు మూడు రోజుల తరువాత Q పని పూర్తి అగునంతవరకు కలిసి పనిచేసెను. అయిన ఎంత కాలము పని జరిగినది కనుగొనుము.

సవాళాత్మక ప్రశ్నలు

9. ఒక భిన్నములోని లవంను 50% పెంచి మరియు హారమును 20%, తగ్గించిన అది $\frac{3}{5}$ మారినది. అసలు భిన్నము ఏది?

10. గోపి ఒక ల్యాప్‌టాప్‌ను 12% లాభమునకు అమ్మెను. అతను ఆ ల్యాప్‌టాప్‌ను ₹1200 ఎక్కువకు అమ్మినట్లైతే లాభము 20% అగును. ల్యాప్‌టాప్ కొన్న ధరను కనుగొనుము.

11. ఒక దుకాణాదారుడు ₹180 గుర్తింపు ధర కలిగిన వస్తువుకు రెండు వరుస రుసుములు తరువాత ₹108 కు అమ్మెను. రెండవ రుసుము 25% అయితే మొదటి రుసుమును కనుగొనుము.

12. కొంత మొత్తము రెండు సంవత్సరాలలో 1.69 రెట్లైన చక్రవడ్డీ రేటును కనుగొనుము.

13. ఒక చిన్నతరహా పరిశ్రమ 150 రోజులలో 540 మోటారు పంపులను తయారుచేయుటకు అంగీకరించిరి. దాని కొరకు 40 మందిని పనికి అమర్చిరి. 75 రోజుల తరువాత పరిశ్రమవారు 180 మోటారు పంపులను మాత్రమే చేయగలిగారు. చెప్పిన కాలములో పనిని పూర్తి చేయుటకు ఇంకనూ ఎంతమందిని అధికముగా అమర్చవలెనని కనుగొనుము?

14. $\frac{1}{2}$ వ వంతు పనిని P మాత్రమే 6 రోజులలో పూర్తిచేయుదురు. మరియు, Q, $\frac{2}{3}$ వ వంతు అదే పనిని 4 రోజులలో పూర్తి చేయును. ఇరువురు కలిసి 3/4 వంతు పనిని పూర్తి చేయుటకు ఎన్ని రోజులు పట్టును?

15. ఒక పనిని X మాత్రము 6 రోజులలో పూర్తిచేయును, మరియు Y మాత్రము 8 రోజులలో పూర్తిచేయును. X మరియు Y ఇరువురు ఈ పనిని ₹48000కు చేయబూనిరి. Z యొక్క సహాయముతో పనిని 3 రోజులలో పూర్తిచేసిరి, అయిన Z యొక్క భాగము ఎంత?

సారాంశము

- అ.ధ (S.P), కొ.ధ (C.P) కన్నా ఎక్కువగా ఉన్నచో లాభము వచ్చును. లాభము = అ.ధ – కొ.ధ
- అమ్మకపు ధర (S.P), కొన్న ధర (C.P) కన్న తక్కువయినచో నష్టము వచ్చును. నష్టము = కొ.ధ–అ.ధ
- లాభము మరియు నష్టములను కొన్న ధర ఆధారంగా గణిస్తారు.
- అమ్మకపు ధర = గుర్తింపు ధర – రుసుము (డిస్కౌంట్)
- **సూత్రాలు**

(i) లాభ శాతము $= \left(\frac{\text{లాభము}}{\text{కొన్నధర}} \times 100\right)\%$

(ii) నష్ట శాతము $= \left(\frac{\text{నష్టము}}{\text{కొన్నధర}} \times 100\right)\%$

(iii) అమ్మినధర $= \frac{(100 + \text{లాభము}\%)}{100} \times$ కొన్న ధర (లేదా) కొన్న ధర $= \left(\frac{100}{100 + \text{లాభము}\%}\right) \times$ అమ్మిన ధర

(iv) అమ్మిన ధర $= \frac{(100 - \text{నష్టము}\,\%)}{100} \times$ కొన్న ధర (లేదా) కొన్న ధర $= \frac{100}{(100 - \text{నష్టము}\%)} \times$ అమ్మిన ధర

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 152 31-07-2020 13:06:56

- వడ్డీ సంవత్సరమునకు చక్రీయమైన, $A= P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{n}$.
- వడ్డీ అర్ధ సంవత్సరమునకు చక్రీయమైన, $A= P\left(1+\frac{r}{200}\right)^{2n}$.
- వడ్డీ త్రై మాసమునకు చక్రీయమైన, $A= P\left(1+\frac{r}{400}\right)^{4n}$.
- వడ్డీ సంవత్సరమునకు చక్రీయమయ్యి, కాని వడ్డీరేటు ప్రతి సంవత్సరమునకు మార్పుచెందిన $A=P\left(1+\frac{a}{100}\right)\left(1+\frac{b}{100}\right)\left(1+\frac{c}{100}\right)\ldots$ a, b మరియు c అనునవి వరుసగా I, II మరియు III సం॥ వడ్డీరేట్లు అగును.
- వడ్డీ సంవత్సరమునకు చక్రీయమగుతూ కాలము $a\frac{b}{c}$ సం॥ అయితే $A=P\left(1+\frac{r}{100}\right)^{a}\left(1+\frac{\frac{b}{c}\times r}{100}\right)$.
- C.I = A–P (చక్రవడ్డీ = మొత్తము – అసలు) .
- మొదటి కాలవ్యవధికి సాధారణ మరియు చక్రవడ్డీలు సమానము.
- 2 సం॥లకు S.I మరియు C.I ల మధ్య వ్యత్యాసము $C.I - S.I = P\left(\frac{r}{100}\right)^{2}$.
- 3 సం॥లకు S.I మరియు C.I ల మధ్య వ్యత్యాసము $C.I - S.I = P\left(\frac{r}{100}\right)^{2}\left(3+\frac{r}{100}\right)$.
- x మరియు y, $y=kx$ అయినప్పుడల్లా అవి అనులోమానుపాతంలో గలదని అంటారు.ఇచ్చట k అనుపాత స్థిరాంకము మరియు $k > 0$, y, x పై ఆధారబడును అని ఊహించుకొంటే $k=\frac{y}{x}$
- $xy = k$ (ఎల్లప్పుడూ), ఇందు k ఒక ధనాత్మక స్థిరసంఖ్య మరియు $k > 0$ అయిన x మరియు y విలోమానుపాతము కలిగియున్నవి.
- కొన్ని సమస్యలలో రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ మార్పు సంకలనములను కలిగియుండును. దీనినే సంయుక్తమార్పు అందురు.
- రెండు నిష్పత్తులను ఒకే నిష్పత్తిగా తెలపడానికి ఆ రెండు నిష్పత్తుల అంత్యముల లబ్ధము మరియు మధ్యముల లబ్ధముల నిష్పత్తిని కనుగొంటాము.
- $\frac{P_1\times D_1\times H_1}{W_1}=\frac{P_2\times D_2\times H_2}{W_2}$ సూత్రమును ఉపయోగించి తెలియని (x) విలువను కనుగొనగలము.
- తెలియని (x) విలువను, కారణాంక గుణకార పద్ధతిని ఉపయోగించి కూడా కనుగొనగలము.
- x మరియు y ఇరువురు విడివిడిగా a మరియు b రోజులలో ఒక పనిని పూర్తిచేయగలిగిన వారి ఒక రోజు పని క్రమముగా $\frac{1}{a}$ మరియు $\frac{1}{b}$ అగును. x మరియు y కలిసి ఆ పనిని $\frac{ab}{a+b}$ రోజులలో పూర్తిచేయగలరు.

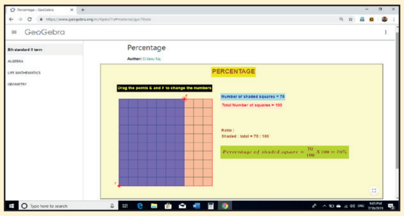
04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 153 31-07-2020 13:07:02

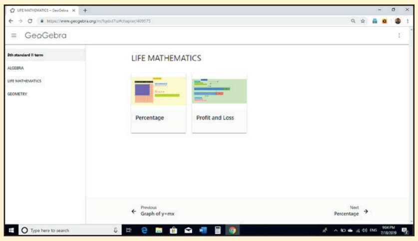
అంతర్జాల కృత్యము (ICT CORNER)

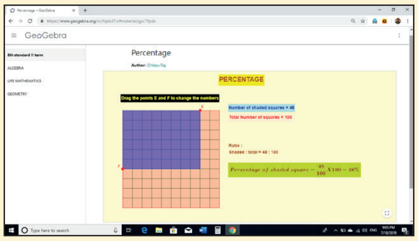
సోపానము-1 బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్ చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన URL లింక్‌ను టైపు చేయండి. లేదా QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయండి. "LIFE MATHEMATICS" అను పేరు మీద జియోజీబ్రా వర్క్‌బుక్ ఓపెన్ అగును. "Percentage" అను వర్క్‌షీట్‌పై క్లిక్ చేయుము.

సోపానము-2 ఇచ్చిన వర్క్‌షీట్‌లో ఇ మరియు ఫ్ ఎరుపు రంగు బిందువులను నీలం రంగు దీర్ఘచతురస్రములోకి మారునట్లు లాగుము. చతురస్రములను లెక్కించుట ద్వారా నీలం రంగు చతురస్రములను మొత్తముతో నిష్పత్తిని కనుగొనుము. పిదప నిష్పత్తి మరియు శాతములను సరిచూడుము.

ఆశించు ఫలితము







సోపానము 1 సోపానము 2

ఈ అధ్యాయమునకు ఇవ్వబడిన ముగింపు వర్క్‌షీట్లను చూడండి.

లింకును బ్రౌజు చేయుము

జీవనాధార గణితము **(Life Mathematics):**

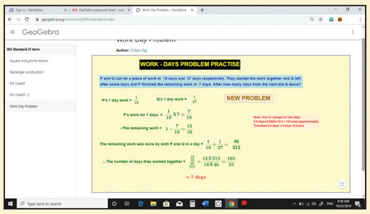
https://www.geogebra.org/m/fqxbd7rz#chapter/409575 (లేదా) QR కోడ్‌ను స్కాన్‌చేయుము

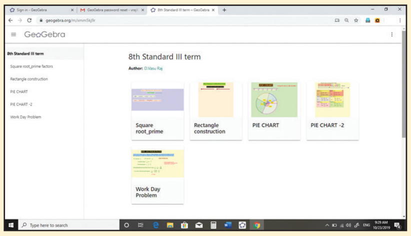
అంతర్జాల కృత్యము (ICT CORNER)

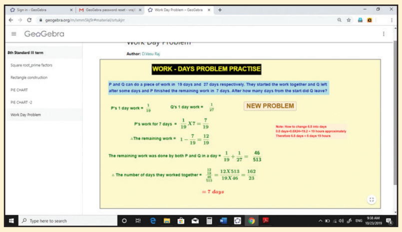
సోపానము-1 క్రింద ఇవ్వబడిన URL ను టైపు చేయండి. లేదా QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయండి. అప్పుడు 8వ తరగతి తృతీయాంతరము అనే పేరు కలిగిన జియోజీబ్రా వర్క్ షీట్ ఓపెన్ అవుతుంది. Work Day Problem అను పేరు గల వర్క్ షీట్‌ను ఎంచుకొనుము.

సోపానము-2 NEW PROBLEM అను క్రొత్త సమస్యపై క్లిక్ చేయుము. మీ గణనలను స్వీయ పరిశీలన చేసుకొనగలరు.

ఆశించు ఫలితము







సోపానము 1 సోపానము 2

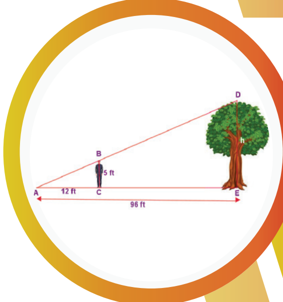
లింకును బ్రౌజు చేయుము

జీవనాధార గణితము (Life Mathematics):

https://www.geogebra.org/m/xmm5kj9r (లేదా) QR కోడ్‌ను స్కాన్‌చేయుము.

04_8th_Maths_Telugu_Life Mathematics_Chap_4.indd 154 31-07-2020 13:07:02

5 రేఖాగణితము



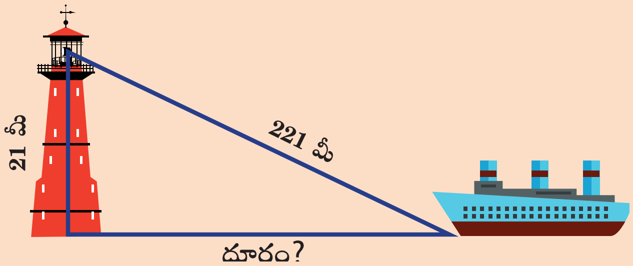
అభ్యసన లక్ష్యాలు

- ❖ సరూప మరియు సర్వసమాన త్రిభుజాల ప్రాథమిక ధర్మాలను గుర్తు చేసుకొనుట.
- ❖ త్రిభుజాల యందు సరూప మరియు సర్వసమాన త్రిభుజముల ధర్మాలను కలిగిన సిద్ధాంతములను అర్థము చేసుకొనుట మరియు వాటిని సమస్యలలో ఉపయోగించుట.
- ❖ పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును అర్థం చేసుకోవడము మరియు సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి సమస్యలను సాధించడము.
- ❖ త్రిభుజము యొక్క మధ్యగతరేఖలు,ఎత్తులు,కోణసమద్విఖండనరేఖలు మరియు లంబసమద్విఖండనరేఖలు అనుషక్తముల గూర్చి తెలుసుకొని మరియు అవగాహన చేసుకొనుట.
- ❖ వివిధ రకాల చతుర్భుజాలను నిర్మించుట.

S7T8P

5.1 పరిచయము

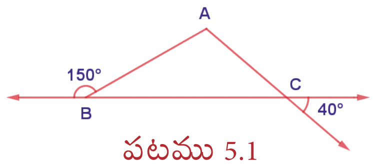
రేఖా గణితము అనునది ఆకారముల ధర్మములను మాత్రమే కాకుండా బిందువులు, వృత్తములు, త్రిభుజములు మరియు ఘనవస్తువులకు మధ్య గల సంబంధములను గూర్చి తెలుసుకొనుటకు ఉపయోగపడును. ముందు తరగతిలో మనము త్రిభుజముల యొక్క కొన్ని ప్రాథమిక ధర్మాలను గూర్చి చదివియున్నాము. వీటితో బాటు మనము పైథాగరస్ సిద్ధాంతము మరియు త్రిభుజము యొక్క మధ్యగతరేఖలు,ఉన్నతులు,కోణసమద్విఖండన రేఖలు మరియు లంబసమద్విఖండన రేఖల అనుషక్తములను గూర్చి నేర్చుకొందాము. వివిధ రకాల చతుర్భుజాలను నిర్మించుట గూర్చి నేర్చుకొందాము. ఈ ప్రథమాంతరములో మనము వాటిని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొనుట, సరూప త్రిభుజములు మరియు సర్వసమాన త్రిభుజములు గూర్చి చూడబోవుచున్నాము. ఇంకా ఇవ్వబడిన భుజములు మరియు కోణములతో చతుర్భుజములను నిర్మించుటను నేర్చుకొనబోవుచున్నాము.

ఔత్సాహిక గణితము – నిత్యజీవితములో రేఖాగణితము	
	
పైథాగరియన్ సిద్ధాంతము రెండు వస్తువుల మధ్య దూరం మరియు ఎత్తులను కనుగొనుటకు ఉపయోగపడుతుంది.	మంచిబలం మరియు స్థిరత్వం కలిగిన భవనాల నిర్మాణానికి సర్వసమాన త్రిభుజాలను ఉపయోగించుదురు.

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 155 31-07-2020 13:07:53

త్రిభుజముల యొక్క ధర్మాలను జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొనుట. క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రశ్నలకు జవాబులు వ్రాయుము:

1. ఒక త్రిభుజములోని మూడు కోణముల మొత్తము _______________ అగును.
2. ఒక త్రిభుజములోని బాహ్య కోణము _______________ కోణముల మొత్తమునకు సమానము.
3. ఒక త్రిభుజములోని ఏదేని రెండు భుజముల మొత్తము మూడవ భుజము కంటే ________ గా ఉండును.
4. ఒక త్రిభుజములో ఏదేని రెండు భుజములకు గల వ్యత్యాసము మూడవ భుజము కంటే ________ గా ఉండును.
5. పటము 4.1 నందు త్రిభుజము ABC లో $\angle A$ ఎంత?

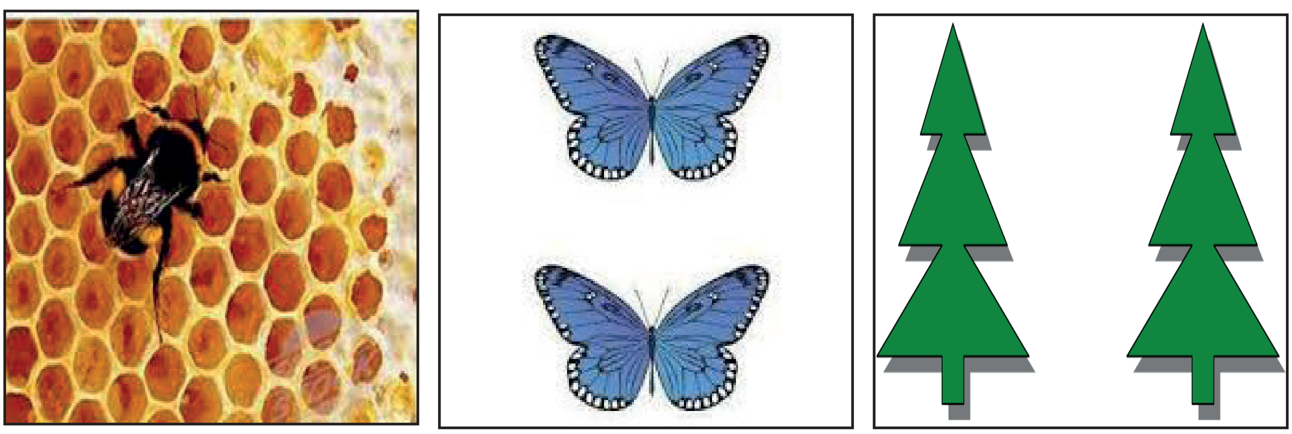


పటము 5.1

5.2 సర్వసమాన మరియు సరూప ఆకారములు

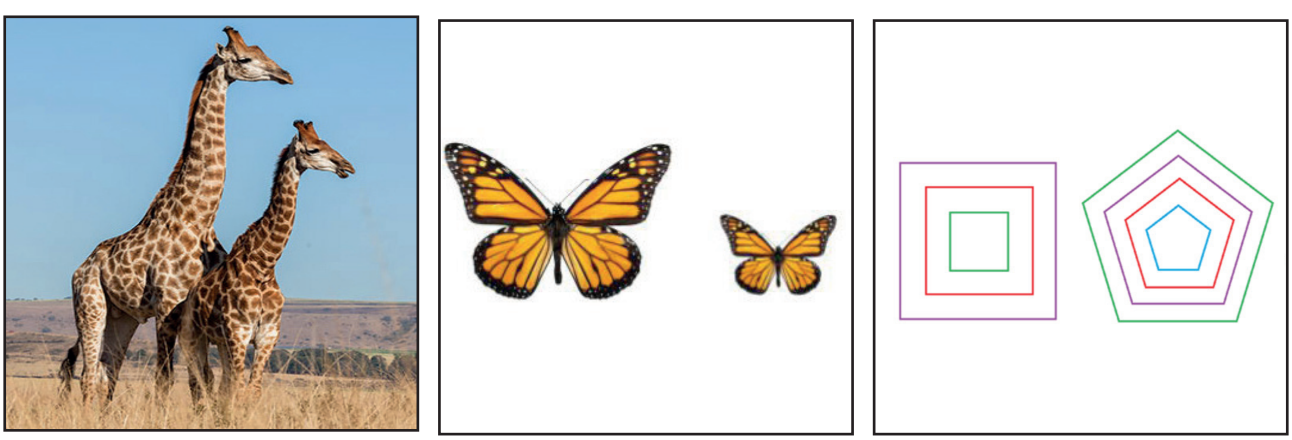
సర్వసమాన ఆకృతులు ఆకారము మరియు పరిమాణములో ఖచ్చితముగా ఒకేవిధముగా ఉంటుంది. మరోకవిధంగా చెప్పాలంటే ఆ ఆకారములను ఒకదానిపై ఒకటి ఉంచినప్పుడు ఖచ్చితంగా అమరిన అవి సర్వసమానములగును.

ఉదాహరణకు



సరూప ఆకరాలు గణితపరంగా ఒకే ఆకృతిని కలిగిఉండి పరిమాణమును వేరేవిధంగా కలిగిఉంటుంది. రెండు జ్యామితీయ ఆకరములలో ఒక దాని కొలతలు మరొకదాని సదృశ కొలతలతో ఒక స్థిర నిష్పత్తిలో ఉన్నట్లయితే ఆ ఆకృతులు సరూపములు ($\sim$) అని చెప్పవచ్చును. మరోకవిధంగా ఒక ఆకృతి దృశ్యమును పెద్దది చేసినప్పుడు (photographic enlargement) దాని యొక్క ప్రతి భాగము పెద్దది చేయబడిన ఆకృతియొక్క సదృశ భాగములకు సరూపములుగా ఉంటుందని చెప్పవచ్చును.

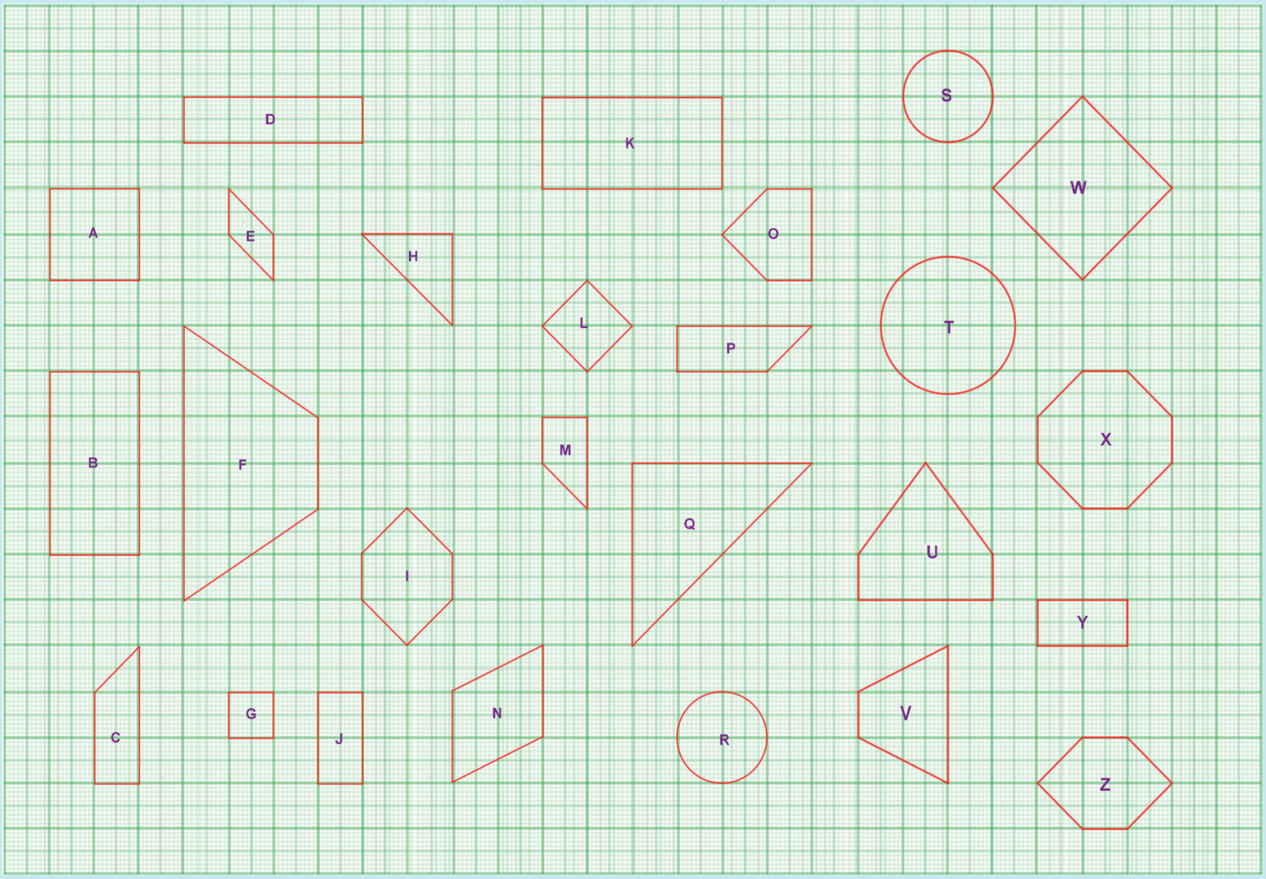
ఉదాహరణకు



05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 156 31-07-2020 13:07:53

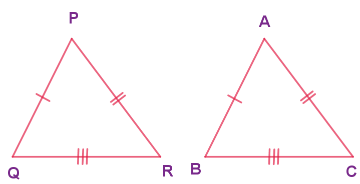
ప్రయత్నించుము

సరూప మరియు సర్వసమాన ఆకారముల జతలను గుర్తించి వాటి అక్షరముల జతలను వ్రాయుము.



5.2.1 సర్వసమాన త్రిభుజములు (Congruent Triangles)

PQR మరియు ABC త్రిభుజములను తీసుకొందాము. వాటి సదృశభాగములు సర్వసమానమైన అవి సర్వసమానములు (≡) అని చెప్పవచ్చును. అంటే PQ=AB, QR=BC మరియు PR=AC మరియు $\angle P = \angle A$, $\angle Q = \angle B$ మరియు $\angle R = \angle C$ దీనిని $\Delta PQR \equiv \Delta ABC$ గా సూచించవచ్చును.



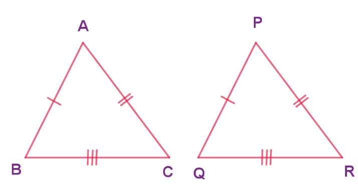
పటము 5.2

రెండు త్రిభుజములు సర్వసమానమలని నిరూపించుటకు మనకు 4 దారులు గలవు.

(i) భు-భు-భు (భుజము - భుజము-భుజము) నియమము:

ఒక త్రిభుజములోని మూడు భుజములు వేరొక త్రిభుజములోని మూడు భుజములకు అనురూపముగా ఉన్నచో ఆ త్రిభుజములు సర్వసమానములు అగును. కనుక $AB = PQ$, $BC = QR$ మరియు $AC = PR$ అయిన

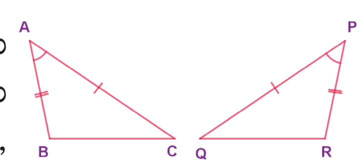
$$\Rightarrow \Delta ABC \equiv \Delta PQR.$$



పటము 5.3

(ii) భు-కో-భు (భుజము-కోణము-భుజము) నియమము:

ఒక త్రిభుజమునందలి రెండు భుజములు మరియు వాటి మధ్య కోణము మరొక త్రిభుజములోని రెండు భుజములు మరియు వాటి మధ్య కోణమునకు అనురూపముగా యుండిన ఆ రెండు త్రిభుజములు సర్వసమానములు. ఇచ్చట, $AC = PQ$, $\angle A = \angle P$ మరియు $AB = PR$ అందువలన $\Delta ACB \equiv \Delta PQR$.

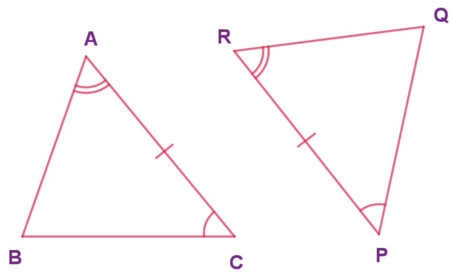


పటము 5.4

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 157 31-07-2020 13:07:55

(iii) కో-భు-కో (కోణము-భుజము-కోణము)

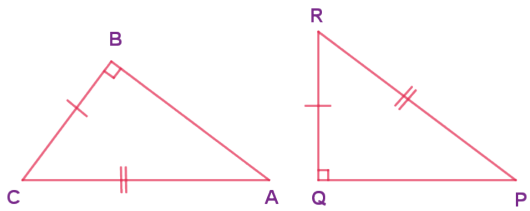
ఒక త్రిభుజము నందలి రెండు కోణములు మరియు వాటి మధ్య నున్న భుజము మరొక త్రిభుజములోని రెండు కోణములు మరియు వాటి మధ్యనున్న భుజమునకు అనురూపముగా యుండిన ఆ రెండు త్రిభుజములు సర్వసమానము. ఇచ్చుట, $\angle A = \angle R$, CA=PR మరియు $\angle C = \angle P$ కనుక $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, RQP$.



పటము 5.5

(iv) లం-క-భు (లంబకోణము-కర్ణము-భుజము) నియమము

ఒక లంబకోణ త్రిభుజములోని కర్ణము మరియు లంబకోణాన్ని ఏర్పరుచు భుజములలో ఒక భుజము, మరొక లంబకోణ త్రిభుజములోని కర్ణము మరియు లంబకోణాన్ని ఏర్పరచు భుజములలో ఒక భుజమునకు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజములు సర్వసమానము.



పటము 5.6

ఇచ్చుట, $\angle B = \angle Q = 90°$, $BC = QR$ మరియు $AC = PR$

(లంబకోణము) (భుజము) (కర్ణము)

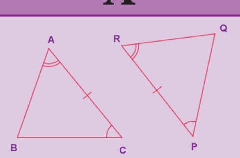
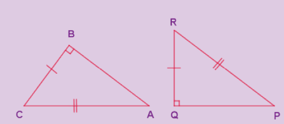
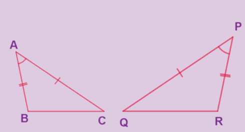
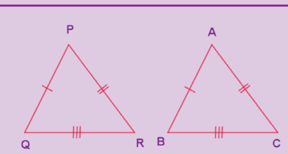
కనుక, $\Delta\, ABC \equiv \Delta\, PQR$.

సూచన

- ప్రతి రేఖా ఖండము, కోణము దానికదే సర్వసమానమగును. ఇది ప్రతిబింబ లక్షణములు అనబడును.
- రెండు త్రిభుజములు సర్వసమానమైన వాటి అనురూప భాగములు సర్వసమానమగును. దీనిని **CPCTC** ధర్మము అనబడును.
- ఒక త్రిభుజములో రెండు కోణములు సమానము అయిన దాని ఎదుటి భుజాలు సమానంగా ఉంటుంది.
- ఒక త్రిభుజములో రెండు భుజములు సమానము అయిన దాని ఎదుటి కోణములు సమానంగా ఉంటుంది.

ప్రయత్నించుము

క్రింద ఇవ్వబడిన సర్వసమాన ధర్మము కలిగిన వాటిని జతపరుచుము.

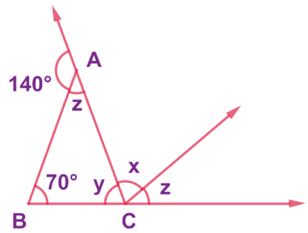
వ.సం	A	B	వ.సం	A	B
1		లం-క-భు	3		భు-కో-భు
2		భు-భు-భు	4		కో-భు-కో

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 158 31-07-2020 13:08:00

ఉదాహరణ 5.1

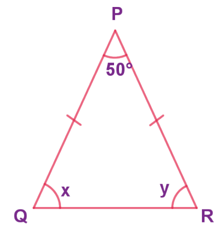
క్రింద ఇవ్వబడిన పటములలో గల తెలియని విలువలను కనుగొనుము.

(i)



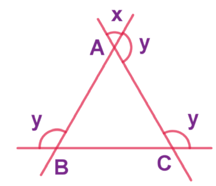
పటము 5.7(i)

(ii)



పటము 5.7(ii)

(iii)



పటము 5.7(iii)

సాధన:

(i) పటము 5.7(i) లో నుండి, $140^\circ + \angle z = 180^\circ$ (రేఖీయ ద్వయము)

$\Rightarrow \angle z = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$

ఇంకా $x + z = 70 + z$ (బాహ్యకోణ నియమము)

$\Rightarrow x = 70^\circ$

ఇంకా $z + y + 70^\circ = 180^\circ$ (Δ ABC లో కోణముల కూడిక మొత్తము నియమము)

$\Rightarrow 40^\circ + y + 70^\circ = 180^\circ$

$\Rightarrow y = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$

(ii) పటము 5.7(ii) లో నుండి, $PQ = PR$

$\Rightarrow \angle Q = \angle R$ (సమాన భుజముల ఎదుటి కోణములు సమానము)

$\Rightarrow x = y$

$\Rightarrow x + y + 50^\circ = 180^\circ$ (Δ PQR లో కోణముల కూడిక మొత్తము నియమము)

$\Rightarrow 2x = 130^\circ \quad \Rightarrow x = 65^\circ \quad \Rightarrow y = 65^\circ$

(iii) పటము 5.7(iii)లో నుండి ΔABC $\angle A = x$ లో, (శీర్షాభిముఖ కోణములు సమానము)

ఇదేవిధంగా $\angle B = \angle C = x$ (ఎందుకు?)

$\Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ (Δ ABC లో కోణముల మొత్తము నియమము)

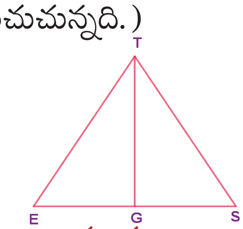
$\Rightarrow 3x = 180^\circ \quad \Rightarrow x = 60^\circ$

$\Rightarrow y = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

ఉదాహరణ 5.2

(భు-భు-భు మరియు భు-కో-భు సర్వసమాన ధర్మములను వివరించుచున్నది.)

$\angle E = \angle S$ మరియు G యొక్క మధ్యబిందువు ES అయిన, $\Delta\ GET \equiv \Delta GST$ అని నిరూపించుము.

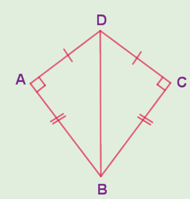


పటము 5.8

నిరూపణ:

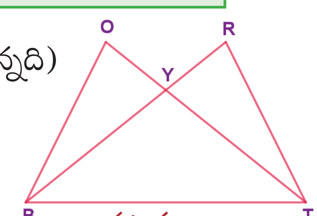
	ప్రవచనాలు	కారణములు
1	$\angle E \equiv \angle S$	ఇవ్వబడియున్నది
2	$ET \equiv ST$	కోణములు సమానము అయినప్పుడు సమానము భుజములు అవుతాయి
3	G అనునది ES యొక్క కేంద్ర బిందువు	ఇవ్వబడియున్నది
4	$EG \equiv SG$	3 ను అనుసరించి
5	$TG \equiv TG$	పరావర్తన ధర్మాలు
6	$\Delta GET \equiv \Delta GST$	భు-భు-భు (2,4,5) మరియు భు-కో-భు (2,1,4) ధర్మాలను అనుసరించి

ఆలోచించుము



పటములో $DA = DC$ మరియు $BA = BC$. త్రిభుజములు DBA మరియు DBC అనునవి అనురూపమైనవి. ఎందుకు?

ఉదాహరణ 5.3 (కో-కో-భు మరియు కో-భు-కో ధర్మములను వివరించుచున్నది)



పటము 5.9

$\angle YTB \equiv \angle YBT$ మరియు $\angle BOY \equiv \angle TRY$,
అయిన, $\Delta\ BOY \equiv \Delta\ TRY$ అని నిరూపించుము.

నిరూపణ:

	ప్రవచనాలు	కారణములు
1	$\angle BYO \equiv \angle TYR$	శీర్షకోణములు సర్వసమానము
2	$\angle YTB \equiv \angle YBT$	ఇవ్వబడియున్నది
3	$BY \equiv TY$	కోణములు సమానము అయినప్పుడు భుజములు సమానము అవుతాయి
4	$\angle BOY \equiv \angle TRY$	ఇవ్వబడియున్నది
5	$\angle OBY \equiv \angle RTY$	1 మరియు 4 ను అనుసరించి
6	$\Delta BOY \equiv \Delta TRY$	కో-భు-కో (1,3,5) ధర్మములను అనుసరించి

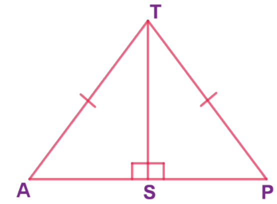
ఉదాహరణ 5.4 (లం-క-భు సర్వసమాన ధర్మములు వివరించుచున్నది)

TAP అను ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజములో, $TA = TP$ మరియు $\angle TSA = 90°$ అయిన

(i) $\triangle TAS \equiv \triangle TAP$ అగునా? ఎందుకు?

(ii) $\angle P = \angle A$ అగునా? ఎందుకు?

(iii) $AS = PS$ అగునా? ఎందుకు?



పటము 5.10

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 160 31-07-2020 13:08:13

నిరూపణ:

(i) TA = TP(కర్ణము)మరియు $\angle TSA = 90°$. TS ఉమ్మడి భుజము

RHS నియమము, కనుక $\triangle TAS \equiv \triangle TPS$

(ii) ఇవ్వబడినది TA = TP

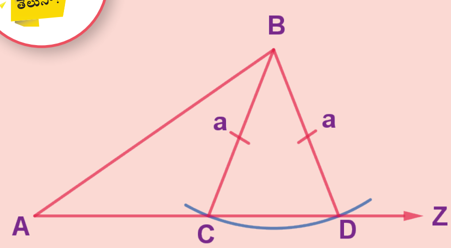
$\therefore$ $\angle P = \angle A$ (కోణములు సమానమైన భుజాలు సమానము)

(iii) (i) నుండి, $\triangle TAS \equiv \triangle TPS$,

CPCTC నుంచి

$AS = PS$

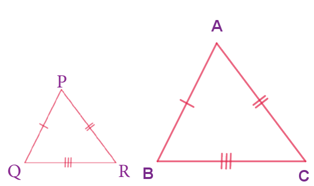
మీకు తెలుసా?



రెండు త్రిభుజములు సర్వసమానమని నిరూపించుటకు భు-భు-కో మరియు కో-భు-భు ధర్మములకు తగినట్లు అమరుట లేదు. ఇవ్వబడిన పటము ఆధారంగా వివరించబడినది. ఇక్కడ గీయబడిన త్రిభుజములు ABD మరియు ABC లో BC = BD = a అగును. మరియు, భుజము AB మరియు $\angle BAZ$ ఉమ్మడి అగును. కాని AC $\neq$AD కనుక $\triangle$ ABD అనేది $\triangle$ ABC కు సర్వసమానము కాదు. కనుక భు-భు-కో ధర్మము తగినట్లుగా లేదు.

5.2.2 సరూప త్రిభుజములు

PQR మరియు ABC త్రిభుజములు తీసుకొందాము. వాని సదృశ కోణములు సమానము మరియు సదృశ భుజములు అనుపాతములో ఉంటే ఆ త్రిభుజములును సరూపము లు ($\sim$) అంటారు. అనగా $\angle P = \angle A$, $\angle Q = \angle B$ మరియు $\angle R = \angle C$ మరియు $\frac{PQ}{AB} = \frac{PR}{AC} = \frac{QR}{BC}$ కూడ అగును. దీనిని $\Delta PQR \sim \Delta ABC$ గా సూచిస్తారు.

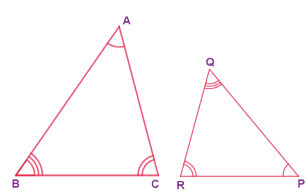


పటము 5.11

రెండు త్రిభుజములు సరూపములు అని నిరూపించుటకు 4 మార్గములు కలవు.

(i) కో-కో-కో (కోణము-కోణము-కోణము) సరూపత or కో-కో (కోణము-కోణము) సరూపత

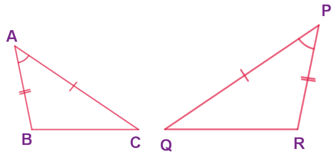
ఒక త్రిభుజములోని రెండు కోణములు వరుసగా వేరొక త్రిభుజములోని రెండు కోణములకు సమానమైన ఆ రెండు త్రిభుజాలు సరూపాలు అగును. పటము 4.2లో $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$ కావున, Δ ABC $\sim$ Δ PQR



పటము 5.12

(ii) భు-కో-భు (భుజము-కోణము-భుజము) సరూపత

ఒక త్రిభుజములోని రెండు భుజములు వేరొక త్రిభుజములోని రెండు భుజములకు అనుపాతములో ఉండి ఆ రెండు భుజములను కలిగియున్న కోణములు సమానమగును. పటము 4.3లో $\frac{AC}{PQ} = \frac{AB}{PR}$ మరియు $\angle A = \angle P$ కావున Δ ACB $\sim$ Δ PQR.

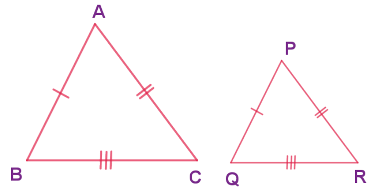


పటము 5.13

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 161 31-07-2020 13:08:14

(iii) భు-భు-భు (భుజము - భుజము-భుజము) సరూపత:

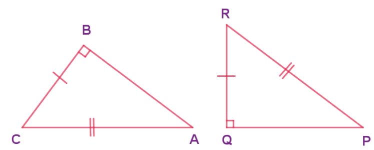
రెండు త్రిభుజముల అనురూప భుజములు ఒకే నిష్పత్తిలో ఉన్న యెడల అవి సరూపములగును. అందువలన $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$, అయిన $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.



పటము 5.14

(iv) లం-క-భు (లంబకోణము-కర్ణము-భుజము) సరూపత:

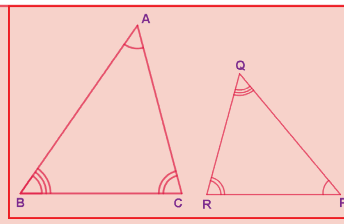
ఒక లంబకోణ త్రిభుజపు కర్ణము మరియు ఒక భుజము వరుసగా మరొక లంబకోణ త్రిభుజపు కర్ణము మరియు ఒక భుజానికి సమాన నిష్పత్తిలో ఉంటే అవి సరూపములగును. కావున, $\angle B = \angle Q = 90^\circ$ మరియు $\frac{AC}{PR} = \frac{BC}{QR}$ అయిన, $\Delta ABC \sim \Delta PQR$.



పటము 5.15

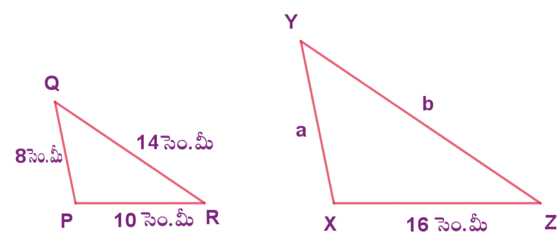
మీకు తెలుసా?

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$ అయిన ΔABC యొక్క భుజములు AB, BC మరియు AC, ΔABC యొక్క భుజములు PQ, QR. మరియు PR లకు అనురూప భుజములు అగును. ఇంకా కోణములు A, B మరియు C లకు అనురూప కోణములు క్రమముగా P, Q మరియు R అగును. సరూప త్రిభుజములకు క్రమము మారకుండా పేరు పెట్టుట ముఖ్యమగును. ఉదాహరణకు $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ అయిన, ΔBAC అనునది ΔPQR కు సరూపముగా ఉండదు.



ఉదాహరణ 5.5

పటము 5.16లో, $\Delta PQR \sim \Delta XYZ$ అయిన a మరియు b లను కనుగొనుము.



పటం. 5.16

సాధన:

ఇచ్చుట $\Delta PQR \sim \Delta XYZ$

$\therefore$ వాటి యొక్క అనురూప భుజములు అనుపాతంలో ఉంటుంది.

$$\Rightarrow \frac{PQ}{XY} = \frac{QR}{YZ} = \frac{PR}{XZ}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{a} = \frac{14}{b} = \frac{10}{16}$$

$$\Rightarrow \frac{8}{a} = \frac{10}{16}$$

$$\Rightarrow a = \frac{8 \times 16}{10} = \frac{128}{10}$$

a = 12.8 సెం.మీ

ఇంకా, $\frac{14}{b} = \frac{10}{16}$

$$\Rightarrow b = \frac{14 \times 16}{10} = \frac{224}{10}$$

$\therefore$ $b = 22.4$ సెం.మీ

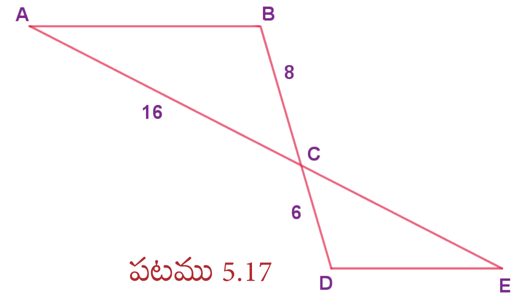
సూచన

- అన్ని వృత్తములు మరియు చతురస్రములు ఒకదానికొకటి సరూపములగును.
- అన్ని దీర్ఘచతురస్రములు ఎల్లప్పుడు సరూపములు కాదు.
- రెండు కోణములు సర్వసమానములు మరియు సంపూరకములయిన అవి లంబకోణములగును.
- అన్ని సర్వసమాన త్రిభుజములు సరూపములగును.
- సరూపతకు ~ అనే గుర్తును ఉపయోగిస్తారు.

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 162 31-07-2020 13:08:16

ఉదాహరణ 5.6 (కో-కో సరూపత ధర్మమును వివరించుట)

పటము 5.17 లో $\angle ABC \equiv \angle EDC$ మరియు ΔCDE యొక్క చుట్టుకొలత 27 ప్రమాణములు, అయిన $AB \equiv EC$ అని నిరూపించుము.



పటము 5.17

నిరూపణ:

	ప్రవచనము	కారణములు
1	$\angle ABC \equiv \angle EDC$	ఇవ్వబడియున్నది
2	$\angle BCA \equiv \angle DCE$	శీర్షాభిముఖ కోణములు సమానము
3	$\Delta ABC \sim \Delta EDC$	కో-కో నియమము అనుసరించి (1, 2)
4	$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{DC} = \frac{AC}{EC}$	3 నుండి అనురూప భుజములు అనుపాతంలో ఉండును.

$\Rightarrow \frac{8}{6} = \frac{16}{EC} \Rightarrow EC = 12$ ప్రమాణములు.

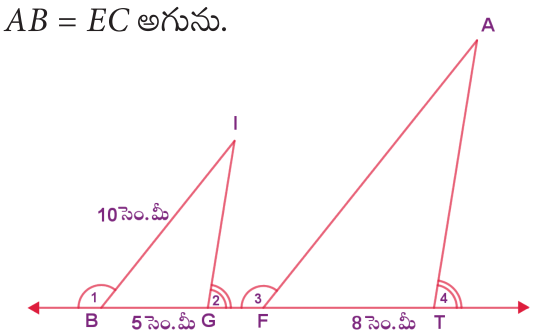
ΔCDE యొక్క చుట్టుకొలత 27 ప్రమాణములు అని ఇవ్వబడినది.

$\therefore \; ED + DC + EC = 27 \Rightarrow ED + 6 + 12 = 27 \Rightarrow ED = 27-18 = 9$ ప్రమాణములు.

$\therefore \; \frac{AB}{9} = \frac{8}{6} \Rightarrow AB = 12$ ప్రమాణములు. అందువలన $AB = EC$ అగును.

ఉదాహరణ 5.7 (కో-కో సరూపత ధర్మాన్ని వివరించుట)

ఇవ్వబడిన పటము 5.18, లో $\angle 1 \equiv \angle 3$ మరియు $\angle 2 \equiv \angle 4$ అయిన, $\Delta BIG \sim \Delta FAT$ అని నిరూపించుము. ఇంకా FA ను కనుగొనుము.



పటము 5.18

నిరూపణ:

	ప్రవచనము	కారణములు
1	$\angle 1 \equiv \angle 3$	ఇవ్వబడియున్నది
2	$\angle IBG \equiv \angle AFT$	సర్వసమాన కోణముల సంపూరకములు సర్వసమానము.
3	$\angle 2 \equiv \angle 4$	ఇవ్వబడియున్నది
4	$\angle IGB \equiv \angle ATF$	సర్వసమాన కోణముల సంపూరకములు సర్వసమానము.
5	$\Delta BIG \sim \Delta FAT$	కో-కో నియమము అనుసరించి (2, 4)

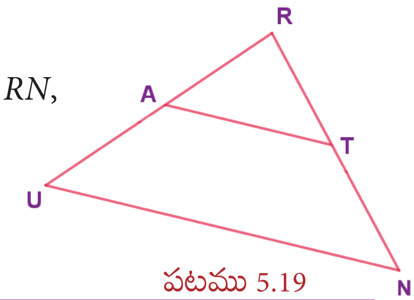
ఇంకా వాటి యొక్క అనురూప భుజములు అనుపాతంలో ఉంటుంది.

$$\Rightarrow \frac{BI}{FA} = \frac{BG}{FT} \Rightarrow \frac{10}{FA} = \frac{5}{8} \Rightarrow FA = \frac{10 \times 8}{5} = \frac{80}{5} = 16 \text{ సెం.మీ}$$

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 163 31-07-2020 13:08:20

ఉదాహరణ 5.8 (భు-కో-భు సరూపత ధర్మాన్ని వివరించును)

A యొక్క కేంద్ర బిందువు RU మరియు T యొక్క కేంద్ర బిందువు RN, అయిన $\Delta RAT \sim \Delta RUN$ అని నిరూపించుము.



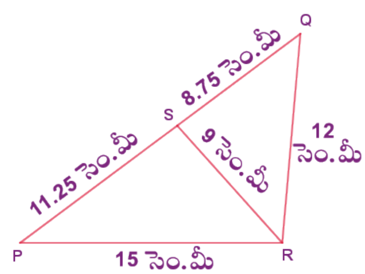
పటము 5.19

నిరూపణ:

	ప్రవచనము	కారణములు
1	$\angle ART = \angle URN$	ΔRAT మరియు ΔRUN యొక్క సామాన్య కోణము $\angle R$ అగును.
2	$RA = AU = \frac{1}{2}RU$	RU యొక్క కేంద్ర బిందువు A అగును.
3	$RT = TN = \frac{1}{2}RN$	RN యొక్క కేంద్ర బిందువు T అగును.
4	$\frac{RA}{RU} = \frac{RT}{RN} = \frac{1}{2}$	2 మరియు 3 ల నుండి భుజములు అనుపాతములో ఉండును.
5	$\Delta RAT \sim \Delta RUN$	భు-కో-భు నియమమును ప్రకారం (1 మరియు 4)

ఉదాహరణ 5.9 (భు-భు-భు సరూపత ధర్మాన్ని వివరించును)

పటము 4.20లో $\Delta PQR \sim \Delta PRS$ అని నిరూపించుము.



పటము 5.20

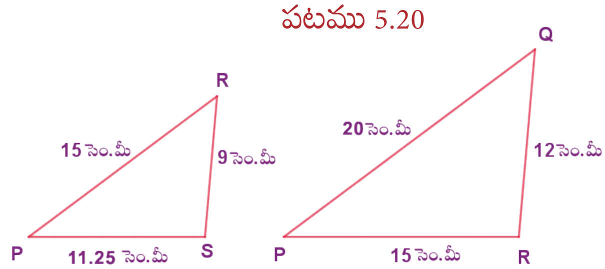
సాధన:

ఇచ్చట, $\frac{PQ}{PR} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$

$\frac{PR}{PS} = \frac{15}{11.25} = \frac{4}{3}$

ఇంకా, $\frac{QR}{RS} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$

$\frac{PQ}{PR} = \frac{PR}{PS} = \frac{QR}{RS}$

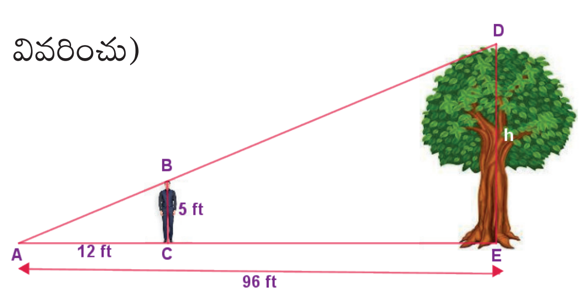


అనగా, వాటి అనురూప భుజములు అనుపాతంలో ఉన్నవి.

$\therefore$ భు-భు-భు నియమము అనుసరించి $\Delta PQR \sim \Delta PRS$ అగును.

ఉదాహరణ 5.10 (లం-క-భు సరూపత నియమమును వివరించు)

ఒక వ్యక్తి యొక్క ఎత్తు మరియు నీడతో ఏర్పడిన త్రిభుజాకారము, ప్రక్కనున్న చెట్టు యొక్క ఎత్తు మరియు నీడతో ఏర్పడిన త్రిభుజమునకు సరూపముగా ఉన్నట్లయితే ఆ చెట్టు యొక్క ఎత్తు ఎంత?



పటము 5.21

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 164 31-07-2020 13:08:23

సాధన:

ఇచ్చుట, $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ (ఇవ్వబడియున్నది)

$\therefore$ వాటి యొక్క అనురూప భుజములు అనుపాతంలో ఉండును.(లం-క-భు నియమమునననుసరించి)

$$\therefore \quad \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

$$\Rightarrow \frac{12}{96} = \frac{5}{h}$$

$$\Rightarrow h = \frac{5 \times 96}{12} = 40 \text{ అడుగులు.}$$

$\therefore$ చెట్టు యొక్క ఎత్తు 40 అడుగులు అగును.

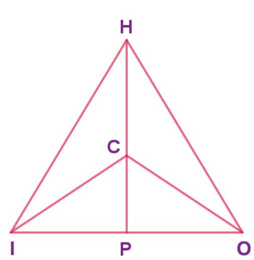
కృత్యము

ఉపాధ్యాయుడు కార్డ్‌బోర్డు (లేదా) చార్ట్ పేపరు నుంచి వీలైనన్ని సరూప మరియు సర్వసమాన త్రిభుజములను కత్తిరించి తీసుకొనుము. త్రిభుజములలో సూచించిన కొలతలను ఆధారముగా చేసుకొని ఏ త్రిభుజములు సరూపములు లేదా సర్వసమానములు అని కనుగొనమని విద్యార్థులకు సూచించుము.

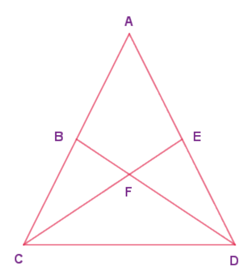
అభ్యాసము 5.1

1. క్రింద ఇవ్వబడియున్న వాటికి సరైన సమాధానమును ఎంచుకొని ఖాళీలను పూరించుము.
(అనుపాతము, సరూపము, అనురూపము, సర్వసమానము, ఆకారము, వైశాల్యము, సమానము)
   (i) సరూప త్రిభుజము యొక్క అనురూప భుజములు ________ గా ఉండును.
   (ii) సరూప త్రిభుజములు ఒకే ________ కలిగియుండును. కాని ఒకే కొలతలు కలిగియుండుట అవసరము లేదు.
   (iii) సరూప త్రిభుజములలో ________ భుజములు, సమాన కోణములకు ఎదురుగా అమరును.
   (iv) $\equiv$ గుర్తు అనునది ________ త్రిభుజములను గుర్తించుటకు ఉపయోగపడును.
   (v) $\sim$ గుర్తు అనునది ________ త్రిభుజములు గుర్తించుటకు ఉపయోగపడును.

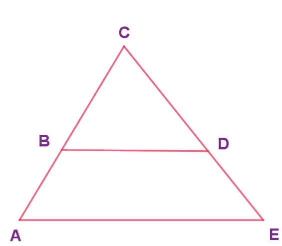
2. ఇవ్వబడిన పటములో $\angle CIP \equiv \angle COP$ మరియు $\angle HIP \equiv \angle HOP$ అయిన $IP \equiv OP$ అని నిరూపించుము.



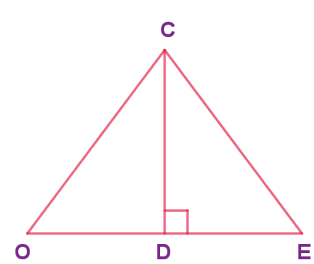
3. ఇవ్వబడియున్న పటములో, $AC \equiv AD$ మరియు $\angle CBD \equiv \angle DEC$ అయిన, $\Delta BCF \equiv \Delta EDF$ అని నిరూపించుము.



4. ఇవ్వబడియున్న పటములో, భూమి BD గా కలిగిన ΔBCD ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము, $\angle BAE \equiv \angle DEA$ అయిన $AB \equiv ED$ అని నిరూపించుము.

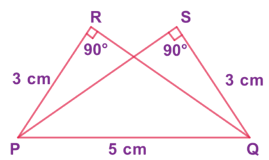


5. ఇవ్వబడియున్న పటములో D అనునది, OE యొక్క మధ్య బిందువు మరియు $\angle CDE = 90°$ అయిన $\Delta ODC \equiv \Delta EDC$ అని నిరూపించుము.

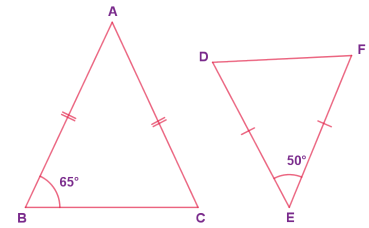


05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 165 31-07-2020 13:08:25

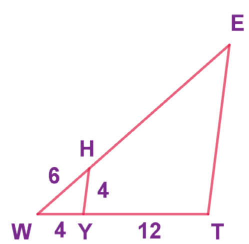
6. $\triangle PRQ \equiv \triangle QSP$ అగునా? ఎందుకు?



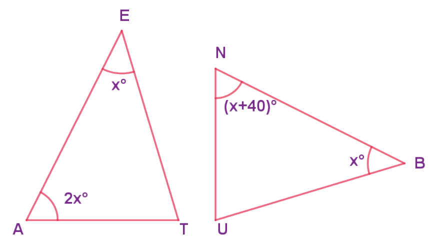
7. ఇవ్వబడిన పటము నుండి $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ అని నిరూపించుము.



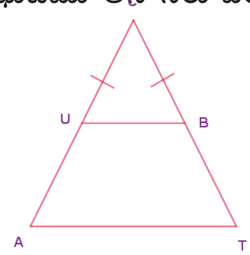
8. ఇవ్వబడిన పటములో $YH \parallel TE$ $\Delta WHY \sim \Delta WET$ అని నిరూపించుము, HE మరియు TE లను కనుగొనుము.



9. ఇవ్వబడిన పటము నుండి $\Delta EAT \sim \Delta BUN$ అయిన, అన్ని కోణ విలువలను కనుగొనుము.



10. ఇవ్వబడిన పటములో $UB \parallel AT$ మరియు $CU \equiv CB$ అయిన, $\Delta CUB \sim \Delta CAT$ మరియు ΔCAT అనేది ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము అని నిరూపించుము.



బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

11. రెండు సరూప త్రిభుజములు ఎల్లప్పుడు ________ ను కలిగియుండును.

(A) అల్పకోణము (B) అధిక కోణము (C) లంబకోణము (D) సరిపోయే కోణము

12. త్రిభుజములు PQR మరియు XYZ లలో $\frac{PQ}{XY} = \frac{QR}{ZX}$ అయిన అవి సరూప త్రిభుజములుగా ఉండుటకు

(A) $\angle Q = \angle Y$ (B) $\angle P = \angle X$ (C) $\angle Q = \angle X$ (D) $\angle P = \angle Z$

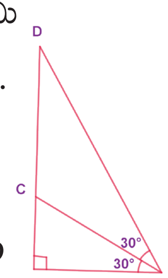
13. 15 మీ ఎత్తుగల ఒక జెండా స్థంభము ఉదయము 10 a.m కు 3మీ పొడవు గల నీడను ఏర్పరచినది. అదే సమయమున ఒక భవనము నీడ యొక్క పొడవు 18.6 మీ అయిన భవనము యొక్క ఎత్తు ______ అగును.

(A) 90 మీ (B) 91 మీ (C) 92 మీ (D) 93 మీ

14. $\Delta ABC \sim \Delta PQR$, $\angle A = 53^\circ$ మరియు $\angle Q = 77^\circ$ అయిన, $\angle R$ అనునది ______.

(A) 50° (B) 60° (C) 70° (D)80°

15. క్రింద ఇవ్వబడిన పటము నుండి ఏది సరైనది?

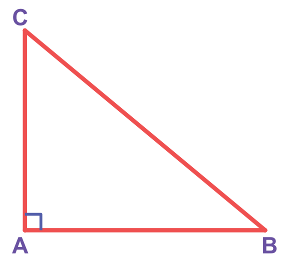


(A) $AB = BD$ (B) $BD < CD$ (C) $AC = CD$ (D) $BC = CD$

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 166 31-07-2020 13:08:29

5.3 పైథాగరియన్ సిద్ధాంతము (పైథాగరస్ సిద్ధాంతము)

పురాతన గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్త పైథాగరస్ (క్రీ.పూ 570– 495 (BCE) పేరు పెట్టబడిన పైథాగరియన్ సిద్ధాంతము లేదా పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ఖచ్చితంగా మొత్తం గణిత శాస్త్రములో ముఖ్యమైన సిద్ధాంతాలలో ఒకటి మరియు ప్రసిద్ధమైనది. ఈ సిద్ధాంతాన్ని పలువురు అనేక విధాలుగా నిరూపించారు. బహుశా గణిత సిద్ధాంతాలలో కెల్లా ఇది చాలా వైవిధ్యమైనది, ఇందులో వేలాది సంవత్సరాల నాటి రేఖాగణిత మరియు బీజగణిత నిరూపణలు ఉన్నాయి.



పటము 5.22

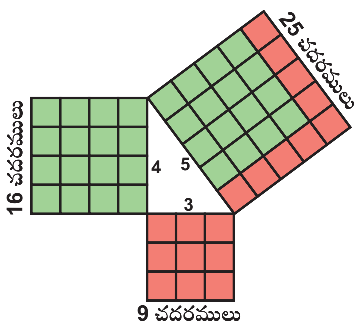
సిద్ధాంత వివరణ

ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము యొక్క వర్గము మిగిలిన రెండు భుజముల వర్గముల మొత్తమునకు సమానము.

ΔABC లో $BC^2 = AB^2 + AC^2$

దృశ్యరూప విశ్లేషణ:

ఇవ్వబడిన పటములో 3 ప్రమాణములు, 4 ప్రమాణములు మరియు 5 ప్రమాణములు కొలతలు గల త్రిభుజ భుజములు ఉన్నవి. ఈ బాగుగా ఇవ్వబడిన 3–4–5 త్రిభుజము నుండి పైథాగరియన్ సిద్ధాంతం యొక్క అర్థాన్ని సులభముగా చూడవచ్చు మరియు అర్థం చేసుకోవచ్చును.



పటము 5.23

ఇచ్చిన పటములో కొలతలు 3 ప్రమాణములు మరియు 4 ప్రమాణములను లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క కాళ్ళు లేదా భుజములు అంటారు. కొలత 5 ప్రమాణములు గల భుజమును కర్ణము అంటారు. లంబకోణ త్రిభుజములో అతిపెద్ద భుజము కర్ణము అవుతుందని గమనించవలయును.

ఇచ్చట 5 ప్రమాణములు కొలత గల భుజము మీద 5×5=25 ప్రమాణ చదరములు. 3 ప్రమాణములు కొలత గల భుజము మీద 3×3=9ప్రమాణ చదరములు. 4 ప్రమాణములు కొలత గల భుజము మీద 4×4=16 ప్రమాణ చదరములు ఉన్నట్లు సులభంగా గమనించవచ్చును. పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము మీది చదరాల సంఖ్య మిగిలిన రెండు భుజాల మీద ప్రమాణ చదరాల మొత్తమునకు సమానముగా కలదు. ఆశ్చర్యంగా ఉంది కదూ?

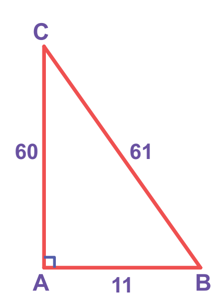
అవును, మనము గమనించినది.

5×5 = 3×3+4×4

i.e. 25 = 9+16 (సత్యము)

5.4 పైథాగరస్ సిద్ధాంత విపర్యయము

ఒక త్రిభుజములో పెద్ద భుజము యొక్క వర్గము మిగిలిన రెండు భుజముల యొక్క వర్గముల మొత్తమునకు సమానమైన ఆ త్రిభుజము లంబకోణ త్రిభుజము అగును.



పటము 5.24

ఉదాహరణ:

త్రిభుజము ABC లో

$AB^2 + AC^2 = 11^2 + 60^2 = 3721 = 61^2 = BC^2$

కావున, ΔABC లంబకోణ త్రిభుజము అగును.

మీకు తెలుసా?

(i) పైథాగరియన్ సంబంధాలను తృప్తిపరచు కొన్ని ప్రత్యేక సంఖ్యల సమితులు (a, b, c) లను 'పైథాగరియన్ త్రికములు' అంటారు. **ఉదాహరణ:** (3, 4, 5) అనునది పైథాగరియన్ త్రికములు.

(ii) **k** అనునది 1 కంటే పెద్దదైన ధన పూర్ణాంకము, (a, b, c) అనునది ఒక పైథాగరియన్ త్రికము అయిన (ka, kb, kc) ను కూడా ఒక పైథాగరియన్ త్రికము అంటారు.

ఉదాహరణలు:

k	(3,4,5)	(5,12,13)
2k	(6,8,10)	(10,24,26)
3k	(9,12,15)	(15,36,39)
4k	(12,16,20)	(20,48,52)

పై పట్టిక నుండి మనము గమనించినది పైథాగరియన్ త్రికములను **k** తో గుణించడం ద్వారా మనము అనంతమైన పైథాగరియన్ త్రికములు పొందవచ్చును.

పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి మనము ఇప్పుడు కొన్ని ఉదాహరణలతో కూడిన సమస్యలను సాధించుదాము.

ఉదాహరణ 5.11

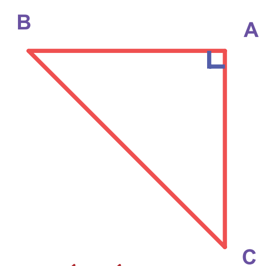
పటములో $AB \perp AC$

a) ΔABC అనునది ఏ రకమైన త్రిభుజము?

b) ΔABC లో AB మరియు AC లను ఏమని పిలుస్తారు?

c) ΔABC లో CB ను ఏమని పిలుస్తారు?

d) $AC = AB$ అయిన $\angle B$ మరియు $\angle C$ ల కొలతలు?



పటము 5.25

సాధన:

a) ΔABC లో $\angle$A అనునది లంబకోణము ($AB \perp AC$)

b) ΔABC లో AB మరియు AC లు భుజములగును.

c) CB ను కర్ణము అంటారు.

d) $\angle B + \angle C = 90^\circ$ మరియు సమాన భుజములకు ఎదురుగా ఉన్న కోణములు సమానము. కావున,

$$\angle B = \angle C = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

ఉదాహరణ 5.12

లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క కొలతలు 5సెం.మీ, 12సెం.మీ మరియు 13సెం.మీగా ఉందునా?

సాధన:

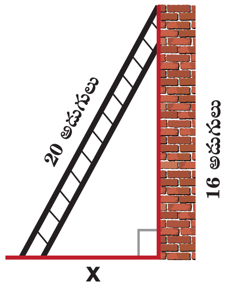
$a = 5$, $b = 12$ మరియు $c = 13$

$a^2 + b^2 = 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2 = c^2$

పైథాగరస్ సిద్ధాంత విపర్యయము నుండి ఇవ్వబడిన త్రిభుజము కొలతలు లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క కొలతలు అగును.

ఉదాహరణ 5.13

20 అడుగుల ఎత్తు గల నిచ్చెన 16 అడుగుల ఎత్తుగల గోడపై వాలి ఉన్నది. అయితే నిచ్చెన అడుగు భాగం గోడ అడుగు నుండి ఎంత దూరంలో ఉన్నది?



పటము 5.26

సాధన:

నిచ్చెన అడుగు భాగము, గోడ మరియు భూమి కలిసి ఒక లంబకోణ త్రిభుజమును ఏర్పరచి మరియు నిచ్చెన కర్ణముగా ఉన్నది. పటము నుండి పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం,

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 168 31-07-2020 13:08:32

$$20^2 = 16^2 + x^2$$

$$\Rightarrow 400 = 256 + x^2$$

$$\Rightarrow \quad x^2 = 400 - 256 = 144 = 12^2 \quad \Rightarrow \quad x = 12$$ అడుగులు.

నిచ్చెన అడుగు భాగము నుండి గోడకు మధ్య గల దూరం 12 అడుగులు అగును.

కృత్యము

1. పైథాగరియన్ త్రికములను ఈ క్రింది విధముగా మనము వ్రాయవచ్చును.

m మరియు **n** అనునవి రెండు ధనాత్మక పూర్ణ సంఖ్యలు అయిన (m > n):

(a, b, c) అనునవి పైథాగరియన్ త్రికములు అయిన $a = m^2 - n^2, b = 2mn$ మరియు $c = m^2 + n^2$

(ఆలోచించుము). పట్టికను పూర్తిచేయుము.

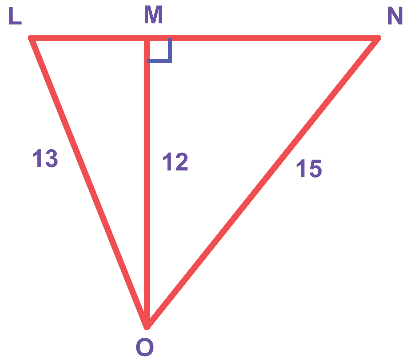
m	n	$a = m^2 - n^2$	$b = 2mn$	$c = m^2 + n^2$	పైథాగరియన్ త్రికములు
2	1	___	___	___	______
3	2	___	___	___	______
4	1	15	8	17	(15, 8, 17)
7	2	45	28	53	(45, 28, 53)

2. కర్ణము 85గా గల లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క భుజాలను పూర్ణసంఖ్యలో కనుగొనుము.

ఉదాహరణ 5.14

పటము నుండి LM, MN, LN మరియు $\Delta\, LON$ యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన:



పటము 5.27

ΔLMO నుండి, పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం,

$$LM^2 = OL^2 - OM^2$$

$$\Rightarrow LM^2 = 13^2 - 12^2 = 169 - 144 = 25 = 5^2$$

$\therefore \; LM = 5$ ప్రమాణములు

ΔNMO నుండి, పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం,

$$MN^2 = ON^2 - OM^2$$

$$= 15^2 - 12^2 = 225 - 144 = 81 = 9^2$$

$\therefore \; MN = 9$ ప్రమాణములు.

కనుక, $LN = LM + MN = 5 + 9 = 14$ ప్రమాణములు.

$\Delta\, LON$ యొక్క వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times$ భూమి $\times$ ఎత్తు చదరపు ప్రమాణములు.

$$= \frac{1}{2} \times LN \times OM$$

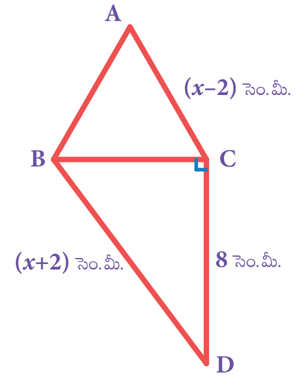
$$= \frac{1}{2} \times 14 \times 12 = 84$$ చదరపు ప్రమాణములు.

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 169 31-07-2020 13:08:38

ఉదాహరణ 5.15

ΔABC ఒక సమబాహు త్రిభుజము మరియు BCD లంబకోణ త్రిభుజములో CD పొడవు 8 సెం.మీ. ΔABC. సమబాహు త్రిభుజం యొక్క భుజమును మరియు BD పొడవును కనుగొనుము.

సాధన:



పటము 5.28

Δ ABC అనునది ఒక సమబాహు త్రిభుజము, పటము నుండి AB=BC=AC= $(x-2)$సెం.మీ.

$\therefore$ ΔBCD నుండి, పైథాగరస్ సిద్ధాంతం ప్రకారం

$$BD^2 = BC^2 + CD^2$$

$$\Rightarrow (x+2)^2 = (x-2)^2 + 8^2$$

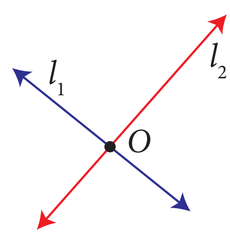
$$x^2 + 4x + 4 = x^2 - 4x + 4 + 8^2$$

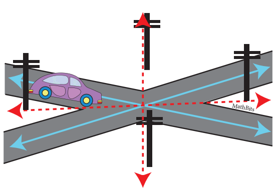
$$\Rightarrow 8x = 8^2$$

$$\Rightarrow x = 8 \text{ సెం.మీ.}$$

$\therefore$ ΔABC సమబాహు త్రిభుజము యొక్క భుజము 6 సెం.మీ మరియు BD =10. సెం.మీ

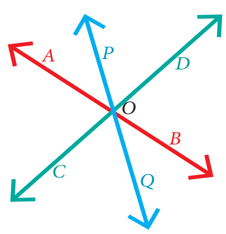
5.5 అనుషక్త బిందువు

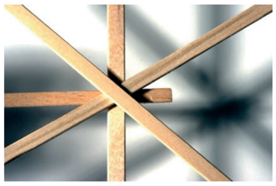




ఖండన రహదారులు

సమతలమునందు రెండు రేఖలు ఖండించుకొనిన, ఆ రేఖలను ఖండన రేఖలు అంటారు. ఇక్కడ l_1 మరియు l_2 రేఖలు బిందువు O వద్ద ఖండించుకొనును. కావున, l_1 మరియు l_2 రేఖల ఖండన బిందువు O అంటారు..



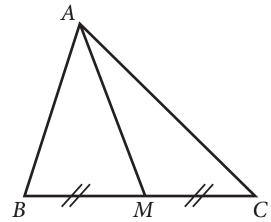


చెక్క ముక్కల అనుషక్తాలు

సమతలమునందు మూడు లేదా అనేక రేఖలు ఒకే బిందువు వద్ద ఖండించుకొనిన అటువంటి రేఖలను అనుషక్త రేఖలు అంటారు.

పై పటములో $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$ మరియు $\overleftrightarrow{PQ}$ లు అనుషక్త రేఖలు మరియు O ను అనుషక్త బిందువు అంటారు.

5.6 త్రిభుజ మధ్యగతరేఖలు



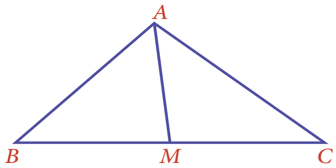
పటము 5.29

త్రిభుజములో ఏదైనా ఒక శీర్షమునుండి ఎదుటి భుజము యొక్క మధ్య బిందువుకు గీయబడిన రేఖాఖండమును మధ్యగతరేఖ అంటారు.

పటములో $\overline{\text{AM}}$ అనునది $\Delta\, ABC$ యొక్క మధ్యగతరేఖ.

$\Delta\, ABC$ లో మరిన్ని మధ్యగతరేఖలు కలవా? త్రిభుజమునందు మూడు శీర్షములు కలవు. కావున, త్రిభుజములో మూడు మధ్యగతరేఖలు గుర్తించవచ్చు.

ఉదాహరణ 5.16



పటము 5.30

పటములో ABC ఒక త్రిభుజము మరియు AM ఒక మధ్యగతరేఖలు. BM = 3.5 సెం.మీ అయిన భుజము BC యొక్క పొడవును కనుగొనుము.

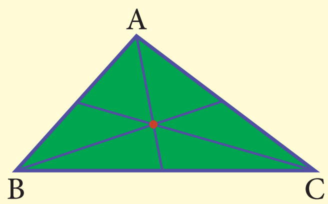
సాధన:

AM మధ్యగతరేఖ $\Rightarrow M$ అనునది BC యొక్క మధ్యబిందువు.

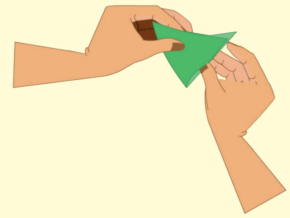
BM = 3.5 సెం.మీ, BC = పొడవుకు రెండింతలు $BM = 2 \times 3.5$ సెం.మీ $= 7$ సెం.మీ.

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 170 31-07-2020 13:08:41

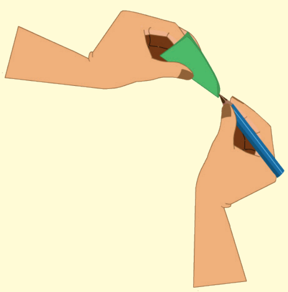
కృత్యము



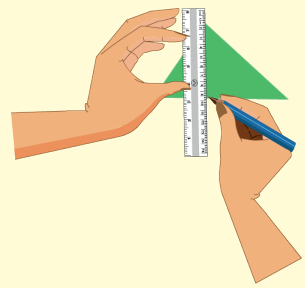
1. త్రిభుజము ఆకారములో గల కాగితాన్ని తీసుకొనెదము. (ప్రారంభానికి కావున అల్పకోణ త్రిభుజమును తీసుకొనుము) దీని పేరు ABC గా తీసుకొనుము.



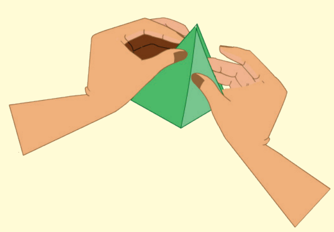
2. C మీదకు వచ్చునట్లు కాగితమును A ద్వారా పోతూ BC ను కలిసే రేఖ వెంబడి మడుచుము. గీత గీచి మరియు కాగిత మడతను విప్పుము.



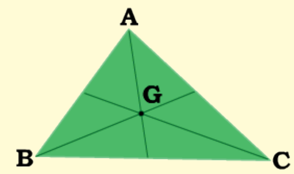
3. BC యొక్క మధ్యబిందువు M అని గుర్తించుము.



4. ప్రస్ఫుటముగా చూడవలెనన్నా ఇప్పుడు మధ్యగతము AM ను గీయుము. (లేక మడతను అలాగే వదిలివేయుము)



5. అదేవిధముగా, మిగిలిన రెండు మధ్యగతరేఖలను మడిచి మరియు గీయుము.

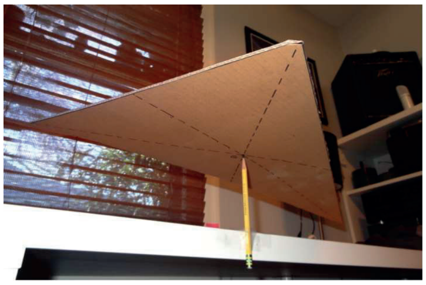


6. మధ్యగతరేఖలు ఒకే బిందువు గుండా పోవుచున్నవా?

ఇప్పుడు ఈ కృత్యమును గురుకోణత్రిభుజమునకు మరియు లంబకోణ త్రిభుజమునకు చేయుము? దీని నుండి ఏమి గమనించారు?

త్రిభుజములోని మూడు మధ్యగతరేఖలు అనుషక్తాలు.

5.6.1 గురుత్వకేంద్రం (Centroid)



త్రిభుజములోని మూడు మధ్యగతరేఖల అనుషక్త బిందువును **గురుత్వకేంద్రం** అంటారు. దీనిని ఆంగ్ల అక్షరము **G** చే సూచిస్తారు. ఇదే త్రిభుజము యొక్క ద్రవ్యరాశి కేంద్రముగా చెప్పబడుతుంది. ఈ నిజాన్ని సులభముగా ధ్రువీకరించవచ్చు. త్రిభుజాకారములో గల గట్టి కాగితాన్ని తీసుకొనుము. ఈ బిందువు వద్ద వేలితో లేదా పెన్సిల్ మొనతో పట్టుకొన్న సమతుల్యమగును.

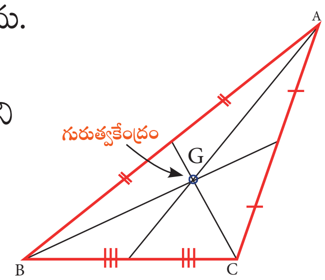
05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 171 31-07-2020 13:08:41

గురుత్వకేంద్రాన్ని కనుగొనడానికి మూడు మధ్యగతరేఖలను మడచవెలనా? ఇప్పుడు మీరు క్రింది ప్రశ్నకు అన్వేషించి సమాధానములను కనుగొనుము:

(i) త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రాన్ని ఏ విధముగా కనుగొంటారు?
(ii) గురుత్వకేంద్రము శీర్షముల నుండి సమాన దూరములో కలదా?
(iii) త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రం ఎల్లప్పుడూ త్రిభుజము లోపలే ఉంటుందా?
(iv) క్రింది త్రిభుజముల యొక్క మధ్యగతముల ప్రత్యేకతలు కలవా?
(a) సమద్విబాహు త్రిభుజము (b) సమబాహు త్రిభుజము?

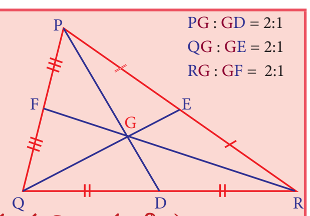
త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రం ధర్మాలు

త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రము యొక్క స్థానము కొన్ని ధర్మాలను ప్రదర్శించును.



పటము 5.31

- ఇది ఎల్లప్పుడూ త్రిభుజము లోపల ఉంటుంది.
- ఇది ఏదైనా త్రిభుజాకార లామినాకు గురుత్వాకర్షణ కేంద్రముగా పనిచేస్తుందని ముందే చూశాము.
- ప్రతి శీర్షము నుండి G వద్ద కు గీయబడిన రేఖలు మూడు త్రిభుజములు $\triangle ABG$, $\triangle BCG$ మరియు $\triangle CAG$. లను ఏర్పరుస్తుంది. త్రిభుజములోని మధ్యగతరేఖలు సమాన వైశాల్యము గల మూడు చిన్న త్రిభుజాలుగా విభజిస్తాయి.

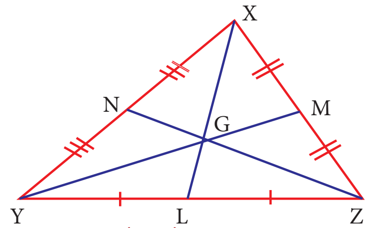


త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రము ప్రతి మధ్యగతరేఖను రెండు విభాగాలుగా విభజించును. ఒకటి శీర్షానికి దగ్గరగా మరొకటి దాని కంటే రెండు రెట్లు ఎక్కువ దూరంలో ప్రతి మధ్యగతాన్ని గురుత్వకేంద్రము 2:1 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది. (ఉదాహరణకు GD అనునది PD లో 1/3 వ వంతు) (పేపరు మడతల ద్వారా నిరూపించుటకు ప్రయత్నించండి.)

ఉదాహరణ 5.17

పటములో G అనునది త్రిభుజము XYZ యొక్క గురుత్వకేంద్రము

(i) GL = 2.5సెం.మీ అయిన XL యొక్క పొడవును కనుగొనము.
(ii) YM = 9.3 సెం.మీ అయిన GM యొక్క పొడవును కనుగొనము.



పటము 5.32

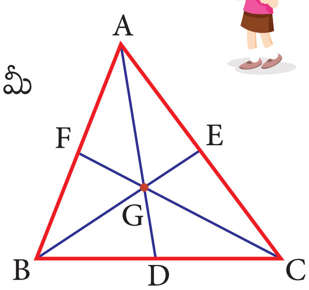
సాధన:

(i) G గురుత్వకేంద్రము కావున, $XG : GL = 2 : 1$, $XG : 2.5 = 2 : 1$.
$\therefore 1 \times (XG) = 2 \times (2.5) \Rightarrow XG = 5$ సెం.మీ.
XL పొడవు $= XG + GL = 5 + 2.5 = 7.5$ సెం.మీ

(ii) YG రెండు భాగాలైన GM ఒక భాగమగును.
అనగా, YM మూడు భాగాలు.
3 భాగాలు 9.3 సెం.మీ అయిన. GM (ఒక భాగము) $9.3 \div 3 = 3.1$ సెం.మీ

ఉదాహరణ 5.18

ABC ఒక త్రిభుజము మరియు G అనునది గురుత్వకేంద్రము. AD= 12 సెం.మీ, BC= 8 సెం.మీ మరియు BE=9 సెం.మీ అయిన $\triangle BDG$ యొక్క చుట్టుకొలతను కనుగొనుము.



పటము 5.33

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 172 31-07-2020 13:08:42

సాధన:

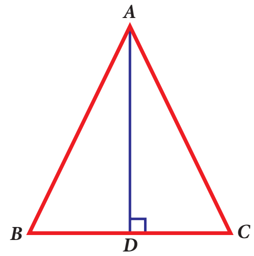
AD = 12 సెం.మీ మరియు ⇒ GD = AD లో $\frac{1}{3}$ = $\frac{1}{3}(12) = 4$ సెం.మీ

BE = 9 సెం.మీ. ⇒ BG = BE లో $\frac{2}{3}$ = $\frac{2}{3}(9) = 6$ సెం.మీ

BC యొక్క మధ్యబిందువు D ⇒ BD = BC లో $\frac{1}{2}$ $(8) = 4$ సెం.మీ

∴ ΔBDG యొక్క చుట్టుకొలత = BD+GD+BG = 4+4+6 = 14 సెం.మీ

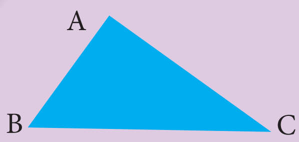
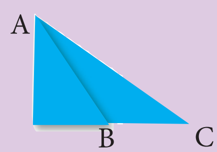
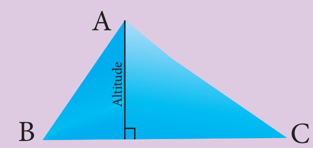
5.7 త్రిభుజము యొక్క ఎత్తు (Altitude of a triangle)



పటము 5.34

త్రిభుజములో ఏదైనా ఒక శీర్షము నుండి దాని ఎదుటి భుజానికి గీయబడిన లంబమును ఎత్తు అంటారు. ఎత్తు ఒక త్రిభుజము యొక్క ఆధారముతో లంబకోణాన్ని ఏర్పరుస్తుంది. $\triangle ABC$ లో, $AD \perp BC$ AD ఒక ఎత్తు.

కృత్యము

		
1. అల్పకోణ త్రిభుజము ఆకారములో కాగితాన్ని కత్తిరించి తీసుకొనుము. దీని పేరు ABC	2. త్రిభుజములోని ఒక భుజము అదే భుజముపై ఉండునట్లు మడిచిన, శీర్షాన్ని కలిగిన మడత భుజానికి వ్యతిరేకముగా ఉండును.	3. ఇప్పుడు ఎత్తు AM ను గీచిన, ప్రస్ఫుటముగా కనబడును.

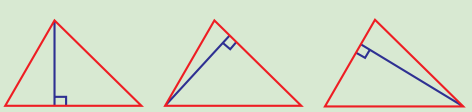
ఇదేవిధముగా, మిగిలిన భుజాల యొక్క ఎత్తులను కనుగొనవచ్చును. మీ ఉపాధ్యాయుల సహాయముతో లంబకోణ త్రిభుజము మరియు అధికకోణ త్రిభుజము యొక్క ఎత్తులను కనుగొనుము.

త్రిభుజము యొక్క మూడు ఎత్తులు అనుషక్తాలు.

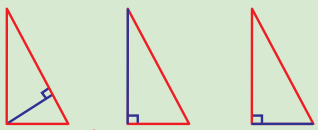
ఈ అనుషక్త బిందువును లంబకేంద్రము అంటారు. దీనిని ఆంగ్ల అక్షరము H' తో సూచిస్తారు.

ఆలోచించుము

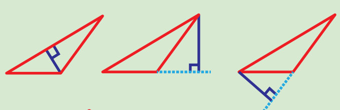
1. **లఘుకోణ త్రిభుజములో** మూడు ఎత్తులు త్రిభుజము లోపల ఉండును. లంబకేంద్రము ఎక్కడ కలదు? త్రిభుజము లోపల ఉందా? వెలుపల ఉందా?


లఘు కోణ త్రిభుజము యొక్క ఎత్తు

2. **లంబకోణ త్రిభుజములో,** కర్ణమునకు లంబముగా ఎత్తు త్రిభుజములో ఉండును. మిగిలిన రెండు ఎత్తులు త్రిభుజము కాళ్ళు. ఈ సందర్భములలో లంబకేంద్రాన్ని గుర్తించగలమా?

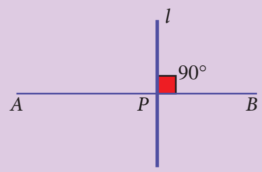
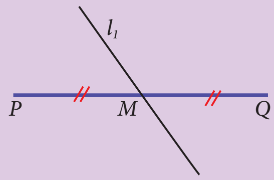
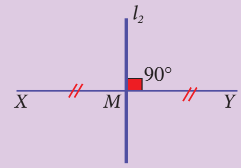

లంబ కోణ త్రిభుజము యొక్క ఎత్తు

3. **అధికకోణ త్రిభుజములో** ఎత్తు అధిక శీర్షానికి కలుపబడింది, త్రిభుజములో కలదు. మరియు అల్పశీర్షాలకు కలుపబడిన ఎత్తులు త్రిభుజములోపల ఉంటాయి. ఈ సందర్భములో లంబకేంద్రాన్ని గుర్తించగలవా?

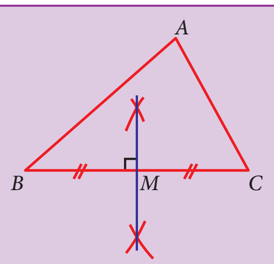
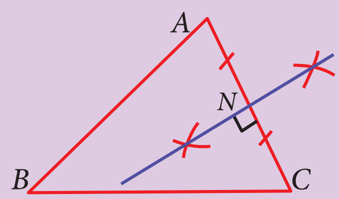
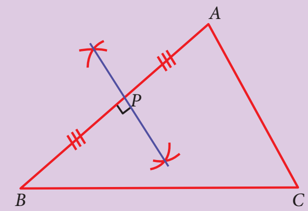

అధిక కోణ త్రిభుజము యొక్క ఎత్తు

5.8 త్రిభుజము యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖలు (Perpendicular Bisectors of a Triangle)

క్రింది ఆలోచనలను గుర్తుచేసుకోండి.

లంబరేఖ	సమద్విఖండనరేఖ	లంబసమద్విఖండనరేఖ
		
$\overline{AB}$ రేఖాఖండము l అనునది $\overline{AB}$ కు లంబరేఖ. లంబము యొక్క పాదము P ఇక్కడ $\overline{AP} \neq \overline{PB}$	$\overline{PQ}$ రేఖాఖండము l_1 అనునది $\overline{PQ}$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖ $\overline{PQ}$ యొక్క మధ్యబిందువు M l_1 అనునది $\overline{PQ}$ కు లంబముగా ఉండనవసరము లేదు.	$\overline{XY}$ రేఖాఖండము l_2 అనునది $\overline{XY}$ యొక్క సమద్విఖండన రేఖ. l_2 అనునది $\overline{XY}$ కు లంబముగా కలదు. $\overline{XY}$ కు మధ్యబిందువు M

త్రిభుజము ABC తీసుకొనుము. త్రిభుజమునకు మూడు భుజములు కలవు. ప్రతి భుజానికి లంబసమద్విఖండనరేఖ క్రింది విధముగా కలవు:

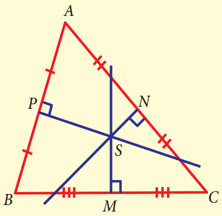
		
భుజము BC కి లంబసమద్విఖండనరేఖ	భుజము AC కి లంబసమద్విఖండన రేఖ	భుజము AB కి లంబసమద్విఖండనరేఖ
$\overline{BC}$ యొక్క మధ్యబిందువు M M వద్ద లంబసమద్విఖండరేఖ కలదు.	$\overline{AC}$ యొక్క మధ్యబిందువు N N వద్ద లంబసమద్విఖండరేఖ కలదు..	$\overline{AB}$ యొక్క మధ్యబిందువు P P వద్ద లంబసమద్విఖండరేఖ కలదు.

త్రిభుజములోని మూడు భుజాల యొక్క మూడు లంబసమద్విఖండన రేఖలు అనుషక్తాలు.

కృత్యము

కాగితము మడవడం ద్వారా లంబసమద్విఖండన అనుషక్త బిందువును గుర్తించవచ్చు. ప్రయత్నించుము.

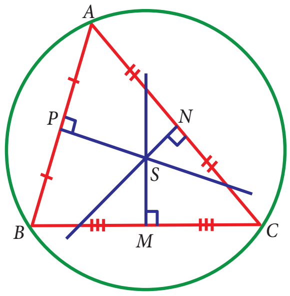
త్రిభుజములోని భుజముల యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖలు అనుషక్తాలు.



గురుత్వకేంద్రమునకు ముందు చేసిన కృత్యము వలె, లఘు, గురు, లంబ, సమద్విబాహు మరియు సమబాహు త్రిభుజములకు ప్రయోగాన్ని పునరావృతం చేయండి. ఈ సందర్భములో సమబాహు త్రిభుజములో ఎటువంటి ప్రత్యేకత కనబడినది?

5.8.1 పరివృత్త కేంద్రం (Circumcentre)

త్రిభుజములోని భుజాల లంబసమద్విఖండన రేఖల అనుషక్త బిందువును పరివృత్త కేంద్రము అంటారు. దీనిని ఆంగ్ల అక్షరము 'S' తో సూచిస్తారు.



పటము 5.35

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 174 31-07-2020 13:08:46

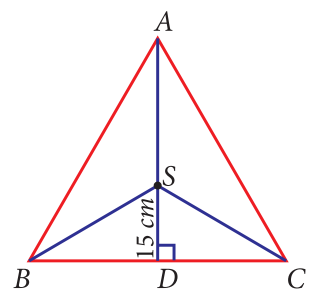
దానిని ఎందుకలా పిలవాలి? ఎందుకనగా భుజముల యొక్క లంబసమద్విఖండనల అనుషక్త బిందువును కేంద్రముగా తీసుకొని గీసిన వృత్తము ఖచ్చితముగా త్రిభుజముల శీర్షాల గుండా పోవును. ఈ విధముగా పరివృత్త కేంద్రము త్రిభుజము యొక్క శీర్షములకు సమాన దూరములో ఉండును.

కృత్యము

క్రింద ఇవ్వబడినవి, కాగితము మడత పెట్టి నిజమా అని చేసి చూడుము.

1. అల్పకోణ త్రిభుజము యొక్క పరివృత్త కేంద్రము త్రిభుజము లోపల ఉండును.
2. అధికకోణ త్రిభుజము యొక్క పరివృత్త కేంద్రము త్రిభుజము వెలుపల ఉండును.
3. లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క పరివృత్త కేంద్రము కర్ణము యొక్క మధ్యబిందువుపై ఉండును.

ఉదాహరణ 5.19



పటము 5.36

ΔABC లో, S అనునది పరివృత్తకేంద్రం, BC = 72 సెం.మీ మరియు DS = 15 సెం.మీ. పరివృత్తం యొక్క వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము.

సాధన:

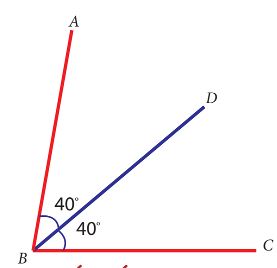
ΔABC యొక్క పరివృత్త కేంద్రం S , అది A, B మరియు C ల నుండి సమాన దూరములో కలదు. AS = BS = CS = పరివృత్తము యొక్క వ్యాసార్ధము BC యొక్క లంబసమద్విఖండన AD , కావున $BD = \frac{1}{2} \times BC = \frac{1}{2} \times 72 = 36$ సెం.మీ

BDS లంబకోణ త్రిభుజమునందు, పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ప్రకారము

$BS^2 = BD^2 + SD^2 = 36^2 + 15^2 = 1521 = 39^2 \Rightarrow BS = 39$ సెం.మీ

$\therefore \Delta ABC$ యొక్క పరివృత్తం యొక్క వ్యాసార్ధము 39 సెం.మీ

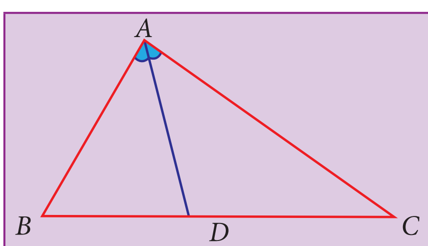
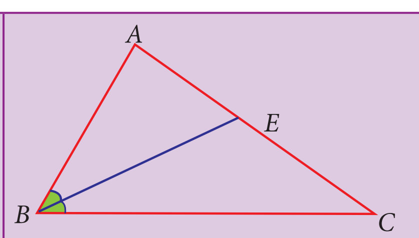
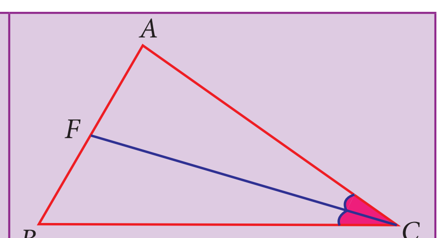
5.9 త్రిభుజము యొక్క కోణ సమద్విఖండనరేఖలు (Angle Bisectors of a Triangle)



పటము 5.37

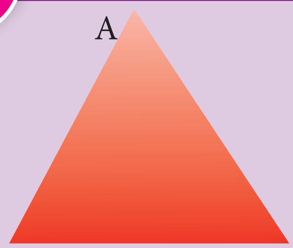
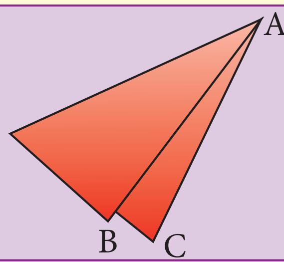
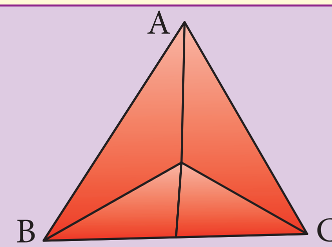
కోణసమద్విఖండన గూర్చి ముందు తరగతులలో నేర్చుకొన్నాము. ఇవ్వబడిన కోణమును ఒక రేఖచే లేదా ఒక కిరణముచే రెండు సమకోణములుగా విభజించబడిన, దానిని కోణసమద్విఖండన అంటారు. పటములో, రేఖ BD , $\angle$ABC ను సమద్విఖండన చేసెను. అందువలన $\angle ABD = \angle CBD$

త్రిభుజము ABC తీసుకొనుము. త్రిభుజములో ఎన్ని కోణములు కలవు? మూడు కోణములు. ప్రతి కోణానికి కోణ సమద్విఖండన క్రింది విధముగా గీయవచ్చును.

		
$\angle$A ను AD, రెండు సమాన కోణాలుగా విభజిస్తుంది. కావున, AD ని $\angle$A యొక్క కోణసమద్విఖండనరేఖ అంటారు.	$\angle$B ను BE, రెండు సమాన కోణాలుగా విభజిస్తుంది. కావున,BE ని $\angle$B యొక్క కోణసమద్విఖండనరేఖ అంటారు.	$\angle$C ను CF, రెండు సమాన కోణాలుగా విభజిస్తుంది. కావున, CF ని $\angle$C యొక్క కోణసమద్విఖండనరేఖ అంటారు.

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 175 31-07-2020 13:08:47

కృత్యము

		
1. త్రిభుజాకారములో ఒక కాగిత ముక్క కట్టింగును తీసుకొనుము. దానికి ABC అని పేరు పెట్టుము.	2. త్రిభుజములోని ఒక శీర్షము ఆధారముగా తీసుకొని మరియు వాటి ఎదుటి భుజాలు కలిసినట్టుగా మడుచుము. ఇదేవిధముగా మిగిలిన రెండు కోణాలకు కోణసమద్విఖండనలను కనుగొనుము.	3. మడతల యొక్క జాడలు కనుగొనుము. ఒకే బిందువు ద్వారా కోణసమద్విఖండన రేఖలు ప్రయాణించునా?

ఇప్పుడు అధికకోణ త్రిభుజమునకు మరియు లంబకోణ త్రిభుజమునకు ఇదే విధముగా కృత్యమును చేయుము. నీవు గమనించిన విషయాలను తెల్పుము.

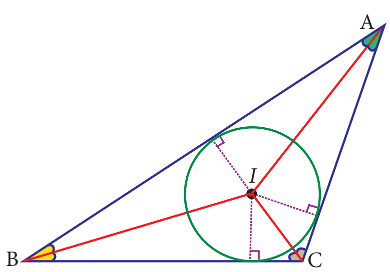
అన్ని సందర్భాలలో కోణ సమద్విఖండన రేఖలు ఒకే బిందువు ద్వారా ప్రయాణించునా?

త్రిభుజములోని మూడు కోణసమద్విఖండన రేఖలు అనుషక్తాలు.

5.9.1 అంతరవృత్త కేంద్రము (Incentre)

త్రిభుజ కోణసమద్విఖండన రేఖల అనుషక్త బిందువును అంతర వృత్తకేంద్రము అంటారు. దీనిని ఆంగ్ల అక్షరము 'I' తో సూచిస్తారు.

దానిని ఎందుకలా పిలవాలి? ఎందుకనగా కోణసమద్విఖండనల అనుషక్త బిందువును కేంద్రముగా తీసుకొని గీసిన వృత్తము మూడు భుజాలను అంతరముగా తాకును. అంతర కేంద్రము నుండి భుజములకు గీచిన లంబరేఖల పొడవులు సమానముగా ఉండును. ఈ విధముగా త్రిభుజములోని భుజాలకు సమాన దూరములో అంతరవృత్త కేంద్రము ఉండును.



పటము 5.38

ఉదాహరణ 5.20

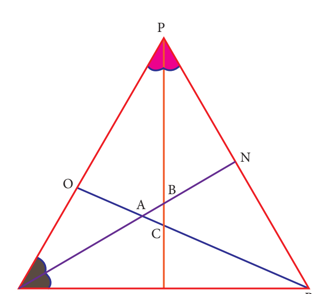
త్రిభుజము PQR నందు అంతరవృత్త కేంద్రమును గుర్తించుము.

సాధన:

కోణసమద్విఖండనరేఖల అనుషక్త బిందువును అంతరకేంద్రము అంటారు.

ఇక్కడ, $\angle P$ మరియు $\angle Q$ ల కోణసమద్విఖండనలు PM మరియు QN లు, B వద్ద ఖండించుకొనును. కావున

త్రిభుజము PQR యొక్క అంతర వృత్తకేంద్రము 'B'



పటము 5.39

(త్రిభుజము ΔABC యొక్క అంతర వృత్త కేంద్రము A మరియు C అవుతుందా? ఎందుకు?)

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 176 31-07-2020 13:08:48

మీకు తెలుసా?

త్రిభుజముల యొక్క రకముల ఆధారముగా గురుత్వకేంద్రము, లంబకేంద్రము, పరివృత్తకేంద్రము మరియు అంతర వృత్త కేంద్రము యొక్క స్థానాలు మారుతుంటాయి. క్రింది విషయాలు వీటిని గుర్తించడంలో మరియు గుర్తుంచుకోవడంలో మనకు సహాయపడుతాయి.

(i) అన్ని రకాల త్రిభుజములకు గురుత్వకేంద్రం (G) మరియు అంతర వృత్త కేంద్రము (I) త్రిభుజము లోపల ఉంటాయి.

(ii) లంబకేంద్రము (H) అనునది అల్పకోణ త్రిభుజములో లోపల, అధికకోణ త్రిభుజములో బాహ్యముగా మరియు లంబకోణ త్రిభుజములో 90^0 కలిగిన శీర్షమునందుండును.

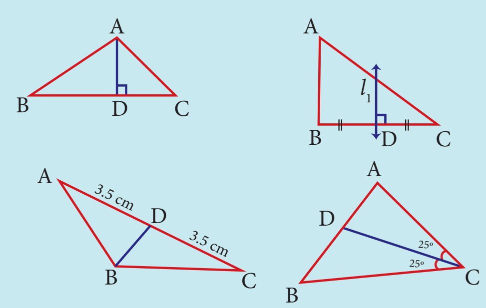
(iii) పరివృత్త కేంద్రం (S) అనునది అల్పకోణ త్రిభుజములో లోపల, అధికకోణ త్రిభుజములో బాహ్యంగా మరియు లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణముపై కలిగియుండును.

ప్రయత్నించుము

ప్రతి త్రిభుజములో ఇవ్వబడిన వాటిలో గుర్తించుము (మధ్యగతరేఖ,ఎత్తు,లంబసమద్విఖండనరేఖ, కోణసమద్విఖండనరేఖ)

(i) AD =__________ (ii) l_1 =__________

(iii) BD =__________ (iv) CD =__________



కృత్యము

1. కాగితము మడత పెట్టడం ద్వారా, సమబాహు త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రం, లంబకేంద్రం, పరివృత్తకేంద్రం మరియు అంతరకేంద్రమును కనుగొనుము. అవి కలుస్తాయా?
2. కాగితము మడత పెట్టడం ద్వారా, ఒక త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రము (G), లంబకేంద్రము (H) పరివృత్తకేంద్రము (S) మరియు అంతర కేంద్రము (I) లను కనుగొనుము. G,H,S మరియు I లను కలుపుము. అవి సరేఖీయాలా?

అభ్యాసము 5.2

1. **ఈ క్రింది ఖాళీలను పూరింపుము :**

(i) ΔPQR లో, $PR^2 = PQ^2 + QR^2$ అయిన ΔPQR లో లంబకోణము కలిగిన శీర్షము _________.

(ii) 'l' మరియు 'm' భుజములు మరియు 'n' కర్ణముగా గల లంబకోణ త్రిభుజములో l^2 = _________.

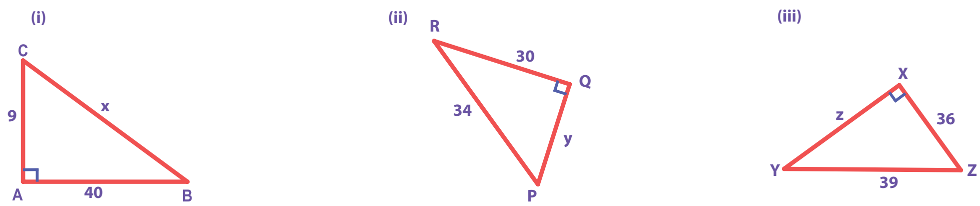
(iii) ఒక త్రిభుజము యొక్క భుజములు 5:12:13 నిష్పత్తిలో ఉండిన ఆ త్రిభుజము _________ త్రిభుజము అగును.

(iv) త్రిభుజము యొక్క మధ్యగతరేఖలు ____________ వద్ద ఖండించుకొనెను.

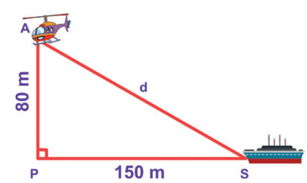
(v) త్రిభుజము యొక్క గురుత్వకేంద్రము మధ్యగతరేఖను____________ నిష్పత్తిలో విభజించును.

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 177 31-07-2020 13:08:48

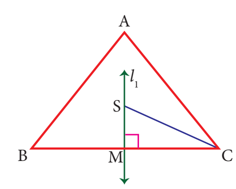
2. **సత్యమా లేక అసత్యమా తెలుపుము.**
   (i) 8, 15, 17 అనునది ఒక పైథాగరియన్ త్రికము.
   (ii) లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము అనునది అతిపెద్ద భుజము.
   (iii) ఒక త్రిభుజములో గురుత్వకేంద్రము మరియు అంతరకేంద్రము త్రిభుజము లోపల ఉండును.
   (iv) త్రిభుజములోని గురుత్వకేంద్రం, లంబకేంద్రం మరియు అంతరకేంద్రం అన్నియూ సరేఖీయాలు.
   (v) అంతరకేంద్రము త్రిభుజములోని శీర్షములకు సమానదూరములో ఉంటాయి.
3. ఇవ్వబడిన భుజముల కొలతలు లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క భుజముల కొలతలు అగునా అని పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి సరి చూడుము.
   (i) 8,15,17 (ii) 12,13,15 (iii) 30,40,50 (iv) 9,40,41 (v) 24,45,51
4. ఇవ్వబడిన త్రిభుజములలో తెలియని భుజము పొడవు కనుగొనుము.



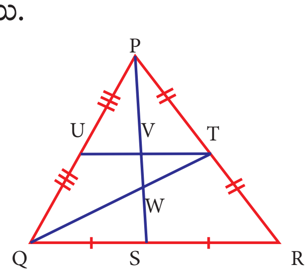
5. ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజములోని సమభుజములు ఒక్కొక్కటి 13సెం.మీ మరియు భూమి 24 సెం.మీ అయిన ఎత్తును కనుగొనుము.
6. ప్రక్క పటములో హెలికాప్టర్ మరియు ఓడ మధ్య దూరమును కనుగొనుము.



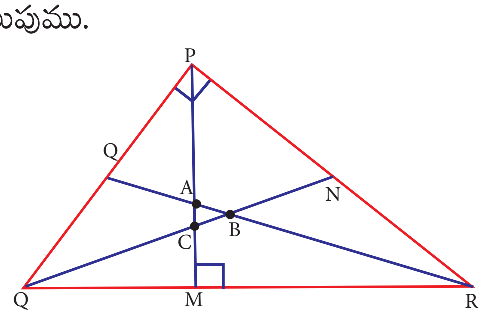
7. త్రిభుజము ABC లో BC యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖ l_1 BC=12 సెం.మీ మరియు SM=8 సెం.మీ అయిన CS యొక్క పొడవును కనుగొనుము.



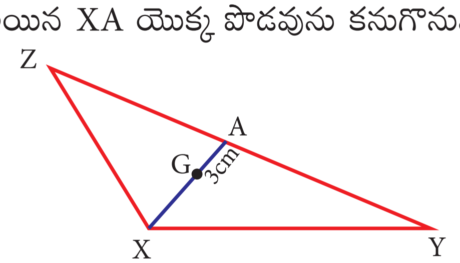
8. త్రిభుజము PQR యొక్క గురుత్వకేంద్రమును గుర్తించుము.



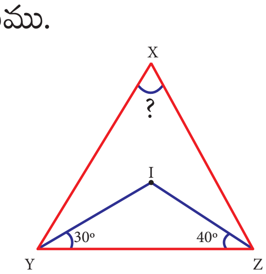
9. త్రిభుజము PQR నందు లంబకేంద్రమును తెలుపుము.



10. ఇవ్వబడిన పటమునందు YZ యొక్క మధ్యబిందువు A మరియు త్రిభుజము XYZ యొక్క గురుత్వకేంద్రము G. GA యొక్క పొడవు 3 సెం.మీ అయిన XA యొక్క పొడవును కనుగొనుము.



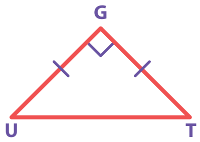
11. త్రిభుజము XYZ యొక్క అంతరకేంద్రము I అయిన, $\angle IYZ = 30^\circ$ మరియు $\angle IZY = 40^\circ$, $\angle YXZ$ ను కనుగొనుము.



05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 178 31-07-2020 13:08:50

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

12. Δ GUT అనునది ఒక సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజము అయిన $\angle TUG$ ______.
   (A) 30° (B) 40° (C) 45° (D) 55°



13. లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క భుజములు 12 సెం.మీ మరియు 16 సెం.మీ అయిన కర్ణము _________.
   (A) 28 సెం.మీ (B) 20 సెం.మీ (C) 24 సెం.మీ (D) 21 సెం.మీ

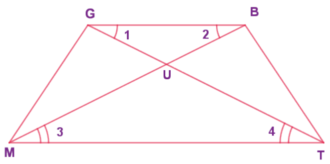
14. దీర్ఘ చతురస్రము యొక్క పొడవు 21 సెం.మీ మరియు కర్ణము 29 సెం.మీ అయిన దాని వైశాల్యం _________ సెం.మీ^{2}.
   (A) 609 సెం.మీ^{2} (B) 580 సెం.మీ^{2} (C) 420 సెం.మీ^{2} (D) 210 సెం.మీ^{2}

15. లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క భుజములు 5:12:13 నిష్పత్తిలో మరియు దాని చుట్టుకొలత 120 ప్రమాణములుగా ఉండిన భుజాల కొలతలు ____________.
   (A) 25, 36, 59 (B) 10,24,26 (C) 36, 39, 45 (D) 20,48,52

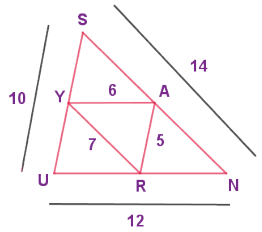
అభ్యాసము 5.3

ఇతర అభ్యసన సమస్యలు

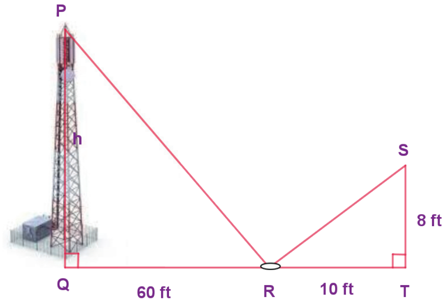
1. పటములో $\angle 1 = \angle 2$ మరియు $\angle 3 \equiv \angle 4$ అయిన యెడల, $\Delta\ MUG \equiv \Delta\ TUB$ ని నిరూపించుము.



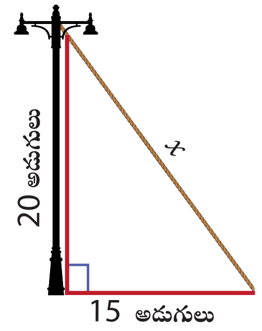
2. పటము నుండి $\Delta\ SUN \sim \Delta\ RAY$ అని నిరూపించుము.



3. ఒక గోపురము శీర్షము భూమిపై R అనే ప్రదేశంలో గల ఒక అద్దం ద్వారా ప్రతిబింబించి చూపబడినది. అయితే గోపురము యొక్క ఎత్తును కనుగొనుము. $\Delta PQR \sim \Delta STR$



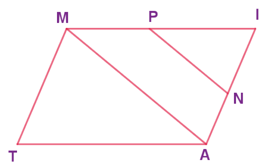
4. ప్రక్కపటమునందు స్తంభము వాలకుండా నేలతో ఆధారాన్నిచ్చు విధంగా ఉన్న తీగ పొడవు కనుగొనుము.



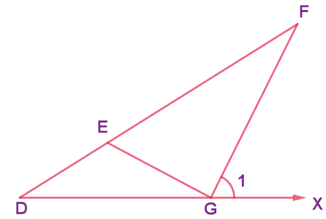
5. రితిక 25 అంగుళముల తెరగల ఒక ఎల్ఈడి టీవీ (LED-TV) ని కొన్నది. దాని ఎత్తు 7 అంగుళములు అయిన తెర వెడల్పు ఎంత? తన ఇంటిలో ఉన్న 20 అంగుళముల అలమారనందు టీవీ సరిపోతుందా? ఎలా?

సవాళాత్మక ప్రశ్నలు

6. పటములోని విధముగా $\angle TMA \equiv \angle IAM$ మరియు $\angle TAM \equiv \angle IMA$, P అనునది MI యొక్క మధ్య బిందువు. మరియు N అనునది AI యొక్క మధ్య బిందువు అయిన, $\triangle PIN \sim \triangle ATM$ అని నిరూపించుము.

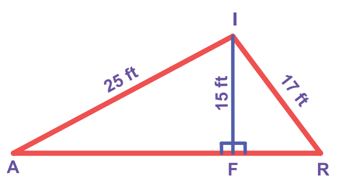


7. పటములో $\angle FEG \equiv \angle 1$ అయిన, $DG^2 = DE.DF$ అని నిరూపించుము.



8. సమ చతుర్భుజము యొక్క కర్ణములు 12సెం.మీ మరియు 16 సెం.మీ అయిన దాని చుట్టుకొలతను కనుగొనుము. (సూచన: సమ చతుర్భుజములో కర్ణములు లంబసమద్విఖండన చేసుకొంటాయి)

9. పటములో AR కనుగొనుము.



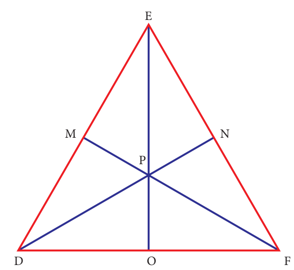
10. ΔDEF నందు DN, EO, FM. లు మధ్యగతరేఖలు మరియు బిందువులు P గురుత్వకేంద్రము. క్రింది వాటిని కనుగొనుము.

(i) DE = 44, అయిన, DM = ?

(ii) PD = 12, అయిన, PN = ?

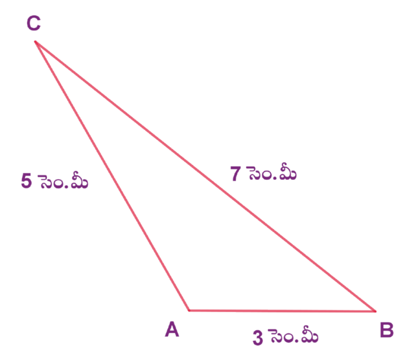
(iii) DO = 8, అయిన, FD = ?

(iv) OE = 36 అయిన, EP = ?

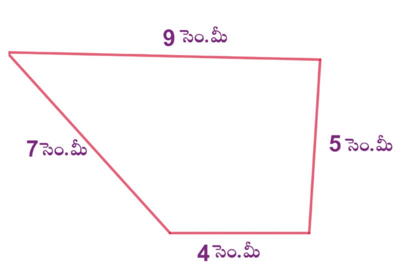


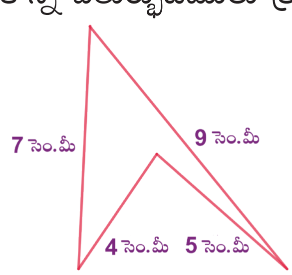
5.10 చతుర్భుజముల నిర్మాణము:

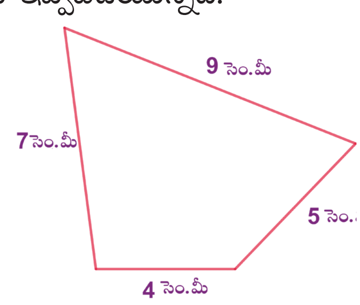
త్రిభుజములు గీయుటను మనము ముందు తరగతిలో నేర్చుకొనియున్నాము. మూడు భుజములతో ఏర్పడు ఒక బహుభుజిని త్రిభుజము అందురు. ఒక త్రిభుజమును నిర్మించుటకు మూడు స్వతంత్ర కొలతలు అవసరము. మరియు మూడు భుజములు గల ఒక త్రిభుజమును నిర్మించుటకు ఒకే అవకాశము కలదు. ఉదాహరణకు 3 సెం.మీ, 5సెం.మీ మరియు 7 సెం.మీ భుజములను కలిగిన ఒక త్రిభుజమును నిర్మించుటకు ఒకే అవకాశము మాత్రమే కలదు.



ఇప్పుడు, చతుర్భుజములు తీసుకొందుము. చతుర్భుజము నాలుగు భుజములతో ఏర్పడు బహుభుజి కదా! కాని, నాలుగు భుజములు కలిగిన చతుర్భుజము నిర్మించిన అవి ఒకే ఆకారంలో ఉండదు. వివిధ ఆకారంలో ఉండును. ఉదాహరణకు 4 సెం.మీ, 5సెం.మీ, 7సెం.మీ మరియు 9సెం.మీ భుజముల కొలతలతో గీయబడిన కొన్ని చతుర్భుజములు క్రింద ఇవ్వబడియున్నది.





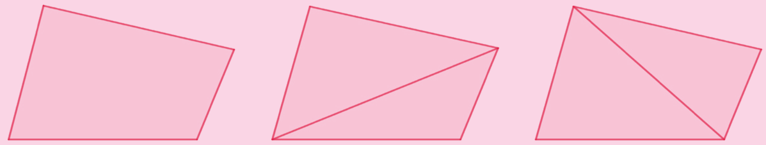


కావున, ఒక ప్రత్యేక చతుర్భుజము నిర్మించుటకు, 5వ కొలత కావలెను. అది కర్ణముగానో లేక కోణముగానో ఉండవచ్చును. అంతేకాక నాలుగు భుజములుకు 2 లేక 3 భుజముల కొలతలు ఇచ్చినట్లైతే కర్ణములు మరియు కోణములు ఉపయోగించి చతుర్భుజమును నిర్మించవచ్చును.

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 180 31-07-2020 13:08:53

సూచన

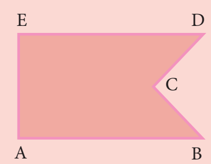
ఒక కర్ణము గీయుట ద్వారా ఏ చతుర్భుజమునైననూ రెండు త్రిభుజములుగా విభజించుటకు వీలగును.



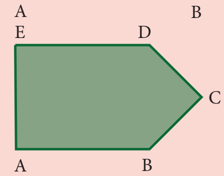
పై ఇవ్వబడిన పటములలో, ఒక చతుర్భుజము దాని కర్ణముల ద్వారా రెండు విధములుగా విభజించిబడియున్నది. కావున, ఒక కర్ణము ఇచ్చినచో, రెండు భుజములు మరియు వాటి కర్ణము కొలతలతో క్రింది భాగ త్రిభుజమును మొదట గీయవలెను. తరువాత మిగిలిన రెండు కొలతలతో పై భాగ త్రిభుజమును గీయుట ద్వారా కావలసిన చతుర్భుజమును పొందవచ్చును.

మీకు తెలుసా?

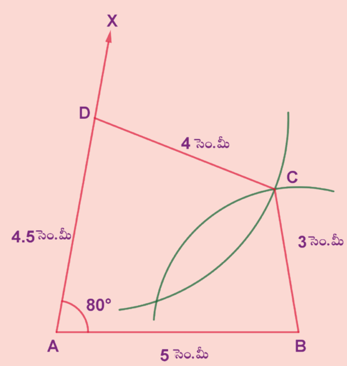
(i) • ఒక బహుభుజిలో ఏదేని ఒక అంతర కోణము 180° కన్నా అధికంగా ఉండిన, దానిని పుటాకార బహుభుజి అందురు. ఇవ్వబడిన బహుభుజిలో అంతరకోణము C అనునది 180° కన్నా అధికంగా కలదు.



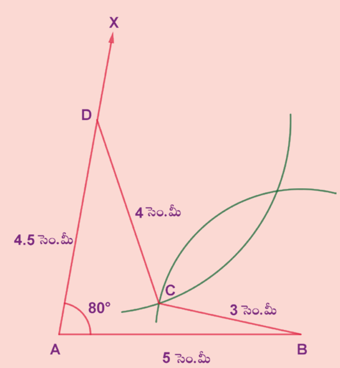
• ఒక బహుభుజిలో అన్ని అంతర కోణములు 180° కన్నా తక్కువగా ఉండిన, దానిని కుంభాకార బహుభుజి అందురు. ఇవ్వబడిన బహుభుజిలో అంతరకోణములన్నియూ 180° కన్నా తక్కువగా ఉండును.



(ii) క్రింది ఇవ్వబడిన చతుర్భుజములను గమనించుము.



కుంభాకార చతుర్భుజము



పుటాకార చతుర్భుజము

పటములో ఉండునట్లు సరూప కొలతలు కలిగిన రెండు రకములైన చతుర్భుజములు గీయుటకు వీలైనను, ఈ పాఠంలో పుటాకార చతుర్భుజమును లెక్కలోకి తీసుకొనుట లేదు. కావున, కుంభాకార చతుర్భుజము మాత్రమే ఇచ్చట ఇవ్వబడియున్నది.

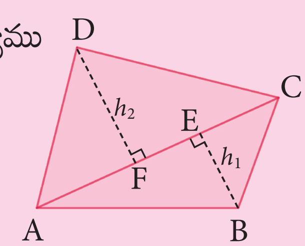
సూచన

ABCD చతుర్భుజమును తీసుకొందాము. AC అనేది కర్ణము (d), BE (h_1) మరియు DF (h_2) లు B మరియు D లనుంచి కర్ణము AC కు గీచిన లంబములు.

చతుర్భుజము ABCD యొక్క వైశాల్యము = ΔABC వైశాల్యము + ΔACD వైశాల్యము

$$=\frac{1}{2}\times AC\times BE+\frac{1}{2}\times AC\times FD$$

$$=\frac{1}{2}\times d\times h_1+\frac{1}{2}\times d\times h_2=\frac{1}{2}\times d\times(h_1+h_2)$$ చదరపు ప్రమాణములు



05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 181 31-07-2020 13:08:55

ఇప్పుడు మనము కొన్ని రకముల చతుర్భుజములను క్రింది సందర్భములలో నిర్మించుటను తెలుసుకొందాము.

(i) 4 భుజములు మరియు ఒక కర్ణము ఇచ్చినచో. (ii) 3 భుజములు మరియు 2 కర్ణములు ఇచ్చినచో
(iii) 4 భుజములు మరియు ఒక కోణము ఇచ్చినచో (iv) 3 భుజములు మరియు 2 కోణములు ఇచ్చినచో
(v) 2 భుజములు మరియు 3 కోణములు ఇచ్చినచో.

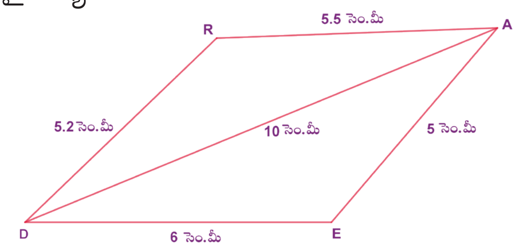
5.10.1 నాలుగు భుజములు మరియు ఒక కర్ణము ఇచ్చినప్పుడు చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 5.21

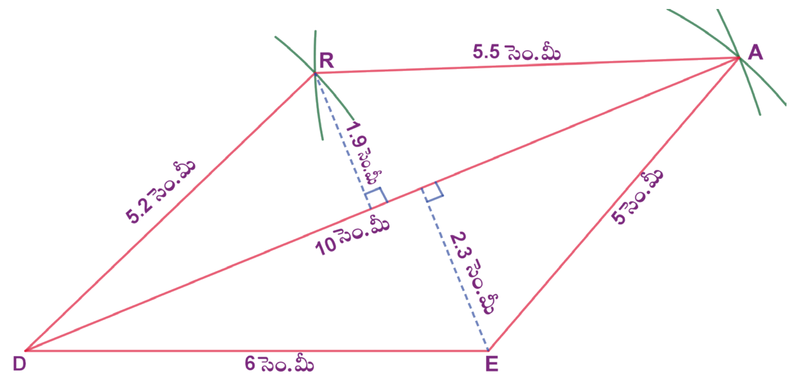
DE=6 సెం.మీ, EA = 5 సెం.మీ, AR = 5.5సెం.మీ, RD = 5.2 సెం.మీ, మరియు DA = 10 సెం.మీ, కొలతలు గల $DEAR$ అను చతుర్భుజమును నిర్మించి దాని వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన:

ఇవ్వబడినవి:
DE = 6 సెం.మీ, EA = 5 సెం.మీ, AR = 5.5 సెం.మీ, RD = 5.2 సెం.మీ మరియు ఒక కర్ణము DA = 10 సెం.మీ



చిత్తుపటము



పటము 5.40

నిర్మాణక్రమము:

1. DE = 6సెం.మీ లతో ఒక రేఖా ఖండమును గీయుము.
2. D మరియు E బిందువులను కేంద్రంగా తీసుకొని క్రమముగా 10సెం.మీ మరియు 5 సెం.మీ వ్యాసార్థములుతో రెండు చాపములు గీయుము. అవి A వద్ద ఖండించును.
3. DA మరియు EA లను కలుపుము.
4. D మరియు A లను కేంద్రంగా తీసుకొని క్రమముగా 5.2 సెం.మీ మరియు 5.5 సెం.మీ వ్యాసార్థములుతో రెండు చాపములు గీయుము. అవి R వద్ద ఖండించును.
5. DR మరియు AR లను కలుపుము.
6. $DEAR$ అనునది కావలసిన చతుర్భుజము అగును.

వైశాల్యమును లెక్కించుట:

$DEAR$ చతుర్భుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2}\times d\times(h_1+h_2)$ చదరపు ప్రమాణాలు.

$= \frac{1}{2}\times 10\times(1.9+2.3) = 5 \times 4.2 = 21$ సెం.మీ^{2}

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 182 31-07-2020 13:08:57

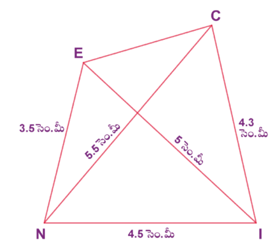
5.10.2 3 భుజములు మరియు 2 కర్ణములు ఇచ్చినప్పుడు చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 5.22

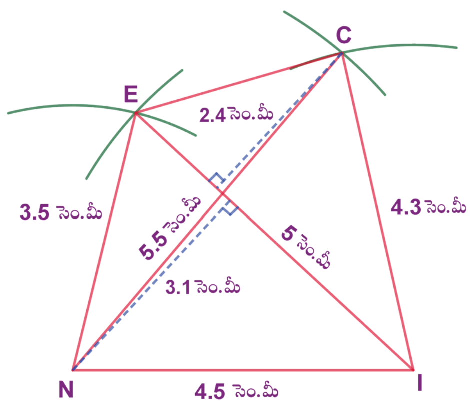
NI=4.5 సెం.మీ, IC= 4.3 సెం.మీ, NE= 3.5 సెం.మీ, NC= 5.5 సెం.మీ మరియు IE = 5 సెం.మీ కొలతలతో $NICE$ అను చతుర్భుజమును నిర్మించి దాని వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన:

ఇవ్వబడినవి:
NI = 4.5 సెం.మీ, IC= 4.3 సెం.మీ,
NE = 3.5 సెం.మీ, మరియు రెండు కర్ణములు,
NC = 5.5 సెం.మీ, మరియు IE = 5 సెం.మీ,



చిత్తుపటము



పటము 5.41

నిర్మాణక్రమము:

1. NI = 4.5 సెం.మీ కొలత గల ఒక రేఖా ఖండము గీయుము.
2. N మరియు I అను బిందువులు క్రమముగా 5.5 సెం.మీ మరియు 4.3 సెం.మీ వ్యాసార్థముతో రెండు చాపములు గీయుము. అవి C వద్ద ఖండించును.
3. NC మరియు IC లను కలుపుము.
4. N మరియు I లను కేంద్రంగా తీసుకొని క్రమముగా 3.5సెం.మీ మరియు 5సెం.మీ వ్యాసార్థములుతో రెండు చాపములు గీచిన అది E వద్ద ఖండించును.
5. NE, IE మరియు CE లను కలుపుము.
6. $NICE$ అనునది కావలసిన చతుర్భుజము.

వైశాల్యమును లెక్కించుట:

$NICE$ చతుర్భుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times d \times (h_1 + h_2)$ చదరపు ప్రమాణాలు

$= \frac{1}{2} \times 5 \times (2.4 + 3.1)$

$= 2.5 \times 5.5 = 13.75$ సెం.మీ^{2}

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 183 31-07-2020 13:08:59

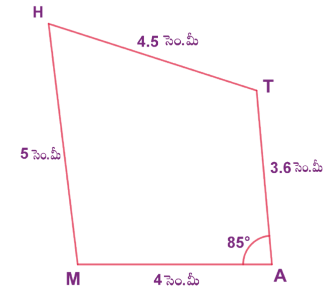
5.10.3 4 భుజములు మరియు ఒక కోణము ఇచ్చినచో చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 5.23

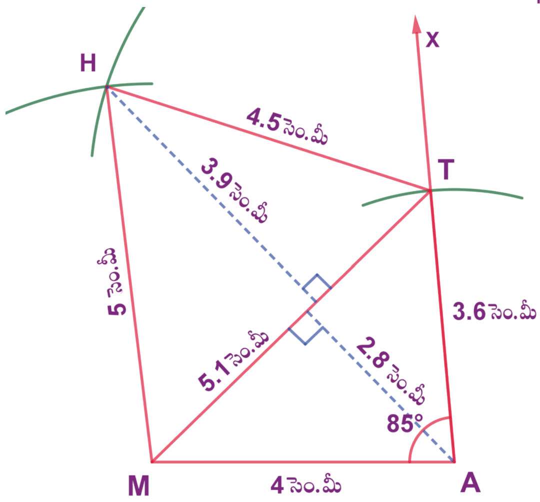
MA=4 సెం.మీ, AT= 3.6 సెం.మీ, TH = 4.5సెం.మీ, MH= 5 సెం.మీ మరియు $\angle A = 85°$ కొలతలు కలిగిన $MATH$ అను చతుర్భుజమును నిర్మించి, దాని వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన:

ఇవ్వబడినవి:
MA=4 సెం.మీ, AT= 3.6 సెం.మీ,
TH = 4.5 సెం.మీ, MH= 5 సెం.మీ, మరియు $\angle A = 85°$



చిత్తుపటము



పటము 5.42

నిర్మాణక్రమము:

1. MA = 4సెం.మీ కొలతతో ఒక రేఖా ఖండమును గీయుము.
2. $\angle A = 85°$ ను తీసుకొనుము.
3. A ను కేంద్రంగా తీసుకొని 3.6 సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో ఒక చాపమును గీయుము.
4. M మరియు T లను కేంద్రంగా తీసుకొని క్రమముగా 5 సెం.మీ మరియు 4.5 సెం.మీ వ్యాసార్ధములతో రెండు చాపములు గీయుము. అవి H వద్ద ఖండించును.
5. MH మరియు TH లను కలుపుము.
6. $MATH$ కావలసిన చతుర్భుజము.

వైశాల్యమును లెక్కించుట:

$MATH$ చతుర్భుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times d \times (h_1 + h_2)$ చదరపు ప్రమాణములు.

$= \frac{1}{2} \times 5.1 \times (3.9 + 2.8)$

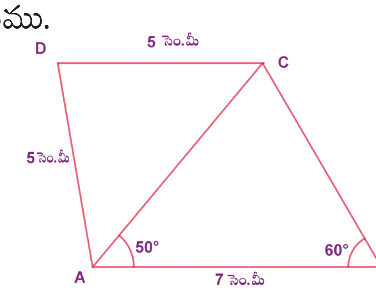
$= 2.55 \times 6.7 = 17.09$ సెం.మీ^{2}

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 184 31-07-2020 13:09:00

5.10.4 3 భుజములు మరియు 2 కోణములు ఇచ్చినచో చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 5.24

AB=7 సెం.మీ, AD= 5సెం.మీ, CD= 5సెం.మీ, $\angle BAC = 50°$ మరియు $\angle ABC = 60°$ కొలతలు గల చతుర్భుజము $ABCD$ ని నిర్మించి దాని వైశాల్యమును కనుగొనుము.

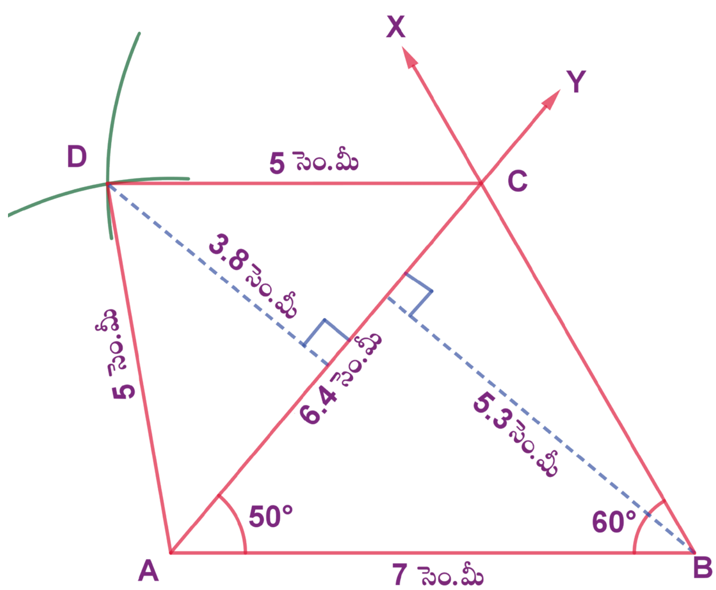


చిత్తుపటము

సాధన:

ఇవ్వబడినవి:

AB=7 సెం.మీ,, AD= 5 సెం.మీ,, CD = 5 సెం.మీ, మరియు రెండు కోణములు $\angle BAC = 50°$ మరియు $\angle ABC = 60°$



పటము 5.43

నిర్మాణక్రమము:

1. AB = 7సెం.మీ కొలతతో ఒక రేఖా ఖండము గీయుము.
2. AB పై A వద్ద $\angle BAY = 50°$ ను మరియు B వద్ద $\angle ABX = 60°$ ను ఏర్పరచును. అవి C వద్ద ఖండించును.
3. A మరియు C లను కేంద్రంగా తీసుకొని 5 సెం.మీ వ్యాసార్ధములతో చాపములు గీయుము. అవి Dవద్ద ఖండించును.
4. AD మరియు CDను కలుపుము.
5. $ABCD$ అనునది కావలసిన చతుర్భుజము.

వైశాల్యమును లెక్కించుట:

$ABCD$ చతుర్భుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times d \times (h_1 + h_2)$ చదరపు ప్రమాణములు.

$= \frac{1}{2} \times 6.4 \times (3.8 + 5.3)$

$= 3.2 \times 9.1 = 29.12$ సెం.మీ^{2}

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 185 31-07-2020 13:09:05

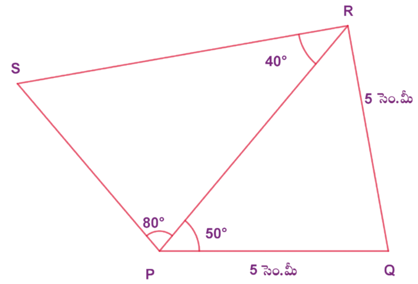
5.10.5 2 భుజములు మరియు 3 కోణములు ఇవ్వబడినచో చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 5.25

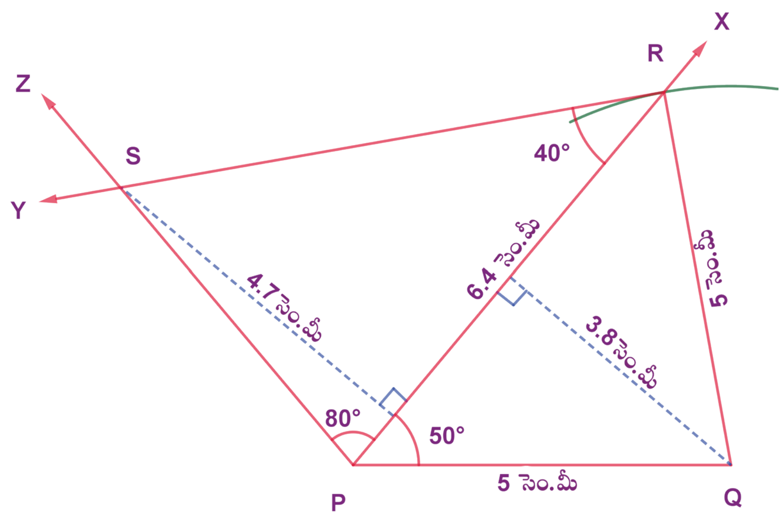
$PQ=QR=5$సెం.మీ, $\angle QPR=50^\circ$, $\angle PRS=40^\circ$ మరియు $\angle RPS=80^\circ$ కొలతలు కలిగిన $PQRS$ అను చతుర్భుజమును నిర్మించి వైశాల్యము కనుగొనుము.

సాధన:

ఇవ్వబడినవి:
$PQ=$ 5 సెం.మీ, $QR=5$ సెం.మీ, $\angle QPR=50^\circ$,
$\angle PRS=40^\circ$ మరియు $\angle RPS=80^\circ$



చిత్తుపటము



పటము 5.44

నిర్మాణక్రమము:

1. PQ = 5సెం.మీ కొలతతో ఒక రేఖా ఖండము గీయుము.
2. PQ పై P వద్ద $\angle QPX=50^\circ$ ను ఏర్పరచును.
3. R ను కేంద్రంగా తీసుకొని 5సెం.మీ వ్యాసార్థముతో ఒక చాపము గీయుము.
4. PR పై R వద్ద $\angle PRS=40^\circ$ మరియు P వద్ద PR ను ఏర్పరచుము. అవి $\angle RPS=80^\circ$ వద్ద ఖండించును.
5. $PQRS$ కావలసిన చతుర్భుజము.

వైశాల్యము కనుగొనుట:

$PQRS$ చతుర్భుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2}\times d\times(h_1+h_2)$ చదరపు ప్రమాణములు.

$= \frac{1}{2}\times 6.4\times(4.7+3.8)$

$= 3.2 \times 8.5 = 27.2$ సెం.మీ^{2}

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 186 31-07-2020 13:09:06

ఆలోచించుము

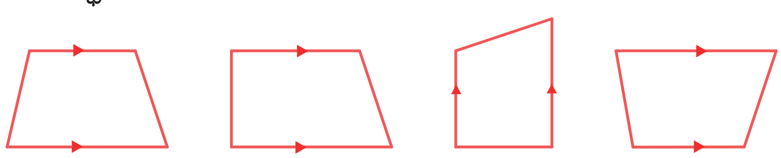
$PQ = 5$ సెం.మీ, $QR = 3$సెం.మీ, $RS = 6$సెం.మీ, $PS = 7$సెం.మీ మరియు $PR = 10$ సెం.మీ కొలతలు కలిగిన చతుర్భుజమును నిర్మించుటకు వీలగునా? ఎందులకు?

5.11 సమలంబచతుర్భుజ నిర్మాణము (ట్రెపీజియము)

మనము చతుర్భుజమును ఏ విధముగా నిర్మించడము అని ఇదివరకే తెలుసుకొనియున్నాము. చతుర్భుజమును నిర్మించుటకు ఎన్ని కొలతలు అవసరమవుతాయి? 5 కొలతలు అవసరము. అవునా? ఇప్పుడు మనము 5 కన్నా తక్కువ కొలతలతో నిర్మించగల చతుర్భుజములను గూర్చి తెలుసుకొందాము. భుజములు మరియు కోణములు ఆధారముగా చతుర్భుజములు సమలంబ చతుర్భుజము, సమాంతర చతుర్భుజము మరియు దీర్ఘచతురస్రము అను రకాలుగా ఉన్నవి.

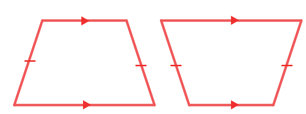
ఇప్పుడు మనము సమలంబ చతుర్భుజ నిర్మాణము గురించి తెలుసుకొందాము.

సమలంబ చతుర్భుజము అనునది ఒక చతుర్భుజము. ఇందులో ఒక జత ఎదుటి భుజములు సమాంతరములు. సమలంబ చతుర్భుజమును నిర్మించుటకు సమాంతర భుజములలో ఒక భుజమును భూమిగా తీసుకొని మరియు మిగిలిన రెండు కొలతలతో భూమిపై ఒక త్రిభుజాన్ని నిర్మించవలయును. భూ భుజమునకు సమాంతరముగాను మరియు సమానముగా ఉండునట్లు ఒక భుజమును నిర్మించి దానిపై నాలుగవ శీర్షమును నిర్మించవలయును. కావున సమలంబ చతుర్భుజమును నిర్మించుటకు నాలుగు స్వతంత్ర కొలతలు అవసరమగును. ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన ఆకారములు సమలంబ చతుర్భుజమునకు ఉదాహరణలు.



గమనిక: పై ఆకారములలో బాణపు గుర్తుగల భుజములు సమాంతర భుజములు.

సమలంబ చతుర్భుజములో సమాంతరము కాని భుజములు మరియు కోణాల కొలతలు సమానము అయిన వాటిని సమద్విబాహు **సమలంబచతుర్భుజము** అంటారు.



ప్రయత్నించుము

1. సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము __________
2. సమాంతర భుజముల మధ్య దూరమును సమలంబ చతుర్భుజములో __________ అంటారు.
3. సమలంబ చతుర్భుజము యొక్క ఎత్తు 25 సెం.మీ మరియు సమాంతర భుజముల పొడవులు 5సెం.మీ, 7 సెం.మీ అయిన సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము __________
4. సమద్విబాహు సమలంబ చతుర్భుజములో సమాంతరముకాని భుజముల పొడవులు __________
5. సమలంబ చతుర్భుజమును నిర్మించుటకు __________ కొలతలు అవసరము.
6. సమలంబ చతుర్భుజము వైశాల్యము మరియు సమాంతర భుజముల పొడవు మొత్తము వరుసగా 60 సెం.మీ^{2} మరియు 12 సెం.మీ అయిన ఎత్తు __________.

ఇవ్వబడిన కొలతలతో సమలంబ చతుర్భుజమును నిర్మించుట

1. మూడు భుజములు మరియు ఒక కర్ణము.
2. మూడు భుజములు మరియు ఒక కోణము.
3. రెండు భుజములు మరియు రెండు కోణములు.
4. నాలుగు భుజములు.

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 187 31-07-2020 13:09:06

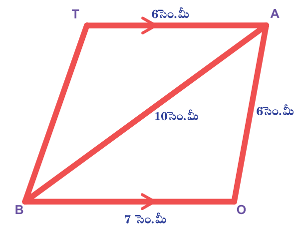
5.11.1 మూడు భుజములు మరియు ఒక కర్ణము ఇచ్చిన సమలంబచతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 5.26

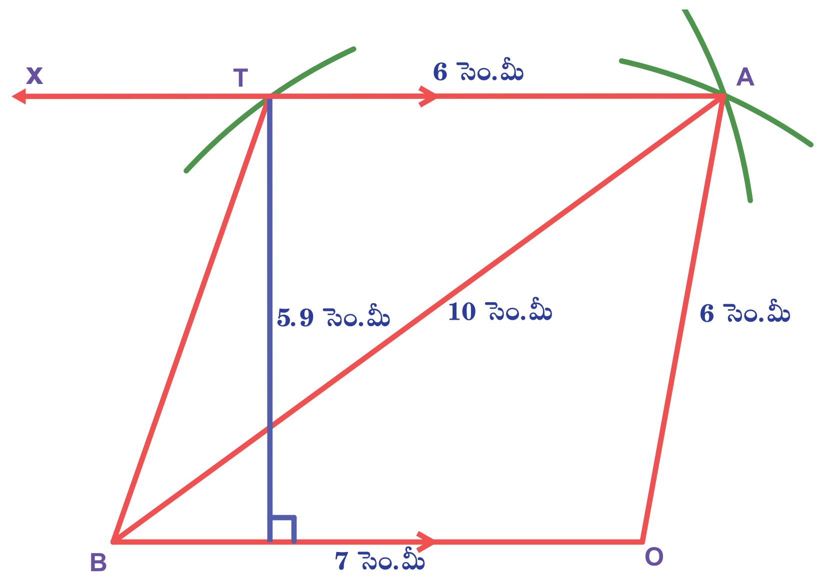
BO=7సెం.మీ, OA=6సెం.మీ, BA=10సెం.మీ, మరియుTA=6సెం.మీ, $\overline{BO}$ అనునది $\overline{TA}$ కు సమాంతరము అయిన సమలంబ చతుర్భుజము **BOAT** ను నిర్మించి దాని వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన:

ఇవ్వబడినవి:
BO=7 సెం.మీ, OA=6 సెం.మీ, BA=10 సెం.మీ,
TA=6 సెం.మీ మరియు $\overline{BO} \parallel \overline{TA}$



చిత్తుపటము



పటము 5.45

నిర్మాణక్రమము:

1. BO = 7 సెం.మీ ఉండునట్లు రేఖాఖండమును గీయుము.
2. B మరియు O ను కేంద్రముగా చేసుకొని 10 సెం.మీ మరియు 6 సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో చాపరేఖలను గీచిన అవి A ఖండించుకొనెను.
3. BA మరియు OA లను కలుపుము.
4. BO కు సమాంతరముగా AX ను గీయుము.
5. A ను కేంద్రముగా చేసుకొని 6సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో ఒక చాపరేఖను గీచిన అది AX ను T వద్ద ఖండించుకొనును.
6. BT ను కలుపుము. BOAT అనునది మనకు కావలసిన సమలంబ చతుర్భుజము.

వైశాల్యమును లెక్కించుట:

BOAT సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times h \times (a+b)$ చదరపు ప్రమాణములు

$= \frac{1}{2} \times 5.9 \times (7+6) = 38.35$ చ.సెం.మీ

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 188 31-07-2020 13:09:07

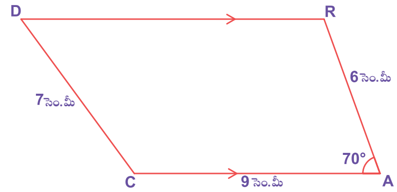
5.11.2 మూడు భుజములు మరియు ఒక కోణము ఇచ్చిన సమలంబచతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 5.27

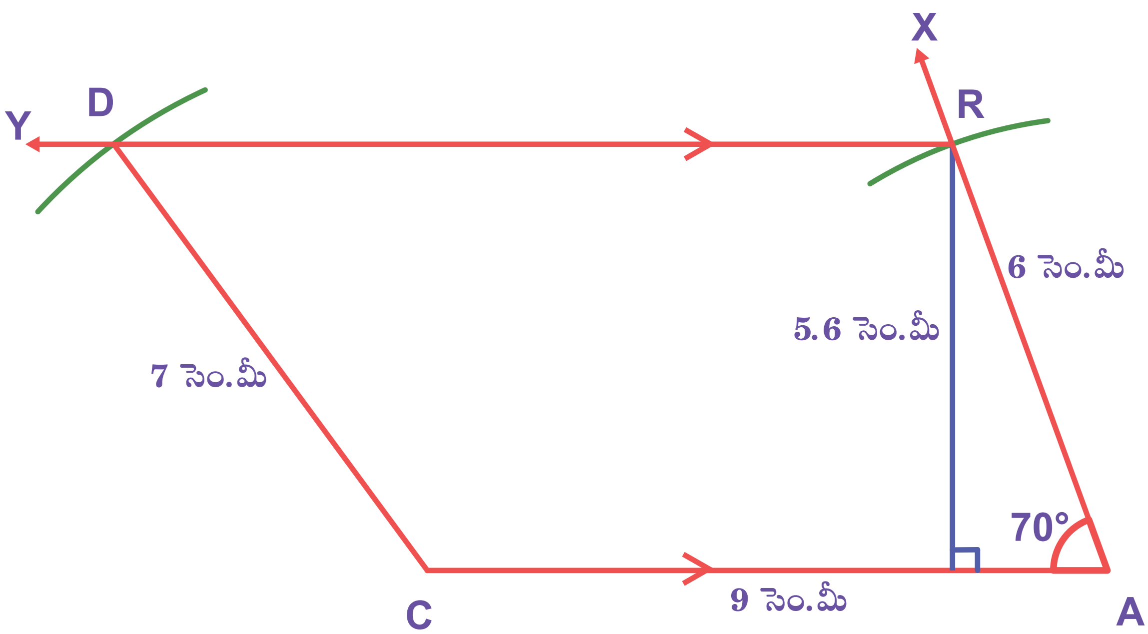
CA=9 సెం.మీ, $\angle CAR = 70$, ,AR=6 సెం.మీ మరియు CD=7 సెం.మీ, $\overline{CA}$ అనునది $\overline{DR}$ కు సమాంతరమైన సమలంబ చతుర్భుజము **CARD** ను నిర్మించి దాని వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన:

ఇవ్వబడినవి:
CA=9సెం.మీ, $\angle CAR = 70°$ AR=6 సెం.మీ,
CD=7 సెం.మీ మరియు $\overline{CA} \,||\, \overline{DR}$



చిత్తుపటము



పటము 5.46

నిర్మాణక్రమము:

1. CA= 9సెం.మీ ఉండునట్లు రేఖాఖండమును గీయుము.
2. A వద్ద $\angle CAX = 70°$ ఉండునట్లు కోణమును ఏర్పరచుము.
3. A ను కేంద్రముగా చేసుకుని 6 సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో ఒక చాపరేఖను గీచిన అది AX ను R వద్ద ఖండించును.
4. CA కు సమాంతరముగా RY ను గీయుము.
5. C ను కేంద్రముగా చేసుకొని 7 సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో ఒక చాపరేఖను గీచిన అది RY ను D వద్ద ఖండించుకొనెను.
6. CD ను కలుపుము. CARD అనునది మనకు కావలసిన సమలంబ చతుర్భుజము.

వైశాల్యమును లెక్కించుట:

CARD సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యం $= \frac{1}{2} \times h \times (a+b)$ చదరపు ప్రమాణములు

$= \frac{1}{2} \times 5.6 \times (9+11) = 56$ చ.సెం.మీ

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 189 31-07-2020 13:09:10

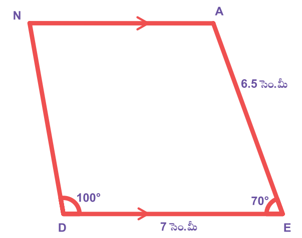
5.11.3 రెండు భుజములు మరియు రెండు కోణములు ఇచ్చిన సమలంబచతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 5.28

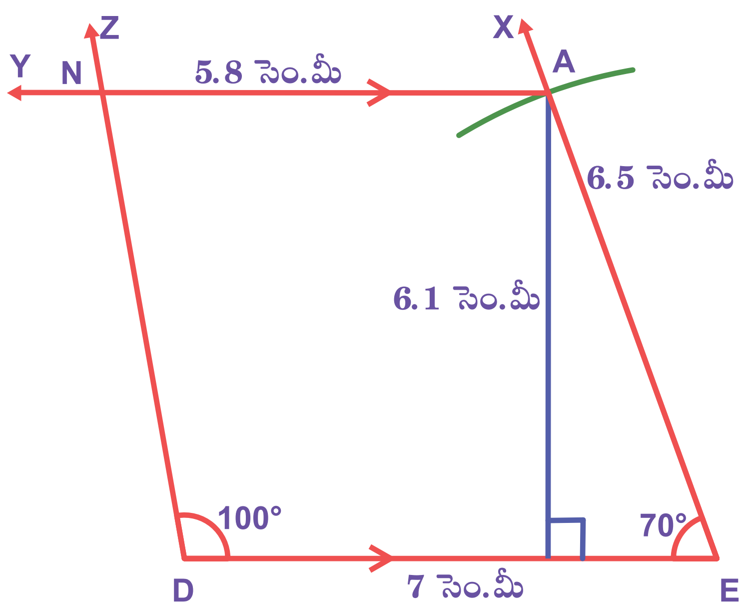
DE=7 సెం.మీ, EA=6.5 సెం.మీ, $\angle EDN = 100^\circ$ మరియు $\angle DEA = 70^\circ$, $\overline{DE}$ అనునది $\overline{NA}$ కు సమాంతరము అయిన సమలంబ చతుర్భుజము DEAN ను నిర్మించి దాని వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన:

ఇవ్వబడినవి:
DE=7సెం.మీ, EA=6.5సెం.మీ $\angle EDN = 100^\circ$,
$\angle DEA = 70^\circ$ మరియు $\overline{DE} \parallel \overline{NA}$



చిత్తుపటము



పటము 5.47

నిర్మాణక్రమము:

1. DE= 7సెం.మీ ఉండునట్లు రేఖాఖండమును గీయుము.
2. E వద్ద $\angle DEX = 70^\circ$ ఉండునట్లు కోణమును ఏర్పరచుము.
3. E ను కేంద్రముగా చేసుకొని 6.5సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో చాపరేఖను గీచిన అది EX ను A వద్ద ఖండించుకొనును.
4. DE కు సమాంతరముగా AY ను గీయుము.
5. D వద్ద $\angle EDZ = 100^\circ$ ఉండునట్లు కోణమును గీయగా అది AY ను N వద్ద ఖండించుకొనును.
6. DEAN అనునది మనకు కావలసిన సమలంబ చతుర్భుజము.

వైశాల్యమును లెక్కించుట:

DEAN సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times h \times (a+b)$ చదరపు ప్రమాణములు

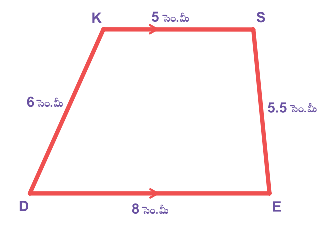
$= \frac{1}{2} \times 6.1 \times (7+5.8) = 39.04$ చ.సెం.మీ

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 190 31-07-2020 13:09:13

5.11.4 నాలుగు భుజములు ఇచ్చినప్పుడు సమలంబచతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 5.29

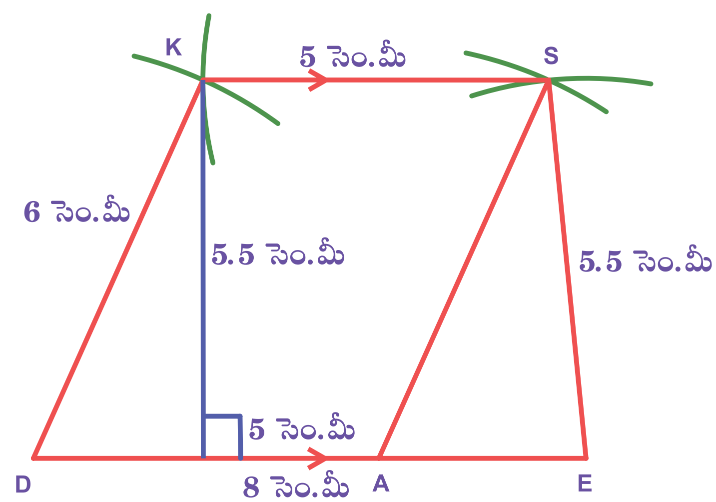
DE=8 సెం.మీ, ES=5.5 సెం.మీ, KS =5 సెం.మీ మరియు .KD=6 సెం.మీ, $\overline{DE}$ అనునది $\overline{KS}$ కు సమాంతరము అయిన DESK ను నిర్మించి దాని వైశాల్యమును కనుగొనుము.



చిత్తుపటము

సాధన:

ఇవ్వబడినవి:
DE=8సెం.మీ, ES=5.5సెం.మీ, KS =5సెం.మీ,
KD=6 సెం.మీ మరియు $\overline{DE} \parallel \overline{KS}$



పటము 5.48

నిర్మాణక్రమము:

1. DE= 8 సెం.మీ ఉండునట్లు రేఖాఖండమును గీయుము.
2. DA=5 సెం.మీ ఉండునట్లు DE భుజముపై A అను బిందువును గుర్తించుము.
3. A మరియు E లను కేంద్రముగా చేసుకొని 6సెం.మీ మరియు 5.5సెం.మీ వ్యాసార్థముతో చాపరేఖలను గీయుము. అవి S వద్ద ఖండించుకొనును. AS మరియు ES లను కలుపుము.
4. D మరియు S లను కేంద్రముగా చేసుకొని 6సెం.మీ మరియు 5.5సెం.మీ వ్యాసార్థముతో చాపరేఖలను గీయుము. అవి K వద్ద ఖండించుకొనును. DK మరియు KS లను కలుపుము.
5. DESK అనునది మనకు కావలసిన సమలంబ చతుర్భుజము.

వైశాల్యమును లెక్కించుట:

DESK సమలంబ చతుర్భుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times h \times (a+b)$ చదరపు ప్రమాణములు

$= \frac{1}{2} \times 5.5 \times (8+5) = 35.75$ చ.సెం.మీ

అభ్యాసము 5.4

I. ఇవ్వబడిన కొలతలతో చతుర్భుజములను నిర్మించి, వాటి యొక్క వైశాల్యములను కనుగొనుము.

1. ABCD, AB = 5 సెం.మీ, BC = 4.5 సెం.మీ, CD = 3.8 సెం.మీ, DA = 4.4 సెం.మీ మరియు AC= 6.2 సెం.మీ.
2. PLAY, PL= 7 సెం.మీ, LA = 6 సెం.మీ, AY= 6 సెం.మీ, PA = 8 సెం.మీ మరియు LY = 7 సెం.మీ.
3. PQRS, PQ=QR= 3.5 సెం.మీ, RS= 5.2 సెం.మీ, SP = 5.3 సెం.మీ మరియు $\angle Q = 120^\circ$.
4. MIND, MI =3.6 సెం.మీ, ND = 4 సెం.మీ, MD= 4 సెం.మీ, $\angle M = 50^\circ$ మరియు $\angle D = 100^\circ$.
5. AGRI, AG= 4.5 సెం.మీ, GR = 3.8 సెం.మీ, $\angle A = 60^\circ$, $\angle G = 110^\circ$ మరియు $\angle R = 90^\circ$.

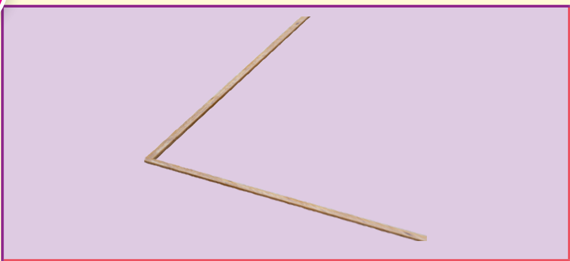
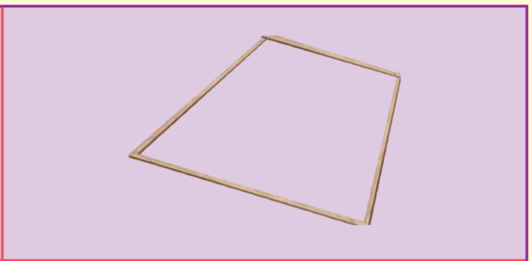
II. ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన కొలతలతో సమలంబచతుర్భుజములను నిర్మించి వాటి వైశాల్యములను కనుగొనుము.

1. AIMS, $\overline{AI} \parallel \overline{SM}$, AI=6సెం.మీ,, IM=5సెం.మీ, AM=9సెం.మీ మరియు MS=6.5సెం.మీ.
2. CUTE $\overline{CU} \parallel \overline{ET}$, CU=7సెం.మీ, $\angle UCE = 80^\circ$, CE=6సెం.మీ మరియు TE=5సెం.మీ.
3. ARMY, $\overline{AR} \parallel \overline{YM}$, AR=7సెం.మీ, RM=6.5సెం.మీ $\angle RAY = 100^\circ$ మరియు $\angle ARM = 60^\circ$
4. CITY, $\overline{CI} \parallel \overline{YT}$, CI=7సెం.మీ, IT=5.5సెం.మీ, TY=4సెం.మీ, మరియు YC=6సెం.మీ.

5.12 ప్రత్యేక చతుర్భుజములను నిర్మించుట

చతుర్భుజములను నిర్మించుటను నేర్చుకొనుటకు ముందు, వాటి ప్రాథమిక లక్షణాలను గుర్తుచేసుకోవడం వలన ప్రక్రియ సమయములో మనకు సహాయపడుతుంది. మనము కొన్ని కృత్యాలు చేయడం ద్వారా వీటిని చేయడానికి ప్రయత్నిస్తాము.

కృత్యము

	
1. రెండు, చివరలు గల జత అసమాన కర్రలను తీసుకొని ఒక చివర చేర్చుము (పైవిధముగా)	**2.** ఇప్పుడు మరొక జత యొక్క స్వేచ్ఛా కొనలతో కలుపుము.

ఎటువంటి పటము ఏర్పడును? చతుర్భుజము ఏర్పడును. ABCD అని పేరు పెట్టుము. ఎన్ని భుజములు కలవు? ఎన్ని కర్ణములు కలవు? కర్ణములు సమానముగా ఉన్నాయా? కోణములు సమానముగా ఉన్నాయా?

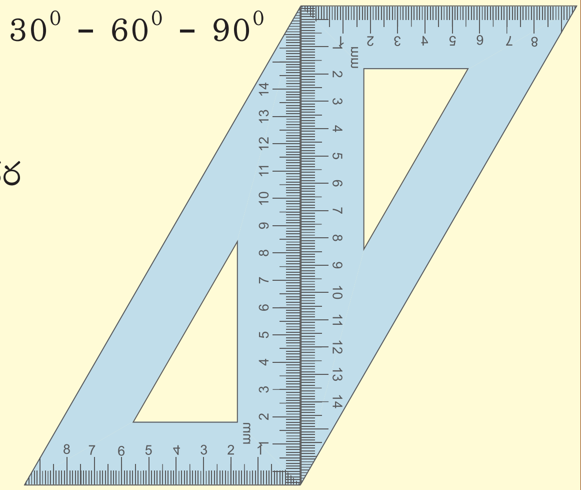
పై కృత్యములో క్రింది విధముగా ఉండిన చతుర్భుజమును పొందగలరా?

(i) నాలుగు కోణాలు అల్పకోణాలు
(ii) ఒక కోణము అధిక కోణము
(iii) రెండు కోణాలు అధికకోణాలు
(iv) ఒక కోణము లంబకోణము
(v) రెండు కోణాలు లంబకోణాలు
(vi) కర్ణములు పరస్పరం $\perp^r$.

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 192 31-07-2020 13:09:15

కృత్యము

1. ఈ కృత్యము చేయుటకు ఒక జత సమానమైన $30^0 - 60^0 - 90^0$ ల మూలమట్టాలు అవసరమగును. పటములో చూపిన విధముగా వాటిని ఉంచండి.



   (i) ఎటువంటి ఆకారము వచ్చును? అది సమాంతర చతుర్భుజము

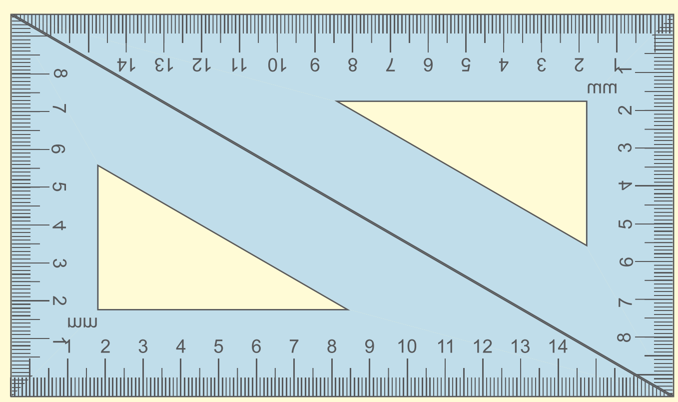
   (ii) ఎదుటెదుటి భుజములు సమాంతరములా?

   (iii) ఎదుటెదుటి భుజములు సమానమా?

   (iv) కర్ణములు సమానమా?

   (v) వేరొక జత సమానమైన మూలమట్టములను ఉపయోగించి ఈ ఆకారం పొందగలమా?

2. ఈ కృత్యము చేయుటకు ఒక జత సమానమైన $30^0 - 60^0 - 90^0$ మూలమట్టములు అవసరమగును. పటములో చూపిన విధంగా వాటిని ఉంచండి.



   (i) ఎటువంటి ఆకారము వచ్చును?

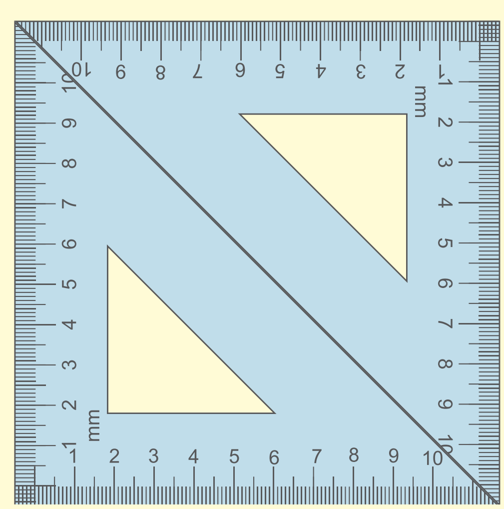
   (ii) అది సమాంతర చతుర్భుజమా?

   అది ఒక చతుర్భుజము. కాని అది ఒక దీర్ఘచతురస్రము. (ఎలా?)

   (iii) వాటి యొక్క భుజముల పొడవులు, కోణములు మరియు కర్ణములు గూర్చి ఏమి చెప్పవచ్చు?

   పట్టిక తయారుచేయుము. వాటి గూర్చి చర్చించుము.

3. ఇప్పుడు ఒకే జత సమానమైన $45^0 - 45^0 - 90^0$ మూలమట్టాలను ఉపయోగించి పై కృత్యము వలె మరలా చేయుము.



   (i) ఇప్పుడు ఈ పటము ఏ విధంగా మార్పు చెందింది? ఇది ఒక సమాంతర చతుర్భుజమా? చతురస్రముగా వచ్చింది. (ఎలా జరిగింది?)

   (ii) వాటి యొక్క భుజముల యొక్క పొడవులు, కోణములు మరియు కర్ణములు గూర్చి ఏమి చెప్పవచ్చును?

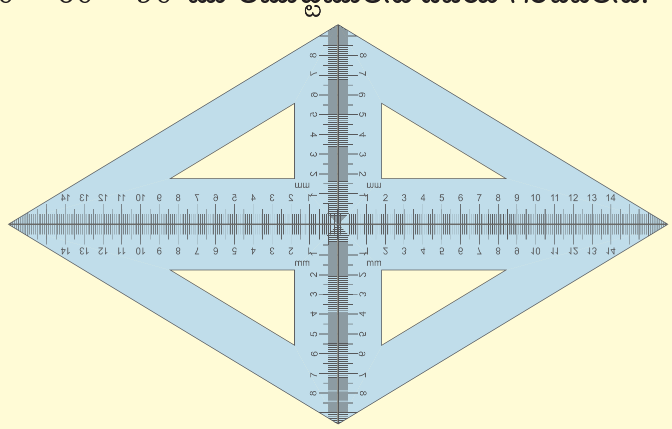
వాటి గూర్చి చర్చించి వ్రాయుము.

   (iii) మనము తయారుచేసిన దీర్ఘచతురస్రము పట్టిక నుండి ఇది ఏ విధముగా మార్పు చెందింది?

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 193 31-07-2020 13:09:16

కృత్యము

4. ఈ కృత్యము చేయుటకు సమానమైన నాలుగు $30^0 - 60^0 - 90^0$ మూలమట్టములను ఉపయోగించవలెను. ఒకదానితో మరొకటి ఏ విధంగా చేర్చవలెనో జాగ్రత్తగా గమనించుము.



(i) ఇప్పుడు సమాంతర చతుర్భుజము ఏర్పడినదా?

(ii) వాటి యొక్క భుజముల పొడవులు, కోణములు మరియు కర్ణములు గూర్చి ఏమి చెప్పగలము?

(iii) కర్ణముల యొక్క ప్రత్యేకతను తెల్పుము.

పై కృత్యములు ఫలితముల ఆధారముగా, పై చతుర్భుజముల యొక్క ధర్మాలను పట్టిక ఏర్పరచవచ్చును.

ప్రత్యేక చతుర్భుజములు	అన్ని భుజాలు	అన్ని కోణాలు	వ్యతిరేక భుజాలు		అన్ని కోణాలు	వ్యతిరేఖ కోణాలు	కర్ణములు	
	సమానము	సమానము	సమానము	సమాంతరము	90°	సంపూరకం	ఒక దానికొకటి సమద్విఖండన	ఒక దానికొకటి లంబముగా ఖండించుట
సమాంతర చతుర్భుజము	కొన్నిసార్లు	కొన్నిసార్లు	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	కొన్నిసార్లు	కొన్నిసార్లు	ఎల్లప్పుడూ	కొన్నిసార్లు
రాంబస్	ఎల్లప్పుడూ	కొన్నిసార్లు	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	కొన్నిసార్లు	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ
దీర్ఘచతురస్రము	కొన్నిసార్లు	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	కొన్నిసార్లు
చతురస్రము	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ	ఎల్లప్పుడూ

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 194 31-07-2020 13:09:16

ప్రయత్నించుము

1. సత్యమా లేదా అసత్యమా తెలుపుము.:

(అ) చతురస్రము ఒక ప్రత్యేక దీర్ఘచతురస్రము

(ఆ) చతురస్రము ఒక సమాంతర చతుర్భుజము

(ఇ) చతురస్రము ఒక ప్రత్యేక రాంబస్

(ఈ) దీర్ఘచతురస్రము ఒక సమాంతర చతుర్భుజము

2. చతుర్భుజముల పేర్లను తెలుపుము.

(అ) కర్ణము ఒకదానికొకటి సమద్విఖండన చేసుకొనును.

(ఆ) కర్ణములు ఒకదానికొకటి లంబసమద్విఖండన చేసుకొనును.

(ఇ) కర్ణముల యొక్క పొడవులు వేర్వేరుగా ఉండును.

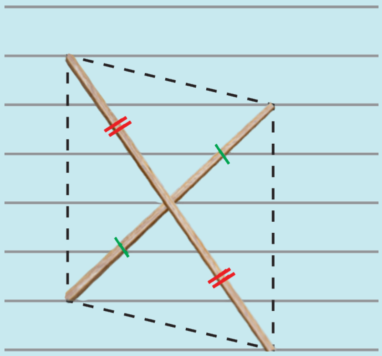
(ఈ) సమాన కర్ణములు కలిగియుండును.

(ఉ) ఎదురెదురు భుజములు సమాంతరముగా కలిగినది.

(ఊ) ఎదురెదురు కోణములు సమానముగా కలిగిది.

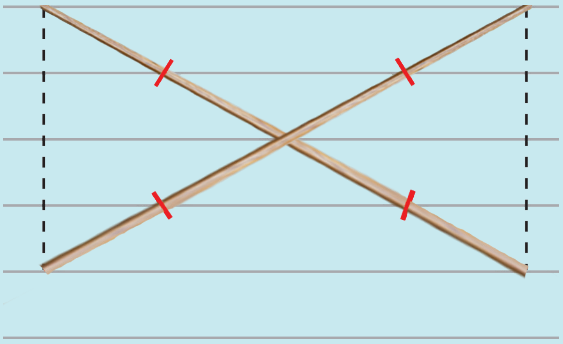
3. పటములో చూపిన విధముగా రెండు పుల్లలను గీతలు కలిగిన కాగితముపై ఉంచుము. నాలుగు మూలలను కలుపునట్లుగా పుల్లలను ఉంచిన ఏ పటము ఏర్పడును?

(అ)



రెండు అసమాన పుల్లలు తీసుకొని వాటి మధ్యబిందువులు కలిసేవిధముగా ఉంచుము.

(ఆ)

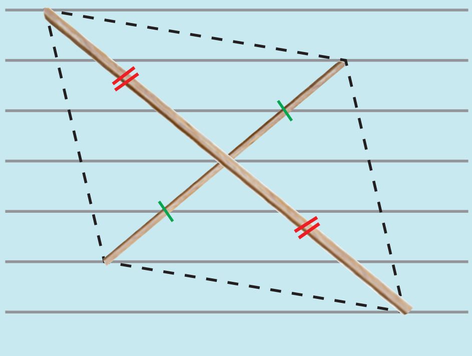


రెండు సమాన పుల్లలు తీసుకొని వాటి మధ్యబిందువులు కలిసే విధముగా ఉంచుము.

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 195 31-07-2020 13:09:16

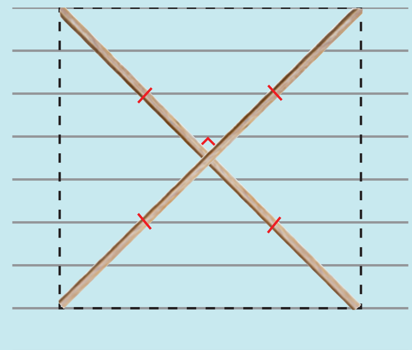
ప్రయత్నించుము

(ఇ)



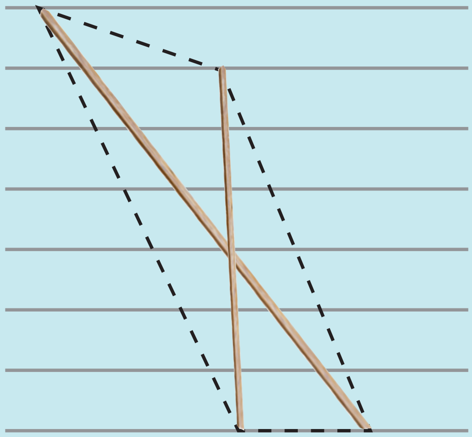
రెండు అసమాన పుల్లలు తీసుకొని వాటి మధ్య బిందువులు లంబముగా ఖండించుకొనేలా ఉంచుము.

(ఈ)



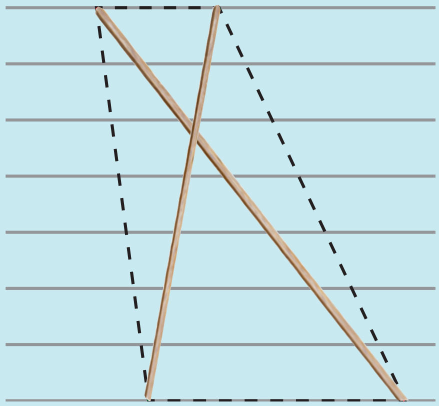
రెండు సమాన పుల్లలు తీసుకొని వాటి మధ్యబిందువులు లంబముగా ఖండించుకొనేలా ఉంచుము.

(ఉ)



రెండు అసమాన పుల్లలు తీసుకొని వాటి మధ్యబిందువులు కలవకుండా ఉండేలా ఉంచాలి. అంతేకాకుండా రెండు పుల్లల యొక్క పై చివరలు ఒకే గీతపై ఉండకూడదు మరియు క్రింద చివరలు ఒకే గీతపై ఉండేలా ఉంచాలి.

(ఊ)



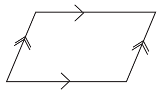
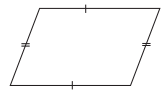
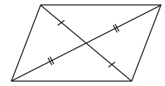
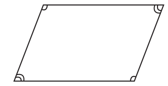
రెండు అసమాన పుల్లలు తీసుకొని వాటి యొక్క మధ్యబిందువులు కలవకుండా ఉండేలా ఉంచాలి. అంతేకాకుండా రెండు పుల్లలపై చివరలు ఒకే గీతపై మరియు క్రింద చివరలు ఒకే గీతపై ఉండేలా ఉంచాలి.

5.13 సమాంతరచతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన కొలతలతో సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించుట

1. రెండు ఆసన్న భుజములు మరియు ఒక కోణము
2. రెండు ఆసన్న భుజములు మరియు ఒక కర్ణము.
3. రెండు కర్ణములు మరియు వాటి మధ్య కోణము.
4. ఒక భుజము, ఒక కర్ణము మరియు ఒక కోణము

సూచన

 ఒకే రకమైన బాణపు గుర్తులు సమాంతర భుజములను సూచించును.	 ఒకేరకమైన గీతలు సర్వ సమాన భుజములను సూచించును.	 పటములో కర్ణాలు ఒకదానికొకటి సమద్విఖండన చేసుకొంటున్నాయి.	 పటములో ఎదురెదురు కోణాలు సర్వ సమానములు.

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 196 31-07-2020 13:09:16

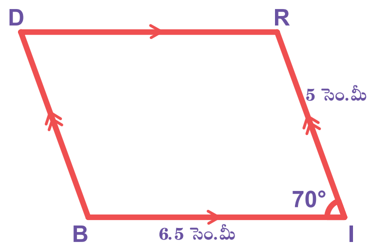
5.13.1 రెండు ఆసన్న భుజములు మరియు ఒక కోణము ఇచ్చిన సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 5.30

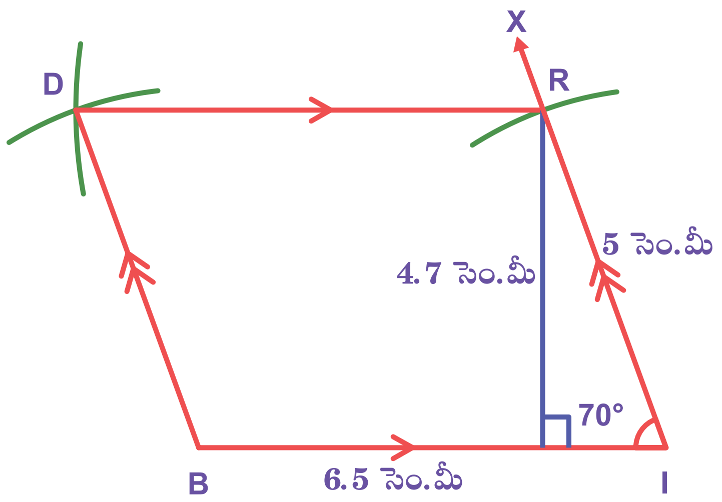
BI=6.5 సెం.మీ, IR = 5సెం.మీ మరియు $\angle BIR = 70°$. కొలతలతో BIRD సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించి దాని వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన:

ఇవ్వబడినది:
BI=6.5సెం.మీ, IR=5సెం.మీ మరియు $\angle BIR = 70°$



చిత్తుపటము



పటము 5.49

నిర్మాణక్రమము:

1. BI=6.5 సెం.మీ గల ఒక రేఖాఖండమును గీయుము.
2. $\overline{BI}$ పై I వద్ద $\angle BIX = 70°$ కొలతతో ఒక కోణమును ఏర్పరుచుము.
3. Iను కేంద్రముగా చేసుకొని 5సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో చాపరేఖను గీయగా అది IX ను R వద్ద ఖండించును.
4. B మరియు R ను కేంద్రముగా చేసుకొని 5సెం.మీ మరియు 6.5 సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో చాపరేఖలను గీయవలెను. అవి D వద్ద ఖండించుకొనును.
5. BD మరియు RD లను కలుపుము.
6. BIRD అనునది మనకు కావలసిన సమాంతర చతుర్భుజము.

వైశాల్యమును లెక్కించుట:

BIRD సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యము $= bh$ చదరపు ప్రమాణములు

$= 6.5 \times 4.7 = 30.55$ చ.సెం.మీ

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 197 31-07-2020 13:09:18

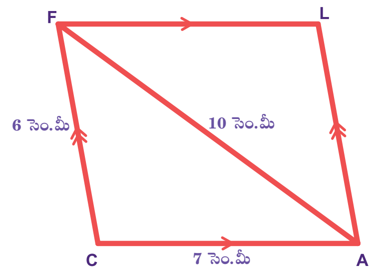
5.13.2 రెండు ఆసన్న భుజములు మరియు ఒక కర్ణము ఇచ్చిన సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 5.31

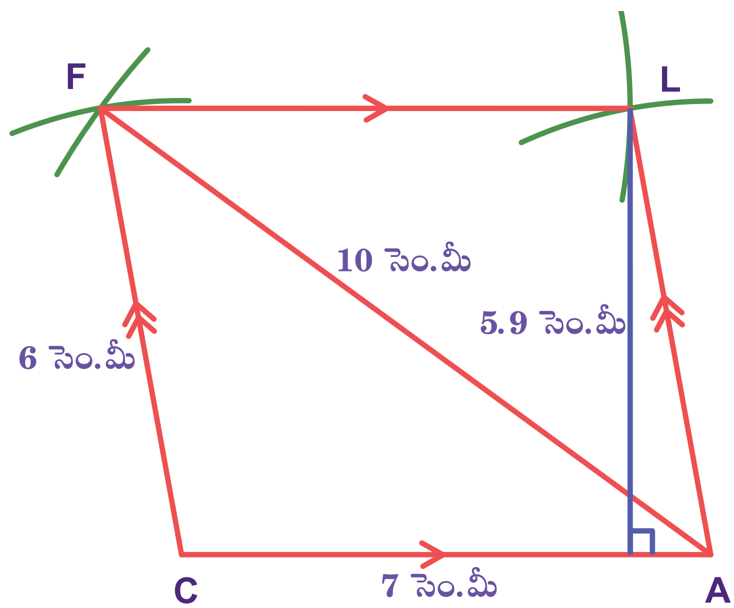
CA=7 సెం.మీ, CF=6 సెం.మీ మరియు AF=10 సెం.మీ కొలతలు గల CALF సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించి దాని వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన:

ఇవ్వబడినవి:
CA=7సెం.మీ, CF=6సెం.మీ మరియు AF=10సెం.మీ



చిత్తుపటము



పటము 5.50

నిర్మాణక్రమము:

1. CA=7 సెం.మీ సెం.మీ ఉండునట్లు ఒక రేఖాఖండమును గీయుము
2. C మరియు A లను కేంద్రముగా చేసుకొని 7సెం.మీ మరియు 6సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో చాపరేఖలను గీయుము. అవి F వద్ద ఖండించుకొనును.
3. CF మరియు AF లను కలుపుము.
4. A మరియు F ను కేంద్రముగా చేసుకొని 6సెం.మీ మరియు 7సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో చాపరేఖలను గీయుము. అవి L వద్ద ఖండించుకొనును.
5. AL మరియు FL లను కలుపుము.
6. CALF అనునది మనకు కావలసిన సమాంతర చతుర్భుజము.

వైశాల్యమును లెక్కించుట:

CALF సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యము $= bh$ చదరపు ప్రమాణములు

$= 7 \times 5.9 = 41.3$ చ.సెం.మీ

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 198 31-07-2020 13:09:19

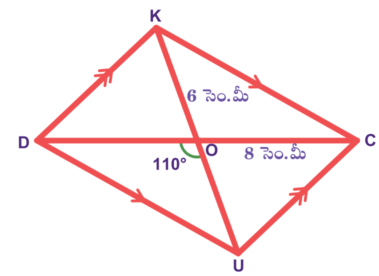
5.13.3 రెండు కర్ణములు మరియు వాటి మధ్య కోణము ఇచ్చినప్పుడు సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 5.32

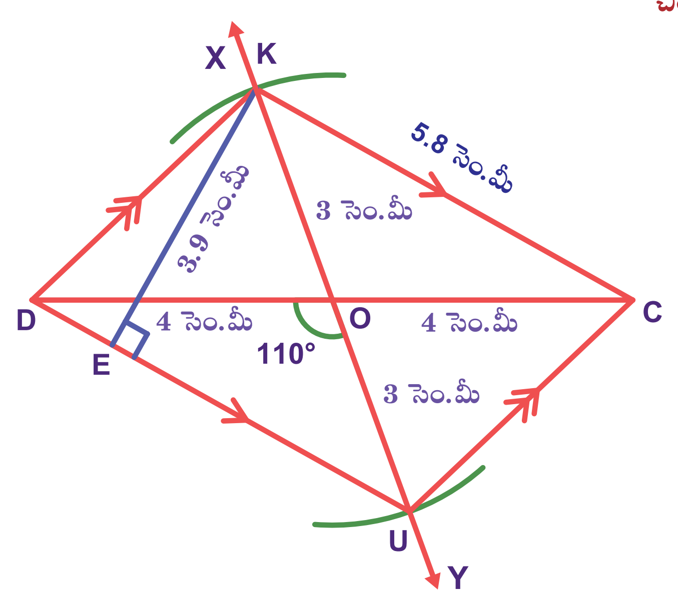
ఉదాహరణ DC=8 సెం.మీ, UK=6 సెం.మీ మరియు $\angle DOU = 110^\circ$ కొలతలతో DUCK సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించి మరియు దాని వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన:

ఇవ్వబడినవి:
DC=8సెం.మీ, UK=6 సెం.మీ మరియు $\angle DOU = 110^\circ$



చిత్తుపటము



పటము 5.51

నిర్మాణక్రమము:

1. DC=8 సెం.మీ. ఉండునట్లు ఒక రేఖాఖండమును గీయుము.
2. $\overline{DC}$ పై మధ్యబిందువు O ను గుర్తించుము.
3. O ద్వారా $\angle DOY = 110^\circ$ ఉండునట్లు $\overleftrightarrow{XY}$ అను రేఖను గీయుము.
4. O ను కేంద్రముగా చేసుకొని $\overline{DC}$ పై ఇరువైపులా $\overleftrightarrow{XY}$ మీద 3సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో రెండు చాపరేఖలను గీయుము. అవి $\overrightarrow{OX}$ ను K వద్ద మరియు $\overrightarrow{OY}$ ను U వద్ద ఖండించుకొనును.
5. $\overline{DU}, \overline{UC}, \overline{CK}$ మరియు $\overline{KD}$ లను కలుపుము.
6. DUCK అనునది మనకు కావలసిన సమాంతర చతుర్భుజము.

వైశాల్యమును లెక్కించుట:

DUCK సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యము $= bh$ చదరపు ప్రమాణములు
$= 5.8 \times 3.9 = 22.62$ చ.సెం.మీ

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 199 31-07-2020 13:09:23

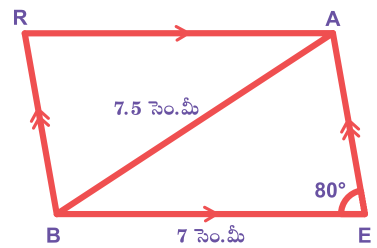
5.13.4 ఒక భుజము, ఒక కర్ణము మరియు ఒక కోణము ఇచ్చిన సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 5.33

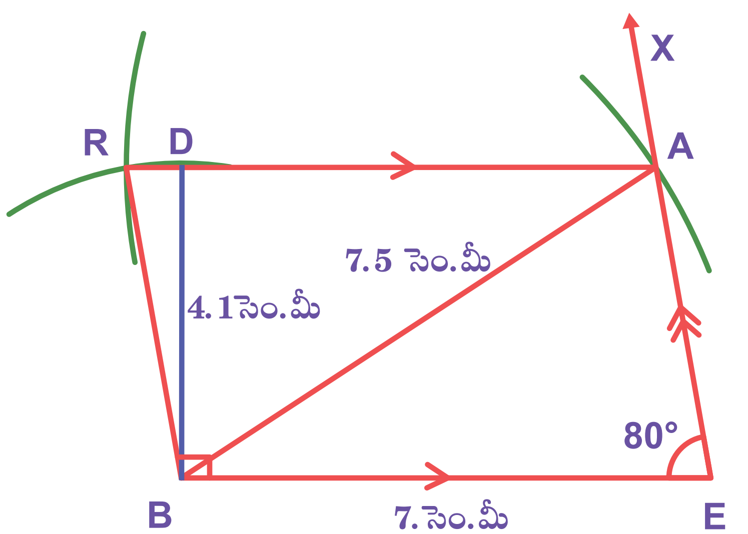
BE=7 సెం.మీ, BA=7.5 సెం.మీ మరియు $\angle BEA = 80°$ కొలతలతో BEAR సమాంతర చతుర్భుజమును నిర్మించి దాని వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన:

ఇవ్వబడినవి:
BE=7సెం.మీ, BA=7.5సెం.మీ మరియు $\angle BEA = 80°$



చిత్తుపటము



పటము 5.52

నిర్మాణక్రమము:

1. BE=7 సెం.మీ ఉండునట్లు ఒక రేఖాఖండమును గీయుము.
2. $\overline{BE}$ పై E వద్ద $\angle BEX = 80°$ ఉండునట్లు కోణమును నిర్మింపుము.
3. B ను కేంద్రముగా చేసుకొని 7.5 సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో ఒక చాపరేఖను EX పై A వద్ద ఖండించుకొను విధముగా గీచి BA లను కలుపవలెను.
4. B ను కేంద్రముగా చేసుకొని $\overline{AE}$ కు సమాన వ్యాసార్ధ కొలతతో మరో చాపరేఖను గీయవలెను.
5. A ను కేంద్రముగా చేసుకొని 7 సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో ఒక చాపరేఖను గీయవలెను. అవి R వద్ద ఖండించుకొనును.
6. BR మరియు AR లను కలుపుము.
7. BEAR అనునది మనకు కావలసిన సమాంతర చతుర్భుజము.

వైశాల్యమును లెక్కించుట:

BEAR సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్యము $= bh$ చదరపు ప్రమాణములు

$= 7 \times 4.1 = 28.7$ చ.సెం.మీ

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 200 31-07-2020 13:09:25

5.14 రాంబసు(సమబాహు చతుర్భుజము) నిర్మాణము

ఇచ్చిన కొలతలతో సమబాహు చతుర్భుజము (రాంబసు)ను నిర్మించుట

(i) ఒక భుజము మరియు ఒక కర్ణము

(ii) ఒక భుజము మరియు ఒక కోణము

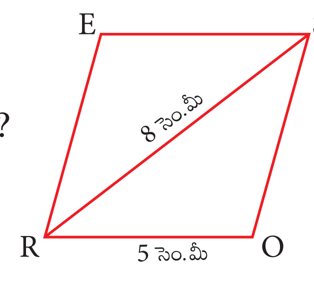
(iii) రెండు కర్ణములు

(iv) ఒక కర్ణము మరియు ఒక కోణము

5.14.1 ఒక భుజము మరియు ఒక కర్ణము ఇచ్చినప్పుడు (సమబాహు చతుర్భుజము) రాంబసును నిర్మించుట:

ఉదాహరణ 5.34

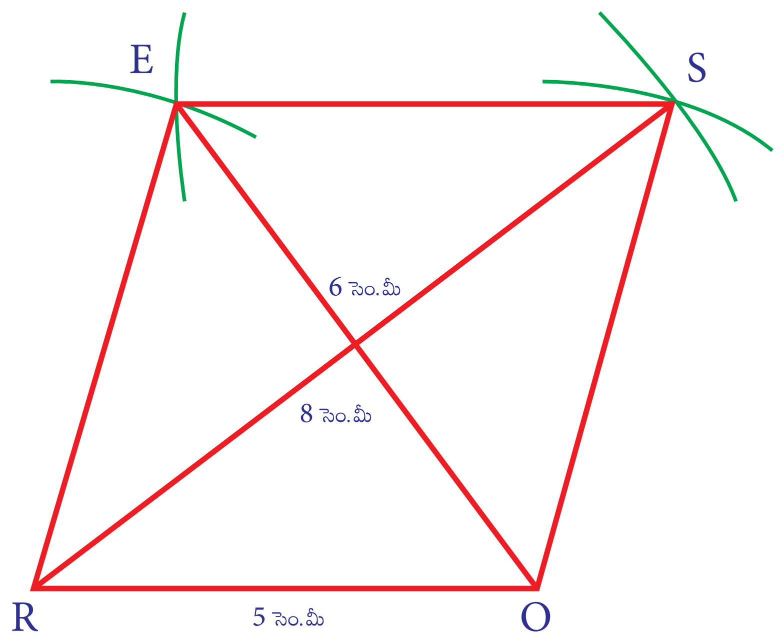
RO = 5 సెం.మీ మరియు RS = 8 సెం.మీ ఉండునట్లు ROSE అను సమబాహు చతుర్భుజమును నిర్మింపుము మరియు వైశాల్యమును కనుగొనుము?



చిత్తుపటము

సాధన:

ఇవ్వబడినవి: RO = 5 సెం.మీ మరియు RS = 8 సెం.మీ



పటము 5.53

నిర్మాణక్రమము:

1. RO = 5 సెం.మీ రేఖాఖండమును గీయుము.
2. R మరియు 'O' ను కేంద్రముగా చేసుకొని క్రమముగా 8 సెం.మీ మరియు 5సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో చాపరేఖలను గీయుము. వాని ఖండన బిందువు 'S' అగును.
3. RS మరియు OS ను కలుపుము.
4. R మరియు S కేంద్రముగా, తలా 5 సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో చాపములు గీయుము, వాని ఖండన బిందువు 'E' అగును.
5. RE మరియు SE లను కలుపుము.
6. ROSE మనకు కావలసిన సమబాహు చతుర్భుజము అగును.

వైశాల్యమును లెక్కించుట:

ROSE సమబాహు చతుర్భుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$ చదరపు ప్రమాణాలు

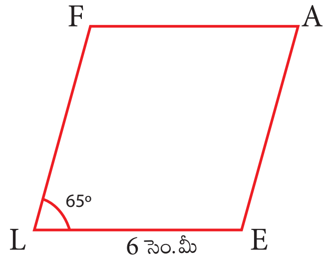
$= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24$ చ.సెం.మీ

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 201 31-07-2020 13:09:26

5.14.2 ఒక భుజము మరియు ఒక కోణము ఇచ్చిన సమబాహు చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 5.35

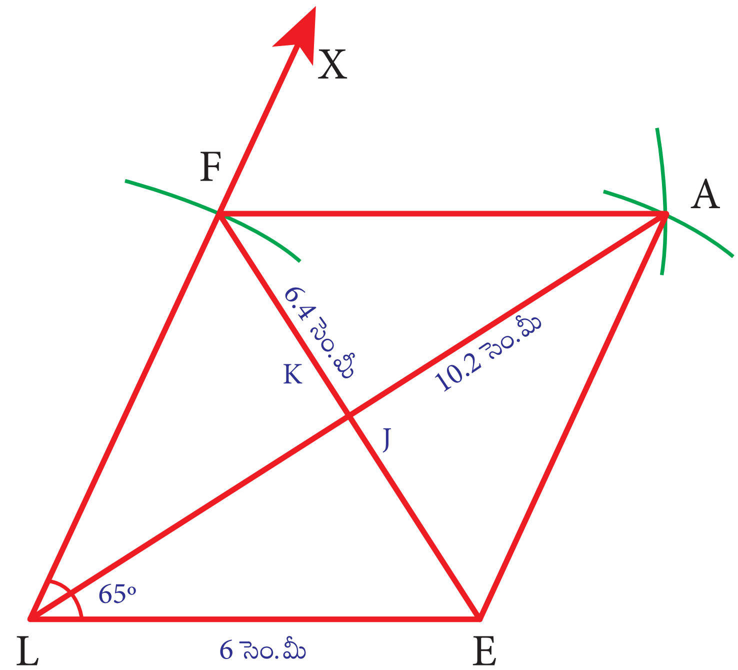
LE = 6సెం.మీ మరియు $\angle L = 65°$ తో LEAF అను సమబాహు చతుర్భుజమును నిర్మించి దాని వైశాల్యమును కనుగొనుము.



చిత్తుపటము

సాధన:

ఇవ్వబడినవి: LE = 6 సెం.మీ మరియు $\angle L = 65°$



పటము 5.54

నిర్మాణక్రమము:

1. LE = 6 సెం.మీ రేఖాఖండమును గీయుము.
2. LE పై L వద్ద, $\angle ELX = 65°$ ను గుర్తించుము.
3. 6 సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో L కేంద్రముగా చాపరేఖను గీయుము. అది LX ను F వద్ద ఖండించును.
4. 6సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో E మరియు F కేంద్రముగా చాపరేఖలు గీయుము. వాటి ఖండన బిందువు A అగును.
5. EA మరియు AF లను కలుపుము
6. LEAF కావలసిన సమబాహు చతుర్భుజము అగును.

వైశాల్యమును లెక్కించుట:

LEAF సమబాహు చతుర్భుజము వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$ చదరపు ప్రమాణాలు

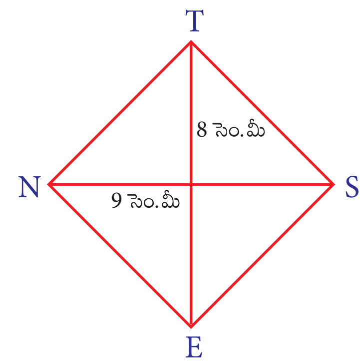
$= \frac{1}{2} \times 6.4 \times 10.2 = 32.64$ చ.సెం.మీ

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 202 31-07-2020 13:09:27

5.14.3 రెండు కర్ణములు ఇచ్చినప్పుడు సమబాహు చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 5.36

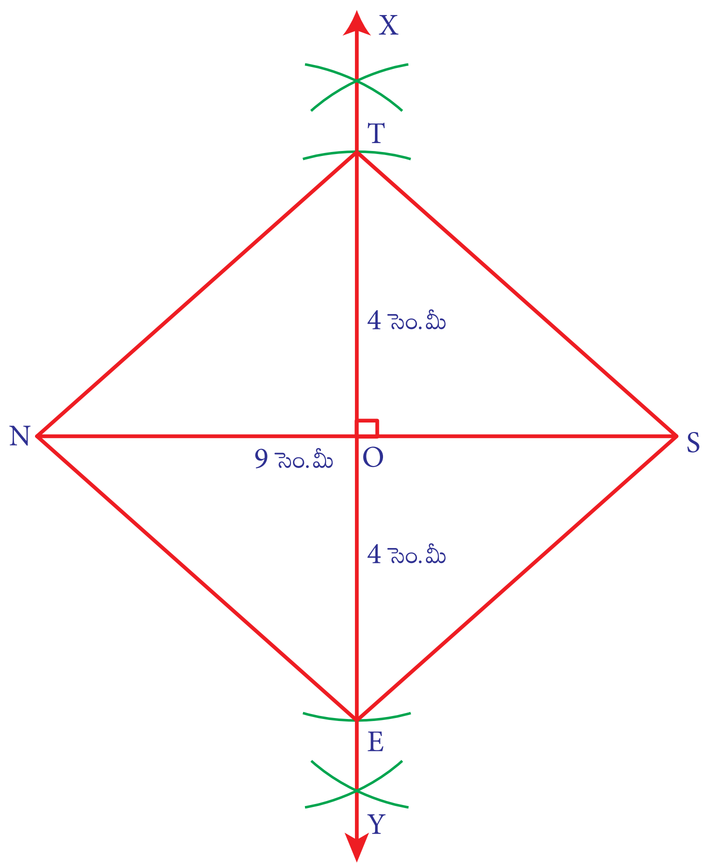
NS = 9 సెం.మీ మరియు ET = 8సెం.మీ కొలతలతో సమబాహు చతుర్భుజము NEST ను నిర్మింపుము మరియు వైశాల్యమును కనుగొనుము.



చిత్తుపటము

సాధన:

ఇవ్వబడినవి: NS = 9సెం.మీ మరియు ET = 8 సెం.మీ



పటము 5.55

నిర్మాణక్రమము:

1. NS = 9సెం.మీ రేఖాఖండమును గీయుము.
2. XY కు, NS లంబసమద్విఖండన రేఖను గీయుము. NS ను O వద్ద ఖండించును.
3. O కేంద్రముగా, 4 సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో 'O' కి ఇరువైపులా చాప రేఖలు గీయుము. అవి OX ను T వద్ద మరియు OY ను E వద్ద ఖండించును.
4. NE, ES, ST మరియు TN ను కలుపుము.
5. NEST మనకు కావలసిన సమబాహు చతుర్భుజము.

వైశాల్యమును లెక్కించుట:

NEST సమబాహు చతుర్భుజము వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$ చదరపు ప్రమాణాలు

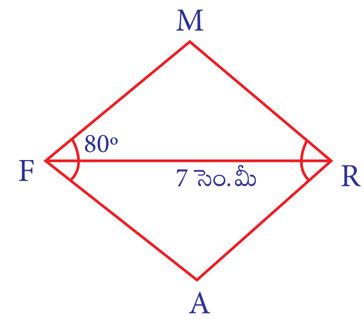
$= \frac{1}{2} \times 9 \times 8 = 36$ చ.సెం.మీ

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 203 31-07-2020 13:09:28

5.14.4 ఒక కర్ణము మరియు ఒక కోణము ఇచ్చినప్పుడు సమబాహు చతుర్భుజమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 5.37

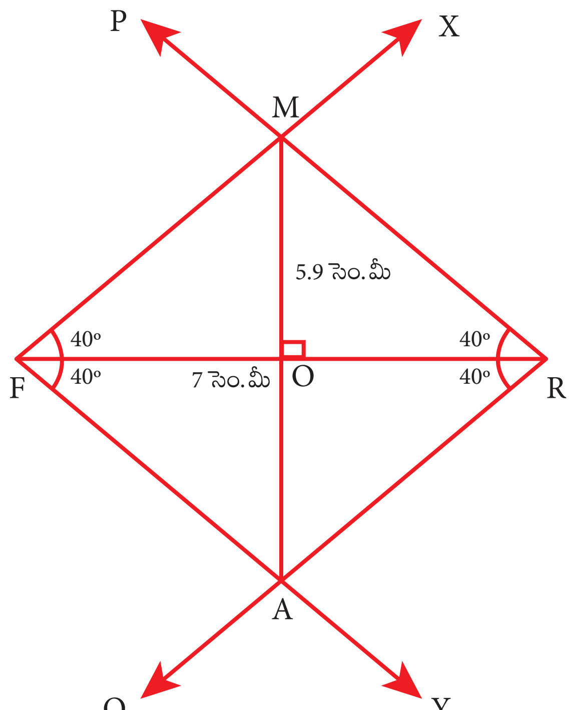
FR = 7 సెం.మీ మరియు $\angle F = 80^\circ$ కొలతలతో FARM సమబాహు చతుర్భుజమును నిర్మింపుము.



చిత్తుపటము

సాధన:

ఇవ్వబడినవి: FR = 7 సెం.మీ మరియు $\angle F = 80^\circ$



పటము 5.56

నిర్మాణక్రమము:

1. FR = 7 సెం.మీ రేఖాఖండమును గీయుము.
2. FR కు ఇరువైపులా $\angle RFX = \angle RFY = 40^\circ$ ఉండునట్లు F వద్ద నుండి గుర్తించుము.
3. FR కు ఇరకువైపులా $\angle FRP = \angle FRQ = 40^\circ$ ను R వద్ద నుండి గుర్తించుము.
4. FX మరియు RP, M వద్ద ఖండించుకొనును, మరియు FY మరియు RQ , A వద్ద ఖండించుకొనును.
5. FARM కావలసిన సమబాహు చతుర్భుజము.

వైశాల్యమును లెక్కించుట:

FARM సమబాహు చతుర్భుజ వైశాల్యము $= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$ చదరపు ప్రమాణాలు

$= \frac{1}{2} \times 7 \times 5.9 = 20.65$ చ.సెం.మీ

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 204 31-07-2020 13:09:30

5.15 దీర్ఘచతురస్ర నిర్మాణము

ఇవ్వబడిన కొలతలతో దీర్ఘచతురస్రమును నిర్మించుట

(i) పొడవు మరియు వెడల్పు

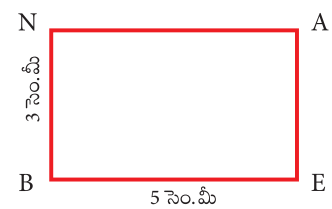
(ii) భుజము మరియు కర్ణము

5.15.1 పొడవు మరియు వెడల్పు ఇచ్చినప్పుడు దీర్ఘచతురస్రమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 5.38

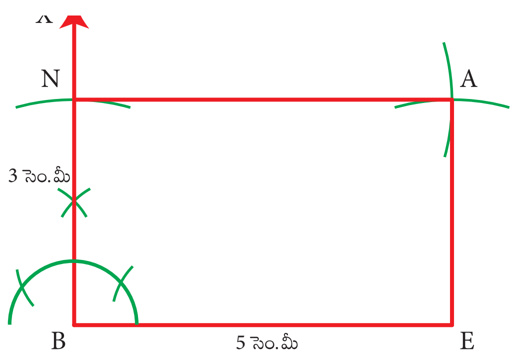
BE = 5 సెం.మీ మరియు BN = 3 సెం.మీ కొలతలతో BEAN అను దీర్ఘచతురస్రమును గీయుము మరియు వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన:



చిత్తుపటము

ఇవ్వబడినవి: BE = 5 సెం.మీ మరియు BN = 3 సెం.మీ



పటము 5.57

నిర్మాణక్రమము:

1. BE = 5 సెం.మీ కొలతలతో రేఖాఖండమును గీయుము.
2. B వద్ద, $BX \perp BE$ ను నిర్మింపుము.
3. B కేంద్రముగా 3 సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో BX రేఖాఖండమును N వద్ద ఖండించును.
4. E మరియు N కేంద్రముగా, 3 సెం.మీ మరియు 5 సెం.మీ వ్యాసార్ధములతో క్రమముగా చాపరేఖలను గీయుము. అవి A వద్ద ఖండించుకొనును.
5. EA మరియు NA ను కలుపుము.
6. BEAN మనకు కావలసిన దీర్ఘచతురస్రము అగును.

వైశాల్యమును లెక్కించుట:

BEAN దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము $= l \times b$ చదరపు ప్రమాణాలు

$= 5 \times 3 = 15$ చ.సెం.మీ

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 205 31-07-2020 13:09:31

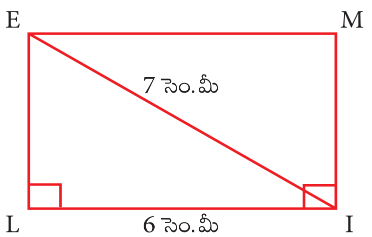
5.15.2 భుజము మరియు కర్ణము ఇవ్వబడినప్పుడు దీర్ఘచతురస్రమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 5.39

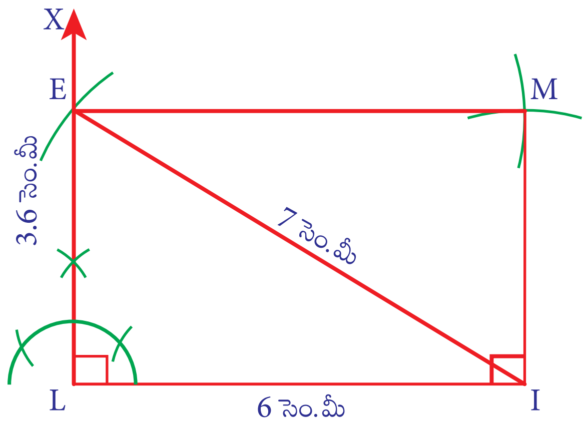
LI = 6 సెం.మీ మరియు IE = 7 సెం.మీ కొలతలతో LIME అను దీర్ఘచతురస్రమును నిర్మించి వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన:

ఇవ్వబడినవి: LI = 6సెం.మీ మరియు IE = 7 సెం.మీ



చిత్తుపటము



పటము 5.58

నిర్మాణక్రమము:

1. LI = 6సెం.మీ ఉండునట్లు రేఖాఖండమును గీయుము.
2. L వద్ద, $LX \perp LI$ నిర్మించుము.
3. I కేంద్రముగా, 7 సెం.మీ వ్యాసార్థముతో ఒక చాపరేఖ LX ను గీయగా E వద్ద ఖండించుకొనును.
4. I కేంద్రముగా చేసుకొని LE ను వ్యాసార్థముగా తీసుకొని ఒక చాపరేఖ గీయుము. మరియు E కేంద్రముగా, LI వ్యాసార్థముగా మరొక చాపరేఖ గీయుము. అవి రెండూ M వద్ద ఖండించుకొనును.
5. IM మరియు EM ను కలుపుము.
6. LIME మనకు కావలసిన దీర్ఘచతురస్రము.

వైశాల్యమును లెక్కించుట:

LIME దీర్ఘచతురస్ర వైశాల్యము $= l \times b$ చదరపు ప్రమాణాలు

$= 6 \times 3.6 = 21.6$ చ.సెం.మీ

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 206 31-07-2020 13:09:31

5.16 చతురస్ర నిర్మాణము

చతురస్రమును నిర్మించుట (i) భుజము కొలత ఇచ్చినప్పుడు మరియు (ii) కర్ణము కొలత ఇచ్చినప్పుడు చతురస్రమును నిర్మించుట

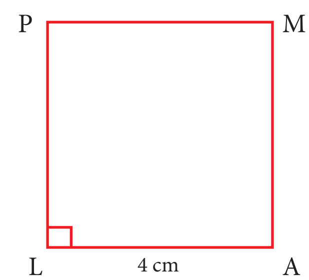
5.16.1 భుజము కొలత ఇచ్చినప్పుడు చతురస్రమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 5.40

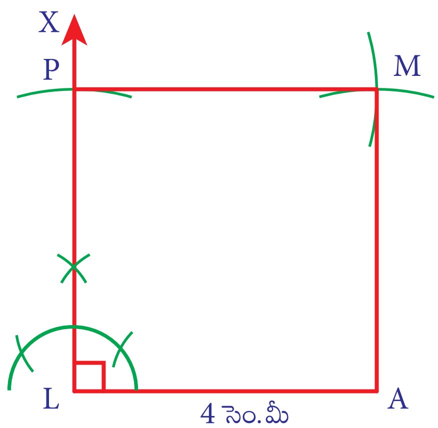
4 సెం.మీ భుజము గల LAMP చతురస్రమును నిర్మింపుము. వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన:

ఇవ్వబడినవి: భుజము = 4 సెం.మీ



చిత్తుపటము



పటము 5.59

నిర్మాణక్రమము:

1. LA = 4 సెం.మీ రేఖాఖండమును గీయుము.
2. L వద్ద, $LX \perp LA$ ను నిర్మింపుము.
3. 4 సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో, L కేంద్రముగా, LX ను P వద్ద ఖండించుము.
4. తలా 4 సెం.మీ వ్యాసార్ధముతో A మరియు P ను కేంద్రముగా రెండు చాపరేఖలను గీయుము. అవి M వద్ద ఖండించుకొనును.
5. AM మరియు PM లను కలుపుము. LAMP కావలసిన చతురస్రము.

వైశాల్యమును లెక్కించుట:

LAMP చతురస్ర వైశాల్యము $= a^2$ చదరపు ప్రమాణాలు

$= 4 \times 4 = 16$ చ.సెం.మీ

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 207 31-07-2020 13:09:32

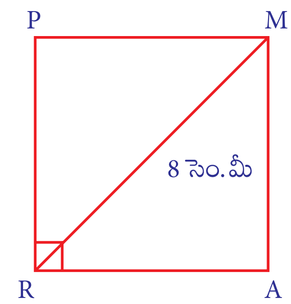
5.16.2 కర్ణములు ఇచ్చినప్పుడు చతురస్రమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 5.41

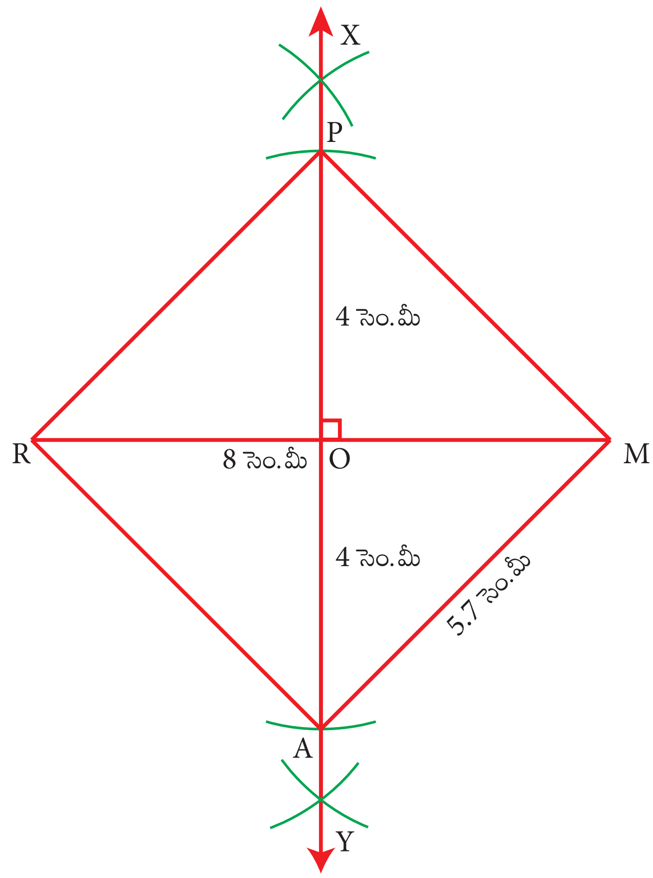
8 సెం.మీ కర్ణము కొలత గల RAMP చతురస్రమును నిర్మించి వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన:

ఇవ్వబడినవి: కర్ణము = 8సెం.మీ



చిత్తుపటము



పటము 5.60

నిర్మాణక్రమము:

1. RM = 8 సెం.మీ రేఖాఖండమును గీయుము.
2. XY పై RM లంబసమద్విఖండన రేఖను గీయుము. అవి RM ను 'O' వద్ద ఖండించును.
3. 'O' కేంద్రముగా 4 సెం.మీ వ్యాసార్థముతో, O కి ఇరువైపులా చాపరేఖలను గీయుము, అవి OX ను P వద్ద, OY ను A వద్ద ఖండించుకొనును.
4. RA, AM, MP మరియు PR లను కలుపుము.
5. RAMP మనకు కావలసిన చతురస్రము.

వైశాల్యమును లెక్కించుట:

RAMP చతురస్ర వైశాల్యము $= a^2$ చదరపు ప్రమాణాలు

$= 5.7 \times 5.7 = 32.49$ చ.సెం.మీ

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 208 31-07-2020 13:09:33

అభ్యాసము 5.5

I. ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన కొలతలతో సమాంతరచతుర్భుజములను నిర్మించి వాటి వైశాల్యములను కనుగొనుము.

1. ARTS, AR=6 సెం.మీ, RT=5 సెం.మీ మరియు $\angle ART = 70°$.
2. CAMP, CA=6 సెం.మీ, AP=8 సెం.మీ మరియు CP=5.5 సెం.మీ.
3. EARN, ER=10 సెం.మీ, AN=7 సెం.మీ మరియు $\angle EOA = 110°$ ఇచ్చట $\overline{ER}$ మరియు $\overline{AN}$ అనునవి O వద్ద ఖండించుకొనును.
4. GAIN, GA=7.5 సెం.మీ, GI=9 సెం.మీ మరియు $\angle GAI = 100°$.

II. క్రింది కొలతలతో రాంబసు(సమబాహుచతుర్భుజము)లను నిర్మించి వైశాల్యములను కనుగొనుము.

(i) FACE, FA= 6 సెం.మీ మరియు FC = 8 సెం.మీ

(ii) CAKE, CA=5 సెం.మీ మరియు $\angle A = 65°$

(iii) LUCK, LC = 7.8 సెం.మీ మరియు UK = 6 సెం.మీ

(iv) PARK, PR = 9 సెం.మీ మరియు $\angle P = 70°$

III. క్రింది కొలతలతో దీర్ఘచతురస్రములను నిర్మించి వైశాల్యములను కనుగొనుము.

(i) HAND, HA = 7 సెం.మీ మరియు AN = 4 సెం.మీ

(ii) LAND, LA = 8 సెం.మీ మరియు AD = 10 సెం.మీ

IV. క్రింది కొలతలతో చతురస్రములను నిర్మించి వైశాల్యములను కనుగొనుము.

(i) EAST, EA = 6.5 సెం.మీ

(ii) WEST, WS = 7.5 సెం.మీ

సారాంశము

- సర్వసమాన ఆకారములో, కొలతలు మరియు ఆకారములు సమానముగా ఉండును.
- సరూప పటములు, ఒకే ఆకారములు కలిగి వేర్వేరు కొలతలు కలిగియుండును.
- ఒక లంబకోణ త్రిభుజములో కర్ణము యొక్క వర్గము మిగిలిన రెండు భుజాల వర్గముల మొత్తమునకు సమానము. ఇదియే పైథాగరస్ సిద్ధాంతము.
- ఒక త్రిభుజములోని మూడు మధ్యగత రేఖలు మిళితములు. ఈ అనుషక్త బిందువును గురుత్వకేంద్రము అని అంటాము. దీనిని G అను ఆంగ్ల అక్షరముతో సూచిస్తాము.
- త్రిభుజము యొక్క లంబ ఎత్తులు అనుషక్తములు. ఈ అనుషక్త బిందువును లంబ కేంద్రము అందురు.
- ఒక త్రిభుజము యొక్క భుజముల లంబ సమద్విఖండన రేఖలు అనుషక్తము ఈ అనుషక్త బిందువును పరివృత్తకేంద్రము అని అంటాము. దీనిని S అను ఆంగ్ల అక్షరముతో సూచిస్తాము.
- ఒక త్రిభుజములోని మూడు కోణముల యొక్క కోణసమద్విఖండన రేఖలు మిళితములు. దీనిని అంతరవృత్త కేంద్రము అంటాము. దీనిని I అను ఆంగ్ల అక్షరముతో సూచిస్తాము.
- సమలంబచతుర్భుజము (ట్రెపీజియం) అనునది ఒక చతుర్భుజము. ఇందులో ఒక జత ఎదుటి భుజములు సమాంతరములు.
- సమాంతరచతుర్భుజము అనునది ఒక చతుర్భుజము. ఇందులో ఎదురెదురు భుజములు సమాంతరములు.
- సమాంతర చతుర్భుజములోని భుజములన్నియూ సమానమైనచో అది సమచతుర్భుజము(రాంబస్) అగును.
- సమాంతరచతుర్భుజములోని ప్రతి కోణము 90^0లు అనగా లంబకోణమైనచో, దానిని దీర్ఘచతురస్రము అంటారు.
- సమాంతరచతుర్భుజములోని భుజములు మరియు కోణములు సమానమైనచో దానిని చతురస్రము అంటారు.

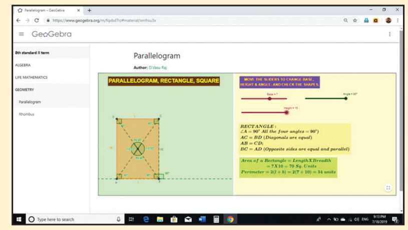
05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 209 31-07-2020 13:09:34

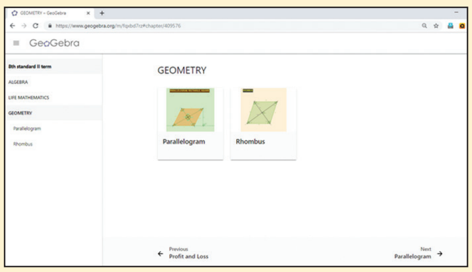
అంతర్జాల కృత్యము

సోపానము-1 బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్ చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన URL లింక్‌ను టైపు చేయండి. లేదా QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయండి. "GEOMETRY " అను పాఠము ఓపెన్ అగును. "Parallelogram" అను వర్క్‌షీట్‌ను ఎంపిక చేయండి.

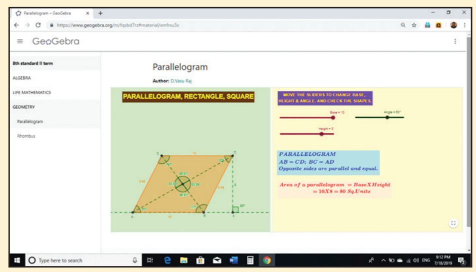
సోపానము-2 ఇచ్చిన వర్క్‌షీట్‌నందు స్లైడర్‌లను భూమి, ఎత్తు మరియు కోణములపై జరిపి గమనించుము. ఏ విధమైన విలువలకు సమాంతర చతుర్భుజము దీర్ఘచతురస్రము మరియు చతురస్రముగా మార్పుచెందునో గమనించి మరియు వాటి ధర్మాలను పరిశీలించుము.

ఆశించు ఫలితము





సోపానము 1



సోపానము 2

Browse in the link

Geometry:

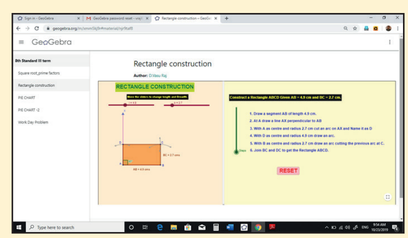
https://www.geogebra.org/m/fqxbd7rz#chapter/409576 or Scan the QR Code.

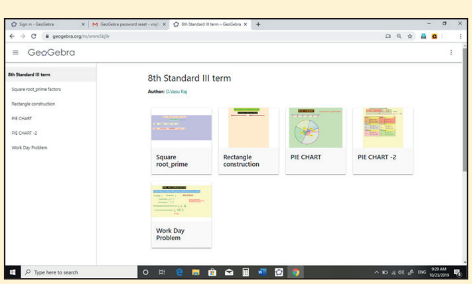
అంతర్జాల కృత్యము

సోపానము-1 బ్రౌజరును తెరచి ఇచ్చిన URL లింకును టైపు చేయుము లేదా QR సంకేతమును స్కాన్ చేయుము. "GeoGebra తృతీయాంకరము" అను పేరుగల జియోజీబ్రా వర్క్‌షీట్ తెరుచుకొనును. "Rectangle Construction" దీర్ఘచతురస్రమును నిర్మించుట అను వర్క్‌షీట్‌ను తెరువుము.

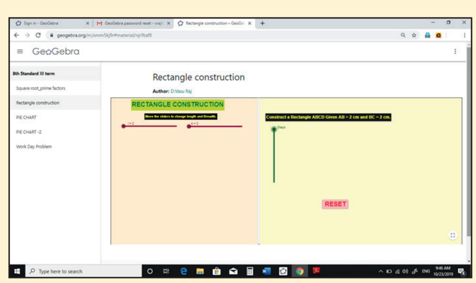
సోపానము-2 దీర్ఘచతురస్రము యొక్క పొడవు మరియు వెడల్పులను మార్చుటకు ఎడమవైపు గల స్లైడరును జరుపుము. నిర్మాణపు సోపానములను చూడడానికి కుడివైపున గల స్లైడర్‌ను సోపానము తరువాత సోపానముగా జరుపుము.

ఆశించు ఫలితము





సోపానము 1



సోపానము 2

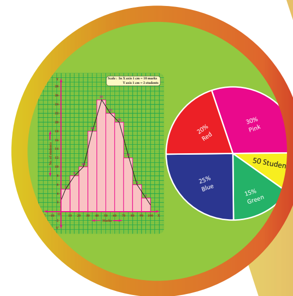
Browse in the link

Geometry:

https://www.geogebra.org/m/xmm5kj9r or Scan the QR Code.

05_8th_Maths_Telugu_Geometry_Chap_5.indd 210 31-07-2020 13:09:35

6 సాంఖ్యక శాస్త్రము



7X2SM

అభ్యసన లక్ష్యాలు

- ❖ పౌనఃపున్య పట్టికను తయారు చేయుటను పునశ్చరణ చేసుకొనుట.
- ❖ ఇవ్వబడిన దత్తాంశమునకు సాధారణ వృత్త రేఖా చిత్రమును నిర్మించుట.
- ❖ ఇవ్వబడిన దత్తాంశమునకు సోపాన రేఖా చిత్రము మరియు పౌనఃపున్య బహుభుజి ఏ విధంగా నిర్మించుటను నేర్చుకొనుట.

6.1 పరిచయం

వృత్త రేఖా చిత్రము, సోపాన రేఖా చిత్రము మరియు పౌనఃపున్య బహుభుజిని నేర్చుకొనే ముందు గత తరగతిలో నేర్చుకొన్న దత్తాంశము (ప్రాథమిక మరియు ద్వితీయ దత్తాంశములు) మరియు అవర్గీకృత దత్తాంశములకు పౌనఃపున్య పట్టికను తయారు చేయుటను గుర్తు చేసుకొందాం.

కామరాజ్ ! మన తరగతిలో గల మొత్తం విద్యార్థులు ద్వితీయాంతరములో గణిత శాస్త్రములో పొందిన మార్కులను సేకరించి తీసుకొని రమ్ము.

గీత! నీవు గత సామర్థ్యం నమోదు పుస్తకంలో గల మొత్తము విద్యార్థుల ఎత్తులను వ్రాసుకొని రమ్ము.

విద్యార్థులారా! ఇక్కడ కామరాజ్ సేకరించిన మార్కులు మరియు గీత వ్రాసుకొని వచ్చిన విద్యార్థుల ఎత్తులన్నింటిని దత్తాంశము అని అంటారు.

ఉదాహరణ: ఒక కంపెనీలోని కార్మికుల వయస్సు 27, 51, 19, 21, 46, 35, 52, 25, 57, 29.

6.1.1 దత్తాంశము:

ప్రాథమికస్థాయి దత్తాంశము

ఈ దత్తాంశము ఒక నిర్ణయించిన అవసరము కొరకు మొట్టమొదట నేరుగా సేకరించబడును. ఇక్కడ కామరాజ్ నేరుగా విద్యార్థుల నుండి వారి గణితశాస్త్రములోని మార్కుల వివరములను సేకరించెను. ఇది ప్రాథమికస్థాయి దత్తాంశము.

మరియు,(i) ఒక గ్రామంలోని జనాభాను లెక్కించుట.

(ii) ఒక తరగతి గదిలో గల విద్యార్థులు ఇష్టపడే రంగులు సేకరణ, వంటివి ప్రాథమికస్థాయి దత్తాంశమునకు కొన్ని ఉదాహరణలు.

ద్వితీయస్థాయి దత్తాంశము (గౌణ దత్తాంశము)

ఈ వివరములను ముందే సేకరించి ఉంచిన కొన్ని ప్రదేశముల నుండి సేకరించబడును. ఈ రకమైన దత్తాంశము ముందే వేరొకరిచే సేకరించబడియుండును. ముందే దీనిపై సాంఖ్యక శాస్త్ర పరిక్రియలు

06_8th_Maths_Telugu_Statistics_Chap_6.indd 211 31-07-2020 13:09:55

చేయబడియుండును. ఇక్కడ గీత దత్తాంశమును సేకరించెను. కానీ ఆ దత్తాంశము ముందే సేకరించిన దాని నుండి తీసుకోబడినది. దీనినే ద్వితీయస్థాయి దత్తాంశము అని అంటారు.

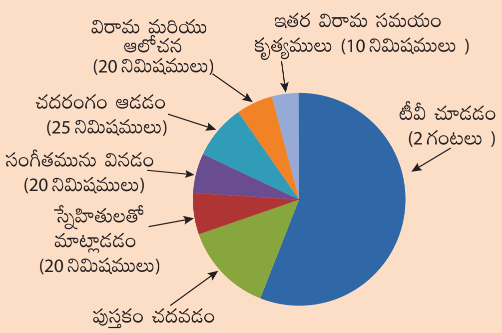
మరియు, (i) ఒక నేల యొక్క పట్టా వివరములను రిజిస్ట్రేషన్ కార్యాలయం నుండి పొందడం.

(ii) జనన-మరణ సమాచారమును తాలూకా కార్యాలయం నుండి పొందడం వంటివి ద్వితీయస్థాయి దత్తాంశమునకు ఉదాహరణలు.

ప్రాథమికస్థాయి మరియు ద్వితీయస్థాయి దత్తాంశముల నుండి నిర్దేశించిన అవసరమైన సమాచారమును నేరుగా పొందలేము. ఉదాహరణకు 50 మార్కుల కంటే ఎక్కువ మార్కులు పొందిన విద్యార్థులు ఎంతమంది? 30 మరియు 40 మధ్య మార్కులు పొందిన వారు ఎంతమంది? 125 సెం.మీ ఎత్తు గల వారెందరు? ఈ విధమైన ప్రశ్నల సమాధానం కొరకు దత్తాంశము పట్టిక పరచవలెను.

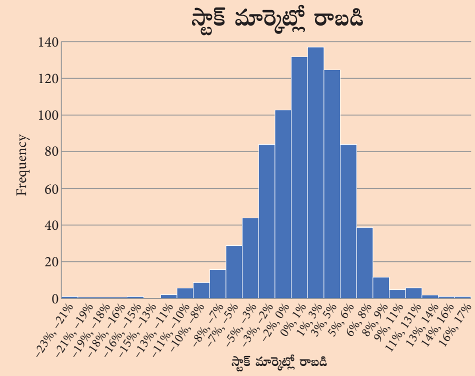
ఔత్సాహిక గణితము – నిత్యజీవితములో సాంఖ్యక శాస్త్రము

ఒక రోజులో సరాసరి విరామ సమయం



మన నిత్యజీవితంలో వృత్త రేఖా చిత్ర పటము ఉపయోగపడుచున్నవి

స్టాక్ మార్కెట్లో రాబడి



స్టాక్ కొనుగోలు దారుడి యొక్క రాబడిని సూచించుటకు సాక్ మార్కెట్లో సోపాన రేఖాచిత్రమును ఉపయోగించబడతాయి.

6.2 పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక

పౌనఃపున్యం విభాజనము:

పౌనఃపున్య విభాజన అనేది ఇవ్వబడిన దత్తాంశమును పట్టిక రూపంలో ప్రతి చరరాశికి పౌనఃపున్యమును సూచించునట్లు వరుస పరచుట అవుతుంది.

గమనిక

వ్యాప్తి: ఇవ్వబడిన దత్తాంశములో గరిష్ట, కనిష్ట విలువల వ్యత్యాసమును వ్యాప్తి అంటారు. 5,10,15,20,18 దత్తాంశములో వ్యాప్తి $= 20-5=15$

ఇక్కడ రెండు రకాల విభాజన పట్టికలు కలవు.

(i) అవర్గీకృతం పౌనపున్య విభాజన పట్టిక (ii) వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక

ప్రయత్నించుము

1. ఇచ్చిన దత్తాంశము ఆరోహణ మరియు అవరోహణ క్రమంలో వ్రాయుము. 9,34,4,13,42,10,25,7,31,4,40
2. ఇచ్చిన దత్తాంశమునకు వ్యాప్తి కనుగొనుము.: 53, 42, 61, 9, 39, 63, 14, 20, 06, 26, 31, 4, 57

06_8th_Maths_Telugu_Statistics_Chap_6.indd 212 31-07-2020 13:09:56

6.2.1 అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను నిర్మించుట:

అవర్గీకృత దత్తాంశము లేక విలక్షణ దత్తాంశము:

ఒక అవర్గీకృత దత్తాంశమును పూర్ణాంకములు మరియు ఖచ్చితంగా కొలత గా మాత్రమే తీసుకొంటాము. ఈ దత్తాంశములోని విలువల ఒక పరిధిలో ఉండదు. దీనిని సాధారణంగా **బార్ చిత్రములో** సూచిస్తారు.

ఉదాహరణలు: 1. ఒక పాఠశాలలో గల ఉపాధ్యాయుల సంఖ్య

2. ఒక ఆటలో గల ఆటగాళ్ళ సంఖ్య

ఉదాహరణ 6.1

నాలుగవ తరగతిలోని 25 మంది విద్యార్థుల బరువుకు అవర్గీకృత పౌనఃపున్య విభజన పట్టికను ఏర్పరుచును. మరియు క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రశ్నలకు జవాబులిమ్ము.

25, 24, 20, 25, 16, 15, 18, 20, 25, 16, 20, 16, 15, 18, 25, 16, 24, 18, 25, 15, 27, 20, 20, 27, 25.

(i) బరువుల వ్యాప్తి కనుగొనుము.

(ii) తరగతిలో అత్యధిక బరువు కలిగిన విద్యార్థులు ఎంత మంది?

(iii) అత్యధిక విద్యార్థులు ఏ బరువు క్రిందకు వస్తారు?

(iv) తక్కువ బరువు కలిగిన విద్యార్థులు ఎంతమంది?

సాధన: విభాజన పట్టికను ఏర్పరచుటకు ఇవ్వబడిన దత్తాంశమును బరువు వారీగా ఆరోహణ క్రమంలో వ్రాసి ఒక్కొక్క సంఖ్య ఎదురుగా గణన చిహ్నాలలో ఒక్కొక్క గీతను గీయవలెను. పౌనఃపున్య వరుసలో గణన చిహ్నాలలో గల గీతలను లెక్కించి క్రింది పట్టికలో ఉన్నట్లు వేయవలెను కావున, విభాజన పట్టిక

బరువు	గణన చిహ్నాలు	పౌనఃపున్యము
15	|||	3
16	||||	4
18	|||	3
20	~~||||~~	5
24	||	2
25	~~||||~~ |	6
27	||	2
	మొత్తము	25

(i) ఇవ్వబడిన దత్తాంశము యొక్క వ్యాప్తిని కనుగొనుటకు గరిష్ట విలువ నుండి కనిష్ట విలువను తీసివేయవలెను. ఇక్కడ వ్యాప్తి = 27−15 =12.

(ii) ఈ పట్టికలో ఎక్కువ బరువు 27 కి.గ్రా కలిగిన విద్యార్థుల సంఖ్య 2

(iii) 6 మంది విద్యార్థులు 25 కి.గ్రా బరువు గల వారు

(iv) అతి తక్కువ బరువు 15 కి.గ్రా గల విద్యార్థుల సంఖ్య 3

కావున, ఇవ్వబడిన దత్తాంశమును పట్టిక రూపంలో వ్రాయడం ద్వారా వివరములను సులభంగా పొందవచ్చును కదా?

06_8th_Maths_Telugu_Statistics_Chap_6.indd 213 31-07-2020 13:09:56

కృత్యము

1. నీ తరగతిలోని విద్యార్థుల బ్లడ్ గ్రూపులను సేకరించి క్రింది పట్టికను పూరించి విశ్లేషించుము.

బ్లడ్ గ్రూప్	గణన చిహ్నాలు	విద్యార్థుల సంఖ్య
A+		
B+		
AB+		
O+		
A-		
B-		
AB-		
O-		

2. నీ తరగతిలో గల స్నేహితుల పేర్లలో చివరి అక్షరములను పట్టిక పరచిన తరువాత క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రశ్నలకు సమాధానమును ఇమ్ము.

పేరులో గల చివరి ఆంగ్ల అక్షరము	గణన చిహ్నాలు	విద్యార్థుల సంఖ్య (f)

1. పేర్లలో ఏ అక్షరము ఎక్కువసార్లు చివరి అక్షరముగా కలదు?
2. పేర్లలో ఏ అక్షరము తక్కువ సార్లు చివరి అక్షరముగా కలదు?
3. ఏ అక్షరములు పేర్ల చివర అక్షరముగా రాలేదు?
4. బాలికల పేర్లు చాలా వరకు ______ అక్షరము(లు)తో ముగియును.
5. బాలురుల పేర్లు చాలా వరకు ______ అక్షరము(లు)తో ముగియును.

6.2.2 వర్గీకృత దత్తాంశమును పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను నిర్మించుట:

వర్గీకృత దత్తాంశము లేక నిరంతర దత్తాంశము:

వర్గీకృత దత్తాంశము అనేది నిర్దిష్ట అంతరములో గల విలువలు. ఈ దత్తాంశములో విలువలు గరిష్ట మరియు కనిష్ట విలువల మధ్య ఒక నిర్దిష్ట పరిధిలో ఉండును. నిరంతర దత్తాంశమును పట్టిక పరచుటను పౌనఃపున్య విభాజకము అంటారు. దీనిని **పౌనఃపున్య సోపాన** చిత్రములు ఉపయోగించి జ్యామితీయంగా సూచించవచ్చు.

ఉదాహరణలు: 1. ఒక గ్రామంలో గల వ్యక్తుల వయస్సు
2. నీ తరగతిలోని విద్యార్థుల ఎత్తు మరియు బరువు

ఇప్పుడు మనము ఒక సందర్భము తీసుకొంటాము. 50 మంది విద్యార్థుల మార్కులు సేకరించినట్లు అనుకొనుము. ఈ 50 విద్యార్థుల యొక్క మార్కుకు ఎదురుగా చిన్న గీతలు వేయడం కఠినమైనది. ఎందుకనగా, ఈ మార్కులను పట్టిక పరచిన దానిని సులభంగా అవగాహన చేసుకోనంత పెద్దదిగా ఉమటుంది. అందువల్ల మనము తరగతి అంతరమును ఉపయోగిస్తాము. ఈ పట్టికలో ఇవ్వబడిన దత్తాంశమును తరగతి అంతరములను వ్రాసి పౌనఃపున్యములను గుర్తించవలెను.

తరగతి అంతరము :

చరరాశుల వ్యాప్తిని తరగతులుగా సమూహ పరచవలెను. ఒక్కొక్క సమూహమును తరగతి అంతరము (CI) అని అంటారు. తరగతిలోని ఎగువ అవధి మరియు దిగువ అవధుల వ్యత్యాసమును తరగతి పరిమాణము అని పిలుస్తారు.

i.e. తరగతి అంతరం = ఎగువ అవధి – దిగువ అవధి

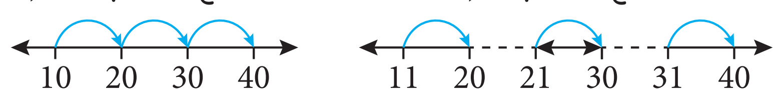
06_8th_Maths_Telugu_Statistics_Chap_6.indd 214 31-07-2020 13:09:56

ఉదాహరణకు,

10 నుండి 20 మార్కుల తరగతి అంతరమును 10–20 అని వ్రాయవచ్చును. దీని తరగతి పరిమాణం 20–10=10

తరగతి అంతరము

అ) అవిభాచిత శ్రేణి	ఆ) విభాజిత శ్రేణి



ఉదా :	ఉదా :
10 - 20	11 - 20 అంతరము
20 - 30	21 - 30
30 - 40	31 - 40
40 - 50	41 - 50

(అ) పౌనఃపున్యమును విభజించేటప్పుడు క్రింద ఇచ్చినట్లు లెక్కించవలెను 10-20, 20-30, 30-40, 40-50 ..... గా తరగతి అంతరములు ఇవి అవిభాజిత శ్రేణిలో కలదని చెప్పవచ్చును. ఇక్కడ 20 ను 20–30 లోపల 30 ను 30–40 లోపల లెక్కించవలెను. అదేవిధంగా, మిగిలిన తరగతులను కూడా లెక్కించవలెను.

(ఆ) ఇవ్వబడిన శ్రేణిలో రెండు వరుస తరగతుల అవధులకు మధ్య అంతరమును దాని యొక్క సగము విలువతో రెండు అవధులకు తీసుకొని విస్తరించడంద్వారా నింపవలెను. అంతర కొలత యొక్క సగమును సవరింపు కారంణాంకము అని అంటారు.

వివరణ 1:

11 - 20 అంతరము

21 - 30 అంతరముల వ్యత్యాసము = 21 – 20 = 1

31 - 40

41 - 50

దిగువ హద్దు = దిగువ అవధి – అంతరము యొక్క సగము

$$= 11 - \frac{1}{2}(1)$$

$= 11 – 0.5 = 10.5$

ఎగువ హద్దు = ఎగువ అవధి + అంతరం యొక్క సగము

$$= 20 + \frac{1}{2}(1)$$

$= 20 + 0.5$

$= 20.5$ ఇదే విధముగా, మిగిలిన అన్ని అంతరములకు కనుగొనవలెను.

విభాజిత శ్రేణి	అవిభాజిత శ్రేణి
-0.5 +0.5 11-20	10.5-20.5
21-30	20.5-30.5
31-40	30.5-40.5
41-50	40.5-50.5

కావున తరగతి అంతరమును అవిభాజిత శ్రేణిగా ప్రక్క పట్టికలో ఉన్నట్లు మార్చవచ్చును.

06_8th_Maths_Telugu_Statistics_Chap_6.indd 215 31-07-2020 13:09:57

గమనిక

విలీన శ్రేణి:

తరగతి అంతరములో ఎగువ అవధి మరియు దిగువ అవధులను ఆ తరగతిఅంతరములో తీసుకొంటే వాటిని విలీన శ్రేణి అంటారు. ఉదాహరణకు 11-20, 21-30 , 31-40, 41-50 మొదలగునవి విలీన శ్రేణులు. ఇక్కడ 11–20 తరగతి అంతరంలో 11 మరియు 20 అనేవి ఉండును. స్పష్టంగా తరగతులు విభాజిత శ్రేణి.

మినహాయింపు శ్రేణి

తరగతి అంతరములలో ఒక తరగతి అంతరము యొక్క ఎగువ అవధి తరువాత తరగతి అంతరము యొక్క దిగువ అవధిగా ఉన్నచో అది మినహాయింపు శ్రేణి అని అంటారు. ఉదాహరణకు, 10-15, 15-20, 20-25, 25-30 అనేది మినహాయింపు శ్రేణి.

ఇక్కడ 15 అనే విలువ 15–20 అనే తరగతి అంతరము లోని మరియు 20 అనేది 20–30 తరగతి అంతరములో తీసుకోబడును. స్పష్టంగా ఈ తరగతులు అవిభాజిత శ్రేణి.

6.2.2 (i) వర్గీకృత పౌనఃపున్యం విభాజన పట్టికను నిర్మించుట – అవిభాజిత శ్రేణి

ఉదాహరణ 6.2

ఒక గ్రామములో గల 26 ఇంట్లకు అయ్యే విద్యుత్ చార్జీలు క్రింద ఇవ్వబడినవి. పౌనపున్య పట్టికను నిర్మించుము.

215	200	120	350	800	600	350	400	180	210	170	305	204
220	425	540	315	640	700	790	340	586	660	785	290	300

సాధన:

గరిష్ట చార్జి = ₹ 800

కనిష్ట ఛార్జి = ₹ 120

వ్యాప్తి = గరిష్ట విలువ – కనిష్ట విలువ

వ్యాప్తి = 800 – 120 = ₹ 680

తరగతి పరిమాణము 100గా తీసుకొనదలచిన,

సాధ్యమయ్యే తరగతి అంతరముల సంఖ్య $= \frac{\text{వ్యాప్తి}}{\text{తరగతి పరిమాణము}} = \frac{680}{100} = 6.8 \simeq 7$

తరగతి అంతరములు	గణన చిహ్నాలు	పౌనఃపున్యము
100-200	|||	3
200-300	~~||||~~ |	6
300-400	~~||||~~ |	6
400-500	||	2
500-600	||	2
600-700	|||	3
700-800	||||	4
	మొత్తము	26

06_8th_Maths_Telugu_Statistics_Chap_6.indd 216 31-07-2020 13:09:57

6.2.2 (ii) వర్గీకృత పౌనఃపున్యం విభాజన పట్టికను నిర్మించుట-విభాజిత శ్రేణి

ఉదాహరణ 6.3

అవిభాజిత శ్రేణి పౌనఃపున్య విభాజన పట్టికను నిర్మించుము.

తరగతి	0-5	6-11	12-17	18-23	24-29
పౌనఃపున్యము (f)	7	10	9	5	12

సాధన:

పైన చెప్పినట్లు మొదట మనము అంతరమును దాని యొక్క సగము విలువను రెండు వరుస అవధులకు తీసుకొని విస్తరించి నింపవలెను. ఇక్కడ అంతరము 1. కావున అంతరము కొలత యొక్క సగము 0.5 ను ప్రతి తరగతి దిగువ అవధికి మరియు ఎగువ అవధికి వరుసగా తీసివేసి మరియు కలుపుట ద్వారా అవిభాజిత శ్రేణగా మారును.

తరగతి	-0.5-5.5	5.5-11.5	11.5-17.5	17.5-23.5	23.5-29.5
పౌనఃపున్యము (f)	7	10	9	5	12

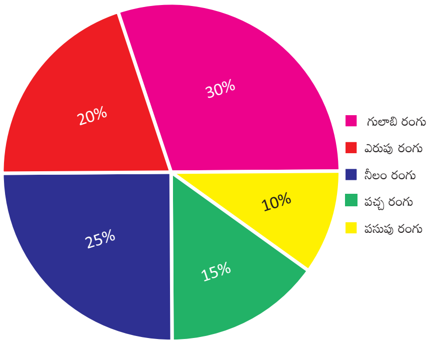
ప్రయత్నించుము

1. ఇవ్వబడిన దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య పట్టికను తయారు చేయుము.:
   3, 4, 2, 4, 5, 6, 1, 3, 2, 1, 5, 3, 6, 2, 1, 3, 2, 4
2. ఇవ్వబడిన దత్తాంశమునకు వర్గీకృత పౌనఃపున్య పట్టికను తయారు చేయుము. :
   10, 9, 3, 29, 17, 34, 23, 20, 39, 42, 5, 12, 19, 47, 18, 19, 27, 7, 13, 40, 38, 24, 34, 15, 40

6.3 అవర్గీకృత దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య విభాజనమును రేఖా చిత్రము ద్వారా సూచించుట

రేఖా చిత్రము ద్వారా సూచించుట అనగా దత్తాంశము యొక్క సమితిని జ్యామితీయ రూపంలో తెలియజేయుట. ఇది ఒక గణిత చిత్రం సాంఖ్యక శాస్త్ర సమస్యలను దృశ్య పదాలతో గురించి ఆలోచించుటకు సహాయపడుతుంది. ఒక నిర్దిష్ట సమాచారమును వాక్య రూపంలో వివరించుటకు కన్నా పట రూపంలో వివరించుట ఎక్కువ ఉపయోగకరంగా ఉండును. గత తరగతులలో మనము రేఖా చిత్రము ద్వారా అవర్గీకృత దత్తాంశమును కమ్మీ రేఖాచిత్ర రూపంలో, పటచిత్ర రూపంలో, సోపాన చిత్ర రూపంలో గీయుటను తెలుసుకొన్నాము. ఇప్పుడు మనము అవర్గీకృత దత్తాంశమును వృత్త రూపంలో సూచించబోవుచున్నాము. దీనిని వృత్త రేఖా చిత్రము లేక వృత్త చిత్రము అని అంటారు.

6.3.1 వృత్త రేఖా చిత్రము (లేక) వృత్త పటము



వృత్త రేఖా చిత్రము ఒక వృత్తాకారంలో గల రేఖాచిత్రము. ఇది మొత్తము విలువను దాని భాగాలతో చూపుతుంది. వృత్తము సెక్టార్లుగా విభజించబడినది. మరియు ఇచ్చిన సమాచారమునకు సెక్టారు వైశాల్యము అనుపాతముగా ఉండును. వృత్త వైశాల్యము మొత్తం విలువను సూచిస్తుంది మరియు వృత్తం యొక్క సెక్టార్లు వేర్వేరు భాగాలను సూచిస్తాయి. వృత్త చిత్రములో దత్తాంశము ను చాలావరకు. శాతములలో తెలుపుతారు. ప్రతి భాగమును మొత్తం విలువలో శాతముగా వర్గీకరించబడుతుంది.

06_8th_Maths_Telugu_Statistics_Chap_6.indd 217 31-07-2020 13:09:58

వృత్త చిత్రమును పై (PIE) చిత్రము అని పిలవబడుతుంది. ఎందుకంటే మొత్తం చిత్రము ఒక అమెరికన్ ఫుడ్ పై లాగా మరియు భాగాలు ను (PIE) నుండి కత్తిరించిన ముక్కలను పోలి ఉంటాయి.

అమెరికన్ ఫుడ్ పై

6.3.2 వృత్త చిత్రమును నిర్మించే పద్ధతి:

వృత్త చిత్రములో వివిధ భాగాలు ఒక వృత్తము యొక్క సెక్టారులచే సూచించబడుతున్నాయని మనకు తెలుసు. మొత్త వృత్తము అన్ని భాగాల విలువల మొత్తాన్ని సూచిస్తుంది. కావున వృత్త కేంద్రము వద్దగల 360^0 డిగ్రీల కోణమును భాగాల విలువ ప్రకారం వివిధ సెక్టారులుగా విభజింపబడింది.

$$\text{ఒక భాగం యొక్క కేంద్ర కోణము} = \frac{\text{భాగము యొక్క విలువ}}{\text{మొత్తము విలువ}} \times 360^{\circ}$$

కొన్ని సమయాలలో భాగముల విలువ శాతంలో ఉన్న సందర్భంలో

$$\text{భాగము యొక్క కేంద్ర కోణము} = \frac{\text{శాతములో ఉన్న భాగము విలువ}}{100} \times 360^{\circ}$$

వృత్త చిత్రములను నిర్మించుటకు గల సోపానములు

1) ఒక్కొక్క భాగము యొక్క కేంద్ర కోణమునుపై సూత్రమును ఉపయోగించి కనుగొని పట్టికలో వ్రాయుము.

2) అనుకూల వ్యాసార్థముతో ఒక వృత్తము గీచి దానిలో ఒక క్షితిజ సమాంతర వ్యాసార్థమును గీయుము.

3) క్షితిజ సమాంతర వ్యాసార్థముతో మొదటి భాగము యొక్క కేంద్ర కోణము వృత్తకేంద్రం వద్ద ఏర్పడే విధంగా వ్యాసార్థమును గీయుము. ఈ సెక్టారు మొదటి భాగమును సూచించును. ఈ వ్యాసార్థము నుండి రెండవ భాగము యొక్క కోణమును వృత్తములో కేంద్రము వద్ద ఏర్పడే విధంగా మరొక వ్యాసార్థమును గీయుము. ఇదే విధంగా అన్ని భాగములు పూర్తయ్యేవరకు గీయుము.

4) ఒక్కొక్క కోణ భాగము వేరుపరచే విధంగా ఒక్కొక్క భాగమునకు రంగు వేయుము.

5) ఒక్కొక్క వృత్త కోణ భాగములో ఇచ్చిన వివరములను వ్రాయుము.

ఇక్కడ కొన్ని ఉదాహరణలు ఇవ్వబడినవి. ఇవ్వబడిన దత్తాంశములకు మనము వృత్త రేఖా చిత్రములను నిర్మిస్తాము.

ఉదాహరణ 6.4

2 ఎకరాల భూమిలో వరి పండించుటకు అయ్యే ఖర్చు క్రింద ఇవ్వబడినది. దానికి వృత్త చిత్రము గీయుము.

వివరములు	విత్తనము	దున్నుట	వేతనాలు	ఎరువు	కోత	ఇతరములు
ఖర్చులు (₹)	2000	6000	10000	7000	8000	3000

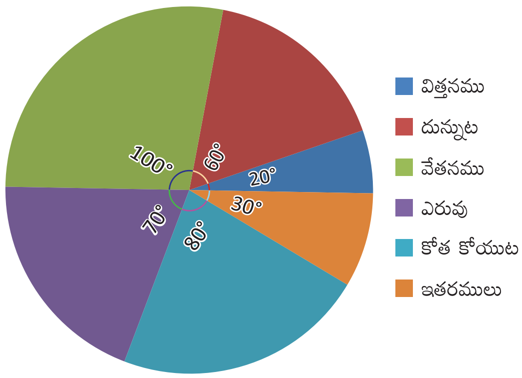
మరియు, 1. ఎక్కువ ఖర్చు దేనికి ఖర్చు చేస్తున్నారు? దాని శాతం ఎంత?

2. విత్తనాలు కొనడానికి ఎంత శాతం ఖర్చు చేస్తున్నారు?

06_8th_Maths_Telugu_Statistics_Chap_6.indd 218 31-07-2020 13:09:59

సాధన:

2 ఎకరా భూమిలో వరి పండించడానికి అయ్యే ఖర్చు



వివరములు	కేంద్ర కోణము $=\frac{\text{విలువ}}{\text{మొత్తము}}\times 360^\circ$
విత్తనము	$\frac{2000}{36000}\times 360^\circ = 20^\circ$
దున్నుట	$\frac{6000}{36000}\times 360^\circ = 60^\circ$
వేతనాలు	$\frac{10000}{36000}\times 360^\circ = 100^\circ$
ఎరువు	$\frac{7000}{36000}\times 360^\circ = 70^\circ$
కోత కోయడం	$\frac{8000}{36000}\times 360^\circ = 80^\circ$
ఇతరములు	$\frac{3000}{36000}\times 360^\circ = 30^\circ$
మొత్తము	360°

1. ఎక్కువ ఖర్చు వేతనములు కొరకు 10,000 ఖర్చు చేస్తున్నారు. దానిని శాతములో మార్చిన వేతనాలు $= \frac{10000}{36000}\times 100\% = 27.7\%$
2. విత్తనముల కొరకు ₹2000 ఖర్చు చేస్తున్నారు.

దీనిని శాతములో మార్చిన విత్తనములు $= \frac{2000}{36000}\times 100\% = 5.55\%$

ఉదాహరణ 6.5

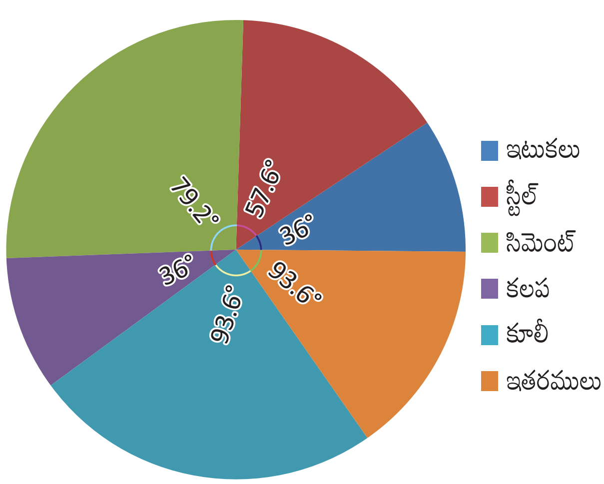
ఒక ఇల్లు కట్టుటకు అయ్యే ఖర్చును క్రింద పట్టికలో ఇవ్వబడినది. ఆ దత్తాంశము నుండి వృత్త చిత్రమును గీయండి.

వివరములు	ఇటుకలు	స్టీలు	సిమెంట్	కలప	వేతనం	ఇతరములు
ఖర్చులు	10%	15%	25%	10%	20%	20%

మరియు సిమెంటుకు ₹55000 ఖర్చయిన కూలీకి అయిన ఖర్చును కనుగొనుము.

సాధన:

ఇల్లు కట్టుటకు అయ్యే ఖర్చు



వివరములు	కేంద్ర కోణము
ఇటుకలు	$\frac{10}{100}\times 360^\circ = 36^\circ$
స్టీల్	$\frac{15}{100}\times 360^\circ = 54^\circ$
సిమెంట్	$\frac{25}{100}\times 360^\circ = 90^\circ$
కలప	$\frac{10}{100}\times 360^\circ = 36^\circ$
వేతనము	$\frac{20}{100}\times 360^\circ = 72^\circ$
ఇతరములు	$\frac{20}{100}\times 360^\circ = 72^\circ$
మొత్తము	360°

06_8th_Maths_Telugu_Statistics_Chap_6.indd 219 31-07-2020 13:10:01

సిమెంటుకు అయ్యే ఖర్చు ₹ 55000 అయితే ఇది 25% ను సూచించిన 20% కూలీను సూచించును.

కావున కూలీకు అయ్యే ఖర్చు $= \frac{20}{25} \times 55000$

$= ₹\ 44,000$

%	ఖర్చులు
25 ↓	55000
20	? ↓
అనులోమానుపాతం	

గమనిక

వృత్త రేఖా చిత్రము యొక్క ఉపయోగములు

1. వృత్త రేఖా చిత్రమును వ్యాపార రంగంలో మరియు ప్రసార మాధ్యమంలో ఎక్కువగా ఉపయోగిస్తున్నారు.
2. వృత్త రేఖా చిత్రమును ఉపయోగించి ప్రభుత్వ ఖర్చులు లేదా వేర్వేరు రంగాల్లో వ్యాపారస్తులు చేసే ఖర్చులను చూడవచ్చును.
3. పరిశోధకులు వారి ఫలితములను వివరించుటకు వృత్త రేఖాచిత్రమును ఉపయోగిస్తారు.

అభ్యాసము 6.1

1. ఖాళీలను పూరింపుము.

(i) వేరొకరిచే ముందే సేకరించిన సమాచారమును ______________ దత్తాంశము అంటారు.

(ii) (25–35) తరగతి అంతరములో ఎగువ అవధి ______________

(iii) 200, 15, 20, 103, 3, 197, యొక్క వ్యాప్తి ______________

(iv) తరగతి పరిమాణము 10 మరియు వ్యాప్తి 80 అయిన తరగతుల సంఖ్య ______________

(v) వృత్త పటము అనేది ______________ రేఖాచిత్రము.

2. **సరియా లేక తప్పా అని తెలుపుము**

(i) విలీన శ్రేణి ఒక అవిభాజిత శ్రేణి.

(ii) మొత్తం భాగాల పోలికను వృత్త చిత్రం ద్వారా సులువుగా చూడవచ్చు

(iii) ప్రసార మాధ్యమంలో మరియు వ్యాపారస్తులు వృత్త చిత్రమును ఉపయోగిస్తారు.

(iv) వృత్త రేఖా చిత్రము వృత్తాన్ని అనేక వృత్త కోణములుగా విభజించును.

3. 25 కుటుంబములో గల పిల్లల సంఖ్యను క్రింద ఇవ్వబడినది. దీనిని అవర్గీకృత పౌనఃపున్య పట్టికలో చూపుము.
1, 3, 0, 2, 5, 2, 3, 4, 1, 0, 5, 4, 3, 1, 3, 2, 5, 2, 1, 1, 2, 6, 2, 1, 4

4. పదవ తరగతి పరీక్షలో 30 మంది విద్యార్థులు పొందిన మార్కులను అవిచ్ఛిన్న పౌనఃపున్య విభజన పట్టికలో చూపుము.
328, 470, 405, 375, 298, 326, 276, 362, 410, 255, 391, 370, 455, 229, 300, 183, 283, 366, 400, 495, 215, 157, 374, 306, 280, 409, 321, 269, 398, 200.

5. ఒక పెయింట్ కంపెనీ ఒక సమూహ విద్యార్థులను వారికి ఇష్టమైన రంగులను గురించి అడిగి ఆ దత్తాంశమునకు వృత్త రేఖా చిత్రమును గీయమని తెలిపెను.
ఆ దత్తాంశమును ఉపయోగించి ఈ క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానములిమ్ము.

(i) ఎంత శాతం విద్యార్థులు ఎరుపు రంగును ఇష్టపడుతున్నారు?

(ii) ఎంత మంది విద్యార్థులు పచ్చరంగును ఇష్టపడుతున్నారు?

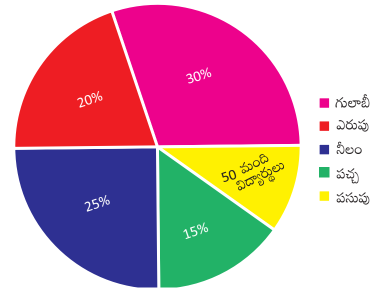
06_8th_Maths_Telugu_Statistics_Chap_6.indd 220 31-07-2020 13:10:01

(iii) నీలి రంగును ఇష్టపడేవారు విద్యార్థుల భిన్నము ఎంత?

(iv) ఎంత మంది విద్యార్థులు ఎరుపు రంగును ఇష్టపడలేదు?

(v) ఎంత మంది విద్యార్థులు గులాబీ రంగును లేత నీలి రంగును ఇష్టపడుతున్నారు?

(vi) తమకు ఇష్టమైన రంగులను గురించి ఎంత మంది విద్యార్థులను అడిగెను?



6. ఒక సర్వేలో ప్రజలు ఇష్టపడిన ఆహార పదార్థములు క్రింది పట్టికలో కలదు. ఆ వివరములకు వృత్త రేఖా చిత్రమును గీయుము?

ఆహార పదార్థములు	కాయగూరలు	మాంసము	పచ్చడి	పండ్లు	మొలకెత్తిన ధాన్యములు	రొట్టెలు
ప్రజల సంఖ్య	160	90	80	50	30	40

7. భారతదేశ ప్రభుత్వానికి పన్ను రూపంలో వివిధ రూపాల్లో వచ్చే ఆదాయాన్ని రూపాయలలో క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడింది. ఈ దత్తాంశానికి వృత్త రేఖా చిత్రమును గీయుము.

ఆదాయం వచ్చే పన్నులు	పురపాలక సంస్థ పన్ను	ఆదాయ పన్ను	సుంకము	వస్తువు తయారీపై పన్ను	సేవా పన్ను	ఇతరములు
ఆదాయం (పైసలలో)	19	16	9	14	10	32

8. కుమార్ నెలసరి ఖర్చు వివరములు క్రింద ఇవ్వబడినవి. దానికి వృత్త రేఖా చిత్రము గీయుము.

వివరములు	ఆహారము	విద్య	అద్దె	రవాణా	ఇతర ఖర్చులు
ఖర్చులు (%)	50 %	20 %	15 %	5 %	10 %

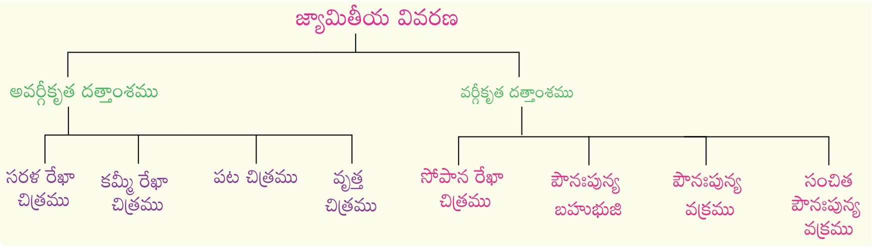
ఇంకా,

1. కుమార్ ₹6000 ను ఇంటి అద్దె ఖర్చుచేసిన, విద్య కొరకు చేసిన ఖర్చును కనుగొనుము.
2. కుమార్ నెలసరి ఆదాయం ఎంత?
3. విద్య కన్నా ఆహారమునకు ఎంత ఎక్కువ ఖర్చు చేసెను?

6.4 వర్గీకృత దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్యం విభాజనమును రేఖ చిత్రం ద్వారా సూచించుట

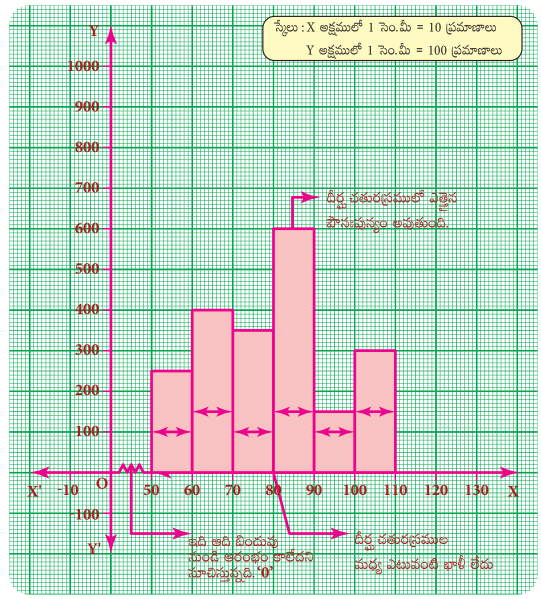
సరళ రేఖా చిత్రము, కమ్మీ రేఖా చిత్రము, పట చిత్రములు మరియు వృత్త చిత్రములు అవర్గీకృత దత్తాంశము యొక్క పౌనఃపున్య విభాజనమును సూచించు రేఖా చిత్ర పద్ధతి అగును. సోపాన రేఖా చిత్రము పౌనఃపున్య బహుభుజి, పౌనఃపున్య వక్రము, సంచిత పౌనఃపున్య వక్రములు వర్గీకృత దత్తాంశము యొక్క పౌనఃపున్య విభాజనమును సూచించు రేఖా చిత్ర పద్ధతి అగును.

ఈ తరగతులలో మనము వర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క పౌనఃపున్య విభాజనమును సోపాన రేఖా చిత్రము, పౌనఃపున్య బహుభుజిలతో సూచించుటను మాత్రమే నేర్చుకోబోవుచున్నాము. మిగతా పద్ధతిలో సూచించుటను పై తరగతులలో నేర్చుకుంటాము.



06_8th_Maths_Telugu_Statistics_Chap_6.indd 221 31-07-2020 13:10:01

6.4.1 సోపాన రేఖా చిత్రము (Histogram)



సోపాన రేఖా చిత్రము అనేది అవిభాజిత పౌనఃపున్య విభాజన రేఖా చిత్రము. సోపాన రేఖా చిత్రములో దీర్ఘచతురస్రాకారములు కలిగి ఉండును. దీని భూమి, తరగతి అంతరం యొక్క పొడవు మరియు ప్రతి తరగతి పౌనఃపున్యం దాని ఎత్తుగా ఉండును. అనగా తరగతి అంతరములను క్షితిజ సమాంతర అక్షము (x–అక్షము) పౌనఃపున్యమును క్షితిజ లంబ అక్షము (y–అక్షము) పై సూచిస్తారు.

ఒక్కొక్క దీర్ఘ చతురస్ర వైశాల్యము సంబంధిత తరగతి అంతరములోని పౌనఃపున్యానికి అనుపాతంలో ఉంటుంది. మరియు సోపాన రేఖా చిత్రము యొక్క మొత్తం వైశాల్యం మొత్తం పౌనపున్యమునకు అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది. ఎందుకనగా అవిభాజిత పౌనపున్య విభాజనము కావున దీర్ఘ చతురస్రాలు ఒకదాని పక్కన ఒకటి ఖాళీ లేకుండా ఉంటుంది.

సోపాన రేఖా చిత్రమును నిర్మించుటకు సొపానములు:

1. దత్తాంశము అవిభాజిత రూపము (మినహాయింపు రూపము)లో సూచించవలెను. ఒకవేళ ఇది విభాజిత (విలీన) రూపంలో ఉన్నచో దిద్దుబాటు కారణాంకమును ఉపయోగించి అవిభాజిత రూపంలో మార్చ వలెను.
2. x – అక్షము మరియు y – అక్షముపై తగిన ప్రమాణములను తీసుకొనవలెను.
3. x – అక్షముపై తరగతి అంతరములోని దిగువ అవధులను గుర్తించవలెను.
4. y – అక్షముపై పౌనఃపున్యములను గుర్తించవలెను.
5. తరగతి అంతరముల ఆధారముగా మరియు పౌనపున్యములను ఎత్తుగా దీర్ఘచతురస్రములు నిర్మించవలెను. ప్రతి తరగతికి దిగువ మరియు ఎగువ విలువలు ఉండును. ఇది రెండు సమాన పైభాగమును లంబ రేఖలను ఇచ్చి. పౌనఃపున్యమును సూచించును. లంబ రేఖలను కలిపిన అది దీర్ఘ చతురస్రమును ఏర్పరచును.

గమనిక

కమ్మీ రేఖా చిత్రమునకు మరియు సోపాన రేఖా చిత్రమునకు గల వ్యత్యాసము

	కమ్మీ రేఖా చిత్రము	సోపాన రేఖా చిత్రము
1	అవర్గీకృత దత్తాంశమును సూచించుటకు ఉపయోగిస్తారు	వర్గీకృత దత్తాంశము సూచించుటకు ఉపయోగిస్తారు
2	రెండు బార్‌ల మధ్య ఖాళీ ఉండును	రెండు దీర్ఘ చతురస్రముల మధ్య ఖాళీ ఉండదు
3	ప్రతి భార్ యొక్క పొడవు ముఖ్యమైనది, కానీ వెడల్పు కాదు	ప్రతి దీర్ఘ చతురస్రము యొక్క పొడవు వెడల్పులు రెండూ ముఖ్యమైనవి

06_8th_Maths_Telugu_Statistics_Chap_6.indd 222 31-07-2020 13:10:02

6.4.1 (i) అవిభాజిత పౌనపున్య విభాజనమునకు సోపాన రేఖా చిత్రం గీయుట

ఉదాహరణ 6.6

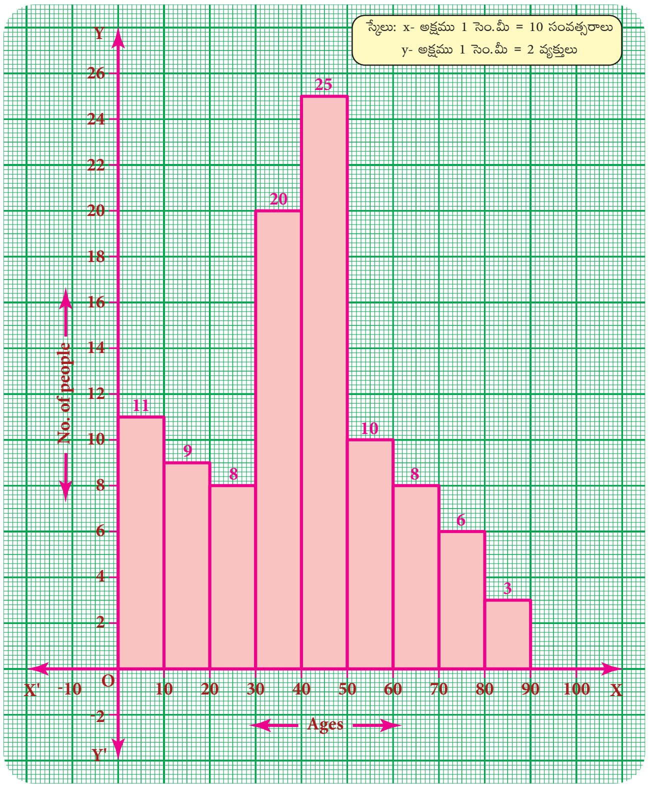
క్రింద ఉన్న పట్టికలో ఒక గ్రామములో 100 మంది వయస్సులు గుర్తించబడినది. దీనికి సోపాన రేఖా చిత్రంగీయుము.

వయస్సు	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
వ్యక్తుల సంఖ్య	11	9	8	20	25	10	8	6	3

సాధన:

ఇచ్చిన దత్తాంశము అవిభాజిత పౌనపున్యం విభాజనము. తరగతి అంతరము x- అక్షముపై మరియు వాటి పౌనఃపున్యమును y- అక్షముపై గుర్తించవలెను. తరగతులు (వయస్సు) మరియు పౌనపున్యము (వ్యక్తుల సంఖ్య)ను తీసుకొని దీర్ఘ చతురస్రమును నిర్మించవలెను.

క్రింద ఉన్న విధముగా సోపాన రేఖా చిత్రాలను నిర్మించవలెను.



గమనిక

తరగతి అంతరము ఆది బిందువు '0' నుండి ఆరంభం కాకపోతే దీనిని ఆది బిందువు దగ్గర x- అక్షముపై ఒక కింక్ (జిగ్–జాగ్) గుర్తును గీచి సూచించవలెను. ఈ కింక్ గుర్తును (⩘) y- అక్షము పైన లేక రెండు అక్షముల పైన అవసరమైనచో గీయవచ్చును. అంటే, ఇవ్వబడిన దత్తాంశము ఆది బిందువు నుండి ప్రారంభం కాలేదని ఇది తెలియజేయును.

6.4.1 (ii) విభాజిత పౌనపున్య విభాజనమునకు సోపాన రేఖా చిత్రమును నిర్మించుట

ఉదాహరణ 6.7

ఒక నగరంలో 10 నుండి 45 వయస్సు వరకు గల అక్షరాస్యుల స్త్రీల సంఖ్యను క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది.

వయస్సు	10-15	16-21	22-27	28-33	34-39	40-45
స్త్రీల సంఖ్య	350	920	850	480	230	200

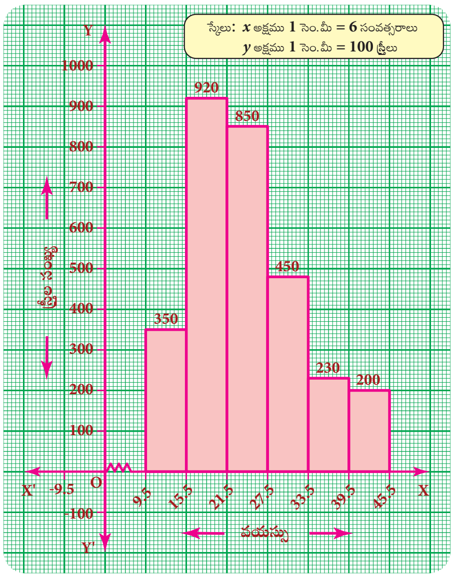
పై దత్తాంశమునకు సోపాన రేఖా చిత్రము గీయుము.

06_8th_Maths_Telugu_Statistics_Chap_6.indd 223 31-07-2020 13:10:02

సాధన:

ఇచ్చిన విభాజనము విభాజితము. వీటిని రేఖా చిత్రములో గుర్తించిన రెండు తరగతులకు మధ్య ఉన్న ఖాళీ వలన మనకు బార్ రేఖా చిత్రము వచ్చును. కావున దిద్దుబాటు కారణాంకమును ఉపయోగించి అవిభాజిత విభాజనముగా మార్చవలెను.

మొదటి తరగతి అంతరమును 9.5−15.5గా వ్రాయవచ్చును. మిగిలిన తరగతి అంతరములను ఇదే విధంగా మార్చి వ్రాయవలెను. పౌనపున్యములో ఎటువంటి మార్పు ఉండదు.



క్రొత్తగా మార్చిన అవిభాజిత పౌనఃపున్య పట్టిక

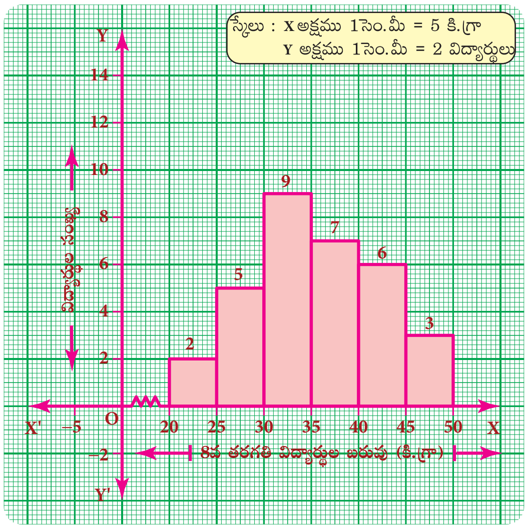
వయస్సు	9.5-15.5	15.5-21.5	21.5-27.5	27.5-33.5	33.5-39.5	39.5-45.5
స్త్రీల సంఖ్య	350	920	830	480	230	200

ఉదాహరణ 6.8

ఇవ్వబడిన సోపాన రేఖా చిత్రాలను పరిశీలించి క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానములిమ్ము.

హింట్: తక్కువ బరువు: 30కి.గ్రా కన్న తక్కువఇ సాదారణ బరువు 30 నుంచి 45 కి.గ్రా, ఎక్కువ బరువు : 45 కి.గ్రా. కన్న ఎక్కువ

1. ఇవ్వబడిన సోపాన రేఖాచిత్రము ఏ సమాచారాన్ని తెలియజేస్తున్నది?
2. ఏ సమూహములో ఎక్కువ విద్యార్థులు కలరు?
3. ఎంత మంది విద్యార్థులు తక్కువ బరువుగల తరగతిలో కలరు?
4. ఎంత మంది విద్యార్థులు ఎక్కువ బరువు గల తరగతిలో కలరు?
5. తరగతిలో ఎంత మంది విద్యార్థులు కలరు?



సాధన:

1. ఎనిమిదవ తరగతి విద్యార్థుల బరువును సేకరించి దానిని సోపాన రేఖా చిత్రములో చూపించబడింది.
2. 30−35 కి.గ్రా విద్యార్థులు తక్కువ బరువు గల తరగతిలో గరిష్టంగా తొమ్మిది మంది విద్యార్థులు కలరు.
3. $7(=2+5)$ విద్యార్థులు తక్కువ బరువుగల తరగతిలో కలరు.
4. 3 మంది విద్యార్థులు ఎక్కువ బరువు గల తరగతిలో కలరు.
5. $16(=9+7)$ మంది విద్యార్థులు 30−40 కి.గ్రా బరువు తరగతిలో గలరు.

06_8th_Maths_Telugu_Statistics_Chap_6.indd 224 31-07-2020 13:10:03

6.4.2 పౌనఃపున్య బహుభుజి

పౌనఃపున్య విభాజనమును జ్యామితీయంగా తెలిపే ఒక రేఖీయ రేఖాచిత్రమును పౌనఃపున్య బహుభుజి అంటారు. సోపాన చిత్రములోని దీర్ఘచతురస్రము యొక్క పైభాగమునందు గల మధ్యబిందువులను గుర్తించి వాటిని ఒక సరళరేఖల ద్వారా కలిపిన పౌనఃపున్య బహుభుజిని ఏర్పడును. ఇది ఒక బహుభుజి భుజాలవలె రేఖలను కలిగిఉండుట వలన దీనిని ఒక బహుభుజి అంటారు.

రెండు లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ పౌనఃపున్య విభాజనములను పోల్చుటకు పౌనఃపున్య బహుభుజి ఉపయోగకరముగా ఉంటుంది. వర్గీకృత పౌనఃపున్య విభాజనమునకు సంబంధించిన పౌనఃపున్య బహుభుజిని రెండు విధములుగా నిర్మించవచ్చును. అవి:

i) సోపాన రేఖాచిత్రములను ఉపయోగించి

ii) సోపాన రేఖాచిత్రములను ఉపయోగించకుండ

6.4.2 (i) సోపాన రేఖాచిత్రములను ఉపయోగించి పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మించుట

1. ఇచ్చిన దత్తాంశము నుండి ఒక సోపాన రేఖాచిత్రమును గీయండి.
2. సోపాన రేఖాచిత్రము యొక్క పైభాగమున గల ఆసన్న దీర్ఘచతురస్రములయందు ప్రక్కప్రక్కనే ఉన్న మధ్య బిందువులను రేఖాఖండములచే కలపండి.
3. సోపాన రేఖాచిత్రంలో మొదటి దీర్ఘచతురస్రము ముందున్న తరగతి అంతరం మరియు చివరి దీర్ఘచతురస్రముకు తరువాత గల తరగతి అంతరముల పౌన పున్యము (ఆంత్యముల తరగతి అంతరము) సున్నగా ఊహించుకొంటాము. ఈ తరగతి అంతరమును కల్పిత తరగతి అంతరములు అంటారు.
4. పౌనఃపున్య బాహుభుజిని పొందడానికి సోపాన రేఖాచిత్రము యొక్క మొదటి మరియు చివరి దీర్ఘచతురస్రాల పైభాగపు మధ్యబిందువులలో కల్పిత తరగతి మధ్య బిందువులను కలుపుము.

ఉదాహరణ 6.9

ఒక పాఠశాలలో గల 200 మంది విద్యార్థుల గ్రంథాలయములో గడుపు సమయమునకు ఖర్చుకు సంబంధించిన విభాజనము క్రింద ఇవ్వబడినది.

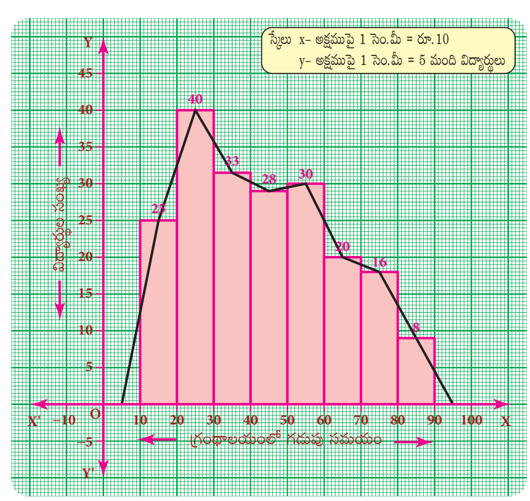
దినసరి ఖర్చు	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
విద్యార్థుల సంఖ్య	25	40	33	28	30	20	16	8

సోపాన రేఖాచిత్రమును ఉపయోగించి పౌనఃపున్య బహుభుజిని గీయండి.

సాధన:

x– అక్షముపై గ్రంథాలయములో గడుపు సమయం ఖర్చును మరియు y– అక్షముపై విద్యార్థుల సంఖ్యను తీసుకొనుము.

ఇచ్చిన దత్తాంశము నుండి సోపాన రేఖాచిత్రమును గీయండి. ఇప్పుడు, ప్రక్కప్రక్కనే గల దీర్ఘచతురస్రముల పైభుజములో మధ్య బిందువులను గుర్తించండి. దీనితోపాటు పౌనఃపున్యము '0'గా గల రెండు కల్పిత తరగతి అంతరాలు 0-10 మరియు 90-100 ల మధ్యబిందువులను x–అక్షముపై గుర్తించండి. స్కేలు సహాయముతో మధ్యబిందువులను కలపండి. ఇప్పుడు సోపాన రేఖాచిత్రముపై అమరియున్న ఒక పౌనఃపున్య బహుభుజిని పొందగలము.



06_8th_Maths_Telugu_Statistics_Chap_6.indd 225 31-07-2020 13:10:03

గమనిక

కొన్ని సందర్భాలలో కల్పిత తరగతి అంతరాలు ఉండవు. ఉదాహరణకు, ఒక పరీక్షలో విద్యార్థులు పొందిన మార్కులను '0'కంటే తక్కువ మరియు గరిష్ట మార్కులకంటే ఎక్కువ అనే రెండు వైపులకు వెళ్ళలేము. ఇటువంటి సందర్భాలలో చివరి రేఖాఖండములు మొదటి దీర్ఘచతురస్రపు ఎడమవైపున గల లంబరేఖ మధ్యబిందువును, చివరి దీర్ఘచతురస్రపు కుడివైపున గల లంబరేఖ మధ్యబిందువును కలుపుతాము.

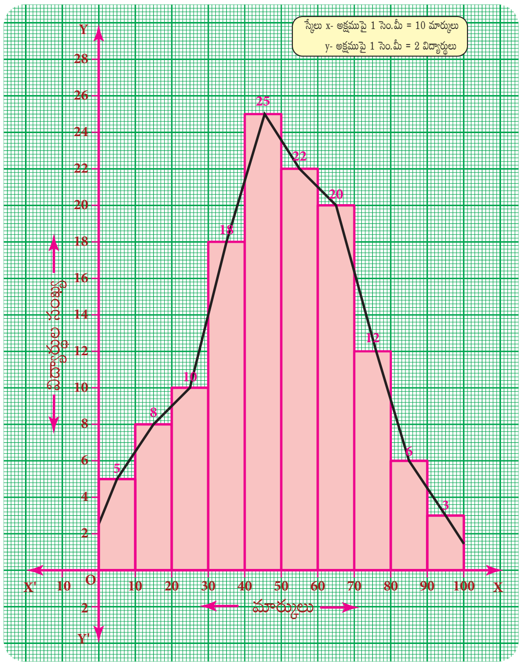
ఉదాహరణ 6.10

సోపాన రేఖాచిత్రమును ఉపయోగించి క్రింద ఇవ్వబడిన దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య బహుభుజిని గీయండి.

మార్కులు	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
విద్యార్థుల సంఖ్య	5	8	10	18	25	22	20	13	6	3

సాధన:

మార్కులకు సంబంధించిన తరగతి అంతరమును x- అక్షముపైన మరియు విద్యార్థుల సంఖ్యను y- అక్షముపైన తీసుకొనుము. ఇచ్చిన దత్తాంశము ప్రకారము సోపాన రేఖాచిత్రమును గీచి దీర్ఘచతురస్రముల యొక్క మధ్య బిందువులను సరళరేఖలచే కలుపుగా పౌనఃపున్య బహుభుజిని ఏర్పడును. చివరి రేఖాఖండములు మొదటి దీర్ఘచతురస్రపు ఎడమవైపున గల మధ్యబిందువును, పౌన పున్య బహుభుజి యొక్క మొదటి మరియు చివరి రేఖాఖండములును వరుసగా మొదటి మరియు చివరి దీర్ఘచతురస్రాల యొక్క ఎడమ మరియు కుడి లంబరేఖల మధ్యబిందువులతో కలుపుతామని గిర్తించుకొనుము. ఎందుకనగా మార్కులకు కల్పితతరగతి అంతరములు ఉండవు. (పైన ఇవ్వబడిన గమనికను పరిశీలించండి)



6.4.2 (ii) సోపాన రేఖాచిత్రములను ఉపయోగించకుండా పౌనఃపున్య బహుభుజిని గీయుట:

(1) తరగతి అంతరముల మధ్యబిందువును కనుగొని వాటిని పట్టికపరచండి.

(2) తరగతి అంతరముల మధ్యబిందువును x- అక్షముపైన మరియు పౌనఃపున్యమును y- అక్షముపైన తీసుకొనుము.

(3) పౌనఃపున్యమునకు సంబంధించిన బిందువులను సంబంధిత మధ్యబిందువు వద్ద గుర్తించుము.

(4) స్కేలు సహాయముతో బిందువులను కలిపి పౌనఃపున్య బహుభుజిని పొందవచ్చును.

ఉదాహరణ 6.11

సోపాన రేఖాచిత్రములను ఉపయోగించకుండా ఇచ్చిన దత్తాంశము నుండి పౌనఃపున్య బహుభుజిని గీయుము.

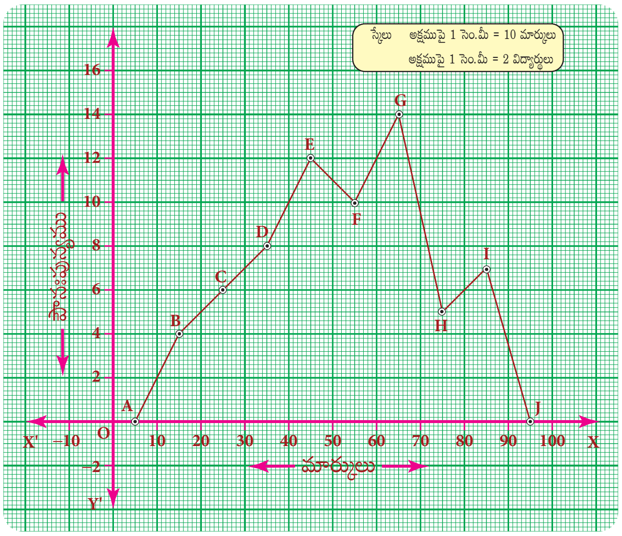
తరగతి అంతరము (మార్కులు)	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
పౌనఃపున్యము	4	6	8	12	10	14	5	7

06_8th_Maths_Telugu_Statistics_Chap_6.indd 226 31-07-2020 13:10:03

సాధన:

తరగతి అంతరముల మధ్యబిందువును కనుగొని వాటిని పట్టికపరచండి.

తరగతి అంతరము (C.I)	మధ్యబిందువు (x)	పౌనఃపున్యము (f)
10 – 20	15	4
20 – 30	25	6
30 – 40	35	8
40 – 50	45	12
50 – 60	55	10
60 – 70	65	14
70 – 80	75	5
80 – 90	85	7



A(5,0) B(15,4) C(25,6) D(35,8) E(45,12) F(55,10) G(65,14) H(75,5) I(85,7) J(95,0) అనునవి బిందువులు.

గ్రాఫ్ కాగితమునందు మధ్యబిందువు x- అక్షముపైన మరియు పౌనఃపున్యమును y- అక్షముపైన తీసుకొనుము.

ఇక్కడ కల్పిత తరగతిలను ప్రారంభములో 0–10 ని మరియు చివరలో 90–100 గా తీసుకొని వాని ప్రతి పౌనఃపున్యము '0' గా తీసుకొంటాము.

పై పట్టికనుండి బిందువులను గ్రాఫ్ కాగితముపై గుర్తించుము. ఇక్కడ AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH, HI, IJ అను రేఖాఖండములను గీయుట ద్వారా ABCDEFGHIJ అను కావలసిన పౌనఃపున్య బహుభుజిని పొందగలము.

అభ్యాసము 6.2

1. క్రింద ఉన్న ఏ దత్తాంశమును సోపాన రేఖా చిత్రముగా చూపవచ్చును.
   (i) 20 నుండి 60 వయస్సు గల వారిలో పర్వతమును అధిరోహించే తమిళనాడు వారి సంఖ్య.
   (ii) వేరు వేరు సంవత్సరములలో తయారుచేసిన సైకిళ్ళ సంఖ్య.
   (iii) ఒక పాఠశాలలో గల ప్రతి తరగతిలోని విద్యార్థుల సంఖ్య.
   (iv) ఒక సాధారణ ఎన్నికలలో ఉదయం 7 గంటల నుండి సాయంత్రం 6 గంటల వరకు నమోదైన ఓట్ల సంఖ్య.
   (v) ఒక రోజు క్రికెట్ పోటీలో మొదటి ఓవర్ నుండి 50 ఓవర్ల వరకు పడిన వికెట్ల సంఖ్య.

2. **ఖాళీలను పూరింపుము :**
   (i) సోపాన రేఖాచిత్రం యొక్క మొత్తం వైశాల్యం ఇవ్వబడిన దత్తాంశ పౌనఃపున్యం మొత్తమునకు _______ ఉండును.
   (ii) _________ అనేది అవిచ్ఛిన్న పౌనఃపున్యం విభాజనము యొక్క రేఖాచిత్ర రూపము.
   (iii) సోపాన చిత్రములు అనేది _________ దత్తాంశమును రేఖా చిత్రం ద్వారా చూపునది

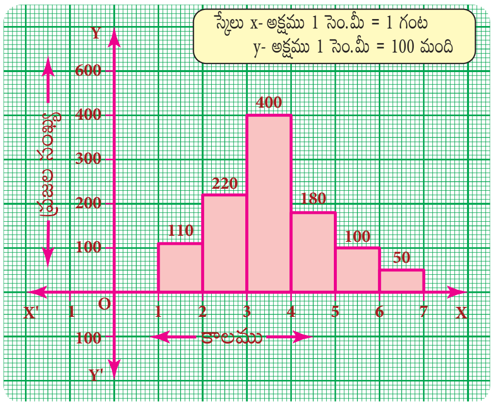
06_8th_Maths_Telugu_Statistics_Chap_6.indd 227 31-07-2020 13:10:03

3. ఒక గ్రామంలో 570 మంది వద్ద సెల్ ఫోన్‌లు కలవు. ఒక NGO సర్వే వారు గ్రామంలోని ప్రజలు సెల్ ఫోన్‌ను ఉపయోగించుటను రేఖా చిత్రములో వివరించియున్నారు. దీనినుండి క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానములిమ్ము?

(i) మూడు గంటల కన్నా తక్కువ సెల్ ఫోన్ ఉపయోగించే వారు ఎంతమంది?

(ii) 5 గంటల కన్నా ఎక్కువ సెల్ ఫోన్ ఉపయోగించే వారు ఎంతమంది?

(iii) ఒక గంట కన్నా తక్కువ సెల్ ఫోన్ ఉపయోగించే వారు ఎంతమంది?



4. క్రింది దత్తాంశమునకు సోపాన రేఖాచిత్రమును గీయుము.

తరగతి అంతరము	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
విద్యార్థుల సంఖ్య	5	15	23	20	10	7

5. ఒక తరగతిలో గల 40 విద్యార్థుల మొత్తం మార్కుల విభాజనము క్రింద ఇవ్వబడినది. దానికి సోపాన రేఖా చిత్రము గీయుము.

మార్కులు	90-110	110-130	130-150	150-170	170-190	190-210
విద్యార్థుల సంఖ్య	9	5	10	7	4	6

6. 100 మంది ఎత్తుల విభాజనమును క్రింద ఇవ్వబడినది. సోపాన రేఖా చిత్రము మరియు దానిపై పౌనఃపున్య బహుభుజిని గీయుము.

ఎత్తు (సెం.మీలలో)	125-135	136-146	147-157	158-168	169-179	180-190	191-201
పౌనఃపున్యం	12	22	18	24	15	7	2

7. దంత సమస్య అధ్యయనంలో క్రింది దత్తాంశము పొందబడినది.

వయస్సు	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
రోగుల సంఖ్య	5	13	25	14	30	35	43	50

పై దత్తాంశమునకు పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మించండి.

8. 50 మంది విద్యార్థుల గణిత మార్కులు క్రింద ఇవ్వబడినది. (i) తరగతి పరిమాణము 10గా తీసుకొని పౌనఃపున్య విభాజక పట్టికను నిర్మించుము. (ii) సోపాన రేఖా చిత్రము మరియు పౌనఃపున్యం బహుభుజిని నిర్మించుము.

52	33	56	52	44	59	47	61	49	61
47	52	67	39	89	57	64	58	63	65
32	64	50	54	42	48	22	37	59	63
36	35	48	48	55	62	74	43	41	51
08	71	30	18	43	28	20	40	58	49

06_8th_Maths_Telugu_Statistics_Chap_6.indd 228 31-07-2020 13:10:04

బాహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

9. దత్తాంశము అనేది _________ యొక్క సేకరణ.

(A) సంఖ్యలు (B) పదాలు (C) కొలతలు (D)పైవన్నియూ

10. ఇవ్వబడిన దత్తాంశములో ఒక విలువ ఎన్నిమార్లు వచ్చుచున్నది అనే దానిని తెలియజేయునది _________

(A) గణన చిహ్నములు (B) దత్తాంశము (C) పౌనఃపున్యము (D) ఇవేవీ కావు

11. ఇవ్వబడిన దత్తాంశములో గరిష్ట విలువ మరియు కనిష్ట విలువల తేడా _________

(A) వ్యాప్తి (B) పౌనఃపున్యము (C) చర రాశి (D) ఇవేవీ కావు

12. ——— దత్తాంశములోని విలువలు ఒక నిర్దిష్ట పరిధిలో ఉంటుంది.

(A) అవర్గీకృత (B) వర్గీకృత (C) పౌనఃపున్యము (D) పైవేవియు కావు

13. విలీన శ్రేణి ఒక _________ శ్రేణి.

(A) అవిభాజిత (B) విభాజిత (C) రెండూ (D) ఇవేవీ కావు

14. తరగతి అంతరములో ఒక తరగతి అంతరం యొక్క ఎగువ హద్దు తరువాత తరగతి యొక్క దిగువ హద్దుగా ఉన్న అది _________ వరుస.

(A) విలీన (B) మినహాయింపు (C) అవర్గీకృతం (D) ఇవేవీ కావు

15. అవర్గీకృత దత్తాంశం యొక్క రేఖా చిత్ర రూపము _________

(A) సోపాన రేఖా చిత్రము (B) పౌనఃపున్య బహుభుజి (C) వృత్త పటము (D) ఇవన్నీ

16. సోపాన రేఖాచిత్రం ఒక _________ పౌనఃపున్య విభాజనము.

(A) అవిభాజిత (B) విభాజిత (C) విలక్షణ (D) ఇవేవీ కావు

17. వర్గీకృత దత్తాంశమునకు రేఖా చిత్ర పటము _________

(A) కమ్మీ రేఖా చిత్రము (B) పట చిత్రము (C) వృత్త పటము (D) సోపాన రేఖా చిత్రము

18. _________ అనేదీ రేఖాచిత్ర పద్ధతిలో అవిభాజిత పౌనఃపున్య విభాజన రేఖా చిత్రమగును.

(A) పౌనఃపున్య బహుభుజి (B) సోపాన రేఖా చిత్రము (C) వృత్త పటము (D) కమ్మీ రేఖా చిత్రము

అభ్యాసము 6.3

ఇతర అభ్యసన సమస్యలు

1. క్రింది పట్టికకు వృత్త రేఖా చిత్రమును గీయుము.

ఖండములు	ఆసియా	ఆఫ్రికా	ఉత్తర అమెరికా	దక్షిణ అమెరికా	యూరప్	ఆస్ట్రేలియా	అంటార్కిటికా
వైశాల్యము	30 %	20 %	16 %	12 %	7 %	6 %	9 %

2. పాఠశాల వచ్చుటకు విద్యార్థులు ఉపయోగించు వాహనముల వివరములను క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది. ఆ వివరములకు వృత్త రేఖా చిత్రము గీయుము.

వాహనములు	బస్సు	సైకిల్	నడుచుట	స్కూటర్	కారు
విద్యార్థుల శాతము	40 %	30 %	15 %	10 %	5 %

06_8th_Maths_Telugu_Statistics_Chap_6.indd 229 31-07-2020 13:10:05

3. ఇవ్వబడిన పౌనఃపున్యం విభాజనమునకు సోపాన రేఖా చిత్రము గీయుము.

వయస్సు	41-45	46-50	51-55	56-60	61-65	66-70	71-75
పౌనఃపున్యము	4	9	17	25	15	8	2

4. క్రింద ఇవ్వబడిన దత్తాంశమునకు ఒకే రేఖా చిత్ర పటంలో సోపాన రేఖాచిత్రం మరియు పౌనఃపున్య బహుభుజిని నిర్మించుము.

బరువు (కి.గ్రాలలో)	50-55	56-61	62-67	68-73	74-79	80-85	86-91
వ్యక్తుల సంఖ్య	15	8	12	17	9	10	6

సవాళాత్మక ప్రశ్నలు

5. క్రింది దత్తాంశ మనకు అవిచ్ఛిన్న పౌనఃపున్య విభాజన పట్టిక నిర్మించి మరియు సోపాన రేఖాచిత్రమును గీయుము.

వయస్సు (సంవత్సరాలలో)	వ్యక్తుల సంఖ్య
5 సంవత్సరాల కన్నా తక్కువ	1
10 సంవత్సరాల కన్నా తక్కువ	12
15 సంవత్సరాల కన్నా తక్కువ	19
20 సంవత్సరాల కన్నా తక్కువ	26
25 సంవత్సరాల కన్నా తక్కువ	27
30 సంవత్సరాల కన్నా తక్కువ	35
35 సంవత్సరాల కన్నా తక్కువ	38
40 సంవత్సరాల కన్నా తక్కువ	45
45 సంవత్సరాల కన్నా తక్కువ	48
50 సంవత్సరాల కన్నా తక్కువ	53

6. వస్త్ర తయారీ సంస్థ 1 రూపాయిని క్రింది విధంగా పంపిణీ చేయబడుతుంది. దీనిని వృత్త రేఖా చిత్రములో చూపుము.

వివరములు	పైసలు
రైతు	20
నూలు వడుకువారు	35
రంగు వేయు వారు	15
నేత నేయు వారు	15
అద్దకం వేయు వారు	05
జీతము	10

7. క్రింది దత్తాంశమునకు సోపాన రేఖా చిత్రమును గీయుము.

మధ్య విలువ (x)	15	25	35	45	55	65	75
పౌనఃపున్యము (f)	12	24	30	18	26	10	8

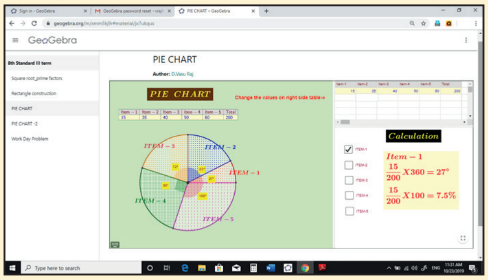
06_8th_Maths_Telugu_Statistics_Chap_6.indd 230 31-07-2020 13:10:05

సారాంశము

- దత్తాంశము అనేది సంఖ్యలు, పదాలు, కొలతలు మరియు రాశుల సేకరణ అవుతుంది.
- ఇవ్వబడిన దత్తాంశమును పట్టిక రూపంలో ఒక్కొక్క చరరాశికి పౌనఃపున్యమును వ్రాయుటను పౌనఃపున్యం విభాజనము అంటారు.
- ఎగువ అవధి మరియు దిగువ అవధి కలసి ఉన్న తరగతి అంతరమును విలీన శ్రేణి అంటారు.
- తరగతి అంతరములో ఒక తరగతిలోని ఎగువ అవధి మరొక తరగతిలోని దిగువ అవధిగా ఉన్నచో అట్టి తరగతి అంతరమును మినహాయింపు శ్రేణి అని అంటారు.
- వృత్త చిత్రం అనేది వృత్త రేఖా చిత్రం. దీని మొత్తం విలువ భాగములుగా విభజింపబడియుండును.
- సోపాన రేఖా చిత్రము అనేది అవిభాజిత పౌనఃపున్య విభాజన రేఖా చిత్రము.
- పౌనఃపున్య బహుభుజి అనేది పౌనపునం విభాజనము యొక్క సరళరేఖ రూపంలో చూపించుట.

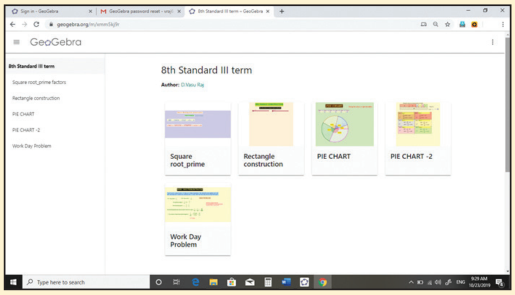
అంతర్జాల కృత్యము

ఆశించిన ఫలితములు వచ్చును

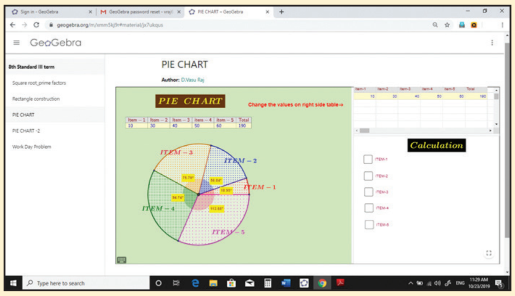


సోఫానము-1 బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్ చేసి క్రింద ఇచ్చిన URL లింకును టైప్ చేయుము లేదా QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము. "8th Standard III term" వర్క్ షీట్ నందు ఎనిమిదవ తరగతి తృతీయాంతరము పేజీలో "PIE CHART" అనే పేరు గల వర్క్‌షీటును ఎంపిక చేయుము.

సోఫానము-2 కుడి ప్రక్కన ఉన్న చెక్ బాక్స్‌లో విలువలను ఇచ్చిన వృత్త రేఖా చిత్రంలో మార్పులను గమనించవచ్చు. సంబంధిత లెక్కలను చూడటానికి చెక్ బాక్స్‌లను క్లిక్ చేయుము.



సోఫానము – 1



సోఫానము – 2

Browse in the link

సాంఖ్యక శాస్త్రము

https://www.geogebra.org/m/xmm5kj9r or Scan the QR Code.

06_8th_Maths_Telugu_Statistics_Chap_6.indd 231 31-07-2020 13:10:05

7 సమాచార ప్రక్రియ

అభ్యసన లక్ష్యాలు

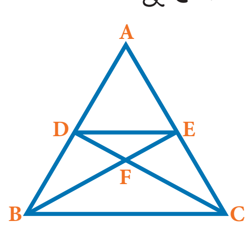
- వేర్వేరు సంఖ్యలలో గల వస్తువులన్నింటిని సాధ్యమైన వరుసలలో ఉంచి వాటిని పట్టికీకరించి వివరించడం.
- కూర్పు ఆట యొక్క ఏకత్వ మరియు విభిన్నత్వ ఆలోచనలను బలపరుచుట.
- గణిత అభిప్రాయాలను సూచించుటకు మరియు ఏర్పరచుటకు పటములో రంగువేయుట ద్వారా తెలుసుకొనుట మరియు రేఖా చిత్రములో రంగువేయుట ద్వారా గణిత సాధనలను తెలుసుకొనుట
- భౌతిక మరియు జీవ సంబంధ విషయములలో ఫిబోనాక్సి శ్రేణుల (Fibonacci pattern) ను గమనించుట.
- సంఖ్యల గ.సా.కా (HCF) ను కనుగొనుటకు సరియైన పద్ధతిని ఎన్నుకొనుట.
- సమాచారం ఏ విధంగా ప్రసారము, గుప్తీకరణము మరియు గుప్తలేఖనము చేయబడునని అవగాహన చేసుకొనుట.
- షాపింగ్ – కొనుగోలు చేయడానికి ముందు ప్రత్యామ్నాయాలను పరిగణనలోకి తీసుకోవడం, ప్రతి వస్తువులకు (యూనిట్) ఒక్కదాని ధరను లెక్కించడం మరియు పరిమిత బడ్జెట్‌లో కొనుగోలు చేయడం.
- ప్యాకింగ్ – ఇచ్చిన స్థలంలో విషయాలను ఎలా సమర్థవంతంగా అమర్చాలో అర్థం చేసుకోవడానికి మరియు సరైన పరిష్కారాన్ని కనుగొనడం.

పునశ్చరణ

గత తరగతులలో నేర్చుకొన్న దానిని గుర్తుచేసుకొని అన్ని సాధ్య అవకాశాలను తెలుసుకొని వాటిని ఏ విధంగా క్రమపరచి వ్రాయడము మరియు లెక్కించుటను క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రశ్నల నుండి తెలుసుకొనవచ్చును.

1. ఇవ్వబడిన త్రిభుజము నుండి ఎన్ని త్రిభుజములను ఏర్పరచవచ్చునని కనుగొనుము?

ZF7E1



జవాబు:______________

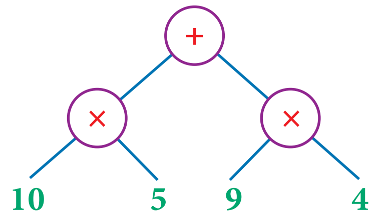
2. క్రింద ఇవ్వబడిన పటములో నున్న సంఖ్యలను ఒకసారి మాత్రమే ఉపయోగించి 3 x 3 అనే మాయా చతురస్రాన్ని తయారుచేయుము.

		13		
	15		7	
17		9		1
	11		3	
		5		

జవాబు:

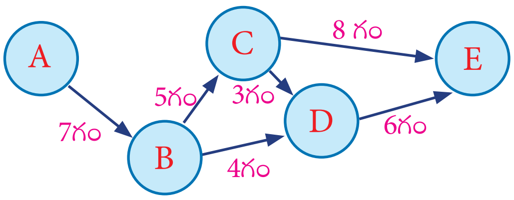
07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 232 31-07-2020 13:10:31

3. క్రింద ఇవ్వబడిన వృక్ష చిత్రమును సంఖ్యాసమాసముగా మార్చుము.



జవాబు:______________

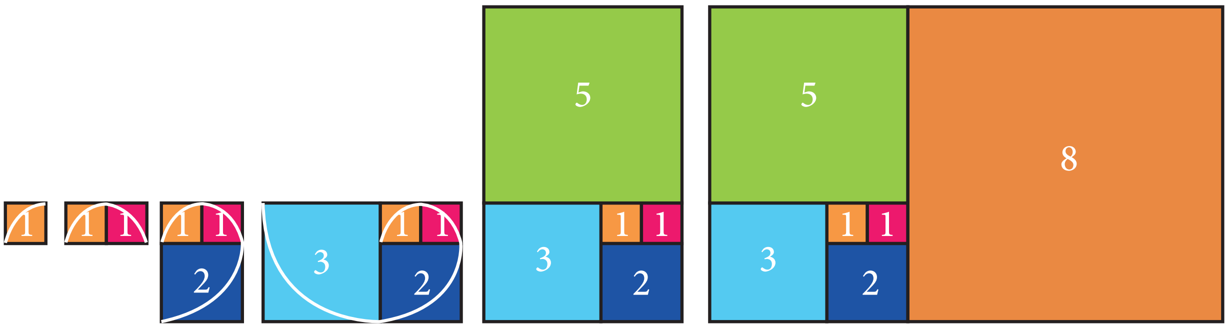
4. (i) A నుండి E కు B , C మరియు D మార్గము ద్వారా వెళ్ళుటకు మొత్తము సమయమును కనుగొనుము.
(ii) A నుండి E కు తక్కువ దూరం గల మార్గము ఏది?



(i) ....గంటలు.

(ii) A → ... → ... → E

5. ఫిబోనాక్సి శ్రేణులు స్వర్ణ దీర్ఘ చతురస్రాలతో మరియు స్వర్ణ నిష్పత్తితో ఎటువంటి సంబంధం కలిగి ఉంది? వాటి మధ్య గల సమన్వయమును క్రింది కృత్యము ద్వారా తెలుసుకొనుము.



ఫిబోనాక్సి చతురస్రాలు

6. ఒక దుకాణము ఒక చొక్కాపై గుర్తించబడిన MRP ₹1000 పై ₹200 రుసుము ఇస్తున్నది. మరొక దుకాణము ఇదే MRP పై 15% రుసుమిస్తున్నది. నీవు ఎవరి దగ్గర చొక్కా కొంటావు.

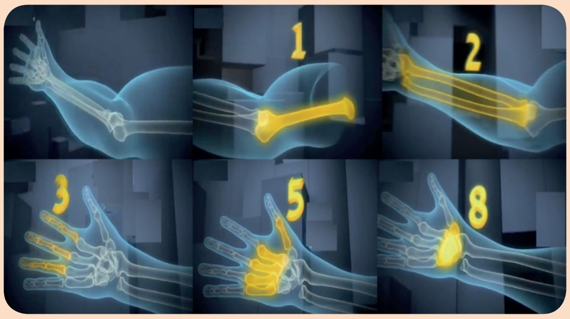
7. ఒక అమేజింగ్‌పార్కు ₹130కు 5 ప్రవేశ పాసులు ఒక ప్యాకేజిడీల్‌గా ఆఫర్ ఇచ్చినది. సాధారణంగా ఒక ప్రవేశ పాసు ₹30 అయితే నీవు ఈ ప్రత్యేక డీల్‌ను తీసుకొవడం ద్వారా ఎంత ఆదా చేయగలవు?

7.1 పరిచయం

గణితశాస్త్రములో విజయము అనేది సంఖ్యలజానము, తార్కిక ఆలోచనలు మరియు అభిజా నైపుణ్యాల పై ఆధారపడుతుంది. ఈ తరగతిలో వేర్వేరు రూపములో నుండి ఎంపిక చేయు ప్రక్రియలు, ఇచ్చిన మ్యాపును కనిష్ట రంగులతో ఛాయచేయుట వంటి నిజజీవిత పరిస్థితులలో మనము ప్రయోగపూర్వకంగా పరిష్కారములను కనుగొంటాము. మనము భౌతిక మరియు జీవసంబంధ దృక్పదములలో ఫిభోనాక్సి క్రమావర్తనములను కూడ చూడబోతున్నాము. వీనితో బాటు కొన్ని రహస్య(సాంకేతిక)లిపి కొరకు అత్యున్నత ఆలోచనలను కూడ చర్చించబోతున్నాము. ఇది మనము పోటీపరీక్షలలో సమర్ధవంతమగా పాల్గొనుటకు ఉపయోగబడును. షాపింగ్ మరియు ప్యాకింగ్‌లలో మనము తెలివైన కొనుగోలుదారునుగా ప్రవర్తించుట గురించి చర్చించబోతున్నాము. మెదడును పదునుపెట్టే కృత్యాలకు సహయపడు ఆటలను మనము ఆడబోతున్నాము. పైన సూచించిన విషయములను చర్చించుట మూలంగా నీవు ఇతర విషయములలో లోతుగా అధ్యయనము చేయుటకు మరియు గణితశాస్త్రము నందు గల నీ యొక్క ఆసక్తిని పెంపొందించుకొనుటకు అత్యంత సహయముగా ఉండును.

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 233 31-07-2020 13:10:31

ఔత్సాహిక గణితము – నిత్యజీవితంలో సమాచార ప్రక్రియ



ఫిబోనాక్సి సంఖ్యలకు జీవ సంబంధ ఉదాహరణలు

రెండు స్తంభాల మధ్య గోడను ఇటుకలతో నింపుచున్న మేస్త్రి

7.2 సంఖ్యల లెక్కింపు నియమాలు

ఇక్కడ కొన్ని ప్రాథమిక లెక్కింపు పద్ధతులు గలవు. ఇది వస్తువులను అమర్చడము లేదా ఎంచుకోవడము పలు విధములైన మార్గముల ద్వారా సంఖ్యలను కనుగొనుటకు ఉపయోగపడుచున్నది. దీని ఆధారంగా అమరిన కొన్ని ప్రాథమిక లెక్కింపు పద్ధతులు క్రింద ఇవ్వబడియున్నవి.

7.2.1 సంకలన నియమము

ఒకదానిమీద ఒకటి ఆధారపడకుండా (స్వతంత్రంగా) రెండు కృత్యములు క్రమముగా **m** మార్గములుగా మరియు **n** మార్గములుగా చేయుటకు వీలైన, తరువాత ఆ రెండు కృత్యములను (**m** + **n**) మార్గములుగా చేయుటకు వీలగును.

క్రింద ఇవ్వబడిన సందర్భములు 'లెక్కించుట ద్వారా సంకలన నియమాల' గురించి అర్థము చేసుకొనుటకు ఉపయోగపడును:

సందర్భము:

పటం. 7.1

8వ తరగతిలో 16 బాలురు మరియు 9 బాలికలు కలరు. ఉపాధ్యాయిని వీరిలో ఎవరైనా ఒకరిని అంటే బాలుడు లేక బాలికను తరగతి లీడరుగా ఎంపికచేయవలెను.

ఉపాధ్యాయిని ఎన్ని మార్గములలో విద్యార్థులను తరగతి లీడరుగా ఎంపిక చేస్తారో తెలుసుకొంటాము.

ఉపాధ్యాయిని తరగతి లీడరుగా కింది ఏదో ఒక మార్గములో ఎంపిక చేయవలెను.

(i) మొదటి అవకాశములో 16 మంది బాలురులో ఒక బాలున్ని 16 మార్గములుగా ఎంపికచేయును. (16 మంది బాలురులో ఎవరో ఒక్కరు).

(ii) రెండవ అవకాశములో 9 మంది బాలికలలో ఒక బాలికను 9 మార్గములుగా ఎంపిక చేయును. (9 మంది బాలికలలో ఎవరో ఒకరు)

కావున ఉపాధ్యాయిని తరగతి లీడరుగా బాలుడు లేదా బాలికను 25 వివిధ మార్గాల ద్వారా ఎంపిక చేయును. **(16 బాలురలు + 9 బాలికలు).**

A ను ఎంపిక m మార్గములు మరియు **B** ఎంపిక n మార్గములలో జరుగును మరియు అవి ఈ రెండు కలిసి జరగనట్లయితే **A** లేదా **B** $(m + n)$ మార్గములలో జరుగుతుంది. ఒక ఉదాహరణను గమనిస్తాము.

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 234 31-07-2020 13:10:32

ఉదాహరణ 7.1

నీవు భోజనం చేయుటకు హోటల్ వెళ్ళినప్పుడు, హోటల్ నందు కింది పటములో చూపిన అనేక రకాల పదార్థములు కలవు. నీకు అవసరమైన ఆహారము తీసుకొనుటకు ఎన్ని విధములైన మార్గములు కలవో చూద్దాం.

పటం. 7.2

సందర్భము:

పై పటము 7.2 నుండి క్రింది విషయాలను తెలుసుకొంటాము.

(i) 7 రకాలలో ఒక రకంను 7 మార్గములలో టిఫన్‌ను

(ii) 9 రకాలలో ఒక రకంను 9 మార్గములలో భోజనంను ఎంపిక చేయగలము.

కావున, ఏదోక ఆహారమును అక్కడగల మొత్తము **16** (7 టిఫన్ + 9భోజనము) రకముల నుండి **16** మార్గములలో ఎంపిక చేయగలము.

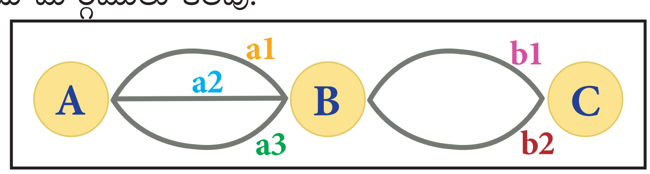
7.2.2 గుణకార నియమము

ఒక పరిక్రియను m మార్గములుగా మరొక పరిక్రియను n మార్గములుగా ప్రదర్శించిన రెండు పరిక్రియలు ఒకదాని మీద ఒకటి ఆధారపడిన వాటిని ($m \times n$) మార్గములుగా ప్రదర్శించవచ్చును.

ఇప్పుడు లెక్కింపులో గుణకార నియమమును గురించి నేర్చుకొందాం.

సందర్భము:

క్రింద ఇవ్వబడిన పటములో ఉన్నట్లు, ఒక నగరములో A,B మరియు C అనే మూడు స్థలములు కలవు. A నుండి B కు వెళ్ళుటకు a1, a2 మరియు a3 అనే మూడు మార్గములు కలవు. B నుండి C కు వెళ్ళుటకు b1 మరియు b2 అనే రెండు మార్గములు కలవు.



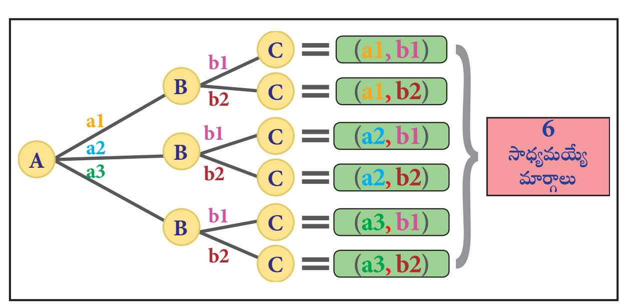
పటం. 7.3

ఒకవేళ ఒక వ్యక్తి B గుండా A నుండి C కు వెళ్ళవలెనన్న అతను క్రింది విధములుగా వెళ్ళవచ్చును.

(i) మొదటి పరిక్రియను అతడు **A** నుండి **B** కు మూడు మార్గములలో వెళుతాడు.

(ii) రెండవ పరిక్రియ నందు అతడు **B** నుండి **C** కు రెండు మార్గాలలో వెళుతాడు.

కావున పటము 7.4 లో చూపిన విధముగా మొత్తం అతడు వెళ్ళే మార్గములు $3 \times 2 = 6$ వేర్వేరు మార్గాలలో వెళ్ళుటకు వీలగును.



పటం. 7.4

A ఎంపిక *m* మార్గములలో మరియు **B** ఎంపిక *n* మార్గములలో జరిగిన, మరియు ఈ రెండింటి ఎంపిక ఒకదానిపైఒకటి ఆధారపడిన ఈ రెండింటి ఎంపిక ఖచ్చితంగా($m \times n$) మార్గములలో జరుగును. క్రింది ఉదాహరణల ద్వారా మరికొంత నేర్చుకొంటము.

ఉదాహరణ 7.2

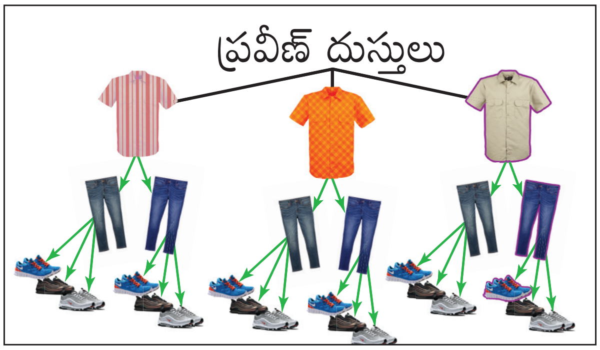
పటం. 7.5

ప్రవీణ్ తన పుట్టిన రోజున 3 చొక్కాలు, 2 జీన్స్‌లు మరియు 3 జతల బూట్లు కొనెను. క్రింద ఇవ్వబడిన పటము ప్రవీణ్ దుస్తులను వివిధ రకాలుగా ధరించి ఉండడం చూపబడినది. ప్రవీణ్ అతని పుట్టిన రోజున ఎన్ని విధమైన మార్గాలలో దుస్తులను ధరించ వచ్చునో కనుగొనవలెను.

సాధన:

ఇక్కడ ప్రవీణ్ వద్ద 3 చొక్కాలు , 2 జీన్స్‌లు మరియు 3 జతల బూట్లు కలవు.

ప్రవీణ్ పుట్టిన రోజున గా దుస్తులను ధరించవచ్చు.



3 చొక్కాలు × 2 జీన్స్‌లు × 3 జతల బూట్లు = 18 విధములు

పటం. 7.6

కావున ప్రవీణ్ 7.6 లో చూపినట్లు ధరించవచ్చు. కావున ప్రవీణ్ తన పుట్టిన రోజున **(3×2×3) 18** వేర్వేరు విధములుగా ధరించవచ్చు.

ఉదాహరణ 7.3

8 వ తరగతిలో గల ఒక గణిత క్లబ్ నందు M,A,T మరియు H అను నలుగురు సభ్యులు ఉన్నట్లయితే క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానమిమ్ము.

(i) గణిత క్లబ్‌లో నాయకుడిని ఎన్నుకొనుటకు గల అవకాశములు ఏవి?

(ii) ఒక గణిత క్లబ్‌లో నాయకుడిని మరియు సహ నాయకుడిని ఎన్నుకొనుటకు గల అవకాశాలేవి?

సాధన:

(i) నాయకుడిని ఎన్నుకొనుటకు,

8 వ తరగతిలోని గణిత క్లబ్‌లో 4 మంది సభ్యులు M, A, T మరియు H గా కలరు.

కావున $4(4 \times 1)$ వేర్వేరు విధములుగా నాయకుడిని ఎన్నుకోవచ్చు.

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 236 31-07-2020 13:10:42

(ii) ఒక నాయకుడు మరియు ఒక సహ నాయకుడిని ఎన్నుకొనుటకు

పటము 7.7లో ఎరుపు రంగు ఛాయ చేసిన పెట్టెలు ఒకే వ్యక్తి రెండు సార్లు వచ్చుటను సూచించును. ఒక వ్యక్తి రెండు నాయకత్వములను వహించలేడు. కావున ఎరుపు రంగు పెట్టెలను లెక్కించకూడదు. పసుపు లేదా పచ్చ రంగు పెట్టెల ఆధారంగా 12 $((4 \times 1 \times 4)-4)$ వేర్వేరు విధములుగా (పసుపు మరియు పచ్చ పెట్టెలో చూపబడినది.) నాయకుడిని మరియు సహ నాయకుడిని గణిత క్లబ్‌లో ఎన్నుకొనవచ్చు.

నాయకుడు \ సహ నాయకుడు	M	A	T	H
M	MM	MA	MT	MH
A	AM	AA	AT	AH
T	TM	TA	TT	TH
H	HM	HA	HT	HH

1 (M లేదా A లేదా T లేదా H) $\times$ 4(నాయకుడు) $\times$ 4(సహనాయకుడు) −4 (నాయకుడు మరియు సహనాయకుడు) = 12 మార్గములు.

పటం. 7.7

కృత్యము

1. 1, 3 మరియు 5 అంకెలను ఉపయోగించి (అంకెలు పునరావృతం కావచ్చు) రెండంకెల సంఖ్యలను ఎన్ని వ్రాయగలమో కనుగొనుము?.

ఈ కృత్యములో రెండు భాగాలు కలవు.

(i) ఒకట్ల స్థానములో గల అంకెను ఎంచుకొనుము.

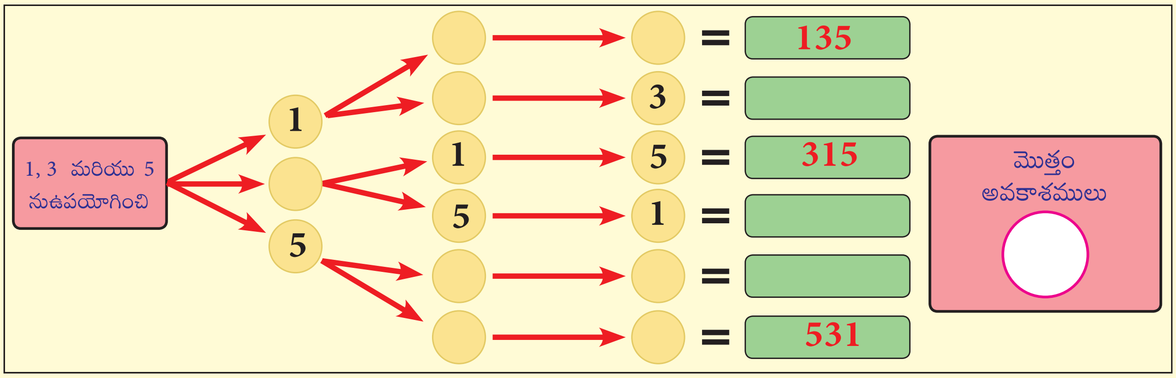
(ii) పదుల స్థానములో గల అంకెను ఎంచుకొనుము.

ప్రక్కనున్న పట్టికను పూరించుము

పదుల స్థానములో గల అంకె \ ఒకట్ల స్థానములో గల అంకె	1	3	5
1			15
3		33	
5	51		

2. 1, 3 మరియు 5 అంకెలను (పునరావృతం కాకుండా) ఉపయోగించి మూడంకెల సంఖ్యను ఎన్ని వ్రాయగలమో కనుగొనుము?

సంఖ్యలను ఉపయోగించి వృక్ష చిత్రమును పూరించుము



మీకు తెలుసా?

6 అక్షరములు గల ఒక గుప్త పదము (పాస్వర్డ్) లో మొదటి రెండు అక్షరములు 26 ఆంగ్ల వర్ణమాలలో ఏదైనా ఒక వర్ణమాల అగును. మూడవ అక్షరము ఒక @, #, $, %, &, _,+,~, * మరియు - అనే ప్రత్యేక అక్షరములలకేదైనా ఒకటి అగును. తరువాత 3 అక్షరములు 0 నుండి 9 వరకు గల అంకెలలో అమరి ఉన్నట్లయిన ఆ గుప్త పదమును ఏర్పరచుటకు మొత్తం $26 \times 26 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 67,60,000$ విధములైన వేర్వేరు అవకాశములు కలవు.

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 237 31-07-2020 13:10:42

ఉదాహరణ 7.4

ఒక స్లిప్ టెస్ట్‌లో గల 3 సత్య లేదా అసత్య ప్రశ్నలుకు ఒక విద్యార్థి ఎన్ని రకాలుగా సమాధానము ఇవ్వగలడు?

సాధన:

(i) **Q_1** ప్రశ్నకు సత్యమని సమాధానమిచ్చినట్లు అనుకొనిన, **Q_2** మరియు **Q_3** ప్రశ్నలుకు **TT, TF, FT** మరియు **FF** అను 4 విధములుగా సమాధానములు ఇవ్వగలడు.

(ii) **Q_1** ప్రశ్నకు అసత్యమని సమాధానమిచ్చినట్లు అనుకొనిన, **Q_2** మరియు **Q_3** ప్రశ్నలుకు **TT, TF, FT** మరియు **FF** అను 4 విధములుగా సమాధానములు ఇవ్వగలడు

ప్రతి ప్రశ్నకు రెండు (సత్యము లేదా అసత్యము) అవకాశములు ఉంది కావున 2 మార్గములు గలవు. ఈ స్లిప్‌టెస్టులోని3 ప్రశ్నలుకు 8 **(2 × 2 × 2)** మార్గములలో పటము7.8 లో చూపినట్లు సమాధానము ఇవ్వగలడు.

ప్రశ్నకు సమాధానమివ్వ వీలగు మార్గముల సంఖ్య

	ప్రశ్నలు		
	Q_1	**Q_2**	**Q_3**
	T/F	**T/F**	**T/F**
జవాబు 1	T	T	T
జవాబు 2	T	T	F
జవాబు 3	T	F	T
జవాబు 4	T	F	F
జవాబు 5	F	T	T
జవాబు 6	F	T	F
జవాబు 7	F	F	T
జవాబు 8	F	F	F

[(1 (Q_1) × 2 (T/F)) × (1 (Q_2) × 2 (T/F)) × (1 (Q_3) × 2 (T/F))] = 8 మార్గములు

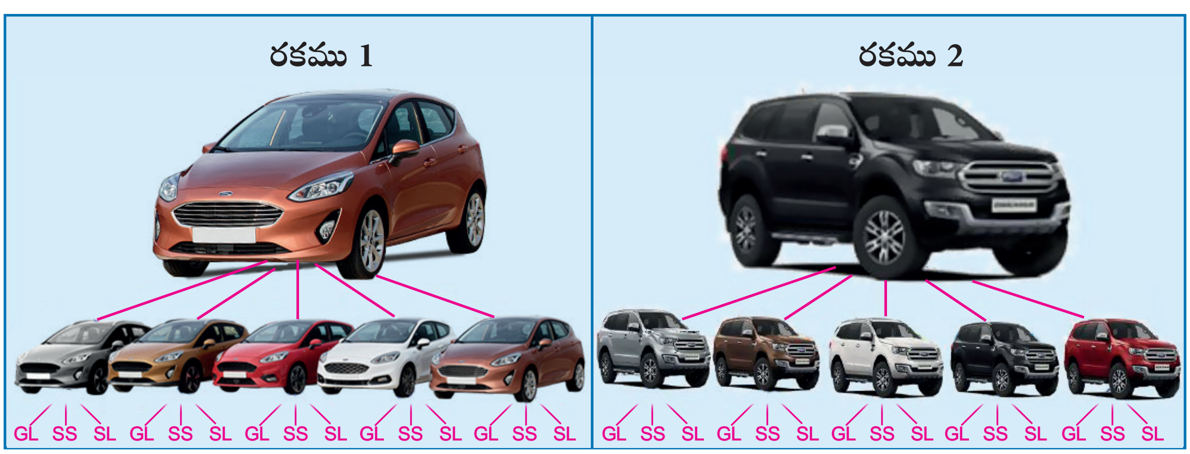
పటం. 7.8

ఉదాహరణ 7.5

మదన్ ఒక క్రొత్త కారును కొనదలచెను. కారు కొనుటకు అతనికి క్రింది అవకాశములు కలవు.

- పటము 7.9లో చూపినట్లు 2 రకాల కార్లు దొరుకును.
- ప్రతి రకములో 5 రంగులలో కార్లు దొరుకును.
- ప్రతి రంగులో 3 మోడల్‌లు గల కార్లు దొరుకును.

(i) GL (ప్రామాణిక మోడల్) (ii) SS (క్రీడా మోడల్) (iii) SL (విలాస మోడల్)



పటం. 7.9

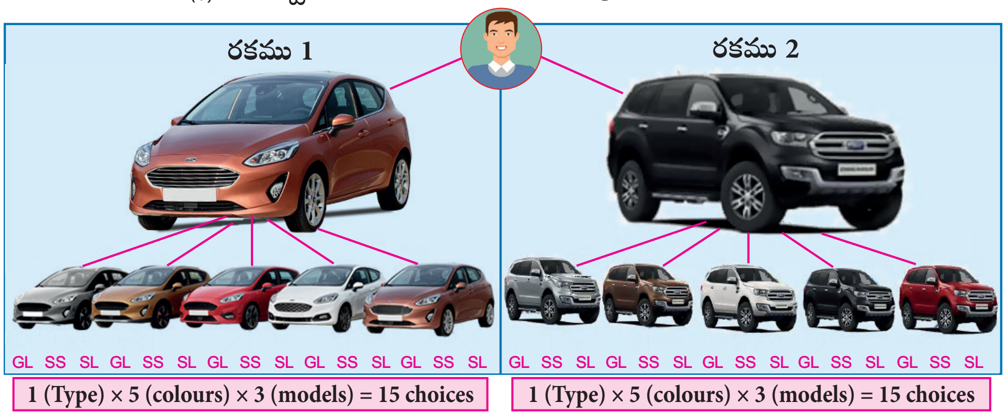
(i) ఇవ్వబడిన అవకాశముల నుండి మదన్ ఏదైనా ఒక కారును కొనుటకు ఎన్ని విధములైన మార్గములు కలవు?

(ii) రకము 2లో తెలుపు రంగు కారు దొరకనిచో ఇచ్చిన ఎంపికల నుండి మదన్ ఎన్ని విధములైన మార్గాలలో కారు కొనవచ్చు?

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 238 31-07-2020 13:10:43

సాధన:

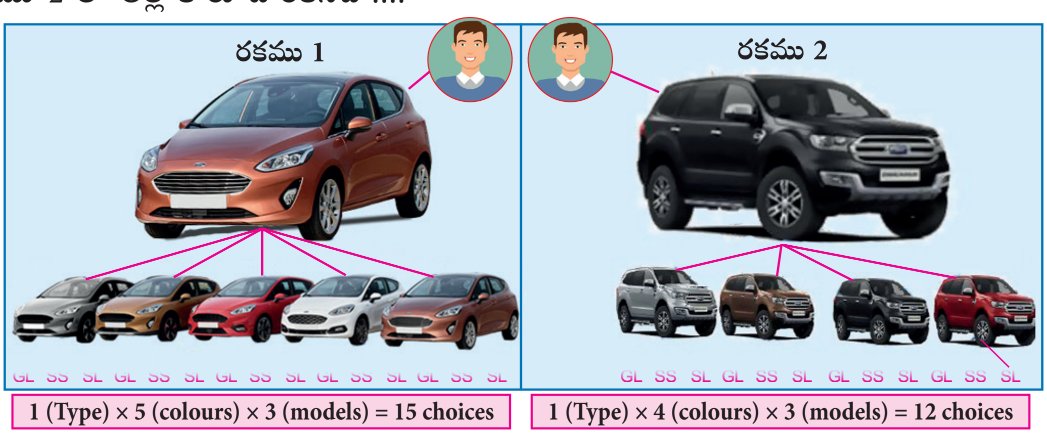
(i) ఇక్కడ 2 రకముల కార్లు 5 వేర్వేరు రంగులలో మరియు ప్రతి రంగు మోడల్‌లో కలదు.



పటం. 7.10

మదన్ కారు కొనుటకు గల వేర్వేరు విధములైన మార్గములు $= \mathbf{2 \times 5 \times 3 = 30}$ (పై పటము నుండి కూడా మనము ఎన్ని విధములుగా మదన్ కారు కొనవచ్చో తెలుసుకొనవచ్చును.

(ii) రకము 2 లో తెల్ల కారు దొరకనిచో....



పటం. 7.11

(i) రకము 1లో మనకు 5 రంగులు మరియు 3 మోడల్‌లు కలవు, కావున $\mathbf{5 \times 3 = 15}$ విధములుగా కొనవచ్చును.

(ii) రకము 2లో మనకు 4 రంగులు మరియు 3 మోడల్‌లు కలవు, కావున $\mathbf{4 \times 3 = 12}$ విధాలుగా కొనవచ్చును.

కావున మొత్తం 27 విధాలుగా **(15 + 12)** మదన్ కారు కొనవచ్చును.

పై ఉదాహరణ కూడిక మరియు గుణకార సూత్రములను వివరిస్తుంది.

7.3 కూర్పు-ఆట

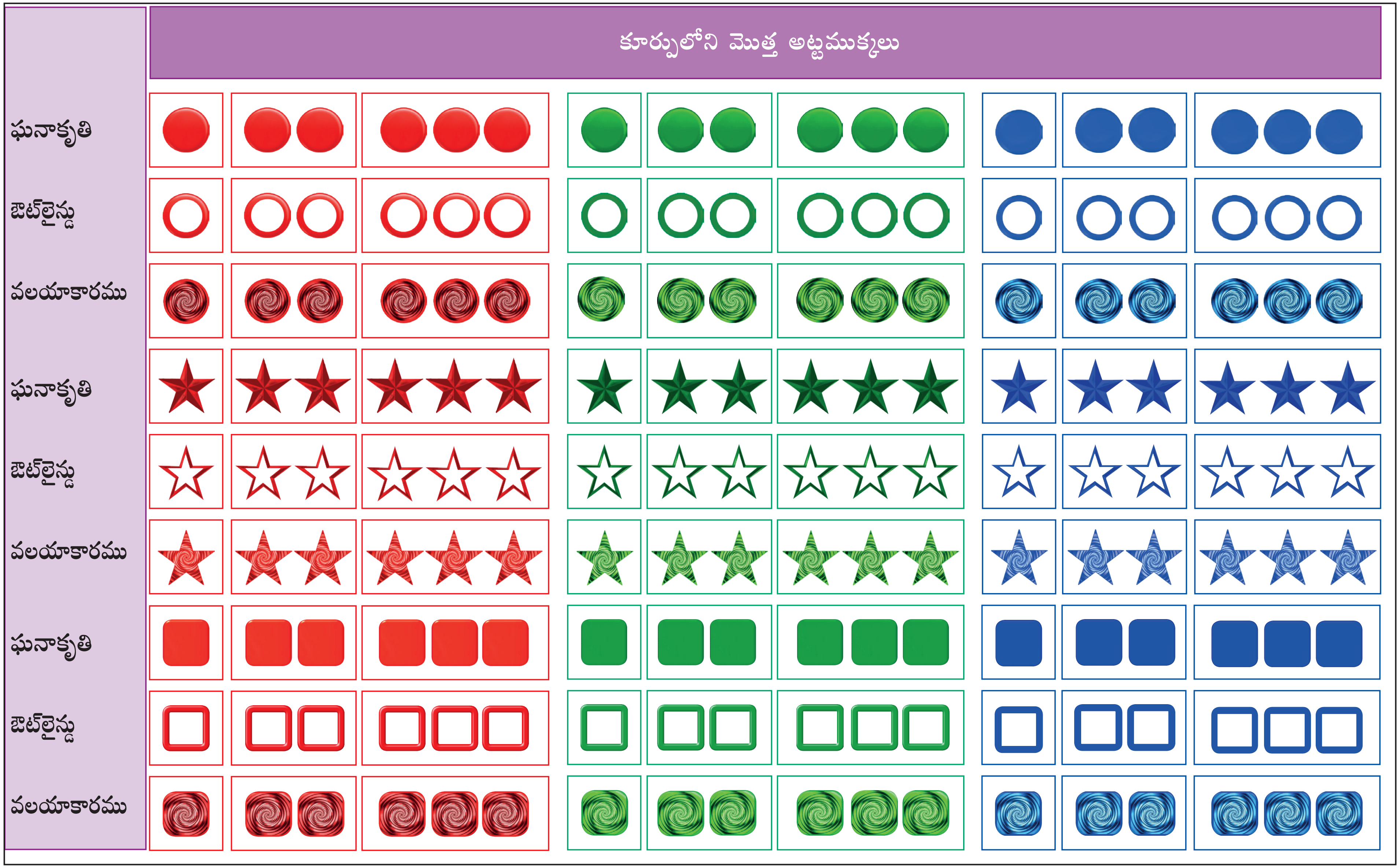
ఏ ఒక్క ఆట అయినా తార్కి ఆలోచనలను ప్రేరేపించు విధంగా, విలక్షణ గణితంలో క్రొత్త ఆలోచనలు,ఆసక్తికరమైన సవాలును ఎదుర్కొనే విధంగా ఉండును.

కూర్పు-ఆట వస్తువుల గుణాల ఆధారంగా సంఘటిత కృత్యాలకు ఒక మంచి ఉదాహరణ అగును. కూర్పు-ఆట జ్ఞాన సంబంధిత చర్చ మరియు అభిజ్ఞాన, తార్కిక నైపుణ్యాలను ప్రదర్శించడం ద్వారా గ్రహించు సామర్థ్యం పెంపొందించుటకు ఉపయోగపడుచున్నది.

క్రింద ఇవ్వబడిన కూర్పు-ఆట నాలుగు లక్షణాలను కలిగిన కార్డులను ఉపయోగించే ఒక ఫజిల్. ఇవి ఆకారాలు, రంగులు, నీడలు మరియు క్రింద ఇవ్వబడిన ఆకారములు వంటివి.

కూర్పులోని మొత్త అట్టలలో, 3 వేర్వేరు ఆకారాలు:వృత్తాలు,నక్షత్రాలు, చతురస్రాలుమరియు 3 వేర్వేరు రంగులు: ఎరుపు,పచ్చ,నీలము. ఈ ప్రతి 9 అట్టలు (3 ఆకారాలు ✕ 3 రంగులు) 3 నీడలు: ఘనము,ఔట్‌లైన్లు,వలయాకారము మరియు 3 వేర్వేరు సంఖ్యలు: ఒకటి,రెండు,మూడులతో జత అగును.కావున ఈ కూర్పులో మొత్తము 81 అట్టలు (3 ఆకారాలు ✕ 3రంగులు ✕ 3 నీడలు ✕ 3 సంఖ్యలు) ఉంటుంది. వీనిని పటము 7.12లో చూపబడినది.

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 239 31-07-2020 13:10:43



పటం. 7.12

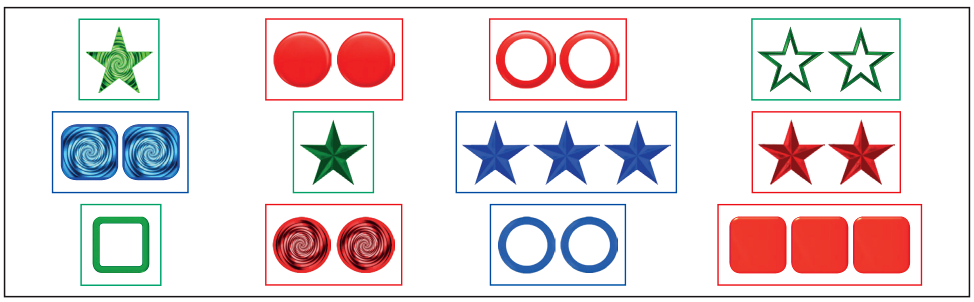
07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 240
31-07-2020 13:10:54

అట్ట ముక్కలు కలిగిన ఒక కూర్పు క్రింది నాలుగు నిబంధనమలను తృప్తి పరుచును.

(i) అట్టముక్కలు ఒకే విధమైన ఆకారమును కలిగి ఉండవలెను. లేక అన్ని వేర్వేరు ఆకారములను కలిగి ఉండవలెను.
(ii) 3 అట్టముక్కలు ఒకే విధమైన రంగులు కలిగి ఉండవలెను. లేక అన్ని వేర్వేరు రంగులు కలిగి ఉండవలెను.
(iii) 3 అట్టముక్కలు ఒకే విధమైన నీడ ఆకారమును కలిగి ఉండవలెను. లేక అన్ని వేర్వేరు నీడ ఆకారములను కలిగి ఉండవలెను.
(iv) 3 అట్టముక్కలు ఒకే విధమైన సంఖ్యను కలిగి ఉండవలెను. లేక అన్ని వేర్వేరు సంఖ్యలను కలిగి ఉండవలెను.

సందర్భము:

ఉపాధ్యాయుడు పటము 7.13 లో ఇవ్వబడిన విధంగా 12 అట్ట ముక్కలను ప్రదర్శించి కూర్పు ఏవిధంగా చేయాలో వివరించాలి. ఇప్పుడు మరియు అనే ఈ ఇరు అట్ట ముక్కలను తీసుకొని క్రిందిచ్చిన సోపానములను పాటించి కూర్పును పూర్తి చేయుటకు మూడవ అట్టను ఎంచుకోవలెను.



పటం. 7.13

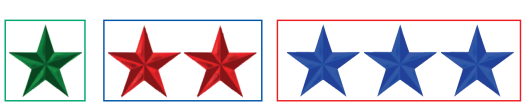
ఒక కూర్పులో 3 రకాల అట్ట ముక్కలు ఉనదునని గుర్తించుకొనుము.

సోపానము 1: నీవు ఆకారమును చూసినప్పుడు **ఒక అట్ట నక్షత్రము** మరియు మరోకటి కూడ **నక్షత్రము** ఈ రెండు అట్టలు ఒకే ఆకారము కావున చివరి అట్టకూడ **ఒకేఆకారములో** ఉండాలి.

సోపానము 2: నీవు రంగును చూసినప్పుడు **ఒక అట్ట పచ్చరంగు** మరియు **మరోకటి ఎరుపు రంగు** ఈ రెండు అట్టలు వేర్వేరు రంగులు కావున చివరి అట్టకూడ **వేరే రంగులో** ఉండాలి.

సోపానము 3: నీవు నీడను చూసినప్పుడు **ఒక అట్ట ఘనాకృతి** మరియు మరోకటి కూడ **ఘనాకృతి** ఈ రెండు అట్టలు ఒకే నీడలు కావున చివరి అట్టకూడ **ఒకే నీడలో** ఉండాలి.

సోపానము 4: నీవు సంఖ్యను చూసినప్పుడు ఒక **నక్షత్ర పచ్చరంగు ఘనాకృతి అట్ట** మరియు మరోకటి **రెండు నక్షత్రముల ఎరుపు రంగు ఘనాకృతి అట్ట** కావున చివరి అట్టకూడ వేరే సంఖ్య గల **మూడు నీలిరంగు నక్షత్ర అట్ట కావలెను.** కావున ఈ మూడు కార్డుల కూర్పు ఒకే ఆకారము మరియు ఒకే నీడలో వేర్వేరు సంఖ్యలు మరియు వేర్వేరు రంగులును కలిగిఉంటుంది.

చివరగా, 

ఆకారము : అన్ని ఒకే విధంగా కలవు. ✓
రంగు: అన్ని వేర్వేరుగా కలవు. ✓
నీడ: అన్ని ఒకే విధంగా కలవు. ✓
సంఖ్య: అన్ని వేర్వేరుగా కలవు. ✓

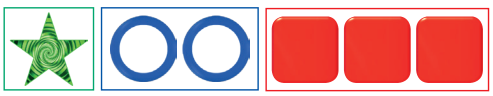
07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 241 31-07-2020 13:10:55

కావున ఇది ఒక పరిపూర్ణ కూర్పు అగును. ఇప్పుడు, ఇది **SET** (కూర్పు) లోని నియమాలను పూర్తిచేసినది.

ఉపాధ్యాయుడు పటము 7.13లో ఇవ్వబడిన అట్ట ముక్కల నుండి రెండు కూర్పులను చేర్చి విద్యార్థులను సరిచూడమని చెప్పెను.

1.

ఆకారము: అన్ని ఒకే విధంగా కలవు. ✓ రంగు:అన్ని ఒకే విధంగా కలవు. ✓
నీడ: అన్ని వేర్వేరుగా కలవు. ✓ సంఖ్య:అన్ని ఒకే విధంగా కలవు. ✓
కావున, ఇది ఒక కూర్పు అగును.

2. 

ఆకారము: అన్ని వేర్వేరుగా కలవు. ✓ రంగు: అన్ని వేర్వేరుగా కలవు. ✓
నీడ: అన్ని వేర్వేరుగా కలవు. ✓ సంఖ్య: అన్ని వేర్వేరుగా కలవు. ✓
కావున ఇది ఒక పరిపూర్ణ కూర్పు అగును.

గమనిక

పటము7.13లో ఇచ్చిన 12 అట్టలనుండి 7 రకాలైన కూర్పులు సాధ్యమగును. అన్వేషించుము. (అట్టలు పునరావృతము చేసుకొనవచ్చును)

మరలా ఉపాధ్యాయుడు క్రింద ఇవ్వబడిన మరొక కూర్పును ఇచ్చి ఇది సరైన కూర్పు అగునా అని సరి చూడమని చెప్పెను.

3.

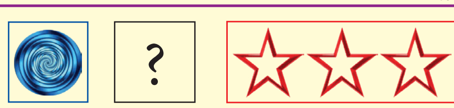
రంగు: అన్ని ఒకే విధమైన రంగు లేక అన్ని వేర్వేరు రంగు కలవి. ✗
ఆకారము: ఒకే విధమైన ఆకారము లేక అన్ని వేర్వేరు ఆకారము కలవి. ✗
నీడ: అన్ని ఒకే విధమైన నీడ లేక అన్ని వేర్వేరు నీడ కలవి. ✗
సంఖ్య: అన్ని ఒకే విధమైన లేక అన్ని వేర్వేరు సంఖ్య కలవి. ✗

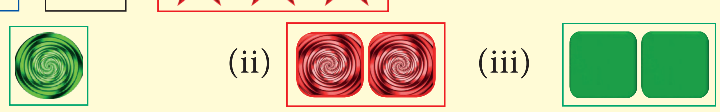
పైన ఇవ్వబడిన కూర్పు నిబంధనకనుగుణంగా లేకుండుట వలన ఇది ఒక పరిపూర్ణ కూర్పు కాదు.

దీని నుండి ఒక పరిపూర్ణ కూర్పు అన్ని ధర్మములను ఒకే విధముగాను లేక అన్ని ధర్మములు వేర్వేరు విధములుగాను ఉంటే 3 అట్ట ముక్కలను పొందియుమడును.

కృత్యము

క్రింద ఇవ్వబడిన వాటి నుండి సరైన అట్ట ముక్కను ఎంపిక చేసి ఒక పరిపూర్ణ కుర్పును ఏర్పరుచుము.

1. 

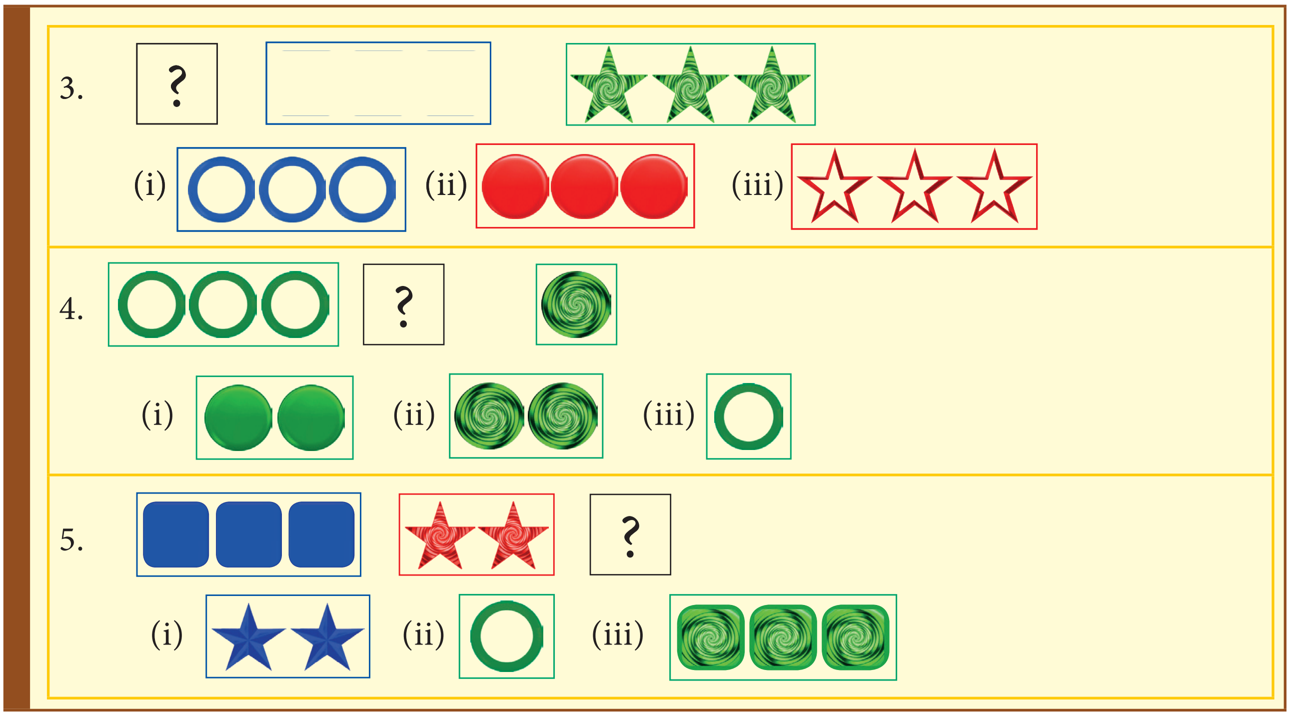
(i), (ii), (iii) 

జవాబు:

2.

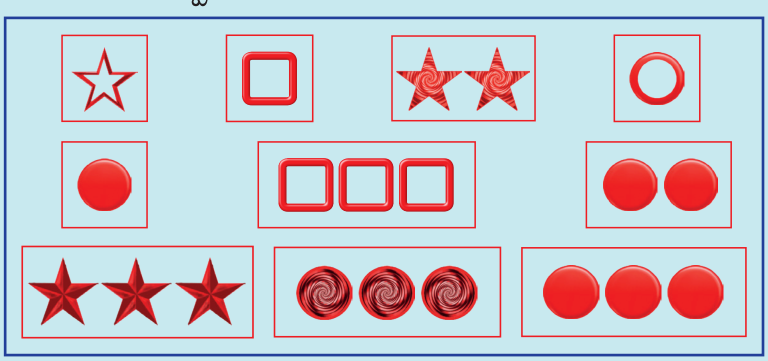
(i), (ii), (iii)

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 242 31-07-2020 13:10:56

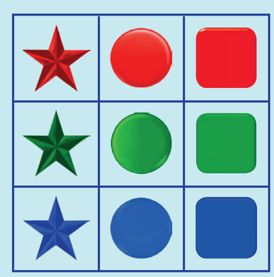


ప్రయత్నించుము

1. అట్ట ముక్కల జత నుండి ఏదైనా 3 కూర్పులను ఏర్పరుచుము.



2. ఇది ఒక కూర్పులో గల మాయ చతురస్రమునకు ఒక ఉదాహరణ అగును. ఇదే విధమైన మరొక మాయ చతురస్రమును ఏర్పరచగలరా?



7.4 పటమునకు రంగులు వేయుట

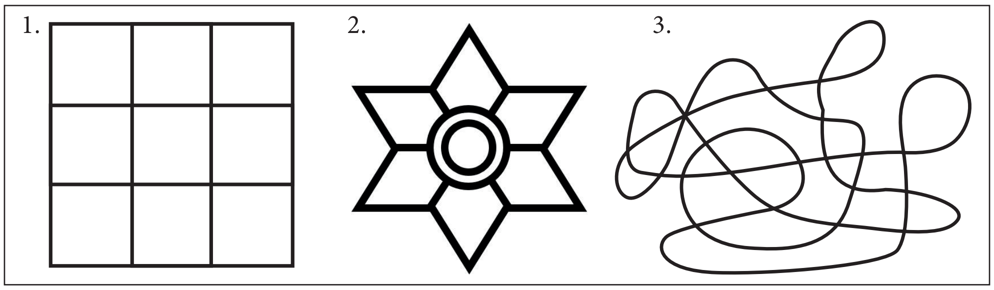
రంగు వేయుట పటములో వేర్వేరు ప్రత్యేక ప్రదేశములను సూచించే కృత్యము అగును. గణితంలో పటమునకు రంగు వేయుట అనునది వేర్వేరు రకాలైన పటాలలో ప్రక్కప్రక్క భాగాలు ఒకే రంగు లేకుండా అతి తక్కువ రంగులను ఉపయోగించి రంగు వేయడం అగును.

సందర్భము:

క్రమమునకు (Pattern) ఉపాధ్యాయుడు, తరగతిలోని విద్యార్థులను రెండు సమూహాలుగా విభజించి క్రింద ఇవ్వబడిన ఆకారములకు, ఒక సమూహాన్ని ఎక్కువ సంఖ్యలో రంగులను ఉపయోగించి మరొక సమూహాన్ని తక్కువ సంఖ్యలో రంగులను ఉపయోగించి రంగు వేయమని చెప్పెను.

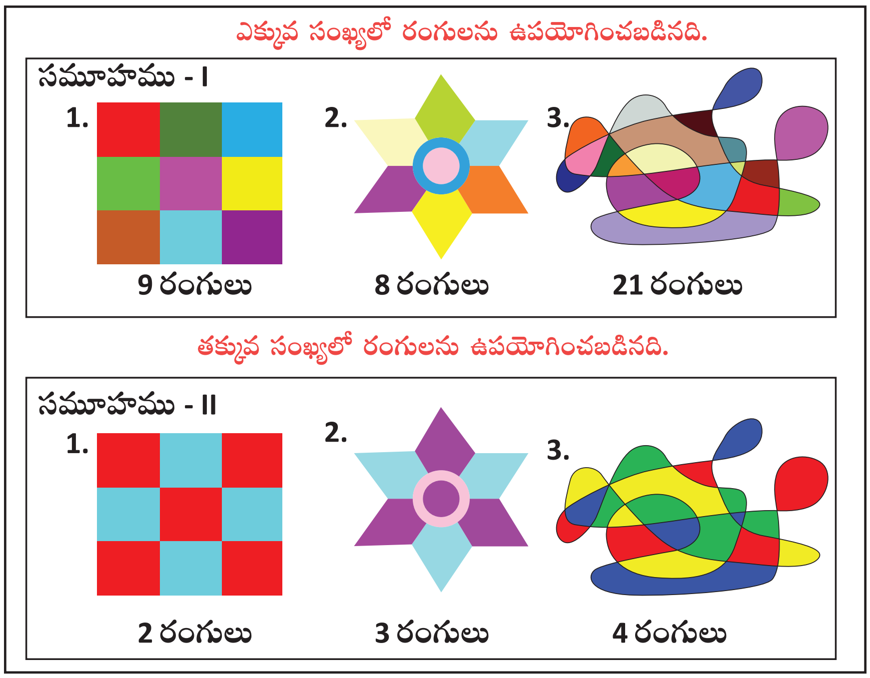
ఇక్కడ ఒకే ఒక నిబంధన అంచుల వద్ద ఒకే రంగును వేయ కూడదు. అవసరమైతే అవి మూల (Corner) వద్ద కలపవచ్చును.

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 243 31-07-2020 13:11:26



పటం. 7.14

పటము 7.15 లో ఒక్కొక్క సమూహము ఏ విధంగా రంగు వేశారో చూడవచ్చును.



పటం. 7.15

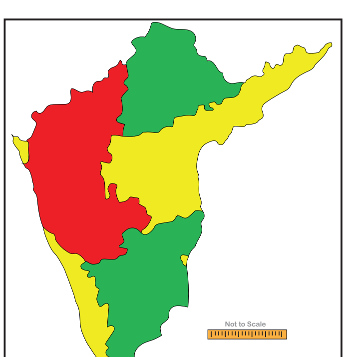
దీనిద్వారా పటములకు రంగు వేయుట అనేది చాలా ఆసక్తికరమైనదిఅని తెలుసుకొంటున్నాము.

మ్యాపులలో రంగు వేయుట అనేది సరిహద్దులను తెలియచేయునట్లు ప్రాంతములకు వేర్వేరు రంగులను ఎంపిక చేయుట. ఈ విషయమును క్రింది ఉదాహరణల ద్వారా నేర్చుకొంటాము.

ఉదాహరణ 7.6

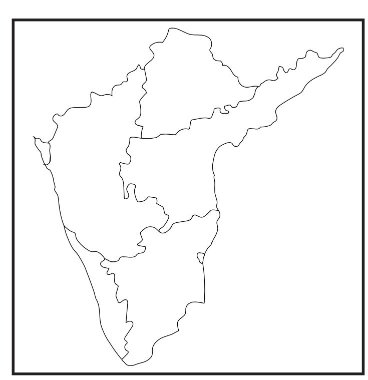
దక్షిణ భారతదేశ (పటం. 7.16) పటమునందు తక్కువ సంఖ్య రంగులలో రంగు వేయుము.

సాధన:



పటం. 7.17

ఇది తక్కువ రంగులతో ఛాయవేయు ఒక పరిష్కారము. ఇంకా పలు పరిష్కారములను ప్రయత్నించుము.



పటం. 7.16

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 244 31-07-2020 13:11:26

పటం. 7.18

ప్రయత్నించుము

HM గది, తరగతిగది, ఉపాధ్యాయుల గది, ప్రయోగశాల గది, క్రీడల గది, సంగణన ప్రయోగశాల, కార్యలయ గది మొదలగువానిని చూపునట్లు పాఠశాల భవన మ్యాపును నీవు గీయుము. మరియు తక్కువ రంగులనుపయోగించుము.

అభ్యాసము 7.1

1. మీరు ఐస్‌క్రీమ్ లేదా కేక్ కొనుటకు దుకాణమునకు వెళ్ళిరి. అక్కడ 3 రుచులు (చాక్లెట్, స్ట్రాబెర్రీ, వెన్నెలా) గల ఐస్‌క్రీములు, 2 రుచులు (నారింజ లేక ఎరుపు) గల కేకులు కలవు. అయితే మీరు ఐస్‌క్రీమ్ లేదా కేకును కొనుటకు గల అవకాశములు ఎన్ని?
2. శాంతి వద్ద 5 చుడిదార్‌ల జతలు మరియు 4 గౌన్‌లు కలదు. అయితే శాంతి చుడిదార్ లేక గౌన్‌ను ఎన్ని విధములుగా ధరించును.

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 245 31-07-2020 13:11:28

3. ఒక మహోన్నత పాఠశాల నందు XI వ తరగతిలో క్రింద ఇవ్వబడిన గ్రూపులు కలవు.

I. సైన్స్ గ్రూపులో

(i) భౌతికశాస్త్రము, రసాయనశాస్త్రము, జీవశాస్త్రము మరియు గణితశాస్త్రము

(ii) భౌతికశాస్త్రము, రసాయనశాస్త్రము, జీవశాస్త్రము మరియు సంగణక శాస్త్రము

(iii) భౌతికశాస్త్రము, రసాయనశాస్త్రము, జీవశాస్త్రము మరియు గృహశాస్త్రము

II. కళల గ్రూపునందు (ఆర్ట్స్ గ్రూపు):

(i) గణనశాస్త్రము, వాణిజ్యశాస్త్రము, అర్థశాస్త్రము మరియు వ్యాపార గణితము

(ii) గణనశాస్త్రము, వాణిజ్యశాస్త్రము, అర్థశాస్త్రము మరియు సంగణకశాస్త్రము

(iii) చరిత్ర, భూగోళశాస్త్రము, అర్థశాస్త్రము మరియు వాణిజ్యశాస్త్రము

G89NL

III. వృత్తి విద్యా గ్రూపు:

(అ) జీవశాస్త్రము, నర్సింగ్–థియరీ, ప్రాక్టికల్ 1 మరియు ప్రాక్టికల్ 2

(ii) గృహశాస్త్రము, వస్త్రాలు మరియు దుస్తుల రూపకల్పన–థియరీ, ప్రాక్టికల్ 1 మరియు ప్రాక్టికల్ 2

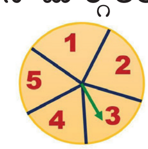
ఒక విద్యార్థి తనకు ఇష్టమైన గ్రూపును ఎంచుకొనుటకు ఎన్ని విధములైన అవకాశములు కలవు?

4. మీ వద్ద 2 స్కూలు సంచులు మరియు 3 వేర్వేరు రంగులు గల నీటి బాటిల్‌లు కలవు. మీరు స్కూలుకు వెళ్ళేటపుడు ఒక్కొక్క రకంనుంచి ఒక్కొక్కటి తీసుకొని పోవుటకు ఎన్ని విధములైన అవకాశములు కలవు?

5. A, B, C, D మరియు E నుంచి ఒక అక్షరము, 0 నుండి 9 వరకు గల అంకెలనుండి 3 అంకెలతో రోల్‌నెంబరును సృష్టించవలెను. ఎన్ని విధాలైన రోల్‌నెంబరులను సృష్టించగలము. (A000, B000, C000, D000, E000 తప్ప)

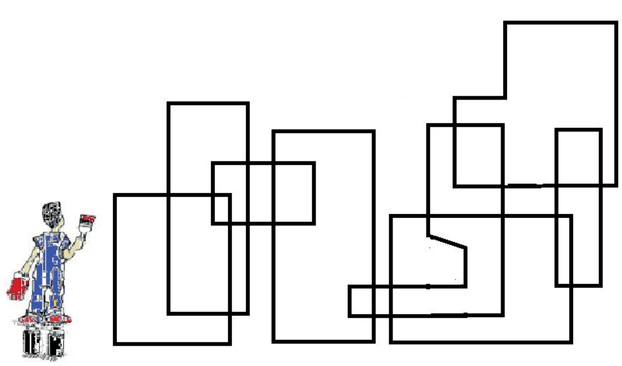
6. ఒక ఆభరణాల దుకాణ భద్రతా లాకర్ 4 అంకెల ఏకైక కోడ్ కావలెను. ఈ కోడ్ నందు 0 నుండి 9 అంకెలు గలవు. 0 నుండి 9 వరకు గల 10 సంఖ్యలను తీసుకొని ఎన్ని విధములైన ఏకైక కోడ్‌లను ఏర్పరచవచ్చును?

7. ఒక ప్రశ్నా పత్రము నందు 3 విభాగములు కలవు. ప్రతి విభాగములో 5 ప్రశ్నలుండును. ప్రతి విభాగము నుండి ఒక ప్రశ్నకు సమాధానమివ్వమని విద్యార్థులకు సూచించిన వారు. ఎన్ని విధమైన మార్గాలలో ప్రశ్నలకు నసమాధానమిస్తారు?



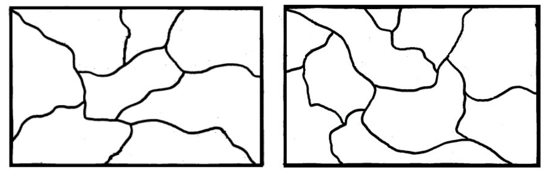
8. ఇవ్వబడిన చుట్టే చక్రమును రెండు సార్లు చుట్టినప్పుడు లభించు సంఖ్యల నుండి రెండంకెల సంఖ్యను ఏర్పరచిన ఎన్ని విధములైన రెండంకెల సంఖ్యలను ఏర్పరచగలము?

9. రమ్య తన ఇంటిలోని హాలు గోడపై గల నమూనాకు అతి తక్కువ ఖర్చుతో రంగు వేయదలిచెను. ఆమె 2 రంగులు మాత్రమే ఉపయోగించి ప్రక్క ప్రక్కన ఒకే రంగు లేకుండా ఆ నమూనాకు రంగు వేయుటకు మీరు సహాయం చేయండి.



07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 246 31-07-2020 13:11:28

10. ఇవ్వబడిన భూగోళ పటములో అతి తక్కువ సంఖ్యలో రంగులను ఉపయోగించి ప్రక్కప్రక్కన రెండు దేశములు ఒకే రంగు లేకుండా రంగు వేయుము.



బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

11. ఒక తరగతిలో 26 బాలురలు, 15బాలికలు గలరు. ఉపాధ్యాయుడు క్విజ్ పోటీలకు ఒక బాలుడు లేదా ఒక బాలికను ఎంపిక చేయవలెనంటే ఎన్ని విధాలుగా ఎంపిక చేయగలడు?
(A) 41 (B) 26 (C) 15 (D) 390

12. మూడు నాణెములను ఒకే సమయములో ఎగురవేసిన వచ్చు ఫలితముల సంఖ్య
(A) 6 (B) 8 (C) 3 (D) 2

13. A,B,C మరియు D అను ఎంపికలు గల 3 బహుళ ఎంపిక ప్రశ్నలకు ఎన్ని విధములుగా జవాబు ఇవ్వవచ్చును?
(A) 4 (B) 3 (C) 12 (D) 64

14. 7 ను అంకె గల రెండంకెల సంఖ్యలు ఎన్ని కలవు?
(A) 10 (B) 18 (C) 19 (D) 20

7.5 ఫిబోనాక్సి సంఖ్యలు

మనము ముందు తరగతిలో ప్రకృతినందు గల సౌందర్యమైన వస్తువులు అలాగే మానవులు చేసిన వస్తువులు గణితంతో సంబంధము కలిగి ఉంటుందని నేర్చుకొనియున్నాము. ప్రస్తుతము మనము వీటిని పునశ్చరణ చేసుకొని మరియు మనము భౌతిక మరియు జీవ సంబంధ వస్తువులను చూసినప్పుడు గణితం ఏంత సౌందర్యమైనదని తెలుసుకొనవచ్చును. ఫిబోనాక్సి (అసలు పేరు లియోనార్డో బోనాక్సి) అను ఇటలీ గణిత శాస్త్రవేత్త ఫిబోనాకి శ్రేణులను అభివృద్ధి పరచెను. మనము 6వ తరగతిలో నేర్చుకొన్న ఫిబోనాక్సి శ్రేణుల క్రమ ఆవర్తనమును గుర్తు చేసుకొందాం. ఈ శ్రేణులు 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34 ..... ఇలాగే విస్తరించును.

ఫిబోనాక్సి శ్రేణులను పట్టిక పరచి నియమమును కనుగొందాం.

పదము (n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
F (n)	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	...

ఫిబోనాక్సి శ్రేణిలో 3వ పదము రెండు మరియు మొదటి పదాల మొత్తమని మనము గమనించగలము. అనగా, **F(3) = F(2) + F(1)** మనము ఈ విధంగా విస్తరించి

F(1)	F(2)	F(3)	F(4)	F(5)	F(6)	F(7)	...
1	1	2	3	5	8	13	...

+ =

F(3) = F(2)+F(1)

F(n)= F(n–1) + F(n–2) నియమమును వ్రాయవచ్చును.

ఇచ్చట **F(n)** అనునది **n** వ పదము.

F(n–1) అనునది **n** వ పదము యొక్క ముందు పదము.

F(n–2) అనునది **(n–1)** వ పదము యొక్క ముందు పదము.

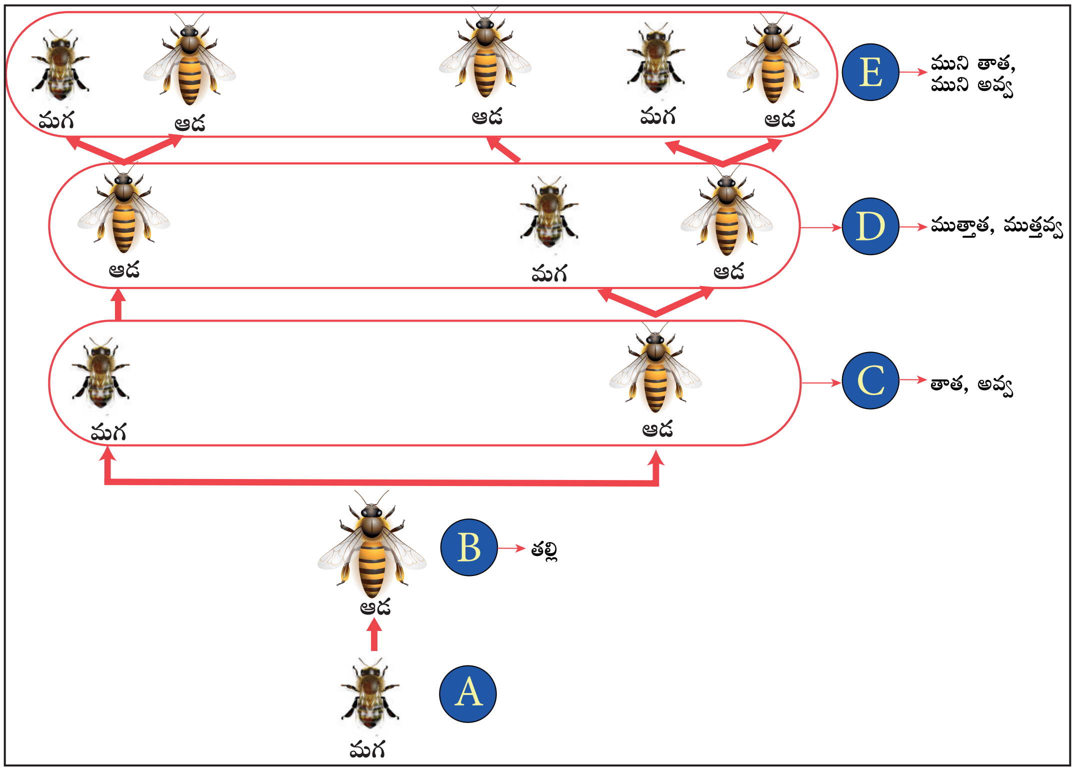
ఈ విధంగా ఫిబోనాక్సి శ్రేణులు కనుగొనబడినవి.

క్రింద ఇవ్వబడిన జీవితంలోని దైనందిన ఉదాహరణల ద్వారా మరింత ఎక్కువ నేర్చుకొందాం.

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 247 31-07-2020 13:11:28

సందర్భము:

పటము 7.19లో ఇవ్వబడిన మగ తేనెటీగ (drone) మరియు ఆడ తేనెటీగలు వంశ వృక్షమును చూడండి. ఇక్కడ, ఒక ఆడ తేనెటీగకు ఒక మగ మరియు ఒక ఆడ అను రెండు తేనెటీగలు కన్నవారుగా కలరు. కాని, మగ తేనెటీగకు ఒకే ఒక ఆడ తేనెటీగ మాత్రమే కన్నవారుగా ఉంటుంది. (మగ తేనెటీగ ఫలదీకరణం చెందని రాణి గ్రుడ్ల ద్వారా ఉత్పత్తి చేయబడును. కావున మగ తేనెటీగలకు తల్లి మాత్రమే కలదు. తండ్రి లేదు).



పటం. 7.19

ప్రక్క పటము నుండి క్రింది విషయములను గమనించగలము.

1. ఒక మగ తేనెటీగ (A) కు ఆడ తేనెటీగ తల్లిగా (B) కలదు.
2. ఒక మగ తేనెటీగ (A) కు ఒక తాత మరియు ఒక అవ్వ (C) కలదు.
3. ఒక మగ తేనెటీగ (A) కు ఒక ముత్తాత మరియు రెండు ముత్తవ్వలు (D) కలవు. మగ తేనెటీగ (A) యొక్క మునితాతలు ఎంత మందని సమాధానమివ్వుము.

తేనెటీగల వంశమును క్రింది విధంగా పట్టిక పరచుట ద్వారా వాటి మధ్య గల క్రమ ఆవర్తన సంబంధమును కనుగొనుటకు ప్రయత్నిస్తాము.

సంఖ్య (A)	తల్లిదండ్రులు (B)	తాత, అవ్వ (C)	ముత్తాత, ముత్తవ్వ (D)	మునితాత (E)	మునితాతకు తల్లి దండ్రులు (F)
మగ తేనెటీగ	1	2	3	5	8
ఆడ తేనెటీగ	2	3	5	8	13

పై పట్టిక నందు 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13… అను ఫిబోనాక్సి సంఖ్యలను మనం చూడగలము.

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 248 31-07-2020 13:11:30

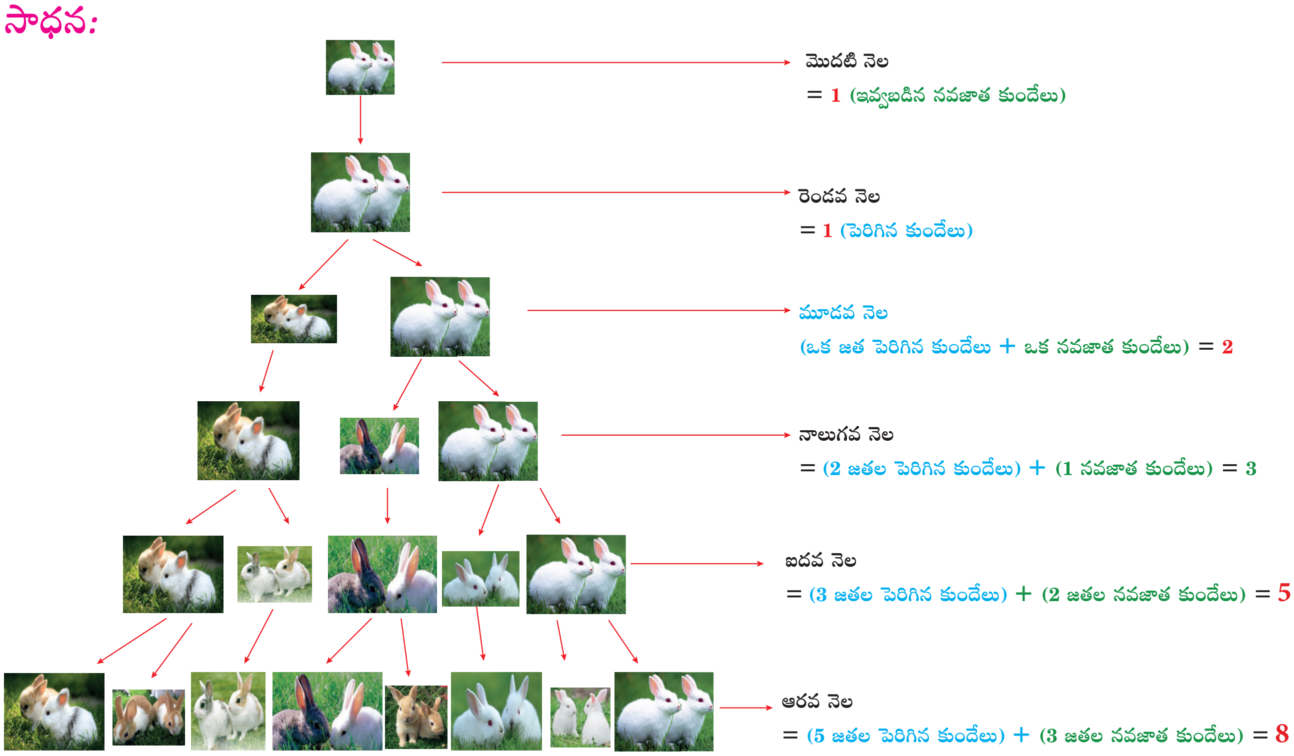
గమనిక

ఫిబోనాక్సి శ్రేణిలో రెండు వరుస సంఖ్యల వ్యత్యాసము అతి వేగంగా పెరుగును. ఉదాహరణకు F(5) – F(4) = 5 – 3 = **2** ; F(10) – F(9) = 55 – 34 = **21** ; F(15) – F(14) = 610 – 377 = **233**. (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946 ...)

ఉదాహరణ 7.7

ఒక జత నవజాత కుందేలు పెరిగి రెండవ నెల నుండి ప్రతి నెల మరొక జత నవజాత కుందేలును ప్రత్యుత్పత్తి చేస్తుంది అనుకొందాం. ఒక జత కుందేలు ఒక సంవత్సరంలో సంతానోత్పత్తి చేయు కుందేల్ల జతల సంఖ్యలను కనుగొనుము. మరియు నెలల సంఖ్యకు, కుందేల్ల జతల సంఖ్యలకు మధ్య గల సంబంధమును పట్టిక పరచడం ద్వారా కనుగొనుము (జత అనగా ఒక మగ మరియు ఒక ఆడ).

సాధన:



పై పటము 1, 1, 2, 3, 5, 8 అను శ్రేణిని ఏర్పరుస్తున్నదని స్పష్టంగా తెలియుచున్నది. ఇచ్చట ఫిబోనాక్సి శ్రేణిలోని ప్రతి సంఖ్య దాని ముందున్న రెండు సంఖ్యల మొత్తంగా ఉంటుందని మనం చూడగలం. ఈ విధంగా చేస్తూ పోతున్నట్లయితే, 12వ నెల 144 జతల కుందేలు ఉంటాయని కనుగొనగలము. మరొక విధంగా 12వ ఫిబోనాక్సి సంఖ్య 144 అని చెప్పవచ్చును.

నెలల సంఖ్య	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
కుందేలు జతల సంఖ్య	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 249 31-07-2020 13:11:32

కృత్యము

పట్టిక 1ని ఉపయోగించి క్రమ ఆవర్తనము (pattern) ను కనుగొనుము. క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానమును వ్రాసి విలువలను పట్టిక 2 లో ఛాయ చేయుము. ఒకటి మీ కొరకు చేయబడినది.

పట్టిక I

పదము(n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
F(n)	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	

1. సరి ఫిబోనాక్సి సంఖ్యలు ఎక్కడ కలదు? సరి ఫిబోనాక్సి సంఖ్య యొక్క **F(n)** ను మరియు దాని పదము n ను పసుపు రంగుచే ఛాయ చేయుము. మీరు ఏదేని క్రమ ఆవర్తనమును కనుగొన్నారా? ప్రతి మూడన ఫిబోనాక్సి సంఖ్య 2 (సరి సంఖ్య) యొక్క గుణిజము.
2. ఫిబోనాక్సి సంఖ్యలలో 3 యొక్క గుణిజాలు ఎక్కడ కలదు? ఎరుపు రంగుతో 3 యొక్క గుణిజము **F(n)** ను మరియు దాని **n** వ పదమును ఛాయ చేయుము.
   మీరు గమనించిన క్రమ ఆవర్తనమును వ్రాయుము.
   ప్రతి .... ఫిబోనాక్సి సంఖ్య అనునది ....
3. 5 యొక్క గుణిజాలను గురించి ఏమి చెప్పగలము? 5 యొక్క గుణిజము **F(n)** ను మరియు దాని **n** వ పదమును నీలం రంగుచే ఛాయ చేయుము. మీరు గమనించిన క్రమ ఆవర్తనమును వ్రాయుము.
   ప్రతి ....అనగా. ....
4. 8 యొక్క గుణిజములను గురించి ఏమి చెప్పగలము? 8 యొక్క గుణిజము **F(n)** ను మరియు **n** వ పదమును పచ్చ రంగుచే ఛాయ చేయుము. మీరు గమనించిన క్రమ ఆవర్తనమును వ్రాయుము.
   ప్రతి ....అనగా. ....

పట్టిక II

పదము(n)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
F(n)	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	

పై కృత్యము నుండి ప్రతి ఫిబోనాక్సి సంఖ్య దాని పదముల గుణిజ ఫిబోనాక్సి సంఖ్యకు కారణాంకం అవుతుందని నిర్ధారించవచ్చును

	n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
	F(n)	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	...
కారణాంకాలు	2=F(3)	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✓	✗	✗	✓	ప్రతి మూడవ ఫిబోనాక్సి సంఖ్య
	3=F(4)	✗	✓	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	ప్రతి నాలుగవ ఫిబోనాక్సి సంఖ్య
	5=F(5)	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✓	ప్రతి ఐదవ ఫిబోనాక్సి సంఖ్య
	8=F(6)	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	✗	✗	✓	✗	✗	✗	ప్రతి ఆరవ ఫిబోనాక్సి సంఖ్య
	F(k)														F (k యొక్క అన్ని గుణిజాలు)

ఫిబోనాక్సి శ్రేణిలో k వ గుణిజ పదములోని ఫిబోనాక్సి సంఖ్య F(k) యొక్క గుణిజము అవుతుంది. అను సాధారణ నియమమును మనము గమనించగలము.

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 250 31-07-2020 13:11:32

7.6 గరిష్ట సామాన్య కారణాంకము - గ.సా.కా. (Highest Common Factor)

ఇచ్చిన సూచనల సముదాయమును లేదా అమరికలను వరుసగా నిర్ధిష్ట సంఖ్య సార్లు లేదా షరతును పొందే వరకు పునరావృతం చేయు ప్రక్రియను పునరుక్తి ప్రక్రియ (iteration) అంటారని మనము 6వ తరగతిలో నేర్చుకొనియున్నాము. మనము ఇంతవరకు గ.సా.కా (HCF) ను దత్తసంఖ్యల కారణాంకాలను జాబితా పరచి దానిలో గరిష్ట సంఖ్యను గుర్తించడం ద్వారా కనుగొంటాము. మనము ఇప్పుడు ఈ తరగతిలో ఆవర్తన భాగహార పద్ధతి మరియు ఆవర్తన వ్యవకలన పద్ధతి ద్వారా (HCF) కనుగొను విధానాలను నేర్చుకొంటారు. ఈ రెండు పద్ధతిలో ఆవర్తన వ్యవకలన పద్ధతి ద్వారా వేగంగా తక్కువ సోపానాలలో గ.సా.కాను కనుగొనవచ్చని తెలుసుకొంటారు.

భిన్నాల సూక్ష్మీకరణలో గ.సా.కాను ఉపయోగిస్తారని మనకు తెలుసు. గ.సా.కా భావన నిజ జీవితంలో ఏవిధంగా ఉపయోగిస్తామని అవగాహన చేసుకొనుటకు క్రింది పరిస్థితులను ఊహించుకొనుము.

7.6.1 గ.సా.కా. (గరిష్ట సామాన్య కారణాంకము)ను కనుగొను పద్ధతులు:

1. కారణాంక పద్ధతి

సందర్భము:

నీ వద్ద గల 20 మామిడి పండ్లను మరియు 15 ఆపిల్ పండ్లను అనాథ పిల్లలకు ఈ రెండు పండ్లను కలిపి సమానంగా దానం చేయాలని కోరుకున్నట్లు ఊహించుకొనుము. నీవు గరిష్టంగా ఎంతమంది అనాథ పిల్లలకు సహాయం చేయగలవు.

ఈ సమస్య సాధనకు దత్త రెండు సంఖ్యల గ.సా.కా అవసరమగును. గ.సా.కా అనగా గరిష్ట సామాన్య కారణాంకము. దీనిని గరిష్ట సామాన్య భాజకము (గ.సా.భా GCD) అని కూడా అంటారు. రెండు లేదా మూడు సంఖ్యల గ.సా.కా దత్త సంఖ్యలను నిశ్శేషంగా భాగించు గరిష్ట సంఖ్య అవుతుంది.

ఇక్కడ 20 మామిడి మరియు 15 ఆపిల్ పండ్లకు గ.సా.కాను కనుగొంటాము.

20 యొక్క కారణాంకాలు = 1,2,4,(5),10,20

15 యొక్క కారణాంకాలు 15 = 1,3,(5),15

కావున, 20 మరియు 15 లగ.సా.కా 5 అనగా నీవు ఐదు అనాథ పిల్లలకు సహాయము చేయగలవు.

ప్రతి ఒక పిల్లవానికి 4 మామిడి పండ్లు $(20 \div 5 = 4)$ మరియు 3 ఆపిల్ పండ్లను $(15 \div 5 = 3)$ పండ్లను నీవు ఇవ్వగలవు. ఈ విధంగా మామిడి మరియు ఆపిల్ పండ్లను సమానంగా ప్రతి పిల్లవానికి పంచగలవు.

ఇప్పుడు గ.సా.కా ను కనుగొను మరికొన్ని పద్ధతులను నేర్చుకొంటాము.

2. ప్రధాన కారణాంక పద్ధతి:

సందర్భము:

7వ తరగతిలో 18 మంది మరియు 8వ తరగతిలో 27 మంది విద్యార్థులు ఉన్నారని అనుకొందాము. ప్రతి తరగతిని జట్లుగా విభజించి రాబోవు క్రీడల పోటీలకు సన్నద్ధముచేస్తున్నారని ఊహించుకొనుము. ఒక్కొక్క తరగతి నుంచి గెలిచిన జట్లు ఆఖరి ఆటలో పోటీపడవలెను. ప్రతి తరగతిలోని విద్యార్థులలో ఏ ఒక్కరు మిగలకుండా జట్లలోని సభ్యుల సంఖ్య సమానంగా ఉండునట్లు జట్టులో ఉండ వీలగు గరిష్ట సభ్యుల సంఖ్య ఎంత?

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 251 31-07-2020 13:11:33

క్రింది తరగతిలో నేర్చుకొన్న పద్ధతుల ద్వారా 18 మరియు 27 సంఖ్యల గ.సా.కా (HCF).

18 యొక్క ప్రధాన కారణాంకాలు = 2 x 3 x 3

27 యొక్క ప్రధాన కారణాంకాలు = 3 x 3 x 3

18 మరియు 27 ల గ.సా.కా = 3×3 = 9

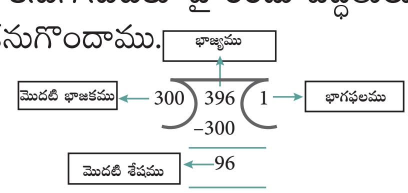
రెండు పద్ధతులలోను 18 మరియు 27 ల గ.సా.కా = 9.

ప్రతి జట్టు నందు ఉండవీలగు గరిష్ట సభ్యుల సంఖ్య 9, VII తరగతిలో 2 జట్టులు మరియు VIII తరగతిలో 3 జట్టులు ఉంటుంది. ఇప్పుడు మనకు గ.సా.కా ను కనుగొనుటకు మరికొన్ని పద్ధతులను నేర్చుకొందాము.

3. ఆవర్తన భాగహార పద్ధతి:

పై రెండు పద్ధతులు HCF ను కనుగొను సులభ పద్ధతులు కాని. ఈ పద్ధతులలో పెద్ద సంఖ్యల కారణాంకాల ద్వారా గ.సా.కా.ను కనుగొనుట అతికష్టము. ఇటువంటి సందర్భములలో గ.సా.కా కనుగొను మరికొన్ని పద్ధతులను నేర్చుకొందాము.

కాని 7వ తరగతిలో 396 మంది మరియు 8వ తరగతిలో 300 మంది విద్యార్థులు వున్నట్లయితే జట్టులో వుండు వీలగు గరిష్టసభ్యుల సంఖ్య ఎంత? వేగంగా గ.సా.కా (HCF) ను కనుగొనుటకు పై రెండు పద్ధతులు సరిపోవు. కావున ఆవర్తన భాగహార పద్ధతిని ఉపయోగించి గ.సా.కా ను కనుగొందాము.

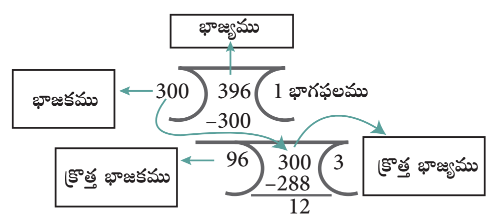


సోపానము 1 పెద్దసంఖ్యను చిన్న సంఖ్యచే భాగించుము.

ఇచ్చట, 396 పెద్దసంఖ్య కావున 396ను 300 (మొదటి భాజకము)చే భాగించగా భాగఫలము 1 మరియు శేషము 96 వచ్చును..

సోపానము 2 సోపానము 1లోని శేషము క్రొత్త భాజకముగా ఆ భాజకము క్రొత్త భాజ్యముగా మారుతుంది.

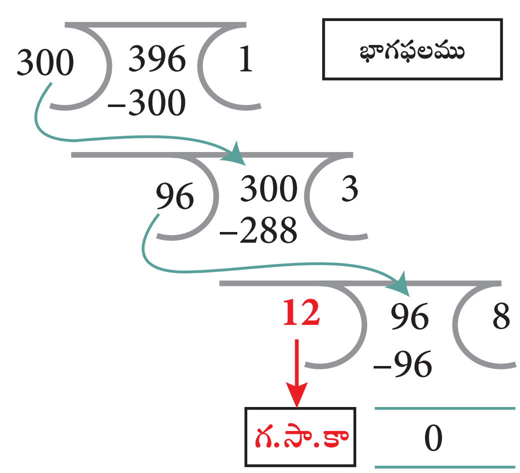
సోపానము 1 నుంచి, భాగఫలము 1 మరియు శేషము 96గా వచ్చినది. కావున సోపానము 2 నందు 96 క్రొత్త భాజకంగా మరియు 300 క్రొత్త భాజ్యముగా మారును.



సోపానము 3 శేషము 0 (సున్న) వచ్చు వరకు ఈ విధమైన భాగహారమును పునరావృతము చేయుము. చిట్టచివరి భాజకము (శేషము సున్న అయినప్పుడు) గ.సా.కా. (HCF) అవుతుంది.

సోపానము 2 నందు వచ్చిన భాగఫలము 3 మరియు 12 క్రొత్త శేషములో 12 క్రొత్త భాజకంగా 3వ సోపానము నందు !2 క్రొత్త బాజకంగా,96 క్రొత్త భాజ్యంగా మారును. మరియు 96 క్రొత్త భాజ్యంగా మారును. **ఇప్పుడు శేషము సున్న వచ్చును. భాగహారములో 12 చివరి భాజకం. కావున 12 మనకు కావలసిన గ.సా.కా (HCF) అగును.**

అందువలన 396 మరియు 300 ల గ.సా.కా. కావున ప్రతి జట్టులో గరిష్టంగా 12 విద్యార్థులు ఉంటారు.



07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 252 31-07-2020 13:11:33

4. ఆవర్తన వ్యవకలన పద్ధతి:

ఇచ్చిన **m** మరియు **n** అను రెండు సంఖ్యల గ.సా.కా కనగొనుటకు మనము పునరావృతంగా వ్యవకలనము m మరియు n లు సమానమగువరకు చేయవలెను. ఉదాహరణకు,

144 మరియు 120 ల గ.సా.కా ను కనుగొనుము.

సోపానము 1: m = n అని సరిచూడుము.

ఇక్కడ m = 144 మరియు n = 120 గా తీసుకొంటాము.

m = n లేదా m > n లేదా m < n సరిచూడుము. ఇక్కడ m > n.

సోపానము 2: m > n అయిన m – n ను m = n వచ్చు వరకు పునరావృతం చేయుము. (లేదా) m < n అయిన n – m ను m = n వచ్చు వరకు పునరావృతం చేయుము.

m , **n** కన్న పెద్దదైన **m – n** చేసి వచ్చిన ఫలితమును **m** గా తీసుకొనుము. మరలా **m, n** లు సమానమా అని సరిచూసి, లేనిచో పై ప్రక్రియను పునరావృతము చేస్తాము. ఒకవేళ **m, n** కన్న చిన్నదైన **n – m** చేయగా వచ్చిన ఫలితమును **n** గా తీసుకొనవలెను.మరలను **m, n** లు సమానమని సరిచూసి లేనిచో ఈ ప్రక్రియను పునరావృతము చేయవలెను.

120(n) ను **144(m)** నుంచి **m = n** వచ్చు వరకు తీసివేయుము.

మొదట	144 – 120 = 24	ఆవర్తనం	120 – 24 = 96	ఆవర్తనం	96 – 24 = 72
ఆవర్తనం	72 – 24 = 48	ఆవర్తనం	48 – 24 = 24	ఆవర్తనం	24 – 24 = 0

సోపానము3: m, n లు సమానమైనచో ఆ విలువే గ.సా.కా (m, n) అగును.

ఇప్పుడు m = n కావున 144 మరియయు 120 ల గ.సా.కా 24 అని చెప్పవచ్చును.

గ.సా.కా ను కనుగొను రెండు పద్ధతులు ఆవర్తన భాగహార మరియు ఆవర్తన వ్యవకలన పద్ధతులను పోల్చగా ఆవర్తన భాగహార పద్ధతి సులభమైనదని, ఆవర్తన భాగహార పద్ధతిలో కన్నా త్వరగా గ.సా.కా. కనుగొనవచ్చని మనము నిర్ధారించవచ్చును. భాగహారము కన్నా వ్యవకలనము చేయుట అనునది సులభము, అవును కదా?

అభ్యాసము 7.2

1. క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యలకు ఆవర్తన భాగహార పద్ధతి ద్వారా గ.సా.కా ను కనుగొనుము.:

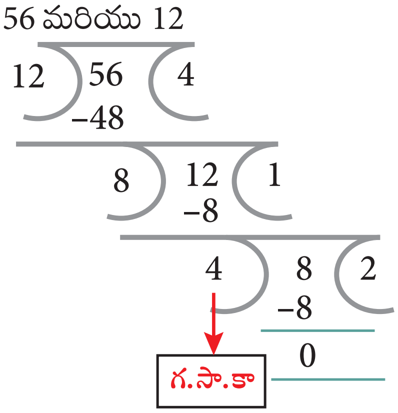
(i) 455 మరియు 26 (ii) 392 మరియు 256 (iii) 6765 మరియు 610 (iv) 184, 230 మరియు 276

2. క్రింద ఇవ్వబడిన సంఖ్యలకు ఆవర్తన వ్యవకలన పద్ధతి ద్వారా గ.సా.కా ను కనుగొనుము.

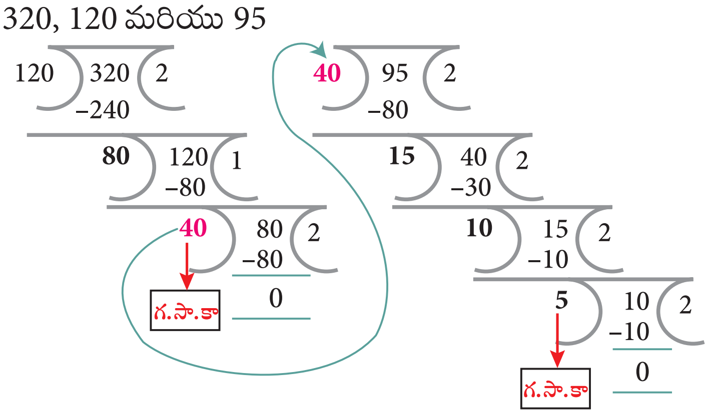
(i) 42 మరియు 70 (ii) 36 మరియు 80 (iii) 280 మరియు 420 (iv) 1014 మరియు 654

3. క్రింది సమస్యలను ఆవర్తన వ్యవకలన పద్ధతిలో సాధించుము.

(i) 56 మరియు 12



(ii) 320, 120 మరియు 95



07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 253 31-07-2020 13:11:33

4. సంగీత, 168మి.మీ మరి.యు 196 మి.మీ కొలతలు గల కాగితమును సాధ్యమైనంత వరకు అతి గరిష్ట కొలతలతో సమానమైన చతురస్రములను కత్తిరించగలిగిన, ఆమె కత్తిరించిన అతి పెద్ద చతురస్రము యొక్క భుజము కొలత ఎంత? (ఆవర్తన వ్యవకలన పద్ధతిని ఉపయోగించి గ.సా.కాను కనుగొనుము)

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

5. 11 వ ఫిబోనాక్సి సంఖ్య ఏది?

   (A) 55 (B) 77 (C) 89 (D) 144

6. n =8 మరియు F(n) ఒక ఫిబోనాక్సి సంఖ్య. క్రింది వానిలో ఏది సత్యము?

   (A) F(8) = F(9)+F(10) (B) F(8) = F(7)+F(6) (C) F(8) = F(10)×F(9) (D) F(8) = F(7)–F(6)

7. ఫిబోనాక్సి శ్రేణిలోని ప్రతి మూడవ సంఖ్య _______ యొక్క గుణిజము.

   (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 8

8. 8 యొక్క గుణిజము ఫిబోనాక్సి శ్రేణిలోని _______ సంఖ్య.

   (A) 2^{nd} (B) 4^{th} (C) 6^{th} (D) 8^{th}

9. 18వ మరియు 17వ ఫిబోనాక్సి సంఖ్యల వ్యత్యాసము.

   (A) 233 (B) 377 (C) 610 (D) 987

10. 30 మరియు 250 ల ఉమ్మడి ప్రధాన కారణాంకములు

    (A) 2 x 5 (B) 3 x 5 (C) 2 x 3 x 5 (D) 5 x 5

11. 30, 60 మరియు 72 ల ఉమ్మడి కారణాంకములు

    (A) 2 x 2 (B) 2 x 3 (C)3 x 3 (D) 3 x 2 x 2

12. రెండు సంఖ్యలు కవల ప్రధానాంకములు అయిన వాటి గ.సా.కా

    (A) 2 (B) 3 (C) 0 (D) 1

7.7 గుప్తశాస్త్రము (Cryptology)

నేటి ప్రపంచంలో, సమాచార భద్రత అనేది సైనిక, రాజకీయం వంటి రంగములోనే కాక వ్యక్తిగత సమాచారానికి కూడా ఒక ప్రాథమిక అవసరముగా కలదు. ఆర్థిక సమాచార లావాదేవిలు, చిత్ర ప్రక్రియ, బయోమెట్రిక్ మరియు ఇ-కామెర్స్ లావాదేవిలు వంటి ప్రక్రియలలో సమాచార భద్రత రూపంలో మార్పిడికి సంబంధించిన శాస్త్రంగా నిర్వచించబడినది.

7.7.1 గుప్తశాస్త్రము – కొన్ని సాంకేతిక వివరాలు

సాధారణ లిపి: వాడుకలో గల వాస్తవ సందేశాన్ని సాధారణ లిపి అని పిలుస్తాము.

సాంకేతిక లిపి (లేక) సాంకేతిక సంఖ్య: గుప్తీకరించిన అవుట్‌పుట్‌ను సాంకేతిక లిపి వచనం లేదా సాంకేతిక లిపి సంఖ్య అంటారు. సాంకేతిక లిపి వచనమును పెద్ద అక్షరములతో, సాధారణ లిపి వచనమును చిన్న అక్షరములతో సూచిస్తారు. సాంకేతిక లిపిని సాధారణ లిపిలోకి – మార్చుటకు రహస్య 'కీ' ఉపయోగపడును.

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 254 31-07-2020 13:11:33

గుప్తీకరణ మరియు గుప్త లేఖన: సాధారణ లిపి నుండి సాంకేతిక లిపికి మార్చి వ్రాయుటను గుప్తీకరణ మరియు దీని విపర్యయమును గుప్తలేఖనము అంటారు.

కొన్ని సమయములలో కోడ్ రూపంలో మనం ఉపయోగించే కొన్ని వార్తాలను సాంకేతిక లిపిలోకి మార్చుటకు ప్రయత్నిద్దాం.

7.7.2 సాంకేతిక చిహ్నములకు కొన్ని ఉదాహరణలు

1.బదిలీ సాంకేతిక లిపి

సీసర్ సాంకేతిక లిపి

సీసర్ సాంకేతికము అనేది మొదటి నుండి ఉపయోగించే ఒక సరళమైన లిపి. ఇది ఒక రకమైన **ప్రతిక్షేపణ** సాంకేతిక లిపి, దీని లిపిలోని ప్రతి అక్షరం నిర్దిష్ట సంఖ్యలతో సంకేతపరచబడి ఉండును.

ఒక వ్యక్తి నుండి మరొక వ్యక్తికి గుప్తీకరించిన సందేశాన్ని పంపడానికి, ఇరువురు సాంకేతిక లిపి **'కీ'** ని కలిగి ఉండడం అవసరం. తద్వారా పంపినవారు దాన్ని గుప్తీకరించవచ్చు మరియు సందేశం పొందిన వారు దాన్ని గుప్తలేఖన చేయవచ్చు. సీసర్ సాంకేతిక లిపిలోని **'కీ'** అనేది ప్రతి అక్షరం అన్ని అక్షరముల తరువాత మార్చి వ్రాయవలెననే సంఖ్యను సూచించును. కావున సీసర్ సాంకేతిక లిపిలో ఎన్ని అక్షరముల తరువాత మార్చి వ్రాసియున్నదని తెలిసియుండవలెను.

కింద ఇవ్వబడిన ఉదాహరణలు మరియు సందర్భముల ద్వారా దీని గురించి మరింత తెలుసుకోగలరు.

ఉదాహరణ 7.8

సీసర్ సాంకేతకము +4 పట్టికను ఉపయోగించి దాగి ఉన్న రహస్య వాక్యమును కనుగొనుము.

fvieo mr gshiw ger fi xvmgoc

సాధన :

సీసర్ సాంకేతికము +4 పట్టికను మొదట తయారుచేయుము. దాని కొరకు ఆంగ్ల అక్షరములలోని మొదటి 4 అక్షరాలు స్థానమార్పిడి చేసి **"e"** ను **"A"** గాను, **"f"** ను **"B"** గాను వ్రాసి చివరలో **"d"** ను **"Z"** అని మార్చి వ్రాసి పట్టీకీకరించుము. ఇప్పుడు సీసర్ సాంకేతకము +4 పట్టిక క్రింది విధంగా ఉండును.

సాధారణ లిపి	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
సాంకేతిక లిపి	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V

ఇవ్వబడిన సాంకేతిక లిపి

fvieo mr gshiw ger fi xvmgoc అను రహస్య సంకేతమును మార్చి వ్రాయుటకు కింది సోపానములు ఉపయోగపడుతాయి.

సోపానము 1: సీసర్ సాంకేతము +4 పట్టికను ఉపయోగించి పునరావృతం అయ్యే అక్షరాలతో సరిపోల్చుద్దాం. ఇది లిపిని వేగంగా మార్చుటకు మనకు ఉపయోగపడును.

fvieo mr gshiw ger fi x mgoc

సాధారణ లిపి	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
సాంకేతిక లిపి	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V

f v i e o   m r   g s h i w   g e r   f i   x v m g o c

↓ ↓ ↓ ↓ ↓   ↓ ↓   ↓   ↓   ↓ ↓ ↓   ↓ ↓   ↓ ↓ ↓ ↓

B R E A K   I N   C   E   C A N   B E   R I C K

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 255 31-07-2020 13:11:33

సోపానము 2: తరువాత కోడ్‌ను పూర్తిచేయడానికి మిగిలిన అక్షరాలను కనుగొందాం.

సాధారణ లిపి	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
సాంకేతిక లిపి	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V

f v i e o   m r   g s h i w   g e r   f i   x v m g o c

B R E A K   I N   C O D E S   C A N   B E   T R I C K Y

కావున, ఇవ్వబడిన రహస్య వాక్యము **BREAK IN CODES CAN BE TRICKY**

2. ప్రతిక్షేపించు పద్ధతిలో సాంకేతిక లిపి

ఈ పద్ధతిలో వచనంలోని ప్రతి అక్షరమును బొమ్మలతో లేక చిహ్నములతో, ఒక కీ సందేశం పదాల సమూహం, అక్షరాలు లేదా వీటి కలయికలతో ప్రతిక్షేపించబడినవి. సంకేతపరచుటను కింది సందర్భము నుండి మనము మరింతగా తెలుసుకొందాం.

సందర్భము

ఉపాధ్యాయుడు తరగతిలోని విద్యార్థులను రెండు జట్టులుగా విభజించి, వారు పూర్తిచేయుటకు క్రింద ఇచ్చిన వర్క్‌షీట్‌ను ప్రదర్శిస్తాడు. రెండు జట్టులలో గల వారు ప్రతి అక్షరానికి తగిన కోడ్ సంఖ్యను తెలుపవలెను. ఒకరు విగిలినవారు తెలిపిన కోడ్ సంఖ్యలను పట్టికలో నింపవలెను. ఎక్కువ లేక ఖచ్చితంగా కోడ్ సంఖ్యలను తెలిపిన జట్టు పాయింట్లను పొందుతారు.

వర్క్‌షీట్ –1 సంకలన సాంకేతిక సంఖ్య [key = 5]

ఇవ్వబడిన సాధారణ లిపిని సంకలన సాంకేతిక (సంఖ్య) లిపిగా మార్చుము.

“mathematics is a unique symbolic language in which the whole world works and acts accordingly.”

సంకలన సాంకేతిక లిపిని మార్చి వ్రాయుటకు ఉపయోగపడే సూచనలు:

- ➢ సంకలన సాంకేతిక లిపిని మార్చి వ్రాయుటకు కీ సంఖ్య ఉంటే చాలు. ‘కీ’ ని ఉపయోగించి మిగిలిన సంఖ్యలకు ఉన్న సంకేతములను వరుసగా వ్రాసి పట్టికను నింపవచ్చు.
- ➢ మీ వల్ల ఆంగ్ల అక్షరములకు పౌనఃపున్య పట్టికను తయారుచేయగలిగితే దానిని సంకేతముగా మార్చి వ్రాయుటకు ఉపయోగకరంగా ఉండును.
- ➢ మొదట ఎక్కువ సంఖ్యలో పునరావృతం అయ్యే అక్షరాలతో జతపరచి మరియు సాంకేతిక లిపి సంఖ్యలను పూరించవచ్చు.
- ➢ బాగా తెలిసిన ఒక అక్షరం (**a** లేక **i**); రెండు అక్షరాలు మరియు మూడు అక్షరాలు గల పదములు (**of, to, in, it, at, the, and, for, you** .... మరిన్ని) వంటి వాటిని పూరించవచ్చు.
- ➢ సాంకేతిక లిపిలో గల వరుసగా వచ్చే సంఖ్యలను కనుగొని వాటిని సాధారణ లిపిలో వరుసగా మార్చే అక్షరములగా పూరించవచ్చు.

ఇప్పుడు ఇవ్వబడిన సాధారణ లిపిని సాంకేతిక లిపిగా మార్చే ముందు కింద ఇవ్వబడిన సాంకేతిక లిపి పట్టికను ఏర్పరుచుము. ఇక్కడ కీ = 5 ఉండడం వల్ల క్రమముగా a = 05 b = 06 అని ప్రారంభించి, z = 04 వరకు సాంకేతిక లిపి పట్టికను ఏర్పరుచుము.

సాధారణ లిపి	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
సంఖ్యలు	00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
సాంకేతిక సంఖ్యలు	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	00	01	02	03	04

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 256 31-07-2020 13:11:33

'లిపి' ని సంకేతపరుచుటకు క్రింద చూపిన విధంగా ఆంగ్ల అక్షరాలను లెక్కించవలెను మరియు పౌనఃపున్య పట్టికను ఏర్పాటు చేయవలెను.

సాధారణ లిపి	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
సాంకేతికలిపిలోని ఆంగ్ల అక్షరాల పౌనఃపున్యం	8	1	6	3	5	0	3	5	7	0	1	5	3	5	5	0	1	3	5	4	3	0	4	0	2	0

సాంకేతిక లిపి పట్టిక మరియు పౌనఃపున్య పట్టిక సహాయముతో సాంకేతికలిపిలోని సంఖ్యలను పూరించుము. మొదట 5 లేక అంతకుమించి పునరావృతం అయ్యే అక్షరాలు తరువాత 2 నుండి 4 సార్లు పునరావృతం అయ్యే అక్షరాలు మరియు చివరగా మిగిలిన అక్షరాలను ఒకదాని తరువాత ఒకటి కింద చూపినట్లు జతపరచవలెను

సోపానము 1: 5 లేక అంతకన్నా ఎక్కువ సంఖ్యలో ఆవర్తనమయ్యే అక్షరముల సాంకేతిక సంఖ్యలు

సాధారణ లిపి	m	a	t	h	e	m	a	t	i	c	s		i	s		a		u	n	i	q	u	e		s	y	m	b	o	l	i	c
సాంకేతిక లిపి		05		12	09		05		13	07	23		13	23		05			18	13			09		23				19	16	13	07

సాధారణ లిపి	l	a	n	g	u	a	g	e		i	n		w	h	i	c	h		t	h	e		w	h	o	l	e
సాంకేతిక లిపి	16	05	18			05		09		13	18			12	13	07	12			12	09			12	19	16	09

సాధారణ లిపి	w	o	r	l	d		w	o	r	k	s		a	n	d		a	c	t	s		a	c	c	o	r	d	i	n	g	l	y
సాంకేతిక లిపి		19		16				19			23		05	18			05	07		23		05	07	07	19			13	18		16	

సోపానము 2: 2 నుండి 4 వరకు గల సంఖ్యలలో ఆవర్తనమయ్యే అక్షరముల సాంకేతిక సంఖ్యలు

సాధారణ లిపి	m	a	t	h	e	m	a	t	i	c	s		i	s		a		u	n	i	q	u	e		s	y	m	b	o	l	i	c
సాంకేతిక లిపి	17	05	24	12	09	17	05	24	13	07	23		13	23		05		25	18	13		25	09		23	03	17		19	16	13	07

సాధారణ లిపి	l	a	n	g	u	a	g	e		i	n		w	h	i	c	h		t	h	e		w	h	o	l	e
సాంకేతిక లిపి	16	05	18	11	24	05	11	09		13	18		01	12	13	07	12		24	12	09		01	12	19	16	09

సాధారణ లిపి	w	o	r	l	d		w	o	r	k	s		a	n	d		a	c	t	s		a	c	c	o	r	d	i	n	g	l	y
సాంకేతిక లిపి	01	19	22	16	08		01	19	22		23		05	18	08		05	07	24	23		05	07	07	19	22	08	13	18	11	16	03

సోపానము 3: ఆవర్తనంకాని అక్షరముల సాంకేతిక సంఖ్యలు

సాధారణ లిపి	m	a	t	h	e	m	a	t	i	c	s		i	s		a		u	n	i	q	u	e		s	y	m	b	o	l	i	c
సాంకేతిక లిపి	17	05	24	12	09	17	05	24	13	07	23		13	23		05		25	18	13	21	25	09		23	03	17	06	19	16	13	07

సాధారణ లిపి	l	a	n	g	u	a	g	e		i	n		w	h	i	c	h		t	h	e		w	h	o	l	e
సాంకేతిక లిపి	16	05	18	11	25	05	11	09		13	18		01	12	13	07	12		24	12	09		01	12	19	16	09

సాధారణ లిపి	w	o	r	l	d		w	o	r	k	s		a	n	d		a	c	t	s		a	c	c	o	r	d	i	n	g	l	y
సాంకేతిక లిపి	01	19	22	16	08		01	19	22	15	23		05	18	08		05	07	24	23		05	07	07	19	22	08	13	18	11	16	03

కావున, సాధారణ లిపి యొక్క సంకలన సాంకేతిక లిపి కింది విధంగా ఉండును:

"17 05 24 12 09 17 05 24 13 07 23 13 23 05 25 18 13 21 25 09 23 03 17 06 19 16 13 07 16 05 18 11 25 05 11 09 13 08 01 12 13 07 12 24 12 09 01 12 19 16 09 01 19 22 16 08 01 19 22 15 23 05 18 08 05 07 24 23 05 07 07 19 22 08 13 18 11 16 03"

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 257 31-07-2020 13:11:34

కృత్యము

నిధి అన్వేషణ

గణిత క్లబ్‌లో గల నిధి

ఉపాధ్యాయుడు, తరగతిలో గల విద్యార్థులను నాలుగు సమూహాలుగా విభజించి ప్రతి సమూహమునకు ఒక కోడ్‌ను ఇచ్చి మరియు దానిని కనుగొనుటకు ఒక క్లూ ఇచ్చి క్రింద ఇచ్చిన వాటికి సమాధానం కనుగొనమని అడిగెను.

(i) నిధిని గుర్తించుట (ii) నిధి ఉన్న ప్రదేశం (iii) నిధి ఉన్న గది సంఖ్య

ఇంకా, అన్వేషణలో ఈ సూచనలను ఒక పేపరు మీద వ్రాసి ఉపయోగించుటకు అనుమతించవలెను.

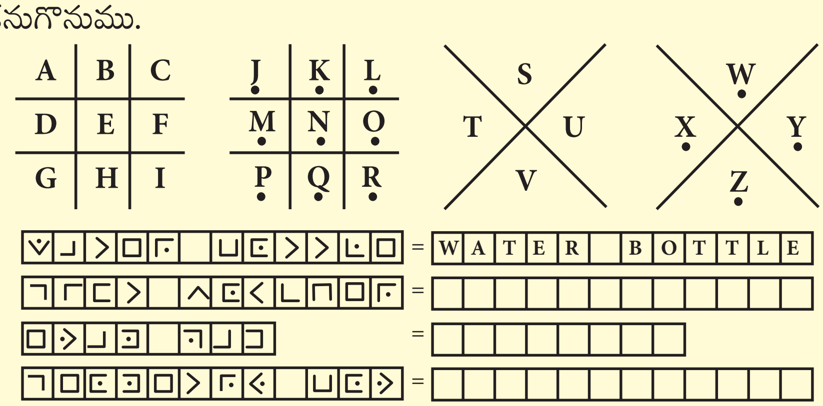
సంకేతము 1 – పిగ్‌పెన్

సందేశం – మీరు ఇక్కడ క్లూని విసంకేతము చేస్తే మీరు ఊహించిన నాలుగు నిధి పేర్లను పొందవచ్చు

I. విసంకేత పరచి ఖాళీ పెట్టెలలో పూరించుము.

పిన్‌కోడ్ చూపడానికి అర్థరహితముగా ఉండినా చాలా సులభముగా అర్థంచేసుకొనేదిగా ఉండును. ఒక్కొక్క అక్షరం దాని చుట్టూ ఉండు పిగ్‌పెన్ భాగం ద్వారా సూచించబడుతుంది.

మీ కొరకు మొదటి సంకేతమును మార్చి చూపబడియున్నది. మిగిలిన వాటిని అదేవిధంగా విసంకేతపరచి కనుగొనుము.



సంకేతము 2– పాలీబియాన్ చతురస్ర సాంకేతికము

సందేశము – ఈ శంకేతమును విసంకేతముపరచిన నిధి ఉన్న ప్రదేశమును తెలుసుకొనవచ్చును.

II. ఖాళీలను పూరింపుము.

పాలీబియాన్ చతురస్ర సాంకేతికము అనేది ఇవ్వబడిన సంఖ్యలను అక్షరములుగా మార్చి వ్రాయుటకు ఉపయోగపడే పట్టిక. ఇవ్వబడిన పాలీబియాన్ చతురస్ర సాంకేతిక పట్టిక నుండి అడ్డు వరుస, నిలువు వరుస విలువలను అక్షరములుగా వ్రాయవచ్చును.

5	A	B	C	D	E
4	F	G	H	I/J	K
3	L	M	N	O	P
2	Q	R	S	T	U
1	V	W	X	Y	Z
	1	2	3	4	5

(4,2) (3,4) (5,5) (3,3) (1,5) (2,3) (5,5) (4,3) (1,4)

T H E ________ O F

(4,2) (2,2) (5,5) (1,5) (3,2) (5,2) (2,2) (5,5) (4,5) (4,3) (5,5) (3,2)

________________ D O E S

(3,3) (4,3) (4,2) (3,4) (1,5) (1,1) (5,5) "(2,5)" (1,5) (3,3) (4,5) "(4,5)"

______ ________ ____ A N D ______

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 258 31-07-2020 13:11:34

సంకేతము 3 అట్‌బాస్ సాంకేతికము

సందేశం – దీనిని విసంకేతపరచిన నిధి ఉన్న గదికి క్లూ దొరుకును. అది (24 లేక 25 లేక 26 లేదా 27 లేదా 28 లేదా 29 లేదా 30 గా ఉండవచ్చును.)

III. పట్టికలో ఇచ్చిన సంకేతములను ఉపయోగించి కనుగొనుము.

అట్‌బాస్ సాంకేతికము అనగా ఆంగ్ల అక్షరములను వరుస మార్చి వ్రాయడం. **A** నుండి **Z** వరకు గల వరుసను **Z** నుండి **A** వరకు మార్చి వ్రాయడం.

Plain Text	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Cipher Text	Z	Y	X	W	V	U	T	S	R	Q	P	O	N	M	L	K	J	I	H	G	F	E	D	C	B	A

GSV ILLN MFNYVI RH Z NFOGRKOV LU ULFI ZMW HVEVM

THE _____ _________ ___ _ ____________ ___ _____ _____ _________.

సంకేతము 4 ప్రతిబింబ సాంకేతిక పట్టిక

సందేశం : దీనిని విసంకేతపరచిన గదిలో నిధి ఉన్న ప్రదేశానికి క్లూ దొరుకును.

కింద ఇవ్వబడిన ప్రతిబింబ పట్టికను ఉపయోగించి అక్షరములకు సరియైన ప్రతిబింబ పదాన్ని కనుగొనుము.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕	↕
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z

J V A Q B J - ____________

P B Z C H G R E G N O Y R - ____________

P U N V E - ____________

P H O O B N E Q - ____________

సంకేతాలను కనుగొన్న తరువాత, ఉపాధ్యాయుడు సూచనలు ఒక్కొక్కటిగా క్రమాన్ని మార్చమని విద్యార్థులను అడుగుతాడు.

సూచనలు

i. ____

ii. ____

iii. ____

iv. ____

ఫలితము

(i) నిధి ఉన్న గది :- ____________________.

(ii) గదిలో నిధి ఉన్న ప్రదేశం :- ______________________________________.

(iii) నిధి యొక్క గుర్తింపు :- ________________________________.

(సూచన – అభ్యాసము 7.3లో గల 6వ ప్రశ్నకు సమాధానం ఇచ్చినట్లైతే మీ ఫలితాలను పోల్చి మరియు సరిచూడవచ్చును) బహుమతి కూపన్ నందు మీకు 20 పూర్తి మార్కులు ఇవ్వబడినది.

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 259 31-07-2020 13:11:34

ప్రయత్నించుము

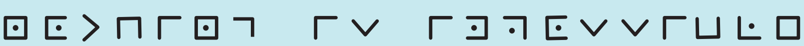
1. పిగ్‌పెన్ సాంకేతిక లిపిని ఉపయోగించి మీ పేరును కింద ఇవ్వబడిన అధ్యాయముల పేర్లను సంకేత రూపంలో వ్రాయుము.

   (i) LIFE MATHEMATICS (ii) ALGEBRA

   (iii) GEOMETRY (iv) INFORMATION PROCESSING

2) ఇవ్వబడిన రహస్య సంకేతములను బదిలీ మరియు ప్రతిక్షేపణ పద్ధతులను ఉపయోగించి విసంకేతపరచుము. వీటిలో ఏ పద్ధతి మీకు సులభముగా కలదు?

   (i) బదిలీ పద్ధతి:- M N S G H M F H R H L O N R R H A K D

   (ii) ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి:- 

3) మీ స్నేహితునికి ఒక సందేశము పంపి దానిని విసంకేతపరచి అర్థము చేసుకోమని తెలియ చేయుము.

అభ్యాసము 7.3

1. ఖాళీలను పూరింపుము. **(పరిభాష 3లో ఇవ్వబడిన అట్‌బస్ సాంకేతికము ఉపయోగించి)**

   (i) G Z N R O = ______________________

   (ii) V M T O R H S = ______________________

   (iii) N Z G S V N Z G R X H = ______________________

   (iv) H X R V M X V = ______________________

   (v) H L X R Z O H X R V M X V = ______________________

2. జతపరచుము **(a = 00................ Z= 25).**

   (i) mathematics - (a) 18 20 01 19 17 00 02 19 08 14 13

   (ii) addition - (b) 03 08 21 08 18 08 14 13

   (iii) subtraction - (c) 12 00 19 07 04 12 0019 08 02 18

   (iv) multiplication - (d) 00 03 03 08 19 08 14 13

   (v) division - (e) 12 20 11 19 08 15 11 15 02 00 19 08 14 13

3. పరిభాష సంఖ్య =4 నుండి ఆడిటవ్ సాంకేతిక పట్టికను ఏర్పరచుము.

4. **"Good Morning"** అనే వాక్యములో గల అక్షరముల వరుసను **"Doog Gninrom".** గా వ్రాసిన క్రింద ఇవ్వబడిన వాక్యమును ఏ విధంగా విసంకేతించవచ్చు?

   "Ot dnatsrednu taht scitamehtam nac eb decneirepxe erehwreve ni erutan dna laer efil."

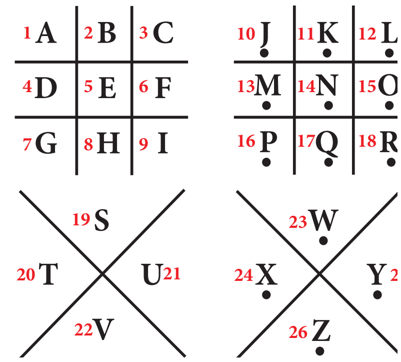
07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 260 31-07-2020 13:11:34

5. ఇవ్వబడిన పిగ్‌పెన్ సాంకేతిక లిపిని విసంకేతపరచి కృత్యము 3 యొక్క జవాబుతో పోల్చుము.

I. నిధి దాగి ఉన్న గది సంఖ్య :

II. నిధి ఉన్న ప్రదేశం:

III. నిధి పేరు :



6. ప్రవీణ్ ఇటీవల కొనుగోలు చేయబడిన క్రొత్త ద్విచక్ర వాహనం యొక్క నమోదు సంఖ్య దర్పణ ప్రతిబింబము క్రింద ఇవ్వబడినది. ప్రతిబింబమును విసంకేతపరచి సరియైన నమోదు సంఖ్యను కనుగొనుము.

T N 1 2 H 2 5 8 9

(a)
(b)

(c)
(d) **9 8 5 2 H 2 1 N T**

బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

7. **(i)** ఇవ్వబడిన **(ii)** మరియు **a** ప్రశ్నలలో ప్రతి సమితిలో నాలుగు అక్షరములు కలవు. వాటిలో మూడు సమితులు ఒకే విధంగాను, ఒకటి మాత్రము వేరుగా కలదు. వేరుగా ఉన్న దానిని కనుగొనుము.

(i). (A) C R D T (B) A P B Q (C) E U F V (D) G W H X

(ii). (A) H K N Q (B) I L O R (C) J M P S (D) A D G J

8. కింది అక్షరముల సమితి ఇవ్వబడినవి. ప్రతి అక్షరానికి వేర్వేరుగా కోడ్ సంఖ్య ఇవ్వబడినది. ఈ అక్షరాలను అర్థపరంగా మార్చి వ్రాసిన అర్థవంతమైన పదము వచ్చును. దీని నుండి క్రొత్తగా కనుగొన్న పదానికి పరిభాష సంఖ్యను కనుగొనుము.

L	I	N	C	P	E
1	2	3	4	5	6

(A) 2 3 4 1 5 6 (B) 5 6 3 4 2 1 (C) 6 1 3 5 2 4 (D) 4 2 1 3 5 6

9. కింద ఇవ్వబడిన **(iii)** మరియు **(iv)** ప్రశ్నలు ఒక ప్రత్యేక పరిభాషకు చెందియున్నది. ఇవ్వబడిన నాలుగు ఎంపిక చేసి వ్రాయుము.

(iii) ఒక ప్రత్యేక పరిభాషలో '**M E D I C I N E**', అనే వాక్యమును '**E O J D J E F M**' గా పరిభాష చేయబడినది. '**C O M P U T E R**' అనే వాక్యము యొక్క పరిభాష ఏది?

(A) C N P R V U F Q (B) C M N Q T U D R

(C) R F U V Q N P C (D) R N V F T U D Q

(iv) ఒక ప్రత్యేక భాషలో, '**P H O N E**' అనే వాక్యమును '**S K R Q H**', గా పరిభాష చేయబడినవి. '**R A D I O**' అనే వాక్యము యొక్క పరిభాష ఏది?

(A) S C G N H (B) V R G N G (C) U D G L R (D) S D H K Q

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 261 31-07-2020 13:11:35

7.8 పోల్చి చూచుట ద్వారా కొనుగోలు చేయుట

విద్యార్థులు, మీ అందరికీ షాపింగ్ అనుభవం ఉందని నేను ఆశిస్తున్నాను. మీరు మీ అనుభవాన్ని పంచుకోగలరా? నేను మీ షాపింగ్ అనుభవముపై కొన్ని ప్రశ్నలను వేయాలనుకొంటున్నాను. మీకు కావలసిన వస్తువులను ఎంపిక చేసేటప్పుడు వాటి 1.ఆకర్షణీయమైన రంగు లేదా 2. ఉత్తమ ధర లేదా 3. పరిమాణములో పెద్దది లేదా 4. చూడగానే మీరు కొంటారా? ఈ విషయాలన్నింటిలో, ఇంకొక ముఖ్యమైన విషయం గమనించాలి. అది ఏమిటి? అవును అది కాలం చెల్లు తేది, ప్యాక్ చేసిన అన్ని వస్తువుల కాలం చెల్లు తేదీని మీరు ఎప్పుడైనా గమనించారా? ఇది చూడటానికి చాలా ముఖ్యము. మరియు మరో షాపింగ్‌లో యొక్క మరో ఉత్తమ మార్గం వస్తువులను పోల్చడం అంటే దాని ధర, నాణ్యత, పరిమాణం, ఆఫర్లు (డిస్కౌంట్) తరుగు మరియు ఇతర ముఖ్యమైన విషయాలు.

మార్కెట్ లేదా డిపార్ట్‌మెంట్ స్టోర్ నుండి ఏదైనా వస్తువులను షాపింగ్ చేయడానికి మీ డబ్బు ఖర్చు చేయడానికి ముందు, ఉత్తమ ధరలు, ఉత్తమ నాణ్యత మరియు ఇతర నమ్మకమైన వస్తువులను పరిగణించండి. ఇది తెలివైన షాపింగ్.

క్రింది పరిస్థితి నుండి వస్తువును షాపింగ్ చేయడానికి ముందు తెలివైన వినియోగదారులుగా ఎలా ఉండాలో ఇక్కడ మనం తెలుసుకొంటాము.

సందర్భము:

ఉపాధ్యాయురాలు మిమ్మల్ని మరియు మీ స్నేహితుడిని ఒక వారం పాటు మీ పాఠశాల క్యాంటీన్‌లోని పండ్ల విభాగానికి బాధ్యులుగా నియమిస్తాడు. ఆమె ఈ క్రింద దశలను కూడా నిర్దేశిస్తుంది మరియు అవసరమైనప్పుడు ఆమె మీకు సహాయం చేస్తారు.

కొనుగోలు పట్టిక
1. 20 కి.గ్రా ఆపిల్
2. 20 కి.గ్రా జామకాయ
3. 30 పెట్టెల స్ట్రాబెర్రీ
4. 20 డజన్ల అరటిపండు

- మీరు కొనవలసిన వస్తువుల జాబితా ప్రకారం రెండు రోజులకు కావాల్సినన్ని పండ్లను కొనవలెను.
- కొనుగోలుకు పూర్వమే మీలో ఒకరు సంతకు మరొకరు డిపార్ట్‌మెంటల్ స్టోర్‌కు వెళ్ళి పండ్ల వెలలను తెలుసుకొనుము.
- మీరే రెండింటిలో ఏది ఉత్తమమైనదో దానిని ఎన్నుకొనుము. పిదప,
- మీ కొనుగోలు జాబితాను సరిచూసి ఎన్ని పండ్లు కొనవలెనో చూచుకొనుము.
- ఒకే స్థలములో అన్ని వస్తువులకు ఉత్తమమైన ఒప్పందాన్ని ఎంచుకోండి.
- కొనవలసిన వస్తువుల జాబితా
- ధర పట్టికను పోల్చి మరియు చర్చించి, ఎక్కడ కొనుగోలు చేయవలెను అని నిర్ణయించుము.

ఉదాహరణకు, రెండు అంగడులలోని ధరల పట్టిక యొక్క నమూనా క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది

వరుస సంఖ్య	పండు పేరు	డిపార్ట్‌మెంటల్ స్టోర్స్		మార్కెట్ వెల	
		పరిమాణం	వెల (₹)	పరిమాణం	వెల (₹)
1	ఆపిల్	1 కి.గ్రా.	120	1 కి.గ్రా.	110
2	జామకాయ	1 కి.గ్రా.	50	1 కి.గ్రా.	40
3	స్ట్రాబెర్రీ	1 పెట్టె	80	1 పెట్టె	85
4	అరటి పండ్లు	1 డజను	60	1 కి.గ్రా.	50

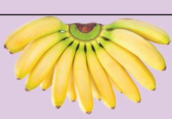
07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 262 31-07-2020 13:11:35

ఇప్పుడు డిపార్ట్‌మెంటల్ స్టోర్ మరియు మార్కెట్ రెండింటి నుండి అవసరమైన మరియు పండ్ల మొత్తం ధరను లెక్కిస్తాము.

డిపార్ట్‌మెంట్ స్టోర్ ధరలు

పండ్ల పేర్లు	కావలసిన పండ్లు వెల	మొత్తం వెల (₹)
ఆపిల్	1 కి.గ్రా ఆపిల్ వెల = ₹120 20 కి.గ్రా ఆపిల్ వెల = 20 × 120 = ₹2400	2400
జామకాయ	1 కి.గ్రా జామకాయ వెల = ₹50 20 కి.గ్రా జామకాయల వెల = 20 × 50 = ₹1000	1000
స్ట్రాబెర్రీ	1 పెట్టె వెల = ₹80 30 స్ట్రాబెర్రీ పెట్టెల వెల = 30 × 80= ₹2400	2400
అరటి పండ్లు	1 డజను పండ్ల వెల = ₹60 20 డజన్ల పండ్ల వెల = 20 × 60 = ₹1200	1200

మార్కెట్ ధరలను లెక్కించుట

పండ్ల పేర్లు	కావలసిన పండ్లు వెల	మొత్తం వెల (₹)
ఆపిల్	1 కి.గ్రా ఆపిల్ వెల = ₹110 1 కి.గ్రా ఆపిల్ వెల = 20 × 110 = ₹2200	2200
జామకాయ	1 కి.గ్రా జామకాయ వెల = ₹40 20 కి.గ్రా జామకాయలు వెల = 20 × 40 = ₹800	800
స్ట్రాబెర్రీ	1 పెట్టె స్ట్రాబెర్రీ వెల = ₹85 20 పెట్టెల స్ట్రాబెర్రీల వెల = 30 × 85 = ₹2550	2550
అరటి పండ్లు 	1 కి.గ్రా అరటి పండ్ల వెల = ₹50 20 కి.గ్రా అరటి పండ్ల వెల = 20 × 50 = ₹1000	1000

ఇప్పుడు డిపార్ట్‌మెంటల్ స్టోర్ యొక్క కొనవలసిన పండ్ల ధరను, మార్కెట్ అంగడి ధరలతో పోల్చండి.

పండ్లు	మీకు కావలసిన వస్తువుల ధరలు (₹)	
	డిపార్ట్‌మెంటల్ స్టోర్స్	మార్కెట్ అంగడి
20 కి.గ్రా ఆపిల్	2400	2200
20 కి.గ్రా జామకాయలు	1000	800
30 పెట్టెల స్ట్రాబెర్రీ	2400	2550
20 డజనుల అరటి పండ్లు	1200	1000
మొత్తం షాపింగ్ ధర	7000	6550

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 263 31-07-2020 13:11:37

పై పోలిక నుండి మార్కెట్ అంగడి నుండి కొనుగోలు చేయుట పరిమాణం మరియు వెల రెండింటిలోనూ ఉత్తమమైనది. మార్కెట్ అంగడి యందు కొనుగోలు చేయుటయే తెలివైన నిర్ణయం.

కృత్యము

క్రింది షరతులలో ఈ క్రింది జాబితాలో ఇవ్వబడిన వస్తువుల పరిమాణాన్ని మార్చుకుండా వస్తువులను కొనడానికి మీరు మీ మొత్తం ₹220 బడ్జెట్‌తో ఒక దుకాణానికి వెళుతున్నారని పరిగణించండి.

షరతులు:

(i) క్రింది ధర జాబితాను మొదట పూర్తి చేయాలి.

(ii) క్రింది ధరల ప్రకారం మీ బడ్జెట్ 220కు ఏదేని 3 వస్తువులను కొనుగోలు చేయుము.

(iii) నీవు కొనబోవు వస్తువుల బరువు 5 కి.గ్రా కంటే అధికంగా నుండుటకు వీలులేదు. ఎందుకనగా, నీవు ఆ వస్తువులను మోసుకుంటూ అధిక దూరం నడిచి వెళ్ళవలెను.

ఇప్పుడు క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానములిమ్ము:

1. ఎన్ని విధానములో నీ వస్తువులను కొనగలవు? క్రింది ధర పట్టికను పూర్తిచేయుము. ఒకటి మీ కొరకు చేయబడినది.
2. కొనుగోలు చేయుటకు ఏది అత్యుత్తమైన ధర పట్టిక?

ధరల పట్టిక

వ.సం	వివరణ	వెల / 1 కి.గ్రా. (₹)	పరిమాణం కి.గ్రా.	మొత్తం (₹)
1	బియ్యం	37.50	2.50	
2	కందిపప్పు	62.00	1.00	
3	చక్కెర	32.50	1.50	
4	గోధుమ	26.50	1.00	
రసీదు మొత్తం				

ధరల పట్టిక

వ.సం	వివరణ	వెల / 1 కి.గ్రా. (₹)	పరిమాణం కి.గ్రా.	మొత్తం (₹)
1	Rice	37.50	2.50	93.75
2	Toor Dal	62.00	1.00	62.00
3	Wheat	26.50	1.00	26.50
రసీదు మొత్తం				182.25

ధరల పట్టిక

వ. సం	వివరణ	వెల / 1 కి.గ్రా. (₹)	పరిమాణం కి.గ్రా.	మొత్తం (₹)
రసీదు మొత్తం				

ధరల పట్టిక

వ. సం	వివరణ	వెల / 1 కి.గ్రా. (₹)	పరిమాణం కి.గ్రా.	మొత్తం (₹)
రసీదు మొత్తం				

ధరల పట్టిక

వ. సం	వివరణ	వెల / 1 కి.గ్రా. (₹)	పరిమాణం కి.గ్రా.	మొత్తం (₹)
రసీదు మొత్తం				

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 264 31-07-2020 13:11:39

7.8.1 విభిన్న పరిమాణంలోని కంటైనర్‌ను పోల్చడం

చాలాసార్లు వస్తువులను వివిధ పరిమాణం గల కంటైనర్‌లలో ప్యాక్ చేస్తారు.

- ❖ కొన్నిసార్లు దుకాణదారులు ఒకే వస్తువు యొక్క పెద్ద కంటైనర్‌ను ఎంచుకోవడం ద్వారా డబ్బు ఆదా చేస్తారు. ఉదాహరణకు 200 మి.లీ, 5 యూనిట్లు ప్యాకెట్ పాలలో తరచుగా 1 లీటర్ పాలు వెల కంటే ఎక్కువ ఖర్చు అవుతాయి.
- ❖ కొన్నిసార్లు ఒకే దుకాణంలో ఒకే వస్తువుకు రెండు ధరలు ఉంటాయి. ఒక వస్తువును కొనడానికి ఒక ధర, అదే ఒకటి కంటే ఎక్కువ వస్తువులను కొనుటకు వేరు ధర ఉండటం గమనించగలరు. ఉదాహరణకు 1 లీటర్ నూనె ₹135 మరియు 2 లీటర్ల బాటిల్‌లకు ₹240 ఖర్చు అవుతుంది. ఈ సందర్భంలో మీరు రెండు 1 లీ బాటిళ్ళు కొనుగోలు చేస్తే మీరు ఎక్కువ ధర చెల్లించాలి. కొన్ని సందర్భాలలో అధిక పరిమాణములో కొనుగోలు చేయడం వలన డబ్బు ఆదా చేస్తుంది.
- ❖ కొన్నిసార్లు వినియోగదారుడు పెద్ద పరిమాణం కల వస్తువును అది పాతదిగా మారడానికి లేక కాలపరిమితిని తీరుటకు ముందు పూర్తిగా ఉపయోగించ లేదు. ఏ పరిమాణ కంటైనరు కొనడం ఉత్తమమని తెలుసుకోవడానికి మీరు వస్తువులు యొక్క ఒక ప్యాక్ ధర తెలుసుకోవాలి.

కృత్యము

మీ బడ్జెట్ ధర లీటరుకు ₹250 చొప్పున 12 లీ వంట నూనెను కొనాలనుకుంటున్నట్లు పరిగణించండి. ఒక సూపర్ మార్కెట్లో వివిధ బ్రాండ్లలో చాలా ఆఫర్లు ఉన్నాయి. కొన్ని ఆఫర్లు క్రింద ఇవ్వబడ్డాయి. పట్టికను పూర్తిచేసి మీకోసం మంచి ఒప్పందం ఏది మరియు మీ మొత్తం కొనుగోలు కోసం మీరు ఎంత ఆదా చేస్తారో కనుగొనండి.

ఉత్తమమైన కొనుగోలు ఏది							
వస్తువు (వంటనూనె)	కొలమానము (లీటర్లలో))	సాధారణ ధర (₹)	రాయితీ (ఆఫర్)	విశేష ధర (₹)	పొదుపు చేయు ధర (₹)	1 లీటర్ యొక్క ధర(₹)	12 లీటర్ల యొక్క ధర(₹)
	1	293	₹ 50 రూపాయల తోపుడు	243		243	
	2	850	1 లీ +1 లీ ఉమ్మడి	499	351 (850-499)	249.50	
	5+1 = 6	2000	5 లీ కొనిన 1 లీ ఉచితం	1500			3000
	2+2 = 4	1486	1 లీ కొనిన 1 లీ ఉచితం	743		185.75	
	1+1= 2	850	విశేష రాయితీ రెండు, 1 లీ ప్యాకెట్	390		195	
	12 (1) = 12	5100	1 లీ, 12 ప్యాకెట్లు	1650	3450		

మీకు లభించు ఉత్తమ రాయితీ / కొనుగోలు ____________________

మొత్తం మీరు పొదుపు చేయు పైకము ________________

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 265 31-07-2020 13:11:40

ప్రయత్నించుము

ఉపాధ్యాయుడు తరగతిని 4 సమూహాలుగా విభజించి తరగతి గదిలో ఒక సంతను ఏర్పాటు చేసి రెండు సమూహములను కొనుగోలుదారులుగాను, వ్యాపారస్తులుగాను నటించమనెను. కొనుగోలుదారులుగా నటించే వారు, వేర్వేరు అంగడులలో వస్తువులు కొనుగోలు చేసి వెల పట్టికను తయారు చేయవలెను.

స్టార్ ఆహార సంస్థ మరియు సూపర్ ప్రోవిజన్స్ అంగడి అను రెండు అంగడులలో రెండు సమూహముల వారు వస్తువులను కొనుగోలు చేయుదురు. స్టార్ ఆహార సంస్థ నందు త్రోపుడు వెలలో సూపర్ ప్రోవిజన్స్ అంగడి నందు ఒకటి కొనిన మరొకటి ఉచితం అను రాయితీ / ఆఫర్ వెలలో వస్తువులు విక్రయించబడుతున్నాయి.

స్టార్ ఆహార సంస్థ

114 వెల గల చాక్లెట్ బిస్కెట్ వల్ల ఇప్పుడు ₹30 త్రోపుడు వెలలో

₹90 వెల గల మిఠాయిలు ఇప్పుడు ₹20 త్రోపుడు వెలలో

₹60 వెల గల ప్రోటీన్ పాలు ఇప్పుడు ₹20 త్రోపుడు వెలలో

₹450 వెల గల ఒక ప్యాకెట్ చాక్లెట్ ఇప్పుడు ₹150 త్రోపుడు వెలలో

సూపర్ పలసరకు అంగడి

₹180 వెల గల చాక్లెట్ బిస్కెట్ ప్యాకెట్ ఒకటి తీసిన మరొకటి ఉచితం

₹150 వెల గల మిఠాయి ప్యాకెట్ ఒకటి తీసిన మరొకటి ఉచితం

₹80 వెల గల ప్రోటీన్ పాలు కొన్న మరొక సీసా ఉచితం

₹580 వెల గల బాదం పప్పులు ఇప్పుడు ఒకటి కొంటే మరొకటి ఉచితం

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 266 31-07-2020 13:11:43

క్రింది ప్రశ్నలకు సమాధానములు వ్రాయుము:

I. మీరు కొనవలసిన వస్తువుల పట్టిక:

(i) 4 సీసాల ప్రోటీన్ పాలు (200 మి.లీ కొలత) (ii) రెండు ప్యాకెట్ల వేరుశనగ బర్ఫీ (200 గ్రా)

(iii) ప్యాకెట్ చాక్లెట్ బిస్కెట్ మరియు (iv) ఒక ప్యాకెట్ బాదం పప్పులు (500 గ్రా) అయితే,

(i) మీరు అన్ని వస్తువులను ఒకే అంగడి లో కొన్న, ఏ అంగడిలో తక్కువ వెలలో కొనగలరు.

(ii) మీరు వేరువేరు అంగడులలో కొనగలిగిన తక్కువ పైకము ఖర్చు చేయుట ఎలా చేయగలరు?

II. మీ వద్ద ఉన్న పైకము ₹1000/- అయితే, మీరు కొనవలసిన వస్తువుల జాబితా,

(i) 6 బాటిల్‌లో ప్రోటీన్ పాలు (200 మి.లీ కొలత) (ii) 3 ప్యాకెట్లు వేరుశనగ బర్ఫీ (200 గ్రాములు)

(iii) 3 ప్యాకెట్లు చాక్లెట్ బిస్కెట్లు మరియు (iv) ప్యాకెట్ బాదం పప్పులు (250 గ్రాములు)

(i) మీ వద్ద ఉన్న ₹1000 మించకుండా మీరు ఏ అంగడిలో వస్తువులను కొనుగోలు చేయుటకు వీలగును?

(ii) మీరు ప్రతి ఒక వస్తువును తక్కువ వెలలో ఏ అంగడిలో కొనుటకు వీలగును?

(iii) సూపర్ ప్రొవిజన్ "**BUY ONE GET ONE**" అంగడిలో ఒకటి కొన్న మరొకటి ఉచితం అను రాయితీతో కూడిన అమ్మకము "**50%** తోపుడు అను అమ్మకమునకు సమానము.

7.9 ప్యాకింగ్

మనము ఒక పెట్టె నందో లేక చేతి పెట్టెలోనో లేక అలమారనందో వస్తువులను ప్యాక్ చేయుటకు ముందు మొట్టమొదట ఎలా దానిని అమర్చుదుమో నిర్ణయించుకొనవలెను. ఆ స్థిరమైన స్థలములో ఎన్ని వస్తువులను అమర్చగలము? దీనికి ఒక ఉదాహరణ ఏమిటంటే మీరు పాఠశాలకు బయలుదేరుటకు మునుపు, మీ పుస్తకాల సంచిని మీకు కావలసిన అన్ని వస్తువులను (పుస్తకములు, నోటు పుస్తకములు, జ్యామితి పెట్టె, క్రీడా ఉపకరణములు, భోజనము మరియు తాగునీటి సీసా) తీసుకువెళ్ళడానికి ప్రయత్నిస్తారు కదా? కావున వాటిని మీ సంచిలో అమర్చుటకు ప్రయత్నించినప్పుడు మీ పుస్తకములు పాడుకాకుండా చూసుకొనుటలో మీరు అతి జాగ్రత్తగా చూసుకుంటారా లేదా? ఆలోచించండి! మీ స్నేహితునికి లేక కుటుంబ సభ్యులకు లేక వేరొకరికో వస్తువులను ఒక పెట్టెలో ప్యాకింగ్ చేయుటకు కూడా పై విధానమే సరి అగును.

ఇవికాక షీట్లు, అద్దం, కాగితం, కొయ్య, గుడ్డ మొదలగు వస్తువులు మరియు గదుల కేటాయింపు ఇచ్చిన ఖచ్చిత ప్రాంతంలో కూర్చునే స్థలములను కేటాయింపు సరియైన లైన్లలో వాహనాలను పార్కింగ్ / నిలపడం మరియు హార్డ్ డిస్క్, సిడి, పెన్ డ్రైవ్ మొదలైన వాటిలో డేటాను కాపాడుకోవటం.

క్రింది పరిస్థితులు మరియు ఉదాహరణల నుండి కొన్ని ప్యాకింగ్ పద్ధతులను ఉపయోగించి వస్తువులను కంటైనర్ ఖాళీ స్థలములో లేదా గదులలో లేదా పెట్టెలో ఎలా అమర్చాలో ఉత్తమంగా అర్థం చేసుకోవడానికి ప్రయత్నిద్దాం.

7.9.1 ప్యాకింగ్ పద్ధతులు - పాక్షిక పద్ధతి

1EGOL

ఈ పద్ధతిలో మనము వస్తువులను సంచి లేదా పాత్రలలో నింపుట అనునది ఒక వస్తువు యొక్క బరువు విలువ మరియు ఎన్నిక నిర్ణయించును. ఆ పాత్ర యొక్క మొత్తం బరువు గణ పరిమాణం అనునది ఇచ్చిన పరిమితి కంటే తక్కువ లేదా సమానమైనదిగా ఉండవలెను. దానిలో ఉంచి పదార్థము సాధ్యమైనంత అత్యంత అధికమైన మోతాదులో ఉండవలెను. పాక్షికంగా వస్తువులను కొనుగోలు చేసే పద్ధతిని ఉపయోగించి మరియు ఇచ్చిన బడ్జెట్‌లో ఎక్కువ వస్తువులను కొనుగోలు చేయడానికి ఉపయోగపడుతుంది. క్రింద ఉన్న సందర్భముల నుండి ఈ పద్ధతిని గూర్చి ఇంకనూ అధికముగా తెలుసుకొనుటకు వీలగును.

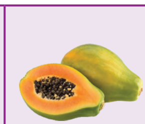
07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 267 31-07-2020 13:11:43

సందర్భము *1:*

పటము 7.20 లో ఇవ్వబడిన వాటి నుండి కొన్ని పండ్లు, కాయగూరల బరువు మరియు వెల ఇవ్వబడి ఉన్నది. మీ వద్ద 15 కిలోగ్రాముల పరిమాణమును మోయగల సంచి కలదు. మరియు మీ బడ్జెట్ ₹550 రూపాయలకు 15 కి.గ్రా పరిమాణము మోయగల సంచి కలదు. మరియు మీ బడ్జెట్ ₹550కు 15 కి.గ్రా బరువుకు అధికం కాకుండా కొన్ని పండ్లను, కూరలను కొనవలెను అనుకొనుము.

పటము 7.20

నీవు అన్ని వస్తువులను కొనలేవు, ఎందుకనగా అన్ని వస్తువుల బరువు మొత్తం 15 కి.గ్రా కంటే ఎక్కువ. ₹550 లోపల కొనవలయును. కనుక మీ వద్ద ఉన్న ₹550 లోపల అధికమైన వస్తువులను ఎంపిక చేయటను కనుగొనుటకు, కొన్ని పద్ధతులను ఉపయోగించెదము. అందుకు మీరు కొనదలచిన వస్తువుల బరువు మరియు వెలలను క్రింద చూపిన విధముగా పట్టిక తయారు చేయుము.

వస్తువులు							
బరువు (కి.గ్రా)	1	3	5	4	1	3	2
వెల (₹)	60	105	150	70	80	90	40

I విధానం - గరిష్ట ధర ఉన్న వస్తువులను ఎంపిక చేసుకోవడం

ఈ విధానంలో (అధిక) గరిష్ట విలువ ఉన్న వస్తువులను ఎంపిక చేసిన, ఈ పట్టికలో ₹150/- అత్యధిక వెల అగును. ఇప్పుడు చేతిలో ఉన్న పైకమునకు కాయగూరలను, పండ్లను 10 రూపాయలకు మించకుండా మొత్తము వెలను కనుగొనుటకు పట్టికను తయారు చేయుము.

వస్తువులు	బరువు (కి.గ్రా.)	ఇంకనూ కొనగల వస్తువుల బరువు (కి.గ్రా)	వెల (₹)
	5	15−5=10	150.00
	3	10−3=7	105.00

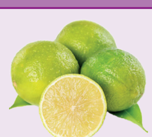
07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 268 31-07-2020 13:11:48

	3	7−3=4	90.00
	1	4−1=3	80.00
	3	3−3=0	$70 \times \frac{3}{4} = 52.50$
మొత్తము వెల	**15 కి.గ్రా.**		**472.50**

వస్తువుల అత్యధిక బరువు 15 కి.గ్రా గా ఉన్నను మిగిలిన మూడు కి.గ్రా బొప్పాయి పండు కొనిన చాలును. కనుక 3 కి.గ్రా బొప్పాయి వెల ₹52.50 అని లెక్కించిన, 15 కి.గ్రా కూరగాయలు మరియు పండ్లను కొను ఈ విధానంలో ₹472.50 పైసలను ఖర్చు చేయ వలసినదిగా ఉండును.

II విధానము - బరువు తక్కువ గల వస్తువులను ఎంపిక చేయడం.

ఈ విధానములో తక్కువ బరువు గల వస్తువులను ఎంపిక చేయుదుము. ఇందు మనము ఎక్కువ వస్తువులను ఎంపిక చేయగలము. ఇప్పుడు నీ చేతిలో ఉన్న డబ్బుతో 15 కి.గ్రా లకు మించకుండా కాయగూరలు మరియు పండ్లను కొనుటకు మరియు మొత్తం వెలను కనుగొనుటకు పట్టికను తయారు చేయుము.

వస్తువులు	వెల (₹)	బరువు (కి.గ్రా.)	ఇంకనూ కొన గల వస్తువుల బరువు
	1	15−1=14	60.00
	1	14−1=13	80.00
	2	13−2=11	40.00
	3	11−3=8	105.00
	3	8−3=5	90.00

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 269 31-07-2020 13:11:50

	4	5−4=1	70.00
	1	1−1=0	**$150 \times \frac{1}{5}$ =30.00**
మొత్తము వెల	**15 కి.గ్రా**		**475.00**

వస్తువుల అధికపక్ష బరువు 15 కి.గ్రా గా ఉండగా మిగిలిన ఒక కి.గ్రా సపోటా పండు కొన్న సరిపోవును. ఒక కి.గ్రా సపోటా వెల ₹30 అని లెక్క కట్టగా 15 కి.గ్రా కాయగూరలు మరియు పండ్లు కొనుటకు ఈ విధానంలో ₹475 ఖర్చు అగును.

III విధానం - అత్యధిక వేల మరియు బరువుల నిష్పత్తి.

ఈ విధానంలో అత్యధిక వేల మరియు బరువుల నిష్పత్తి (ఒక కిలోగ్రాము కనుగొనుము) ఆధారముగా వస్తువుల ఎంపిక చేయుము. ఇప్పుడు మన వద్ద నున్న పైకము మరియు 15 కి.గ్రా బరువును అధిగమించకుండా కొనుగోలు వస్తువుల ధరల పట్టికను తయారు చేయుము.

వస్తువులు	బరువు (కి.గ్రా.)	వెల (₹)	ఇంకనూ కొనగల వస్తువుల బరువు (కి.గ్రా.)	వెల (₹)
	1	80.00	15−1=14	80.00
	1	60.00	14−1=13	60.00
	3	35.00	13−3=10	105.00
	5	30.00	10−5=5	150.00
	3	30.00	5−3=2	90.00
	2	20.00	3−2=0	40.00
మొత్తము వెల	**15 కి.గ్రా**			**520.00**

ఈ విధానంలో బొప్పాయి తప్ప మిగిలిన అన్ని కూరగాయలు మరియు పండ్లు రకములను కొనగలము. ఎందుకంటే మన బడ్జెట్లో 15 కి.గ్రా అధిగమించకుండా అత్యధిక వెల వస్తువులు కావలయును. కనుక రెండవ విధానంలో పోల్చిన తక్కువ ఖర్చుతో అధిక వస్తువులను కొనగలము. మరియు దీని ద్వారా మూడవ విధానం చాలా ముఖ్యమైనది అవును కదా?

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 270 31-07-2020 13:11:53

అభ్యాసము 7.4

1. క్రింది వానిలో ఉత్తమ కొనుగోలును కనుగొనుము

   (i) ₹175కు 5 చాక్లెట్లు లేక ₹114కు మూడు చాక్లెట్లు.

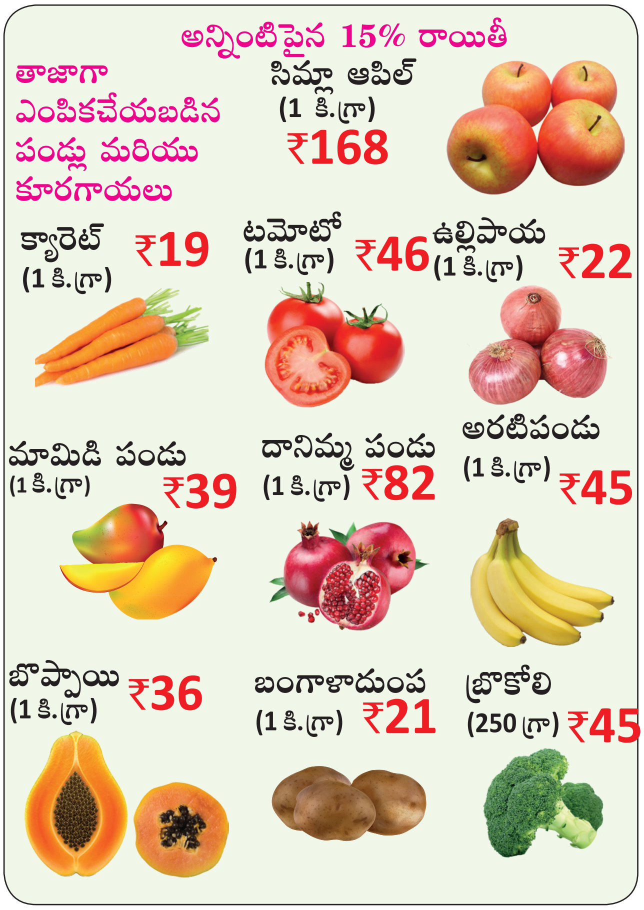
   (ii) భాస్కర్ డజను గ్రుడ్లను ₹81కు కొనుట లేక అరుణ 15 గ్రుడ్లను ₹64.50కు కొనుట.

2. ఇవ్వబడిన పటమునుపయోగించి ½ కి.గ్రా లడ్డు, 1 కి.గ్రా కేక్, 6 ప్యాకెట్ల్ రొట్టె కొన్నప్పుడు తాజాతీపి పదార్ధములు మరయు బేకరి ఉత్పత్తులలో వచ్చు మొత్తం ప్రత్యేక ఆఫర్ వెల కనుగొనుము?

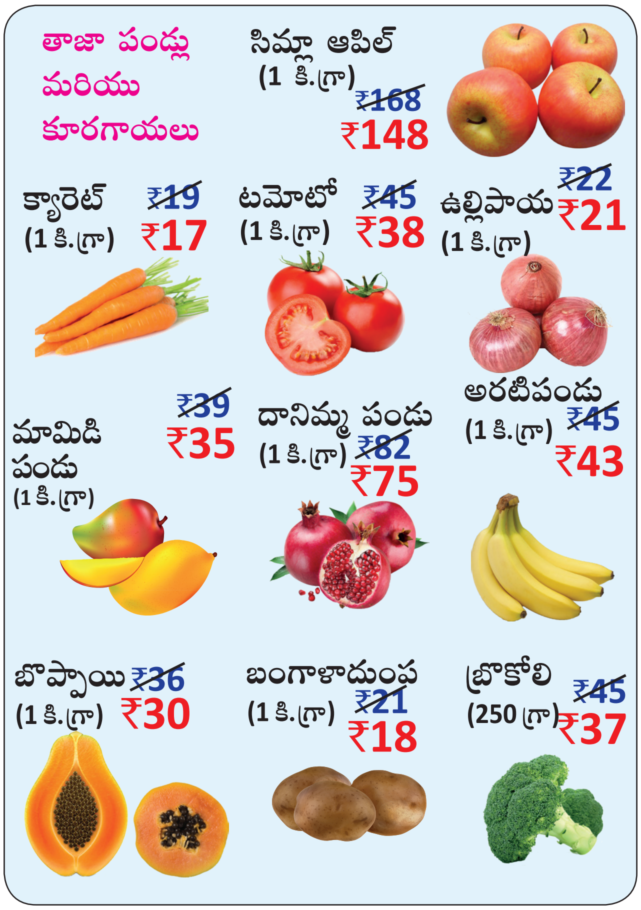
3. క్రింది పటములు ఉపయోగించి ధర పట్టికను తయారు చేయుము.

మీరు 1.5కి.గ్రా ఆపిల్, 2కి.గ్రా దానిమ్మ పండ్లు, 2కి.గ్రా అరటిపండ్లు, 3కి.గ్రా మామిడి పండ్లు. 1/2 కి.గ్రా బొప్పాయి, 3కి.గ్రా ఉల్లిపాయలు, 11/2కి.గ్రా టమోటా మరియు 1కి.గ్రా క్యారెట్‌ను ఒకటవ అంగడిలో కొనుగోలు చేసి, రెండవ అంగడితో పోల్చిన ఎంత ఆదా చేయగలరు?

1వ అంగడి



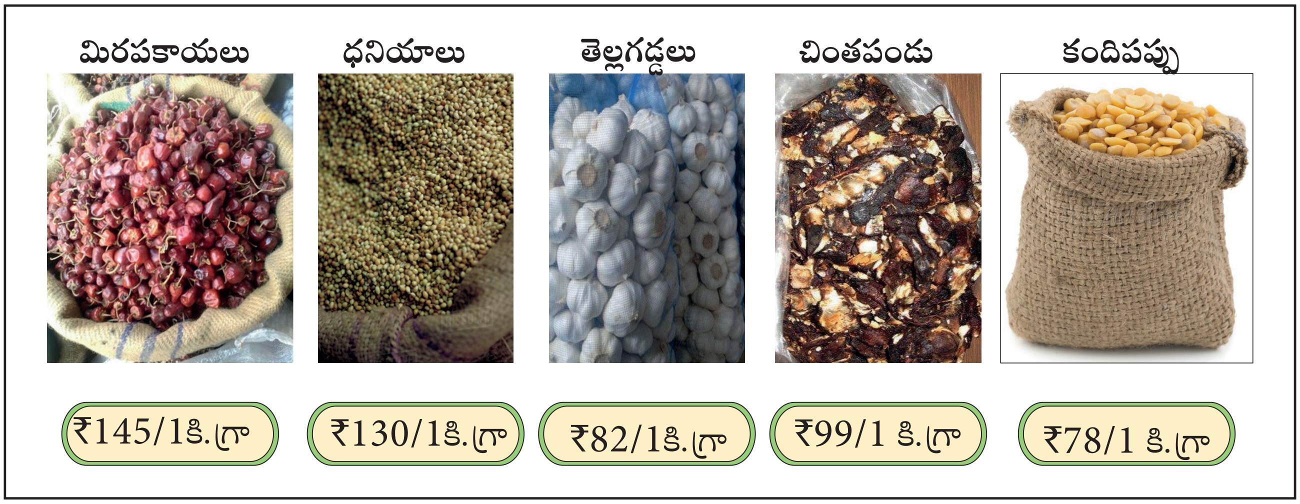
2వ అంగడి



4. కింది పటములో కొన్ని వస్తువులు మరియు వాని వెలలు ఇవ్వబడినది. వానికి నీవు షాపింగ్ జాబితాను సిద్ధం చేసి 7 కి.గ్రా సామర్థ్యం గల సంచిలో తీసుకొనిరావలెను. బరువు నిష్పత్తి పద్ధతినుపయోగించి మొత్తము వెలకు పట్టికను తయారుచేసి మరియు నీకిచ్చిన బడ్జెటు ₹1000లో 7కి.గ్రా దాటకుండా వీలైనంత ఎక్కువ వస్తువులను కొనగలవు.

షాపింగ్ జాబితా

1. 2 కి.గ్రా మిరపకాయలు
2. 2 కి.గ్రా ధనియాలు
3. 1 కి.గ్రా తెల్లగడ్డలు
4. 1 కి.గ్రా చింతపండు
5. 2 కి.గ్రా కందిపప్పు



బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు

5. అంతర్జాలము లేక దూరదర్శిని ప్రకటనల ద్వారా కొనుగోలుదారులను ఖర్చు చేయు నిర్ణయాలను ప్రభావితం చేయునవి..
   (A) ప్రత్యేక సంగీతాన్ని ఉపయోగించడం.
   (B) ఈ వస్తువు నాకు అవసరం అని నన్ను ప్రేరేపించడం.
   (C) ఆకర్షణీయమైన చిత్రములను ఉపయోగించడం.
   (D) పైవన్నియు

6. నేను వస్తువులు కొనుటకు అంగడికి వెళ్ళిన,
   (A) ఆకర్షణీయంగా ఉన్న వస్తువులను కొంటాను.
   (B) నా మిత్రుని వద్ద ఉన్నటువంటి వస్తువులను కొంటాను.
   (C) నేను కొనవలసిన వస్తువులను కొంటాను.
   (D) నేను మొట్టమొదటిగా చూసిన వస్తువులను కొంటాను.

7. సరైన పద్ధతిలో వస్తువులను కొనడం అనునది,
   (A) ఎల్లప్పుడు పేరుపొందిన సంస్థల యందు మాత్రమే కొనుగోలు చేయుట.
   (B) కొనుటకు ముందు వేరు కొన్ని అంగడులలోని వస్తువులతో పోల్చుట.
   (C) నా మిత్రుడు కొన్నటువంటి వస్తువునే కొనుట
   (D) ఎప్పుడూ ఒకే అంగడిలో కొనుట.

07_8th_Maths_Telugu_IP_Chap_7.indd 272 31-07-2020 13:12:15

జవాబులు

1. సంఖ్యలు

అభ్యాసము 1.1

1. (i) -4 మరియు -3 (ii) -3.75 (iii) 0 (iv) $\frac{30}{-48}$ (v) $\frac{-29}{39}$

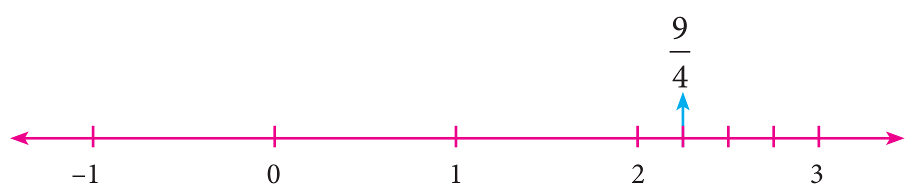
2. (i) అసత్యము (ii) సత్యము (iii) అసత్యము (iv) సత్యము (v) సత్యము

3. (i) $-\frac{11}{3}$ (ii) $\frac{-2}{5}$ (iii) $\frac{7}{4}$

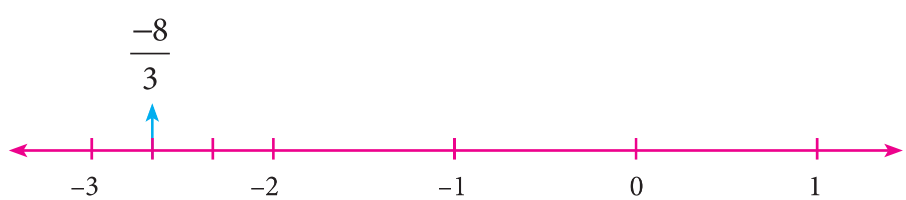
4. $Y = \frac{-5}{3}, N = \frac{-4}{3}, A = \frac{9}{4}, T = \frac{10}{4}, I = \frac{11}{4}$

5.

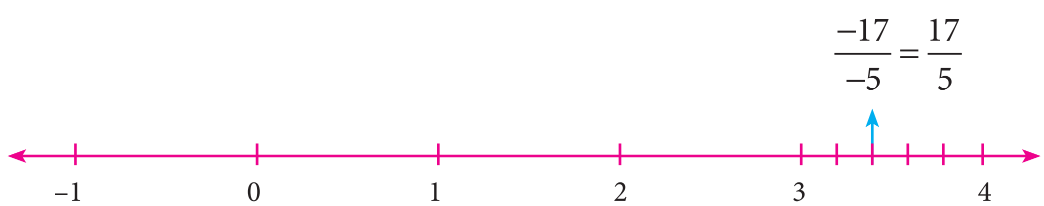
(i)



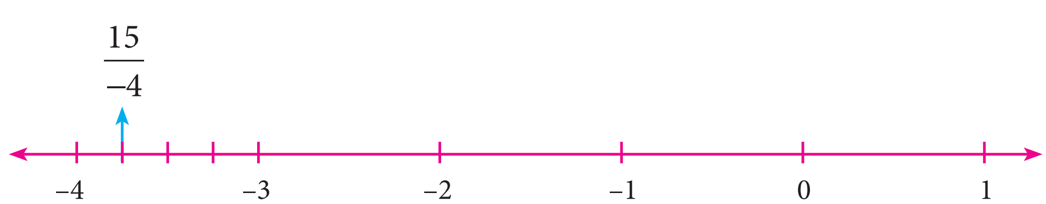
(ii)



(iii)



(iv)



6. (i) 0.0909... (ii) 3.25 (iii) -2.5714285714 (iv) 1.4 (v) -3.5

7. (i) $-2,\ 0 \rightarrow \frac{-19}{10}, \frac{-18}{10}, \frac{-7}{10}, \frac{-6}{10}, \frac{-5}{10}$ (ii) $\frac{-1}{2}, \frac{3}{5} \rightarrow \frac{-3}{10}, \frac{-1}{10}, 0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{5}{10}$

(iii) $0.25,\ 0.35 \rightarrow \frac{26}{100}, \frac{27}{100}, \frac{30}{100}, \frac{32}{100}, \frac{33}{100}$ (iv) $-1.2,\ -2.3 \rightarrow \frac{-21}{10}, \frac{-20}{10}, \frac{-15}{10}, \frac{-14}{10}, \frac{-13}{10}$

8. $\frac{61}{15}$ మరియు $\frac{103}{30}$, చాలా సమాధానములు సాధ్యము 9. (i) $\frac{-11}{5} > \frac{-21}{8}$ (ii) $\frac{3}{-4} < \frac{-1}{2}$ (iii) $\frac{2}{3} < \frac{4}{5}$

10. (i) ఆరోహణ క్రమము: $\frac{-11}{8}, \frac{-15}{24}, \frac{-5}{12}, \frac{12}{36}, \frac{-7}{-9}$ అవరోహణక్రమము: $\frac{-7}{-9}, \frac{12}{36}, \frac{-5}{12}, \frac{-15}{24}, \frac{-11}{8}$

(ii) ఆరోహణ క్రమము: $\frac{-17}{10}, \frac{-7}{5}, \frac{-19}{20}, \frac{-2}{4}, 0$ అవరోహణక్రమము: $0, \frac{-2}{4}, \frac{-19}{20}, \frac{-7}{5}, \frac{-17}{10}$

11. (B) $\frac{-142}{99}$ 12. (B) $\frac{16}{-30}, \frac{-8}{15}$ 13. (C) -1 మరియు -1 14. (A) $\frac{-17}{24}$ 15. (C) 6

అభ్యాసము 1.2

1. (i) $\frac{1}{20}$ (ii) 1 (iii) 1 (iv) 0 (v) -1

2. (i) సత్యము (ii) అసత్యము (iii) అసత్యము (iv) సత్యము (v) అసత్యము

3. (i) 2 (ii) $\frac{74}{35}$ (iii) $\frac{4}{15}$ (iv) $2\frac{3}{4}$ 4. $\frac{-15}{11}$ 5. (i) $\frac{-1}{4}$ (ii) $\frac{8}{45}$

6. (i) -6 (ii) $\frac{1}{13}$ (iii) 5 7. (i) -7 (ii) $\frac{7}{11}$

8. $\frac{23}{2}\left(=11\frac{1}{2}\right)$ మరియు 11 మరియు 12ల మధ్య ఉంటుంది. 9. (i) $\frac{133}{60}$ (ii) $\frac{-5}{2}$ 10. 120

11. (A) 1 12. (C) $\frac{5}{8}$ 13. (B) $\frac{2}{3}$ 14. (D) $\frac{15}{16}$ 15. (D) పైవన్నియు

అభ్యాసము 1.3

ప్రశ్నలు 1 నుంచి 6 వరకు మీరే సరిచూచుకొండి

7. (C) 0 8. (D) సహచర 9. (A) $\frac{1}{8} - \frac{1}{8} = 0$ 10. (B) వ్యవకలనము

అభ్యాసము 1.4

1. (i) 9 (ii) 48 (iii) 5 (iv) 3 (v) 13, 14

2. (i) సత్యము (ii) సత్యము (iii) అసత్యము (iv) అసత్యము (v) సత్యము

3. (i) 289 (ii) 41209 (iii) 1205604 4. (i) కాదు (ii) కాదు (iii) అవును (iv) అవును

5. (i) 12 (ii) 16 (iii) 28 (iv) 34 (v) 69 (vi) 95

6. (i) 42 (ii) 83 (iii) 105 (iv) 134 (v) 647 7. (i) 21 (ii) 28 (iii) 32

8. (i) 1.7 (ii) 8.2 (iii) 1.42 (iv) $\frac{12}{15}$ (v) $2\frac{5}{7}$ 9. 105, 81 10. 2, 60

11. (A) 9 12. (D) 7^2 13. (C) 7 14. (D) $\sqrt{32}$ 15. (B) 5

అభ్యాసము 1.5

1. (i) 7 (ii) 6 (iii) 42 (iv) 30 (v) 0.017

2. (i) సత్యము (ii) సత్యము (iii) అసత్యము (iv) సత్యము (v) సత్యము 4. 5 5. 5 6. 120

7. 9,19 8. $\sqrt{36} = 6$ 9. $\sqrt{3} = 1.732$ 10. 4,16

అభ్యాసము 1.6

1. (i) 1 (ii) 1 (iii) 20^{-3} (iv) $\frac{-1}{128}$ (v) -243

08_8th_Maths_Answer-TELEGU.indd 274 31-07-2020 13:13:05

2. (i) సత్యము (ii) అసత్యము (iii) అసత్యము (iv) సత్యము (v) అసత్యము

3. (i) $\frac{1}{8}$ (ii) 32 (iii) $\frac{-216}{125}$ (iv) 16 (v) 6

4. (i) $\frac{64}{15625}$ (ii) $\frac{4}{5}$ (iii) 1024 5. (i) $\frac{21}{2}$ (ii) 5 (iii) 1

6. (i) 1 (ii) $\frac{3}{2}$ (iii) 72 7. (i) $x = 5$ (ii) $x = 6$

8. (i) $6 \times 10^3 + 5 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 3 \times 10^{-1} + 2 \times 10^{-2} + 1 \times 10^{-3}$
(ii) $8 \times 10^2 + 9 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 1 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2}$

9. (i) 87652.0407 (ii) 5050.505 (iii) 0.000000000025

10. (i) 4.678×10^{11} (ii) 1.972×10^{-6} (iii) 1.642398×10^3
(iv) 1.083×10^{12} ఘన కి.మీ (v) 1.6×10^{-24}

11. (B) $\frac{-2}{5}$ 12. (A) $\frac{-1}{32}$ 13. (D) $-\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 16^{-1}$ 14. (C) 6 15. (D) 2.02×10^{-10}

అభ్యాసము 1.7

ఇతర అభ్యసన సమస్యలు

1. 4 కి.గ్రా 300 గ్రాము 2. $10\frac{2}{5}$ లీటరు 3. రెండునూ సరియైనది 4. 6 మీ 5. 552 చ.సెం.మీ

6. 9 సెం.మీ మరియు 10 సెం.మీ 7. 15 డెసిమీటరు 8. 625 9. 8

10. (i) 4.8×10^3 (ii) 1.152×10^5 (iii) 4.2048×10^7 (iv) 4.2048×10^9

సవాళాత్మక సమస్యలు

11. 900 కి.మీ 13. 320 గ్రాములు 14. $\frac{9}{20}$ 15. $x = 3$ 16. $\frac{12}{11}$ 17. కాదు, 64

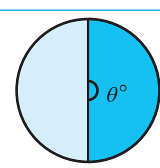
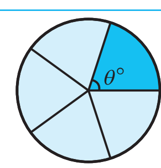
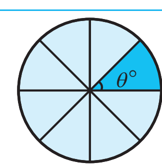
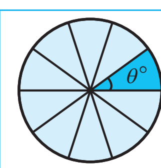
18. 58.85 19. 7.979×10^5 20. $8^{100}, 2^{600}, 3^{500}, 4^{400}, 16^{25}$

2. కొలతలు

అభ్యాసము 2.1

1. (*i*) π (ii) జ్యా (iii) వ్యాసము (iv) 12 సెం.మీ (v) వృత్తాకార చాపము
2. (i) c (ii) d (iii) e (iv) b (v) a

3.

సెక్టారులు				
ప్రతి సెక్టారు కేంద్రకోణము ($\theta°$)	180°	72°	45°	36°

4.

	చాపముపొడవు (సూమారుగా)	సెక్టారు వైశాల్యము (సూమారుగా)	సెక్టారు చుట్టుకొలత(సూమారుగా)
(i)	12.56 సెం.మీ	100.48 సెం.మీ^{2}	44.56 సెం.మీ
(ii)	13.19 సెం.మీ	41.54 సెం.మీ^{2}	25.79 సెం.మీ

5. (i) 240 మీ^{2} (ii) 337.5 సెం.మీ^{2} 6. (*i*) $\theta = 120°$ (*ii*) $\theta = 72°$ 7. 30πమీ

8. 980π సెం.మీ^{2} 9. 706.5 సెం.మీ^{2} (సుమారుగా) 10. 1232 సెం.మీ^{2} (సుమారుగా)

08_8th_Maths_Answer-TELEGU.indd 275 31-07-2020 13:13:09

అభ్యాసము 2.2

1. (i) 38 మీ, 50.75 మీ^{2} (సుమారుగా) (ii) 30 సెం.మీ,40.25 సెం.మీ^{2} (సుమారుగా)
2. (i) 21.5 సెం.మీ^{2} (సుమారుగా) (ii) 27.93 సెం.మీ^{2} (సుమారుగా)
3. 48 సెం.మీ^{2} 4. 41.13 సెం.మీ^{2} (సుమారుగా) 5. 5600 సెం.మీ^{2} 6. 3500 సెం.మీ^{2} 7. 244 మీ^{2}

అభ్యాసము 2.3

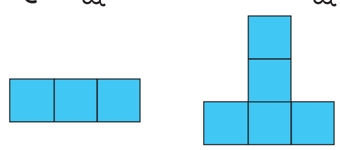
1. (i) పొడవు, వెడల్పు మరియు ఎత్తు (ii) శీర్షము (iii) ఆరు (iv) వృత్తము (v) ఘనము
2. (i) (b) (ii) (a) (iii) (d) (iv) (c)
3. (i) ఘనము (ii) దీర్ఘఘనము (iii) త్రిభుజాకార పట్టకము (iv) చతురస్ర పట్టకము (v) స్థూపము
4. (i) F, T, S (ii) T, S, F (iii) S, F, T
5. (i) అవును (ii) కాదు (iii) అవును (iv) కాదు (v) అవును

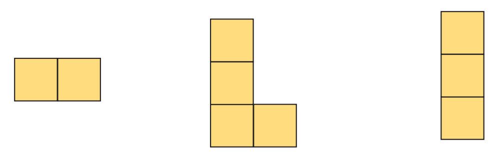
అభ్యాసము 2.4

ఇతర అభ్యసన సమస్యలు

1. 9.42 అడుగులు 2. 314 మీ 3. 128 సెం.మీ^{2}

4. (i) అగ్ర వీక్షణ ముందు వీక్షణ ప్రక్క వీక్షణ (ii) అగ్ర వీక్షణ ముందు వీక్షణ ప్రక్క వీక్షణ





సవాళాత్మక సమస్యలు

5. కనిష్ట వైశాల్యమునకు రెండు తలుపులు అవసరము 6. 63.48 మీ^{2} (సుమారుగా)
7. 1.46 సెం.మీ^{2} (సుమారుగా) 8. (i) F = 10 (ii) V = 4 (iii) E= 28

3. బీజగణితము

అభ్యాసము 3.1

1.

x	$2x^2$	$-2xy$	x^4y^3	$2xyz$	$-5xz^2$
x^4	$2x^6$	$-2x^5y$	x^8y^3	$2x^5yz$	$-5x^5z^2$
$4xy$	$8x^3y$	$-8x^2y^2$	$4x^5y^4$	$8x^2y^2z$	$-20x^2yz^2$
$-x^2y$	$-2x^4y$	$2x^3y^2$	$-x^6y^3$	$-2x^3y^2z$	$5x^3yz^2$
$2y^2z$	$4x^2y^2z$	$-4xy^3z$	$2x^4y^5z$	$4xy^3z^2$	$-10xy^2z^3$
$-3xyz$	$-6x^3yz$	$6x^2y^2z$	$-3x^5y^4z$	$-6x^2y^2z^2$	$15x^2yz^3$
$-7z$	$-14x^2z$	$14xyz$	$-7x^4y^3z$	$-14xyz^2$	$35xz^3$

2. (i) $24m^4n^2$ (ii) $-9x^5y^6$ 3. $-24p^6q^6$
4. (i) $10xy-15x$ (ii) $-10p^3+6p^2-14p$ (iii) $3m^4n^4-15m^3n^2+21m^2n^3$
(iv) $x^3+y^3-z^3+x^2y+x^2z+xy^2+zy^2+xz^2-yz^2$ 5. (i) $4x^2-2x-12$
(ii) $2y^4+3y^3-8y^2-12y$ (iii) $5m^4n^2-m^2n^2-5m^2n^3+n^3$ (iv) $6x^2-36x+30$
6. (i) $-2x^2$ ii) $-3mp$ iii) $2y(5x^2y-x+3y^2)$ 7. (C) iv, v, ii, iii, i 8. $xy+2x+30y+60$
9. (B) $28p^7$ 10. (D) mn^2, –27 11. (C) $6x^2y$ 12. (A) 6 mn 13. (B) $(a+b)$

అభ్యాసము 3.2

1. (i) $\dfrac{18m^4(n^8)}{2m^{(3)}n^3}=9mn^5$ (ii) $\dfrac{l^4m^5n^{(7)}}{2lm^{(3)}n^6}=\dfrac{l^3m^2n}{2}$ (iii) $\dfrac{42a^4b^5(c^2)}{6(a)^4(b)^2}=(7)b^3c^2$
2. (i) సత్యము (ii) అసత్యము 3. (i) $9y^2$ (ii) xy (iii) $-3x^2yz^3$ (iv) xy

08_8th_Maths_Answer-TELEGU.indd 276 31-07-2020 13:13:52

4. $(i)\ 5m$ $(ii)\ 3p^3q^2$ 5. $(i)16y-4z$ $(ii)2mn^2+8m^3n-\frac{1}{2}$ $(iii)\ \frac{5}{6}y-3xy^2+1$

$(iv)=9p^2r+18pq-45$

6. $(i)\ 9y^2$ $(ii)\ 9xy$ $(iii)\ 4m^2-3m$ $(iv)16n^2-2n+3$ $(v)\ x^2+1x-6$ (vi) $-(3p^2-4p+7)$

7. (ii) A సత్యము కాని B అసత్యము 8. (i) A మరియు B రెండునూ సత్యము

అభ్యాసము 3.3

1. $(i)9m^2+30m+25$ $(ii)25p^2-10p+1$ $(iii)4n^2+4n-3$ $(iv)(2p+5q)(2p-5q)$

2. $(i)m^3+9m^2+27m+27$ $(ii)\ 8a^3+60a^2+150a+125$ $(iii)\ 27p^3+108p^2q+144pq^2+64q^3$

(iv) 14,0608 (v) 1124864

3. $(i)\ 125-75x+15x^2-x^3$ $(ii)\ 8x^3-48x^2y+96xy^2-64y^3$ $(iii)\ a^3b^3-3a^2b^2c+3abc^3-c^3$

(iv) 110, 592 $(v)\ 912673x^3y^3$

4. p^3-5p^2+2p+8 5. x^3+3x^2+3x+1 6. x^3-2x^2-5x+6

7. (C) 2 8. (B) a^2+ab+b^2 9. (A) p^3+q^3 10. (D) 72 11. (D) $3ab(a+b)$

అభ్యాసము 3.4

1. $(i)\ 6y(3x-2z)$ $(ii)\ 3x^2y(3x^3y^2+2xy-6)$ $(iii)\ (b-2c)(x+y)$

$(iv)\ (x+y)(a+b)$ $(v)\ (4x-1)(2x^2-1)$ $(vi)\ (x-2)[3y(x-2)+2]$

$(vii)\ 2y(9x-2y-zx)$ $(viii)\ (a-3)(a^2+1)$ (ix) $3y(y+4)(y-4)$ (x) $(b-1)(ab-c^2)$

2. $(i)\ (x+7)^2$ $(ii)\ (y-5)^2$ $(iii)\ (c+2)(c-6)$

$(iv)\ (m+9)(m-8)$ $(v)\ (2x-3)(2x-1)$ 3. (i) $(4x+3)^3$ (ii) $(3p+2q)^3$

4. (i) $(y-6)^3$ (ii) $(2m-5n)^3$ 5. (D) $3x$, $(3x+2y)$ 6. (C) $(2+m)(2-m)$

7. (D) x^2-x-20 8. (B) 3 9. (C) $(1-m)(1+m+m^2)$ 10. (B) $(x+y)$

అభ్యాసము 3.5

ఇతర అభ్యసన సమస్యలు

1. $7x^2y^5+4x^4y^3+60x^2y^2$ 2. $12x^3-8x^2+27x-18$ 3. $S.I=\frac{7}{5}a^3b^4$

4. $\frac{1}{2}a+2b+4$ 5. $(y-3)(7y+2)$

సవాళాత్మక సమస్యలు

6. $4x+3$ 7. $x+2$ 8. $(y+7)(y+8)$ 9. $(4p^2+1)(2p+1)(2p-1)$ 10. $3(x-5y)^3$

అభ్యాసము 3.6

1. (i) $x=7$ (ii) $y=11$ (iii) $m=7$ (iv) $p=15$ (v) ఒకటి

2. (i) సత్యము (ii) అసత్యము 3. (c) (iii),(i), (iv), (v), (ii)

4. (i) $x=11$ (ii) $y=\frac{1}{-4}$ (iii) $x=-1$ 5. (i) $x=-4$ (ii) $p=-1$ (iii) $x=-11$

6. (i) $x=-2$ (ii) $m=-4$

అభ్యాసము 3.7

1. (i). $x=-\frac{b}{a}$ (ii) ధనాత్మకము (iii) $x=30$ (iv) 40° (v) b=9

2. (i) సత్యము (ii) అసత్యము (iii) అసత్యము 3. 3, 21 4. 27

5. $l=8$ సెం.మీ, $b=24$ సెం.మీ 6. (80,10) పుస్తకములు 7. మురళి వయస్సు 15 తేన్‌మోళి వయస్సు 20 8. 63 9. $\frac{13}{21}$

10. 37.4కి.మీ 11. (B) 20 12. (A) 62° 13. (C) 10000 14. (C) 4 15. (D) $(x-1)$

08_8th_Maths_Answer-TELEGU.indd 277 31-07-2020 13:14:41

అభ్యాసము 3.8

1. (i) ఆదిబిందువు (0,0) (ii) ఋణాత్మకము (iii) y-అక్షము (iv) సున్న (v) X-నిరూపకము
2. (i) సత్యము (ii) సత్యము (iii) అసత్యము

అభ్యాసము 3.9

1. (i) ఆదిబిందువు (ii) (4,-4) (iii) x-అక్షము 1సెం.మీ=3 ప్రమాణములు, y-అక్షము 1సెం.మీ=25 ప్రమాణములు
2. (i) సత్యము (ii) అసత్యము

అభ్యాసము 3.10

ఇతర అభ్యసన సమస్యలు

1. $x = 20$ 2. 60°, 40°, 80° 3. $y = 11$ ప్రమాణములు p=133 ప్రమాణములు 4. 116°,64°

సవాళాత్మక సమస్యలు

6. 7,8,9 7. 54 8. 12 పెన్సిల్లు

4. జీవనాధార గణితము

అభ్యాసము 4.1

1. (i) $x = 500$ (ii) $3\frac{1}{3}\%$ (iii) $x = 50$ (iv) 70% (v) 52.52%
2. (i) 50% (ii) 75% (iii) 100% (iv) 96% (v) $66\frac{2}{3}\%$
3. $x = 150$ 4. 30 5. $33\frac{1}{3}\%$ 6. 110 7. $x = 200$ 8. $x = 100$ 9. మార్పు లేదు
10. 87% 11. (C) 20% 12. (B) 49% 13. (A) 375 14. (D) 200 15. (D) 36

అభ్యాసము 4.2

1. (i) కొన్నధర (ii) ₹7000 (iii) ₹600 (iv) 8% (v)₹945
2. ₹902 3. ₹670 4. 50% 5. $11\frac{1}{9}\%$ 6. ₹1152
7. (i) $x =$ ₹207 (ii) $y =$ ₹12600 (iii) $z = 18\%$ 8. ₹2836
9. 8% రుసుము మేలైనది 10. ₹5400
11. (C) 25% 12. (B) 550 13. (B) 168 14. (D) ₹250 15. (A) 40%

అభ్యాసము 4.3

1. (i) ₹1272 (ii) ₹820 (iii) ₹20,000 (iv) $A = P\left(1+\frac{r}{400}\right)^{4n}$ (v) ₹32
2. (i) సత్యము (ii) అసత్యము (iii) సత్యము (iv) అసత్యము (v) సత్యము
3. ₹162 4. ₹936.80 5. ₹1875 6. $1\frac{1}{2}$ సంవత్సరాలు 7. ₹10,875 8. ₹0.50 9. 5% 10. ₹16000
11. (C) 6 12. (B) 1 సంవత్సరము 13. (B) ₹ 12500 14. (A) ₹2000 15. (D) ₹2500

అభ్యాసము 4.4

1. (i) 2 (ii) 5 (iii) 8 (iv) 25 (v) ₹1,20,000 2. 162 పురుషులు
3. 7000 సిమెంటు బస్తాలు 4. $7\frac{1}{2}$ రోజులు 5. 4 లారీలు ఎక్కువ 6. 4 గంటలు
7. A- 30 రోజులు, B -20 రోజులు, C-60 రోజులు 8. 180 నిముషాలు 9. 16 రోజులు 10. 6 రోజులు

అభ్యాసము 4.5

ఇతర అభ్యసన సమస్యలు

1. 400 2. 300 3. ₹38163 4. 20% 5. $2\frac{2}{9}$% నష్టము 6. 48 పురుషులు 7. 6 రోజులు 8. 8 రోజులు

సవాళాత్మక సమస్యలు

9. $\frac{8}{25}$ 10. ₹15000 11. 20 % 12. 30 % 13. 20 పురుషులు ఎక్కువ 14. 3 రోజులు 15. ₹6000

5. జ్యామితి

అభ్యాసము 5.1

1. (i) అనుపాతము (ii) ఆకృతి (iii) సమానము (iv) సర్వసమానము (v) సరూపము

6. అవును, RHS సర్వసమానము 8. $HE = 18, TE = 16$ 9. $\angle T = \angle N = 75°, \angle E = \angle B = 35°, \angle A = \angle U = 70°$

11. (D) జతఅగును 12. (A) $\angle Q = \angle Y$ 13. (D) 93 మీ 14. (A) 50° 15. (C) AC = CD

అభ్యాసము 5.2

1.	(i) Q	(ii) $n^2 - m^2$	(iii) లంబకోణ త్రిభుజము	(iv) గురుత్వకేంద్రము	(v) 2:1
2.	(i) సత్యము	(ii) సత్యము	(iii) సత్యము	(iv) సత్యము	(v) అసత్యము
3.	(i) అవును	(ii) కాదు	(iii) అవును	(iv) అవును	(v) అవును
4	(i) $x = 41$	(ii) $y = 16$	(iii) $z = 15$	5. 5సెం.మీ	6. 170 మీ
7.	10సెం.మీ	8. W	9. P	10. 9సెం.మీ	
11.	40°	12. (b) 20సెం.మీ	13. (c) 420సెం.మీ^{2}	14.(d) 20, 48, 52	

అభ్యాసము 5.3

ఇతర అభ్యసన సమస్యలు

3. 48 అడుగులు 4. 25 అడుగులు 5. కాదు, TV యొక్క వెడల్పుకన్న కెబినెట్ యొక్క వెడల్పు తక్కువ

సవాళాత్మక సమస్యలు

8. 40సెం.మీ 9. 28 అడుగులు 10. (i) 24 (ii) 6 (iii) 16 (iv) 24

అభ్యాసము 5.4

1.	(i) లంబకేంద్రము	(ii) గురుత్వకేంద్రము	(iii) అంతరకేంద్రము	(iv) పరివృత్తకేంద్రము (v) 2:1
2.	(i) సత్యము	(ii) సత్యము	(iii) అసత్యము	
3.	(a) (i) అంతరము	(ii) బాహ్యము	(iii) కర్ణము మీద	
	(b) (i) అంతరము	(ii) బాహ్యము	(iii) శీర్షముల వద్ద 90° ఉండును	
4.	(i) BE	(ii) AD	(iii) CF	

5. AB=5సెం.మీ 6. $\underline{|XYM} = \underline{|ZYM} = 50°$ 7. 7 సెం.మీ 8. 10 సెం.మీ

అభ్యాసము 5.5

1. W 2. P 3. 9సెం.మీ 4. 12 అడుగులు 5. 40°

6. (i) 22 (ii) 6 (iii) 16 (iv) 24

6. సాంఖ్యక శాస్త్రము

అభ్యాసము 6.1

1.	(i) ద్వితీయ	(ii) 35	(iii) 197	(iv) 8	(v) వృత్తాకారము	
2.	(i) అసత్యము	(ii) సత్యము	(iii) సత్యము	(iv) సత్యము		
5.	(i) 20%	(ii) 75	(iii) 1/4	(iv) 400	(v) 275	(vi) 500
8.	(i) ₹8000	(ii) ₹40000	(iii) ₹12000			

08_8th_Maths_Answer-TELEGU.indd 279 31-07-2020 13:14:52

అభ్యాసము 6.2

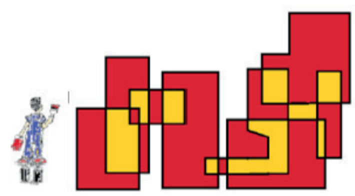
1. (i) అవును (ii) కాదు (iii) కాదు (iv) అవును (v) అవును
2. (i) అనుపాతము (ii) సోపానరేఖాచిత్రము (iii) వర్గీకరించిన
3. (i) 330 (ii) 150 (iii) కాదు
9. (d) పై మూడు 10. (c) పౌనఃపున్యము 11. (a) వ్యాప్తి 12. (b) వర్గీకరించిన
13. (b) విభాజిత శ్రేణి 14. (b) మినహాయింపు 15. (c) వృత్తరేఖా చిత్రము 16. (a) అవిచ్ఛిన్న
17. (a) అవిభాజిత శ్రేణి 18. (d) సోపానరేఖాచిత్రము

7. సమాచారప్రక్రియ

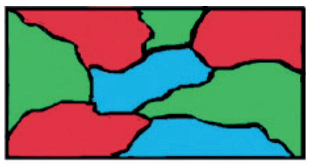
అభ్యాసము 7.1

1. 5 2. 9 3. 8 4. 6 5. 4995 6. 10000 7. 15 8. 20

9. (i)



10. (i)



చాలా సాధ్యమగు దారులు గలవు

(ii)

చాలా సాధ్యమగు దారులు గలవు

11. (A) 41 12. (B) 8 13. (C) 12 14. (C) 19

అభ్యాసము 7.2

1. (i) 13 (ii) 8 (iii) 5 (iv) 46
2. (i) 14 (ii) 4 (iii) 140 (iv) 6
3. (i) 4 (ii) 5 4. 14 5. 28
6. (C) 89 7) (B) F(8) = F(7)+F(6) 8. (A) 2 9. (C) 6th 10) (D) 987
11. (A) 2×5 12. (B) 2×3 13. (D) 1

అభ్యాసము 7.3

1. (i) TAMIL (ii) ENGLISH (iii) MATHEMATICS (iv) SCIENCE (v) SOCIAL SCIENCE
2 (i) c (ii) d (iii) a (iv) e (v) b

3.

సాధారణ లిపి	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
సాంకేతిక లిపి	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	00	01	02	03

4. To understand that mathematics can be experienced everywhere in nature and real life.
5. (i) 28 (ii) CHAIR (iii) GIFT VOUCHER
6. (c) [9 8 5 2 H 2 1 N T] 7. (i) (a) C R D T (ii) (d) A D G J
8. (ii) 5 6 3 4 2 1 9. (i) (c) R F U Q N P C (ii) (c) U D G L R

అభ్యాసము 7.4

1. (i) ₹ 175b లకు 5 చాక్లెట్‌లు (ii) ₹ 64.50 లకు 15 గ్రుడ్లులు

2. ₹ 634 3. ₹ 39.25 4. ₹ 809 5. (d) పైవన్నియు

08_8th_Maths_Answer-TELEGU.indd 280 31-07-2020 13:14:52

గణిత పదములు

Algebraic expression	బీజీయ సమాసము
Altitude	ఉన్నతి/లంబటెత్తు
Angle bisector	కోణ సమద్విఖండనరేఖ
Associative property	సహచర ధర్మము
Binomial	ద్విపది
Central angle	కేంద్రకోణము
Centroid	గురుత్వకేంద్రము
CGST	కేంద్ర వస్తు మరియు సేవపన్ను
Circular arc	వృత్తాకార చాపము
Circular sector	త్రిజ్యాంతరము
Circular segment	వృత్తఖండము
Circumcentre	పరివృత్తకేంద్రము
Class interval	తరగతి అంతరము
Closure property	సంవృత ధర్మము
Co-ordinate axes	నిరూపక అక్షములు
Code	సంకేతము
Coincide	ఏకీభవించుట
Commutative property	స్థిత్యంతర ధర్మము
Compound interest	చక్రవడ్డీ
Compound variation	మిశ్రమ చలత్వము
Congruent	సర్వసమానము
Conversion period	కాలమార్పిడి
Corresponding sides	సదృశభుజములు
Cost price	కొన్నధర
Cryptology	గుప్తశాస్త్రము
Cube root	ఘనమూలము
Cubic identities	ఘన సర్వసమీకరణములు
Concurrent lines	అనుషక్తరేఖలు/మిళతరేఖలు
Data	దత్తాంశము
Deposit	డిపాజిట్/మదుపు
Depreciation value	తరుగు విలువ
Direct proportion	అనులోమ అనుపాతము
Discount	రుసుము/తరుగు
Distributive property	విభాగధర్మము
Edges	అంచులు
Encryption	గుప్తీకరణ
Estimate	అంచనా
Extremes	అంత్యములు
Frequency distribution	పౌనః పున్య విభాజనము
Frequency polygon	పౌనః పున్య బహుభుజి
Front view	ముందువీక్షణ
Graph sheet	గ్రాఫ్ పేపరు
Grouped data	వర్గీకృత దత్తాంశము
Histogram	కమ్మీరేఖాచిత్రము
Hypotenuse	కర్ణము
Identity	సర్వసమానము
Incentre	అంతరకేంద్రము
Interest	వడ్డీ
Inverse	విలోమము
Inverse proportion	విలోమానుపాతము
Irregular polygon	అసమబహుభుజి
Laws of exponent	ఘాతాంకన్యాయములు

Linear equation	రేఖీయసమీకరణము/ఏకఘాత సమీకరణము
Logical	తార్కికము
Loss	నష్టము
Lower limit	దిగువఅవధి
Marked price	గుర్తింపుధర
Median	మధ్యగతము
Monomial	ఏకపది
Ordered pair	క్రమయుగ్మము
Origin	ఆదిబిందువు
Orthocentre	లంబకేంద్రము
Overhead expenses	అధికవ్యయము
Packing	ప్యాకింగ్/పేర్చుట
Parallel lines	సమాంతరరేఖలు
Parallelogram	సమాంతర చతుర్భుజము
Perfect cube numbers	శుద్ధఘనసంఖ్యలు
Perfect square	శుద్ధవర్గములు
Perpendicular bisector	లంబసమద్విఖండన రేఖ
Pie chart	వృత్తచిత్రము
Point of concurrency	అనుషక్తబిందువు / మిళితబిందువు
Polyhedron	బహుముఖభుజి
Polynomial	బహుపది
Primary data	ప్రాథమికస్థాయి దత్తాంశము
Prime factorisation	ప్రధానసంఖ్య కారణాంకపద్ధతి
Principal	అసలు
Profit	లాభము
Quadrant	పాదము/పావు భాగము
Range	వ్యాప్తి
Rational number	అకరణీయసంఖ్యలు
Real number line	వాస్తవసంఖ్యారేఖ
Regular polygon	క్రమబహుభుజి / సమబహుభుజి
Scientific notation	సాంకేతిక విధానము
Secondary data	ద్వితీయస్థాయి దత్తాంశము/ గౌణ దత్తాంశము
Selling price	అమ్మకపుధర
SGST	రాష్ట్ర వస్తు మరియు సేవాపన్ను
Side view	ప్రక్కవీక్షణ
Simple interest	బారువడ్డీ
Solid shapes	ఘనాకృతులు
Square root	వర్గమూలము
Supplementary angles	సంపూరకకోణములు
Tally marks	గణనచిహ్నములు
Terminating	అంతమొందు
Three dimensional shapes	త్రిపరిమాణ ఆకృతులు
Top view	అగ్రవీక్షణ
Transposition	స్థానమార్పిడి
Trinomial	త్రిపది
Upper limit	ఎగువఅవధి
Vertically opposite	శీర్షాభిముఖ
Vertices	శీర్షములు

08_8th_Maths_Answer-TELEGU.indd 281 31-07-2020 13:14:52

Upper Primary Mathematics - Class 8
Text Book Development Team
(Telugu Medium) List of Translators

Academic Advisor

Dr. P. Kumar
Joint Director (Syllabus), SCERT,
Chennai.

Co-ordinator

K. Chandrasekaran,
Lectuter, DIET, Chennai.

Dr. M. Ethirajulu,
Asst professsor, SCERT,
Chennai

Layout Design

B. Yogesh, C. Prasanth
R. Mathan Raj, Sridhar Velu
Gopinath Ragupathi

In-House QC

Rajesh Thangappan
Arun Kamaraj Palanisamy

Wrapper Design

Kathir Arumugam

Coordination

Ramesh Munisamy

EMIS Technology Team

- **R.M.Satheesh,**
  State Coordinator Technical,
  TN EMIS, Samagra Shiksha.
- **K.P. Sathya Narayana,**
  IT Consultant,
  TN EMIS, Samagra Shikaha.
- **R. Arun Maruthi Selvan,**
  Technical Project Consultant,
  TN EMIS, Samagra Shiksha

Translators

P. Natarajan, B.T Asst.,
Govt Boys'Hr.Sec.School, Podaturpet,
Thiruvallur Dist.

K. Ramesh Kumar, B.T Asst.,
Govt High School, Keechalam,
Thiruvallur Dist.

J. Krishnamoorthy, B.T Asst.,
Govt High School, Deveerapalli,
Hosur, Krishnagiri Dist.

M. Devarajulu, B.T Asst.,
Govt Hr.Sec.School, Athimanjeripet,
Thiruvallur Dist.

D. Sudhakar Naidu, B.T Asst.,
Govt High School, Peddabelagondapalli,
Hosur, Krishnagiri Dist.

E.Gurumurthy, B.T Asst.,
S.K.P.D Boys' Hr.Sec.School, Sowcarpet, Chennai-1

S. Sathyanarayana, B.T Asst.,
Kesari Hr.Sec School, Mylapore, Chennai-4

B.C. Subramanyam, S.G Asst.,
P.U.P School, Choodagondapally,
Hosur, Krishnagiri Dt.

O. Leelarani, B.T.Asst.,
K.T.C.T Girls'Hr.Sec School, Sowcarpet, Chennai-1

G. Chandumathi, B.T.Asst.,
Kesari Hr.Sec School, T.Nagar, Chennai-17.

C. Bhaskar, B.T.Asst.,
G.H.S School, P.M.Pakkam, Gummidipoondi,
Thiruvallur Dist.

M.D. Satish Marshal, B.T.Asst.,
G.H.S School, P.M.Pakkam, Gummidipoondi,
Thiruvallur Dist.

This book has been printed on 80 GSM
Elegant Maplitho paper.
Printed by offset at:

08_8th_Maths_Answer-TELEGU.indd 282 31-07-2020 13:14:52