GOVERNMENT OF TAMIL NADU

ഹയർ സെക്കൻഡറി രണ്ടാം വർഷം
HIGHER SECONDARY SECOND YEAR

ഗണിതം
MATHEMATICS

വാല്യം - II
VOLUME - II

MALAYALAM MEDIUM

Department of School Education

Untouchability is Inhuman and a Crime

12th Mathematics Vol 2 Front Page Malayalam.indd 1 2/25/2023 11:16:05 AM

Government of Tamil Nadu

First Edition - 2021

Revised Edition - 2022, 2023

Reprint - 2024

(Published under new syllabus)

Content Creation

State Council of Educational
Research and Training

© SCERT 2021

Printing & Publishing

Tamil Nadu Textbook and Educational
Services Corporation

www.textbooksonline.tn.nic.in

EE_Malayalam_FM.indd 2 03-01-2024 10:50:21

ഉള്ളടക്കം

ഗണിതം വാല്യം -II

അധ്യായം	ശീർഷകം	പേജ് നമ്പർ.	മാസം
7	**ശകലകകലനത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ**	**1**	**ഒക്ടോബർ**
7.1	ആമുഖം	1	
7.2	അവകലജത്തിന്റെ അർത്ഥം	2	
7.3	ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്തം	15	
7.4	ശ്രേണിയുടെ വിപുലീകരണം	22	
7.5	അനിശ്ചിത രൂപങ്ങൾ	25	
7.6	ആദ്യത്തെ അവകലജത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ	32	
7.7	രണ്ടാമത്തെ അവകലജത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ	40	
7.8	ഉത്തമീകരിക്കൽ പ്രശ്നങ്ങളുടെ പ്രയോഗങ്ങൾ	44	
7.9	പ്രതിസമത കൂടാതെ അനന്തതാസ്പർശകങ്ങൾ	47	
7.10	വക്രങ്ങളുടെ രേഖാചിത്രം	50	
8	**അവകലനങ്ങളും ഭാഗീക അവകലജങ്ങളും**	**58**	**ഒക്ടോബർ/നവംബർ**
8.1	ആമുഖം	58	
8.2	രേഖീയ ഏകദേശനവും അവകലനങ്ങളും	60	
8.3	വിവിധ ചരങ്ങളോടു കൂടിയ ഫലനങ്ങൾ	68	
8.4	രണ്ടു ചരങ്ങളോടു കൂടിയ ഫലനങ്ങളുടെ പരിധിയും തുടർച്ച എന്ന ആശയവും	70	
8.5	ഭാഗിക അവകലജങ്ങൾ	74	
8.6	വിവിധ ചരങ്ങളോടു കൂടിയ ഒരു ഫലനത്തിന്റെ രേഖീയ ഏകദേശവും അവകലനവും	80	
9	**സമാകലനത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ**	**90**	**നവംബർ/ഡിസംബർ**
9.1	മുഖവുര	90	
9.2	ഒരു തുകയുടെ പരിധി എന്ന നിലയിൽ നിർവചനീയ സമാകലനം	92	
9.3	സമാകല കലനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തങ്ങളും അവയുടെ പ്രയോഗങ്ങളും	98	
9.4	ബെർണോളി സൂത്രം	113	
9.5	അനുചിത സമാകലങ്ങൾ	115	
9.6	ലഘൂകരണ സൂത്രങ്ങൾ	117	
9.7	ഗാമാ സമാകലം	120	
9.8	സമാകലനത്തിലൂടെ ഒരു അതിർത്തിയിൽ ഉൾപ്പെട്ട പ്രദേശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം നിർണ്ണയിക്കൽ	122	
9.9	ഒരു അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് വിസ്തീർണ്ണത്തെ ചുഴറ്റുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക	135	

12th Mathematics Vol 2 Front Page Malayalam.indd 3 2/25/2023 11:16:06 AM

അധ്യായം	ശീർഷകം	പേജ് നമ്പർ.	മാസം
10	**സാധാരണ അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ**	**144**	**ഡിസംബർ**
10.1	ആമുഖം	144	
10.2	അവകലനസമവാക്യം, ക്രമവും, ഘാതവും	145	
10.3	അവകലന സമവാക്യങ്ങളുടെ വർഗ്ഗീകരണം	149	
10.4	അവകലന സമവാക്യങ്ങളുടെ രൂപീകരണം	151	
10.5	സാധാരണ അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ	155	
10.6	ക്രമം ഒന്നും ഘാതം ഒന്നുമുള്ള അവകലന സമവാക്യത്തിനുള്ള നിർദ്ധാരണം	158	
10.7	ക്രമം ഒന്നായ രേഖീയ അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ	166	
10.8	ക്രമം ഒന്ന് ആയിട്ടുള്ള സാധാരണ അവകലന സമവാക്യങ്ങളുടെ പ്രയോഗങ്ങൾ	170	
11	**സംഭാവ്യത വിതരണങ്ങൾ**	**179**	**ജനുവരി**
11.1	ആമുഖം	179	
11.2	യാദൃശ്ചികചരങ്ങൾ	179	
11.3	റാൻഡം വേരിയബിളിന്റെ തരങ്ങൾ	184	
11.4	തുടർച്ചയായ വിതരണങ്ങൾ	195	
11.5	ഗണിതശാസ്ത്ര പ്രതീക്ഷ	203	
11.6	സൈദ്ധാന്തിക വിതരണങ്ങൾ: ചില പ്രത്യേകതരം വ്യതിരിക്ത വിതരണങ്ങൾ	211	
12	**വ്യതിരിക്തമായ ഗണിതശാസ്ത്രം**	**224**	**ജനുവരി**
12.1	ആമുഖം	224	
12.2	പ്രദ്യയാങ്ക ക്രിയകൾ	225	
12.3	ഗണിത യുക്തി ചിന്ത	237	
	ഉത്തരങ്ങൾ	**254**	
	പദപരിചയം	**265**	
	പരിശോധന പുസ്തകങ്ങൾ	**267**	

DGORK

ഇ ബുക്ക്

MVH21

വിലയിരുത്തൽ

12th Mathematics Vol 2 Front Page Malayalam.indd 4 2/25/2023 11:16:06 AM

അധ്യായം

7

ശകലകകലനത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ

"പരമാവധി അല്ലെങ്കിൽ കുറഞ്ഞതായ എന്ന അർത്ഥം ലഭിക്കാത്ത ഒരു വസ്തുതയും ഈ ലോകത്ത് സംഭവിക്കുന്നില്ല."

- ലിയോഹാർഡ് യൂലർ

7.1 ആമുഖം

7.1.1 പ്രാരംഭ വികസനം

റുഡോൾഫ് ഓട്ടോസിഗിസ്റാണ്ട് ലിപ്ഷിറ്റ്സ്
1832-1903

ശകലകകലനത്തിന്റെ പ്രാഥമിക ലക്ഷ്യം എന്താണെന്നു വെച്ചാൽ അത് എങ്ങനെ മാറുന്നുവെന്ന് നിർണ്ണയിക്കാൻ വേണ്ടി എന്തിനെയെങ്കിലും വിഭജിച്ച് ചെറിയ ഭാഗങ്ങളാക്കി മാറ്റുന്നു. (അനന്തമായ ഭാഗങ്ങൾ) ഇക്കാരണം കൊണ്ട് ഇന്നത്തെ ശകലകകലനത്തിനെ കഴിഞ്ഞ കാലങ്ങളിൽ **അനന്തമായ കലനം** എന്ന് പേരിട്ടിരിക്കുന്നു. ഭൗതിക ശാസ്ത്രത്തിലെയും, ജ്യോതിശാസ്ത്രത്തിലെയും പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് പ്രയോഗിക്കുന്നത് ശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഉത്ഭവവുമായി സമകാലീനമായിരുന്നു. 18 ാം നൂറ്റാണ്ടിലൂടെ ഈ പ്രയോഗങ്ങളെ ലാപ്ലേസ് കൂടാതെ ലഗ്രാഞ്ചി ഇരട്ടിപ്പിച്ചു. പതിനെട്ടാം നൂറ്റാണ്ടിന്റെ അവസാനത്തോടെ ഊർജ്ജങ്ങളെ കുറിച്ചുള്ള പഠനത്തിന്റെ മുഴുവൻ വ്യാപ്തിയും വിശകലന മണ്ഡലത്തിലേക്ക് കൊണ്ട് വന്നിരുന്നു.

ശകലകകലനത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങളുടെ പുരോഗതിക്ക് കാരണക്കാർ ലെജ്യൂൺ ഡിറിക്ലെറ്റ്, റിമാൻ, വോൺന്യൂന്റെ ഹെയർ, ക്രോനെക്കർ, ലിപ്സീറ്റ്സ്, ക്രിസ്റ്റോഫെറൽ, കിർചോഫ് ബെൽട്രാമി. കൂടാതെ നൂറ്റാണ്ടിലെ പ്രമുഖ ഭൗതിക ശാസ്ത്രജ്ഞരുമാണ്.

- ശകലകകലകലനത്തിന്റെ പ്രയോഗം ജ്യാമിതിയിലും ചലനാത്മകഥയിലുമുണ്ട്.
- ചലനത്തിന്റെ അവകലജം ചെലവ്, ശക്തി, ഒരു പ്രക്രിയയിലെ വസ്തുക്കൾ, ലാഭം മുതലായവയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ഫലനത്തിന്റെ ഏകതാനതയെ നിർണ്ണയിക്കാനും അങ്ങേയറ്റത്തെ മൂല്യങ്ങൾ നിർണ്ണയിക്കാനും ഉപയോഗിക്കുന്നു.
- ശാസ്ത്രം, എൻജിനിയറിങ്ങ് എന്നിവകളിൽ ഒരു ഫലനത്തിന്റെ അവകലജം മോഡലിങ്ങ് പ്രശ്നങ്ങളിൽ ഒരു പ്രധാന സ്ഥാനം കണ്ടെത്തുന്നു.
- സാമൂഹ്യശാസ്ത്രം കൂടാതെ വൈദ്യശാസ്ത്രത്തിനും ശകലകകലനത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ ഉണ്ട്.

$f(x)$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ ആദ്യ രണ്ടു അവകലജം ഉപയോഗിച്ച് ഈ അധ്യായത്തിൽ ഫലനത്തിന്റെ സ്വഭാവം വക്രത്തിന്റെ രേഖാചിത്രം $y = f(x)$, കൂടാതെ ഉച്ചതമം അല്ലെങ്കിൽ, ന്യൂനതമം എന്നിവ നിർണ്ണയിക്കപ്പെടുന്നു. കൂടാതെ $f(x)$ ന്റെ ചില ഉയർന്ന അവകലജം ഉപയോഗിച്ച് (അവ നിലവിൽ ഉണ്ടെങ്കിൽ മാത്രം) $f(x)$ ബിന്ദുവിനെ കുറിച്ചുള്ള $f(x)$ ന്റെ ശ്രേണി വിപുലീകരണം വിശകലനം ചെയ്യുന്നു.

പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പൂർത്തിയാക്കുമ്പോൾ വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവ മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിയും.

- ജ്യാമിതീയ പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് അവകലജങ്ങൾ പ്രയോഗിക്കുന്നതിന്
- പ്രായോഗിക പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് അവകലജങ്ങൾ പ്രയോഗിക്കുന്നതിന്
- ഏകതാനത, അകവളവ്, പുറവളവ് പോലുള്ള വളവുകളുടെ സ്വഭാവം തിരിച്ചറിയുന്നതിന്
- ദൈനം ദിന ജീവിതത്തിൽ അവകലജങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് പരമാവധി മൂല്യം കാണുന്നതിന്
- ബഹുപദ വ്യഞ്ജകത്തിന്റെയും ഫലനത്തിന്റെയും വക്രങ്ങൾ വരയ്ക്കുന്നതിന്.

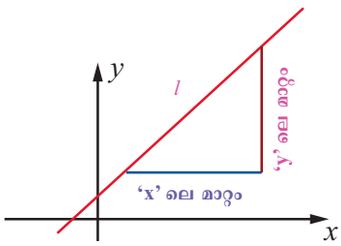
12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 1 2/25/2023 11:54:06 AM

7.2 അവകലജത്തിന്റെ അർത്ഥം

7.2.1 അവകലജം രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം കാണുന്ന വിധം

ഒരു നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് അല്ലെങ്കിൽ ചരിവ് : ചിത്രം 7.1 ൽ ഉള്ളതു പോലെ l എന്നത് ലംബം അല്ലാത്ത രേഖയെന്നിരിക്കട്ടെ. തന്നിട്ടുള്ള l നേർരേഖയിൽ ആരംഭബിന്ദുവായി ഒരു നിശ്ചിത നീളമുള്ള തിരശ്ചീന രേഖാഖണ്ഡത്തെയും അതിന്റെ അവസാന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും തന്നിട്ടുള്ള രേഖയെ സ്പർശിക്കുന്ന രീതിയിൽ ഒരു രേഖയും വരയ്ക്കുന്നു. ലംബ നീളം തിരശ്ചീന നീളം എന്നിവയുടെ അനുപാതം എല്ലായ്പ്പോഴും ഒരു സ്ഥിരാങ്കമാണ് എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കൂ. ഈ അനുപാതത്തെ l രേഖയുടെ ചായ്‌വ് എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ m എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഒരു രേഖയുടെ വർദ്ധിക്കുന്ന അല്ലെങ്കിൽ കുറയുന്ന സ്വഭാവത്തെ നിർണ്ണയിക്കാൻ ഒരു അളവ്കോലായി ചായ്‌വിനെ ഉപയോഗിക്കാം. ഒരു രേഖ വർദ്ധിക്കുകയോ കുറയുകയോ ക്രമേണ $m > 0$ അല്ലെങ്കിൽ $m < 0$ എന്നതിനെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. $m = 0$ ആണെങ്കിൽ y യുടെ മൂല്യത്തിൽ മാറ്റം ഇല്ല. ഒരു നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് m എന്ന് സൂചിപ്പിച്ചാൽ XY തലത്തിൽ $y = mx + c$ എന്നത് ഒരു നേർരേഖയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.



ചിത്രം 7.1

ഒരു വക്രത്തിന്റെ ചായ്‌വ് അല്ലെങ്കിൽ ചരിവ്: $y = f(x)$ എന്നത് തന്നിട്ടുള്ള വക്രം എന്നിരിക്കട്ടെ $(x, f(x))$ കൂടാതെ $(x+h, f(x+h))$ എന്ന രണ്ട് വ്യത്യസ്ത ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ്

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{. (ന്യൂട്ടന്റെ ഹരണ ഫലം).} \qquad \ldots(1)$$

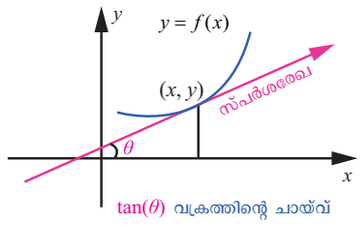
പരിധി $h \to 0$ ആയി കണക്കാക്കിയാൽ,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x) \text{, (ന്യൂട്ടന്റെ ഹരണ ഫലത്തിന്റെ പരിധി)} \qquad \ldots(2)$$

$(x, f(x))$ അല്ലെങ്കിൽ (x, y) എന്ന ബിന്ദുവിൽ വക്രത്തിന്റെ ചായ്‌വ് ആകുന്നു.

പരാമർശം

$y = f(x)$ എന്ന വക്രത്തിൽ θ എന്ന ബിന്ദുവിനെ ആശ്രയിച്ച് ഉണ്ടാകുന്ന വക്രത്തിന്റെ സ്പർശരേഖയുടെ സ്പർശകോൺ (x, y) എങ്കിൽ (x, y) എന്ന ബിന്ദുവിൽ വക്രത്തിന്റെ ചായ്‌വ് $f'(x) = \tan\theta$ ആകുന്നു. ഇവിടെ θ എന്നത് X - അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് ഘടികാരത്തിന് എതിർ ദിശയിൽ ആകുന്നു. $f'(x)$ എന്നതിനെ $\frac{dy}{dx}$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കാം കൂടാതെ $\frac{dy}{dx}$ എന്നത് *മാറ്റത്തിന്റെ തൽക്ഷണ നിരക്കിനെ* സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഒരു അന്തരാളത്തിൽ ശരാശരി മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് ന്യൂട്ടൺ ഹരണ ഫലം ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കുന്നു.



ചിത്രം 7.2

ഉദാഹരണം 7.1

$f(x) = x^2, x \in [0,2]$ എന്ന ഫലനത്തിന് $[0, 0.5], [0.5, 1], [1, 1.5], [1.5, 2]$ എന്ന ഉപഅന്തരാളങ്ങളിൽ മാറ്റങ്ങളുടെ നിരക്ക് കണക്കാക്കുക. കൂടാതെ $x = 0.5, 1, 1.5, 2$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലും മാറ്റങ്ങളുടെ തൽക്ഷണ നിരക്ക് കണക്കാക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ശരാശരി മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് $[a, b]$ അന്തരാളത്തിൽ $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ അതേസമയം x എന്ന ബിന്ദുവിൽ തന്നിരിക്കുന്ന ഫലനത്തിന്റെ മാറ്റത്തിന്റെ തൽക്ഷണ നിരക്ക് $f'(x)$ ആണ്. അവ ക്രമേണ $b + a$ കൂടാതെ $2x$.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 2 2/25/2023 11:54:12 AM

മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കുകൾ

a	b	x	ശരാശരി നിരക്ക് $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=b+a$	തൽക്ഷണ നിരക്ക് $f'(x)=2x$
0	0.5	0.5	**0.5**	**1**
0.5	1	1	**1.5**	**2**
1	1.5	1.5	**2.5**	**3**
1.5	2	2	**3.5**	**4**

പട്ടിക 7.1

7.2.2 അവകലജങ്ങളിലൂടെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് കാണുന്ന വിധം

ചായ്‌വ് നിർണ്ണയിക്കാൻ അവകലജം എങ്ങനെ ഉപയോഗിക്കുന്നുവെന്ന് നമ്മൾ കണ്ടു. ഒരു ചരം മറ്റൊന്നിനോട് അനുബന്ധിച്ച് മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് നിർണ്ണയിക്കാനും അവകലജങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ജനസംഖ്യ വളർച്ചാ നിരക്ക്, ഉൽപാതന നിരക്ക്, ജലപ്രവാഹ നിരക്ക്, വേഗത, ത്വരണം എന്നിവ കുറച്ച് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

ഒരു നേർരേഖയിൽ ചലിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ ചലനത്തെ വിവരിക്കുകയെന്നതാണ് മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിന്റെ ഒരു സാധാരണ ഉപയോഗം. അത്തരം പ്രശ്നങ്ങളിൽ ചലനരേഖയേ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നതിന് നിയുക്ത മൂല ബിന്ദുവുള്ള ഒരു തിരശ്ചീന അല്ലെങ്കിൽ ലംബരേഖ ഉപയോഗിക്കുന്നത് പതിവാണ്. അത്തരം വരികളിൽ മുൻദിശയിലുള്ള ചലനങ്ങൾ ധന ദിശയിലും പിന്നോക്ക ദിശയിലുള്ള ചലനങ്ങൾ ഋണ ദിശയിലുമായി കണക്കാക്കപ്പെടുന്നു.

ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനത്തെ (ഉത്ഭവവുമായി ആപേക്ഷിക) ഫലനം $s(t)$ ആയി നൽകുന്ന ഫലനം t നെ ഒരു സ്ഥാന ഫലനം എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ $s=f(t)$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. സമയം t യുടെ വേഗതയെയും, ത്വരണത്തെയും $v(t)=\frac{ds}{dt}$, $a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

പരാമർശം

താഴെപ്പറയുന്ന ആശയങ്ങൾ നിരീക്ഷിക്കാൻ എളുപ്പമാണ്:

(1) ദിശ കണക്കിലെടുക്കാതെ വേഗതയുടെ കേവല ഭൂരിപക്ഷമാണ് വേഗത,

അതിനാൽ വേഗത $=|v(t)|=\left|\frac{ds}{dt}\right|$.

(2)
- ഒരു വസ്തു നിശ്ചലാവസ്ഥയിലായിരിക്കുമ്പോൾ $v(t)=0$.
- ഒരു വസ്തു മുന്നോട്ട് നീങ്ങുമ്പോൾ $v(t)>0$.
- ഒരു വസ്തു പുറകോട്ട് നീങ്ങുമ്പോൾ $v(t)<0$.
- ഒരു വസ്തുവിന്റെ ദിശമാറുമ്പോൾ, $v(t)$ യുടെ ചിഹ്നം മാറുന്നു.

(3) t_1 കൂടാതെ t_2 സമയ ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിലുള്ള സമയബിന്ദു t_c $(t_1<t_c<t_2)$ നെ വസ്തു ദിശ മാറുന്ന സമയമാണെങ്കിൽ t_2 കൂടാതെ t_1 എന്നിവയ്ക്കിടയിലുള്ള സമയത്തിൽ വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ആകെ ദൂരം $|s(t_1)-s(t_c)|+|s(t_c)-s(t_2)|$ ആയി കണക്കാക്കുന്നു.

(4) ഭൂമിയുടെ ഉപരിതലത്തിൽ എല്ലാവസ്തുക്കളും ഒരേ സ്ഥിരമായ ത്വരണത്തിൽ വീഴുന്നു. വായു പ്രതിരോധം, ഇല്ലാതാകുകയോ നിസ്സാരമോ ആയിരിക്കുകയോ ചെയ്യുന്ന സമയത്ത് വീഴുന്ന വസ്തുവിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്നത് ഗുരുത്വാകർഷണ ബലം മാത്രമായിരിക്കും. ഇങ്ങനെ ഒരു വസ്തു വീഴുന്ന രീതിയെ ഒരു സ്വതന്ത്ര വീഴ്ച എന്നു പറയുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 3 2/25/2023 11:54:15 AM

$t = 0$ സമയത്ത് പ്രാരംഭ ഉയരം s_0 പ്രാരംഭ വേഗത v_0 ആയി എറിയുന്ന ഒരു വസ്തു

$$a = -g, \quad v = -gt + v_0, \quad s = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t + s_0$$ എന്ന സമവാക്യത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.

ഇവിടെ, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ അഥവാ 32 ft/s^2.

ദൈനംദിന ജീവിതത്തിലെ അളവ് **മറ്റ് ചിലതുമായി ബന്ധപ്പെട്ട മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കായ അളവുകളുടെ** കുറച്ച് ഉദാഹരണങ്ങൾ ചുവടെ നൽകിയിരിക്കുന്നു:

1. **തിരശ്ചീന നീളവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് ലംബ രീതിയിലുള്ള മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കാണ്** ചായ്വ്.
2. **സമയവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് സ്ഥാനചലനമാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കാണ്** വേഗത.
3. **സമയവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് വേഗതയിലെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കാണ്** ത്വരണം.
4. **തിരശ്ചീന ദൂരവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട്** മലയുടെ കുത്തനെയുള്ള **ഉയരത്തിലെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കാണ്** മലയുടെ ചായ്വ്.

താഴെയുള്ള രണ്ട് സാഹചര്യങ്ങൾ പരിഗണിക്കാം:

- ഒരു വ്യക്തി ചെന്നൈയിൽ നിന്നും ധർമ്മപുരിയിലേക്ക് തുടർച്ചയായി കാർ ഓടിക്കുന്നു. സഞ്ചരിച്ച ദൂരത്തെ (കി.മീ യായി അളക്കുന്നു.) സമയഫലനമായി $D(t)$ എന്ന് പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. (മണിക്കൂറുകളായി കണക്കാക്കുന്നു) എങ്കിൽ $D'(3) = 70$ എന്നത് എന്താണ്

  അർത്ഥമാക്കുന്നത്? **$t = 3$ ആകുമ്പോൾ ദൂരത്തിലെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് 70 kmph** എന്നതാണ്.
- ഒരു ജലസ്രോതസ്സ് t സമയവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് വറ്റുന്നു. t ദിവസങ്ങളിൽ വറ്റിച്ച വെള്ളത്തിന്റെ അളവ് $V(t)$ ആണെങ്കിൽ $y = V(t)$ എന്ന വക്രത്തിന്റെ സ്പർശരേഖയുടെ ചായ്വ് $t = 7$ ആകുമ്പോൾ -3 എന്നത് എന്താണ് അർത്ഥമാക്കുന്നത്?

  ഇത് അർത്ഥമാക്കുന്നത് **7 ാം ദിവസം പ്രതിദിനം മൂന്ന് മാത്രകൾ എന്ന മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിൽ വെള്ളം വറ്റുന്നുയെന്നതാണ്.**

ഇതുപോലെ നമ്മുടെ ദൈനം ദിന ജീവിതത്തിൽ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഇപ്പോൾ കൂടുതൽ ഉദാഹരണങ്ങളോടെ ഇത് വിശദീകരിക്കാം.

ഉദാഹരണം 7.2

രണ്ട് അഗ്രത്തും ആവരണം ചെയ്ത 10 മീ നീളമുള്ള കമ്പിയുടെ താപനില സെൽസിയസിൽ നീളം x ഒരു ഫലനമായി $T = x(10 - x)$ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു. കമ്പിയുടെ മധ്യബിന്ദുവിലുണ്ടാകുന്ന താപനിലയുടെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് പൂജ്യം എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$T = 10x - x^2$ അതിനാൽ കമ്പിയുടെ ഒരു അഗ്രത്തിൽ നിന്നും ഏത് ദൂരത്തിലും താപനിലയുടെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് $\frac{dT}{dx} = 10 - 2x$ ആയിരിക്കും. കമ്പിയുടെ മധ്യബിന്ദു $x = 5$ ആണ്. $x = 5$, എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $\frac{dT}{dx} = 0$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം 7.3

ഒരു വ്യക്തി ഇംഗ്ലീഷ് പരീക്ഷയ്ക്കായി 100 വാക്കുകൾ പഠിച്ചു. പഠനം കഴിഞ്ഞ് t ദിവസങ്ങൾക്ക് ശേഷം ആ വ്യക്തി ഓർമ്മിക്കുന്ന വാക്കുകളുടെ എണ്ണം $W(t) = 100 \times (1 - 0.1t)^2$, $0 \le t \le 10$ ആണ്. പഠിച്ച് 2 ദിവസത്തിന് ശേഷം ആ വ്യക്തി വാക്കുകൾ മറക്കുന്നതിന്റെ നിരക്ക് എത്രയാണ്?

നിർദ്ധാരണം

നമുക്ക് തന്നിട്ടുണ്ട്,

$$\frac{d}{dt}W(t) = -20 \times (1 - 0.1t).$$

അതിനാൽ $t = 2$, $\frac{d}{dt}W(t) = -16$.

അതായത് ആ വ്യക്തി 2 ദിവസങ്ങൾക്ക് ശേഷം വാക്കുകൾ മറക്കുന്നതിന്റെ നിരക്ക് 16 വാക്കുകളാണ്. ■

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 4 2/25/2023 11:54:20 AM

ഉദാഹരണം 7.4

ഒരു വസ്തു ചലിക്കുന്ന ദൂരം $s(t)=\frac{t^3}{3}-t^2+3$ എന്ന നിയമപ്രകാരം ആയിരിക്കുന്നു. അതിന്റെ വേഗതയും ത്വരണവും പൂജ്യത്തിൽ എത്താൻ എത്ര സമയമെടുക്കും?

നിർദ്ധാരണം

$'t'$ സമയത്ത് ചലിക്കുന്ന ദൂരം $s=\frac{t^3}{3}-t^2+3$.

$'t'$ സമയത്ത് വേഗത $v(t)=\frac{ds}{dt}=t^2-2t$.

$'t'$ സമയത്ത് ത്വരണം $a(t)=\frac{dV}{dt}=2t-2$.

അതിനാൽ $t^2-2t=0$, ആകുമ്പോൾ വേഗത പൂജ്യം ആയിരിക്കും അതായത് $t=0,2$ ആകുമ്പോൾ ത്വരണം പൂജ്യം ആയിരിക്കും. $2t-2=0$ അതായത് $t=1$.

ഉദാഹരണം 7.5

തറയിൽ നിന്നും മുകളിലേക്ക് വെടിയുതിർക്കുന്ന ഒരു വസ്തു s അടി ഉയരത്തെ t സെക്കന്റിൽ എത്തുന്നു. ഇവിടെ $s(t)=128t-16t^2$.

(1) വസ്തു എത്തിച്ചേർന്ന പരമാവധി ഉയരം കണക്കാക്കുക.

(2) വസ്തു തറയെ സ്പർശിക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ വേഗത എന്താണ്?

നിർദ്ധാരണം

(1) പരമാവധി ഉയരം എത്തുമ്പോൾ വസ്തുവിന്റെ വേഗത പൂജ്യം ആയിരിക്കും.

ഇപ്പോൾ, നമുക്ക് $v(t)$ സമയത്ത് വസ്തുവിന്റെ വേഗത കണക്കാക്കാം t.

$v(t)=\frac{ds}{dt}=128-32t$

$v(t)=0\Rightarrow 128-32t=0\Rightarrow t=4$.

4 സെക്കന്റുകൾക്ക് ശേഷം ആ വസ്തു പരമാവധി ഉയരത്തിലെത്തുന്നു.

$t=4$ ആകുമ്പോൾ ഉയരം $s(4)=128(4)-16(4)^2=256$ അടി.

(2) വസ്തു തറയെ സ്പർശിക്കുമ്പോൾ $s=0$ ആയിരിക്കും.

$s=0\Rightarrow 128t-16t^2=0$

$\Rightarrow t=0,\ 8$ സെക്കന്റുകൾ.

വസ്തു തറയെ $t=8$ സെക്കന്റുകൾക്ക് ശേഷം സ്പർശിക്കുന്നു. തറയെ സ്പർശിക്കുമ്പോൾ വേഗത $v(8)=-128$ അടി/സെക്കന്റ്.

ഉദാഹരണം 7.6

ഒരു വസ്തു തിരശ്ചീന രേഖയിലൂടെ ചലിക്കുന്നു. $t\geq 0$ സമയത്ത് അതിന്റെ സ്ഥാനം $s(t)=t^3-6t^2+9t+1$ ഇവിടെ, s എന്നത് മീറ്ററിലും t സെക്കന്റ് ആയും കണക്കാക്കുന്നു.

(1) ഏത് സമയത്താണ് വസ്തു നിശ്ചലാവസ്ഥയിലെത്തുക?

(2) വസ്തു ദിശ മാറുമ്പോൾ സമയം എത്ര?

(3) ആദ്യ 2 സെക്കന്റിനുള്ളിൽ വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ദൂരം എത്രയായിരിക്കും.

നിർദ്ധാരണം

$s(t)=t^3-6t^2+9t+1$. നെ അവകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ $v(t)=3t^2-12t+9$ കൂടാതെ $a(t)=6t-12$.

എന്ന് കിട്ടുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 5 2/25/2023 11:54:24 AM

(1) $v(t)=0$ ആകുമ്പോൾ വസ്തു നിശ്ചലാവസ്ഥയിൽ എത്തുന്നു. അതിനാൽ $v(t)=3(t-1)(t-3)=0$

എന്നതിലൂടെ $t=1$ കൂടാതെ $t=3$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

(2) $v(t)$ ആയത് ചിഹ്നം മാറുമ്പോൾ വസ്തുവിന്റെ ദിശ മാറുന്നു. ഇപ്പോൾ

$0 \le t < 1$ എങ്കിൽ $(t-1)$ കൂടാതെ $(t-3)<0$ അതിനാൽ, $v(t)>0$ ആകുന്നു.

$1 < t < 3$ എങ്കിൽ $(t-1)>0$ കൂടാതെ $(t-3)<0$ അതിനാൽ, $v(t)<0$ ആകുന്നു.

$t>3$ എങ്കിൽ $(t-1)$ കൂടാതെ $(t-3)>0$ അതിനാൽ, $v(t)>0$ ആകുന്നു.

അതുകൊണ്ട് $t=1$ കൂടാതെ $t=3$ ആകുമ്പോൾ വസ്തു ദിശമാറുന്നു.

(3) സമയം $t=0$ ൽ നിന്നും $t=2$ ആകുമ്പോൾ വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ദൂരം,
$|s(0)-s(1)|+|s(1)-s(2)|=|1-5|+|5-3|=6$ മീ ആകുന്നു.

7.2.3 അനുബന്ധ നിരക്കുകൾ

അനുബന്ധ നിരക്ക് കണക്കുകളിൽ രണ്ട് അളവുകളെങ്കിലും മാറുന്ന രീതിയിൽ ആയിരിക്കും മതിയായ വിവരങ്ങൾ നൽകി ഏതെങ്കിലും ഒന്നിന്റെ അനുബന്ധ നിരക്ക് കണ്ടെത്തണം, ഉദാഹരണത്തിന് രണ്ട് വ്യത്യാസ്ത ദിശകളിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന രണ്ട് വാഹനങ്ങൾ പിരിഞ്ഞ് പോകുന്ന വേഗതയെ അവയുടെ സ്ഥാനം, ദിശ അറിയാമെങ്കിൽ കണക്കാക്കാം.

ഉദാഹരണം 7.7

ഗോളാകൃതിയിലുള്ള ഒരു ബലൂണിലേക്ക് സെക്കന്റിന് 1000 സെ.മീ എന്ന നിരക്കിൽ വായു ഊതി വീർപ്പിക്കുകയാണെങ്കിൽ വ്യാസാർദ്ധം 7 സെ.മീ ആയിരിക്കുമ്പോൾ വ്യാസാർദ്ധത്തിലെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് കാണുക. കൂടാതെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

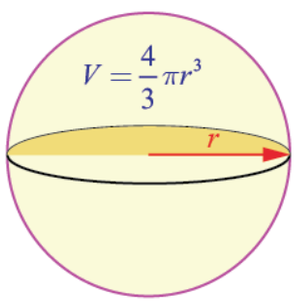
r വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ബലൂണിന്റെ വ്യാപ്തം $V=\frac{4}{3}\pi r^3$ ആകുന്നു.

$\frac{dr}{dt}$ നെ $r=7$ ആയിരിക്കുമ്പോൾ കാണുക $\frac{dV}{dt}=1000$

$$\frac{dV}{dt} = 3\times\frac{4}{3}\pi r^2\times\frac{dr}{dt}.$$

$r=7$ ആയാൽ $\frac{dV}{dt}=1000$, $1000=4\pi\times 49\times\frac{dr}{dt}$.

അതിനാൽ, $\frac{dr}{dt} = \frac{1000}{4\times 49\times\pi}=\frac{250}{49\pi}$.



ചിത്രം 7.3

ബലൂണിന്റെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം $S=4\pi r^2$. അതുകൊണ്ട്, $\frac{dS}{dt}=8\pi\times r\times\frac{dr}{dt}$.

$\frac{dr}{dt}=\frac{250}{49\pi}$, $r=7$, എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ

$$\frac{dS}{dt} = 8\pi\times 7\times\frac{250}{49\pi}=\frac{2000}{7}.$$

അതുകൊണ്ട് വ്യാസാർദ്ധത്തിലെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് $\frac{250}{49\pi}$ സെ.മീ/ സെക്കന്റ് കൂടാതെ വിസ്തീർണ്ണത്തിലെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് $\frac{2000}{7}$ സെ.മീ^{2}/സെക്കന്റ് ആകുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 6 2/25/2023 11:54:31 AM

ഉദാഹരണം 7.8

ഒരു ഉല്പന്നത്തിന്റെ വില അതിന്റെ ലഭ്യത അനുസരിച്ച് (വിതരണത്തിനുള്ള) $Px+3P-16x=234$, എന്ന സമീകരണം മുഖേന സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇവിടെ P എന്നത് ഒരു യൂണിറ്റിന് ഉല്പന്നത്തിന്റെ വിലയാണ് (രൂപയിൽ ₹) കൂടാതെ x എന്നത് യൂണിറ്റുകളുടെ എണ്ണത്തിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. 90 യൂണിറ്റുകൾ ലഭ്യമാവുകയും ആഴ്ചയിൽ 15 യൂണിറ്റ് എന്ന നിരക്കിൽ വിതരണം വർദ്ധിക്കുമ്പോൾ സമയത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി വിലയിലെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$P = \frac{234+16x}{x+3}$$

$$\text{അതിനാൽ, } \frac{dP}{dt} = -\frac{186}{(x+3)^2}\times\frac{dx}{dt}.$$

$x=90, \frac{dx}{dt}=15$, എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $\frac{dP}{dt}=-\frac{186}{93^2}\times 15=-\frac{10}{31}\approx -0.32$. അതായത് വില മാറുകയാണ്, വാസ്തവത്തിൽ ആഴ്ചയിൽ ₹ 0.32 രൂപ/ആഴ്ച എന്ന നിരക്കിൽ കുറയുന്നു.

ഉദാഹരണം 7.9

ഒരു കൺവേയർ ബെൽറ്റിൽ നിന്ന് മിനിറ്റിന് 30 ക്യൂബിക്ക് എന്ന നിരക്കിൽ ഉപ്പ് ഇടുമ്പോൾ ഒരു വൃത്താകാര ആധാരമുള്ള ഒരു വൃത്ത സ്തൂപികാ കൂമ്പാരം രൂപാന്തരപ്പെടുന്നു. അതിന്റെ ഉയരവും ആധാരത്തിന്റെ വ്യാസവും എല്ലായ്പ്പോഴും തുല്യമാണ്. ഉയരം 10 മീ ആകുമ്പോൾ കൂമ്പാരത്തിന്റെ ഉയരത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് കാണുക?

നിർദ്ധാരണം

ആധാര വ്യാസാർദ്ധം, ഉയരം എന്നിവ ക്രമേണ h, r എന്നിരിക്കട്ടെ, അതിനാൽ $h=2r$. വൃത്തസ്തൂപിക യുടെ വ്യാസം V എന്നിരിക്കട്ടെ.

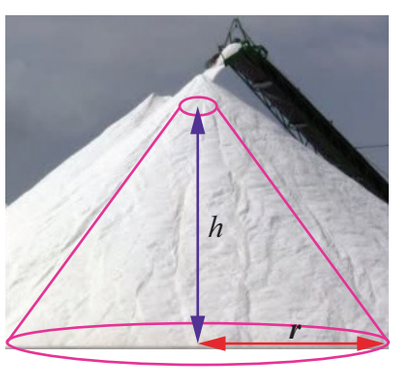
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{12}\pi h^3;\ \frac{dV}{dt}=30 \text{ മീ}^3/\text{ മിനിറ്റ്}.$$

$$\text{അതിനാൽ, } \frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2\frac{dh}{dt}$$

$$\text{അതുകൊണ്ട്, } \frac{dh}{dt} = 4\frac{dV}{dt}\cdot\frac{1}{\pi h^2}$$

$$\text{അതായത്, } \frac{dh}{dt} = 4\times 30\times\frac{1}{100\pi}$$

$$= \frac{6}{5\pi} \text{ മീ/മിനിറ്റ്}.$$



ചിത്രം 7.4

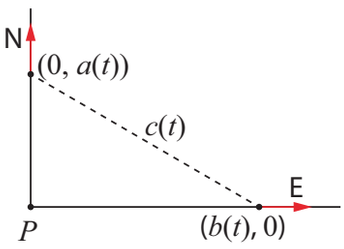
ഉദാഹരണം 7.10 (രണ്ട് ചരങ്ങൾ ബന്ധപ്പെട്ട നിരക്ക് പ്രശ്നങ്ങൾ)

വടക്കിൽ നിന്നും തെക്കോട്ട് പോകുന്ന റോഡും കിഴക്കിൽ നിന്നും പടിഞ്ഞാറോട്ട് പോകുന്ന റോഡും P എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഛേദിക്കുന്നു. വടക്കോട്ട് പോകുന്ന കാർ A ആദ്യത്തെ റോഡിലൂടെയും കിഴക്കോട്ട് പോകുന്ന കാർ B രണ്ടാമത്തെ റോഡിലൂടെയും പോകുന്നു. ഒരു നിശ്ചിത സമയത്ത് കാർ A ബിന്ദു P ക്ക് വടക്കായി 10 കി.മീ അകലെ മണിക്കൂറിൽ 80 കി.മീ വേഗതയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. അതേ സമയം കാർ B ബിന്ദു. P ക്ക് കിഴക്കായി 15 കി.മീ അകലെ മണിക്കൂറിൽ 100 കി.മീ വേഗതയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. രണ്ട് കാറുകൾ തമ്മിലുള്ള ദൂരം മാറുന്ന വേഗതയുടെ നിരക്ക് കാണുക?

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 7 2/25/2023 11:54:35 AM

നിർദ്ധാരണം

$a(t)$ സമയത്ത് A ക്ക് വടക്കായി കാർ P യുടെ ദൂരം t എന്നിരിക്കട്ടെ, $b(t)$ സമയത്ത് B ക്ക് കിഴക്കായി കാർ P യുടെ ദൂരം t എന്നിരിക്കട്ടെ, കൂടാതെ $c(t)$ സമയത്ത് A കാർ കൂടാതെ കാർ B തമ്മിലുള്ള ദൂരം t എന്നിരിക്കട്ടെ. പൈതഗോറസ് സിദ്ധാന്തത്തിൽ നിന്ന്, $c(t)^2 = a(t)^2 + b(t)^2$ ആകുന്നു.



ചിത്രം 7.5

അവകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ $2c(t)c'(t) = 2a(t)a'(t) + 2b(t)b'(t)$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

$$\text{അതിനാൽ, } c' = \frac{aa' + bb'}{c} = \frac{aa' + bb'}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

അറിയാവുന്ന മൂല്യങ്ങളെ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ,

$$\text{വേഗതയുടെ നിരക്ക് } c' = \frac{(10\times 80) + (15\times 100)}{\sqrt{10^2 + 15^2}} = \frac{460}{\sqrt{13}} \approx 127.6 \text{ km/hr} \quad \text{എന്ന് കിട്ടുന്നു.}$$

അഭ്യാസം 7.1

1. മൂല ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് t സെക്കൻഡുകൾക്ക് ശേഷം ഒരു വസ്തുവിന്റെ ദൂരം $s = 2t^2 + 3t$ മീറ്റർ എന്ന രീതിയിൽ നേർ രേഖയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു.
   (i) $t = 3$ നും $t = 6$ സെക്കൻഡുകൾക്കിടയിലുള്ള ശരാശരി വേഗത എത്ര?
   (ii) $t = 3$ നും $t = 6$ സെക്കൻഡുകൾക്കിടയിലുള്ള തൽക്ഷണ വേഗത എത്ര?
2. 400 അടി ഉയരമുള്ള മലഞ്ചരിവിൽ നിന്ന് ഒരു ക്യാമറാ അബദ്ധത്തിൽ താഴെ വീഴുന്നു. t സെക്കന്റിൽ ക്യാമറ വീഴുന്ന ദൂരം $s = 16t^2$ ആകുന്നു.
   (i) ക്യാമറ നിലത്തു പതിക്കുന്നതിന് എത്ര സമയം എടുക്കും?
   (ii) താഴോട്ടു വീഴുമ്പോൾ അവസാന 2 സെക്കൻഡുകളിൽ ക്യാമറയുടെ ശരാശരി വേഗത എത്രയാണ്?
   (iii) നിലത്ത് സ്പർശിക്കുമ്പോൾ ക്യാമറയുടെ തൽക്ഷണ വേഗത എത്ര?
3. $s(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t - 4$, ഇവിടെ $t \geq 0$ നിയമ പ്രകാരം ഒരു വസ്തു നേർരേഖയിൽ ചലിക്കുന്നു.
   (i) ഏത് സമയത്താണ് വസ്തുവിന്റെ ദിശ മാറുന്നത്?
   (ii) ആദ്യത്തെ 4 സെക്കന്റുകളിൽ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം എത്ര?
   (iii) വേഗത പൂജ്യമാകുന്ന സമയത്ത് ത്വരണം എത്ര?
4. വശത്തിന്റെ നീളം x ഉള്ള ഒരു സമചതുര ഘനികയുടെ വ്യാപ്തം $v = x^3$ എങ്കിൽ x യൂണിറ്റുകൾ ആകുമ്പോൾ $x = 5$ നെ അടിസ്ഥാനമാക്കി വ്യാപ്തത്തിലെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് കാണുക.
5. x നീളമുള്ള (മീറ്ററിൽ) ഒരു നേർത്ത വടിയുടെ ഭാരം $m(x)$ (കിലോ ഗ്രാമിൽ) എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട് എങ്കിൽ, $m(x) = \sqrt{3x}$ കൂടാതെ $x = 3$, $x = 27$ മീറ്റർ ആകുമ്പോൾ നീളത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി ഭാരത്തിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് കാണുക.
6. ഒരു കല്ല് കുളത്തിലേക്ക് എറിയുമ്പോൾ ഏക കേന്ദ്രവൃത്താകൃതിയിൽ ചെറുതിരകൾ ഉണ്ടാകുന്നു. ബാഹ്യ ചെറു തിരയുടെ വ്യാസാർദ്ധം r സെക്കന്റിന് 2 സെ.മീ എന്ന രീതിയിൽ വർദ്ധിക്കുന്നു. വ്യാസാർദ്ധം 5 സെ.മീ ആകുമ്പോൾ അസ്വസ്ഥമായ വെള്ളത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തിലെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് എത്ര?
7. കപ്പലിന് മുകളിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന കറങ്ങുന്ന വിളക്ക് 10 സെക്കന്റിന് ഒരു പ്രാവശ്യം ചുറ്റുന്നു. നേരായ കടൽ തീരത്തിൽ നിന്ന് 5 കി.മീ അകലെയാണ് കപ്പൽ നങ്കൂരമിട്ടിരിക്കുന്നു. ആ വിളക്കിൽ നിന്നുള്ള രശ്മി കടൽ തീരവുമായി 45° കോൺ ഉണ്ടാക്കുമ്പോൾ കടൽ തീരത്ത് രശ്മി എത്ര വേഗതയിൽ ചലിക്കും?
8. തലകുത്തനയായി വൃത്ത സ്തൂപികാകൃതിയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന ഒരു ജല സംഭരണിയുടെ ആഴം 12 മീ. കൂടാതെ മുകളിലുള്ള വൃത്തത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 5 മീ എന്നിരിക്കട്ടെ. മിനിറ്റിന് 10 ക്യൂബിക് മീറ്റർ എന്ന തോതിൽ വെള്ളം സംഭരണിയിലേക്ക് ഒഴുകുമ്പോൾ വെള്ളത്തിന്റെ ആഴം വർദ്ധിക്കുന്ന വേഗത എത്ര?
9. 17 മീറ്റർ നീളമുള്ള ഏണി ചുമരിൽ ചാരിവച്ചിരിക്കുന്നു. ഏണിയുടെ അടിഭാഗം ചുമരിൽ നിന്നും 8 മീറ്റർ അകലെയായിരിക്കുമ്പോൾ 5 m/s.
   (i) അതിന്റെ മുകൾ ഭാഗം താഴോട്ട് നീങ്ങുന്ന വേഗത നിരക്ക് എത്ര?
   (ii) ഏണി, ചുമർ, തറ എന്നിവ രൂപീകരിക്കുന്ന ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് എത്ര?

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 8 2/25/2023 11:54:40 AM

10, വടക്കൻ ദിശയിൽ നിന്ന് സമകോണിൽ സന്ധിക്കുന്ന സ്ഥലത്ത് പ്രവേശിക്കുന്ന പോലീസ് ജീപ്പ് കിഴക്ക് ദിക്കിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന മറ്റൊരു കാറിനെ പിൻ തുടരുന്നു. സമകോണിൽ സന്ധിക്കുന്ന സ്ഥലത്ത് നിന്നും ജീപ്പ് 0.6 കി.മീ വടക്കിലായിരിക്കുമ്പോൾ 0.8 കി.മീ കിഴക്കോട്ടാണ്. റഡാറിന്റെ സഹായത്തോടെ ജീപ്പും, കാറും തമ്മിലുള്ള ദൂരം മണിക്കൂറിൽ 20 കി.മീ വർദ്ധിക്കുന്നതായി നിർണ്ണയിക്കുന്നു. ജീപ്പ് 60 കി.മീ വേഗതയിൽ സഞ്ചരിക്കുകയാണെങ്കിൽ തൽക്ഷണം കാറിന്റെ വേഗത എത്ര?

7.2.4 സ്പർശരേഖ ലംബരേഖകളുടെ സമീകരണങ്ങൾ

ലെബ്നിസ് പറയുന്നത് അനുസരിച്ച് സ്പർശരേഖ എന്നത് വക്രത്തിൽ വളരെ അടുത്തുള്ള ഒരു ജോഡി ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്ന് ചെല്ലുന്ന നേർരേഖയാണ്.

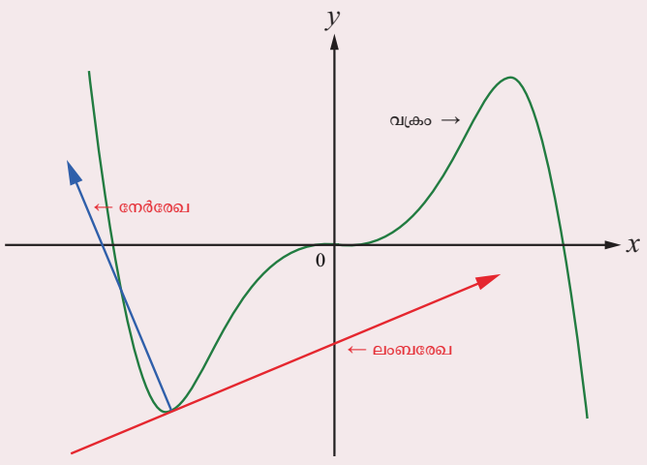
നിർവ്വചനം 7.1

ഒരു തലത്തിലുള്ള വക്രത്തിന് തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുവിൽ സ്പർശരേഖ എന്നത് വക്രത്തിലുള്ള ബിന്ദുവിനെ **സ്പർശിച്ച്** കടന്ന് ചെല്ലുന്ന നേർരേഖയാണ്.

നിർവ്വചനം 7.2

വക്രത്തിലുള്ള ബിന്ദുവിൽ വക്രത്തിന്റെ ലംബ രേഖ എന്നത് ആ ബിന്ദുവിലൂടെയുള്ള സ്പർശ രേഖയ്ക്ക് ആ സ്പർശബിന്ദുവിൽ ലംബമായുള്ള നേർരേഖയാണ്.

വക്രത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സ്പർശരേഖ യും ലംബരേഖയും എങ്ങനെയായിരിക്കുമെന്ന് ചിത്രം 7.7 ൽ വിശദീകരിച്ചിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 7.6

$y = f(x)$ എന്ന വക്രം പരിഗണിക്കുക.

വക്രത്തിലുള്ള (a,b) എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശരേഖയുടെ സമീകരണം എന്നത്,

$$y-b=(x-a)\times\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)} \quad \text{അഥവാ} \quad y-b=f'(a)\cdot(x-a) \quad \text{ആണ്.}$$

ആ വക്രത്തിന്റെ അതേ ബിന്ദുവിൽ ലംബരേഖയുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ലംബരേഖ എന്നത് ആ ബിന്ദുവിലുള്ള സ്പർശരേഖയ്ക്ക് ആ ബിന്ദുവിൽ ലംബമായിരിക്കും എന്ന് നിരീക്ഷിക്കാം. അതിനാൽ (a,b) എന്ന ബിന്ദുവിൽ ലംബ രേഖയുടെ ചായ്വ് സ്പർശരേഖയുടെ സ്പജർശരേഖയുടെ ചായ്വിന്റെ വ്യുൽക്രമം ആയിരിക്കും. അതായത് $-\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)_{(a,b)}$.

അതിനാൽ ലംബരേഖയുടെ സമീകരണം,

$$(y-b)=-\left(\frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)_{(a,b)}\times(x-a) \quad \text{അല്ലെങ്കിൽ} \quad (y-b)\times\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)}=-(x-a)\,.$$

പരാമർശം

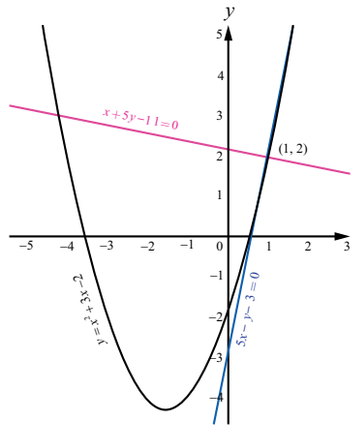
(i) വക്രത്തിന് ഒരു ബിന്ദുവിൽ വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശരേഖ തിരശ്ചീനമായിരുന്നുവെങ്കിൽ ആ ബിന്ദുവിൽ അവകലജം പൂജ്യം ആയിരിക്കും. അതിനാൽ (x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശരേഖയുടെ സമീകരണം $y = y_1$ കൂടാതെ ലംബരേഖയുടെ സമീകരണം $x = x_1$ ആണ്.

(ii) വക്രത്തിന് ഒരു ബിന്ദുവിൽ വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശരേഖ ലംബമായിരുന്നുവെങ്കിൽ ആ ബിന്ദുവിൽ അവകലജം കാണാം. മാത്രമല്ല അനന്തത(∞) ആണ്. അതിനാൽ (x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശ രേഖയുടെ സമീകരണം $x = x_1$ കൂടാതെ ലംബരേഖയുടെ സമീകരണം $y = y_1$.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 9 2/25/2023 11:54:43 AM

ഉദാഹരണം 7.11

$y = x^2 + 3x - 2$ എന്ന വക്രത്തിന് $(1,2)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശൾരേഖ, ലംബരേഖ എന്നിവയുടെ സമീകരണം കാണുക.



ചിത്രം 7.7

നിർദ്ധാരണം

നമുക്ക് അറിയാം, $\frac{dy}{dx} = 2x + 3$. അതിനാൽ $(1,2), \frac{dy}{dx} = 5$ യിൽ.

അതിനാൽ ആവശ്യപ്പെട്ട സ്പർശരേഖയുടെ സമീകരണം

$(y-2) = 5(x-1) \Rightarrow 5x - y - 3 = 0$.

$(1,2)$ ബിന്ദുവിൽ ലംബരേഖയുടെ ചായ്‌വ് $-\frac{1}{5}$

അതിനാൽ ആവശ്യപ്പെട്ട ലംബരേഖയുടെ സമീകരണം

$(y-2) = -\frac{1}{5}(x-1) \Rightarrow x + 5y - 11 = 0$.

ഉദാഹരണം 7.12

$y = x^3 - 3x^2 + x - 2$ എന്ന വക്രത്തിന്റെ ഏത് ബിന്ദുവിൽ വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശരേഖ $y = x$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമായിരിക്കും.

നിർദ്ധാരണം

$y = x$ എന്ന നേർരേഖയുടെ ചായ്‌വ് 1. തന്നിട്ടുള്ള വക്രത്തിന് വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശരേഖയുടെ ചായ്‌വും 1 ആയിരിക്കണം. അതിനാൽ,

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x + 1 = 1$$

ഇതിൽ നിന്നും $3x^2 - 6x = 0$.

അതിനാൽ, $x = 0$ കൂടാതെ $x = 2$.

അതുകൊണ്ട്, $(0, -2)$ കൂടാതെ $(2, -4)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശരേഖ $y = x$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 7.13

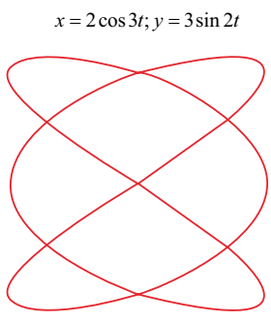
$x = 2\cos 3t$ കൂടാതെ $y = 3\sin 2t, t \in \mathbb{R}$ എന്ന ലിഡ്ജോസ് വക്രത്തിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിൽ സ്പർശരേഖ കൂടാതെ ലംബരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള വക്രം ഒരു വൃത്തമോ ദീർഘ വൃത്തമോ അല്ലെന്ന് നിരീക്ഷിക്കുക. നിങ്ങൾക്ക് വിശദീകരിക്കുന്നതിന് ചിത്രം 7.9. ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

$$\text{ഇപ്പോൾ, } \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

$$= -\frac{6\cos 2t}{6\sin 3t} = -\frac{\cos 2t}{\sin 3t}.$$



Lissajous curve
ചിത്രം 7.8

അതിനാൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിൽ സ്പർശരേഖയുടെ സമീകരണം

$$y - 3\sin 2t = -\frac{\cos 2t}{\sin 3t}(x - 2\cos 3t)$$

അതിനാൽ, $x\cos 2t + y\sin 3t = 3\sin 2t \sin 3t + 2\cos 2t \cos 3t$.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 10 2/25/2023 11:54:48 AM

ലംബരേഖയുടെ ചായ്‌വ് എന്നത് സ്പർശരേഖയുടെ ചായ്‌വിന്റെ വിപരീത വ്യുൽക്രമ മൂല്യം ആയതിനാൽ ലംബരേഖയുടെ ചായ്‌വ് $\frac{\sin 3t}{\cos 2t}$. അതു കൊണ്ട് ലംബരേഖയുടെ സമീകരണം.

$$y - 3\sin 2t = \frac{\sin 3t}{\cos 2t}(x - 2\cos 3t).$$

അതായത്, $x\sin 3t - y\cos 2t = 2\sin 3t\cos 3t - 3\sin 2t\cos 2t = \sin 6t - \frac{3}{2}\sin 4t$.

7.2.5 രണ്ട് വക്രങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോൺ

നിർവ്വചനം 7.3

രണ്ട് വക്രങ്ങൾ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശരേഖകൾക്ക് ഇടയിലുള്ള ന്യൂനകോണിനെയാണ്, ഛേദക ബിന്ദുവിൽ രണ്ട് വക്രങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോണായി നിർവ്വചിക്കുന്നു.

രണ്ട് വക്രങ്ങൾക്ക് ഇടയിലുള്ള കോണിനെ ഛേദിക്കുന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശരേഖകളുടെ ചായ്‌വുകളുടെ മൂല്യങ്ങളിലൂടെ കാണാം. കൂടാതെ $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ എന്നീ രണ്ട് നേർരേഖകൾക്ക് ഇടയിലുള്ള ന്യൂനകോൺ θ എങ്കിൽ,

$$\tan\theta = \left|\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2}\right| \qquad \ldots (3)$$

ഇവിടെ m_1 കൂടാതെ m_2 എന്നത് അവസാനിക്കുന്ന സംഖ്യകളാണ്.

പരാമർശം

(i) രണ്ട് വക്രങ്ങളും (x_1, y_1), എന്ന ബിന്ദുവിൽ സമാന്തരമാണെങ്കിൽ $m_1 = m_2$.

(ii) (x_1, y_1) എന്ന ബിന്ദുവിൽ രണ്ട് വക്രങ്ങളും ലംബമാണ്. m_1 കൂടാതെ m_2 എന്നിവ അറിയാം മാത്രമല്ല അവസാനിക്കുന്നവ ആണെങ്കിൽ $m_1m_2 = -1$.

ഉദാഹരണം 7.14

$y = x^2$ കൂടാതെ $y = (x-3)^2$ എന്നീ വക്രങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോൺ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

രണ്ട് വക്രങ്ങളുടെ ഛേദക ബിന്ദുവിനെ നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കാം. $x^2 = (x-3)^2$ നെ താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ, $x = \frac{3}{2}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. അതുകൊണ്ട് ഛേദക ബിന്ദു $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ ആണ്. θ എന്നത് രണ്ട് വക്രങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോൺ എന്നിരിക്കട്ടെ. വക്രങ്ങളുടെ ചായ്‌വുകൾ താഴെ തന്നിട്ടുള്ളതു പോലെ കണക്കാക്കുന്നു:

$y = x^2$, എന്ന വക്രത്തിന്

$$\frac{dy}{dx} = 2x.$$

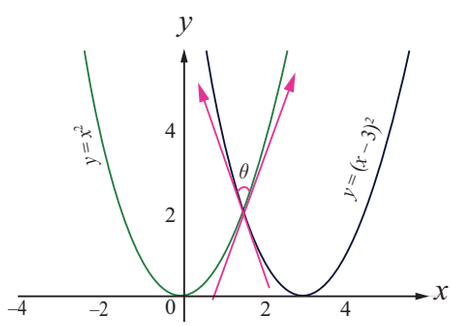
$$m_1 = \frac{dy}{dx} = 3.$$

$$\text{Let } m_1 = \frac{dy}{dx} \text{ at } \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right) = 3.$$

$y = (x-3)^2$, എന്ന വക്രത്തിന്

$$\frac{dy}{dx} = 2(x-3).$$

$\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ ൽ $m_2 = \frac{dy}{dx} = -3.$



ചിത്രം 7.9

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 11 2/25/2023 11:54:53 AM

(3) ൽ നിന്നും,

$$\tan\theta = \left|\frac{3-(-3)}{1-9}\right| = \frac{3}{4} \text{ എന്ന് കിട്ടുന്നു}$$

$$\text{അതിനാൽ, } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right).$$

ഉദാഹരണം 7.15

$y = x^2$ കൂടാതെ $x = y^2$ എന്നീ വക്രങ്ങൾക്കടയിലുള്ള കോണിനെ ഛേദക ബിന്ദുക്കൾ $(0,0),(1,1)$ എന്നിവകളിൽ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

വക്രങ്ങളുടെ ചായ്വുകൾ നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കാം.

$y = x^2$ ന്റെ ചായ്വ് m_1 എന്നിരിക്കട്ടെ,

$$m_1 = \frac{dy}{dx} = 2x$$

$x = y^2$, ന്റെ ചായ്വ് m_2 എന്നിരിക്കട്ടെ

$$m_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y}.$$

$(0,0)$ കൂടാതെ $(1,1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ വക്രങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോണുകൾ θ_1 കൂടാതെ θ_2 എന്നിരിക്കട്ടെ.

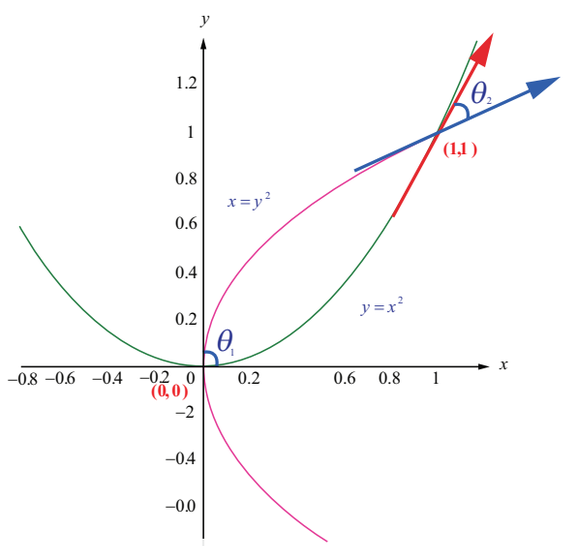
$(0,0)$ ബിന്ദുവിൽ, $0\times\infty$ ന്റെ ഛേദം $\tan\theta_1 = \left|\dfrac{2x-\frac{1}{2y}}{1+(2x)\left(\frac{1}{2y}\right)}\right|$ രൂപത്തിലാകുന്നു അതുകൊണ്ട്.

$$\tan\theta_1 = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{2x-\frac{1}{2y}}{1+(2x)\left(\frac{1}{2y}\right)}\right|$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\left|\frac{4xy-1}{2(y+x)}\right|$$

$$= \infty$$

$$\text{ഇതിൽ നിന്നും } \theta_1 = \tan^{-1}(\infty) = \frac{\pi}{2}.$$



ചിത്രം 7.10

$(1,1)$, $m_1 = 2$, $m_2 = \dfrac{1}{2}$

$$\tan\theta_2 = \left|\frac{2-\frac{1}{2}}{1+(2)\left(\frac{1}{2}\right)}\right|$$

$$= \frac{3}{4}$$

$$\text{ഇതിൽ നിന്നും } \theta_2 = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right) \text{ എന്നു കിട്ടുന്നു.}$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 12 2/25/2023 11:54:58 AM

ഉദാഹരണം 7.16

$y = \sin x$ എന്ന വക്രത്തിനും x-അക്ഷത്തിനും ഇടയിലുള്ള കോൺ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇപ്പോൾ $y = \sin x$ ൽ ചായ്‌വ് x-അക്ഷത്തിന്റെ ചായ്‌വ്. $y = 0$ ആകുന്നു. ഇവക്കിടയിലുള്ള കോൺ, $x = n\pi,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

ഇപ്പോൾ, $\frac{dy}{dx} = \cos x$ $x = n\pi$ ൽ ചായ്‌വ് $\cos(n\pi) = (-1)^n$. അതിനാൽ ഛേദക കോൺ

$$\tan^{-1}(-1)^n = \tan\theta = \left|\frac{(-1)^n - 0}{1 + (-1)^n (0)}\right| = 1 \qquad \forall\, n$$

.

ഉദാഹരണം 7.17

$ax^2 + by^2 = 1$ കൂടാതെ $cx^2 + dy^2 = 1$ എന്നീ വക്രങ്ങൾ സമകോണായി ഛേദിക്കുന്നുവെങ്കിൽ,

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

രണ്ട് വക്രങ്ങളും (x_0, y_0) എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഛേദിക്കുന്നുവെന്ന് ഇരിക്കട്ടെ $(a-c)x_0^2 + (b-d)y_0^2 = 0$.

ഛേദകബിന്ദു (x_0, y_0). ൽ വക്രങ്ങളുടെ ചായ്‌വ് കണ്ടുപിടിക്കാം :

$ax^2 + by^2 = 1$ വക്രത്തിന് $\frac{dy}{dx} = -\frac{ax}{by}$.

$cx^2 + dy^2 = 1$ വക്രത്തിന് $\frac{dy}{dx} = -\frac{cx}{dy}$.

രണ്ട് വക്രങ്ങളും സമകോണിൽ ഛേദിക്കുമ്പോൾ അവയുടെ ചായ്‌വുകളുടെ ഗുണനഫലം. ഛേദകബിന്ദു (x_0, y_0), ൽ -1. ൽ ആയിരിക്കും. അതായത് (x_0, y_0) കൂടാതെ

$$\left(-\frac{ax_0}{by_0}\right) \times \left(-\frac{cx_0}{dy_0}\right) = -1.$$

ഇതിൽ നിന്നും, $acx_0^2 + bdy_0^2 = 0$,

$$(a-c)x_0^2 + (b-d)y_0^2 = 0$$

ഇതിൽ നിന്നും, $\frac{a-c}{ac} = \frac{b-d}{bd}$.

അതായത്, $\frac{1}{c} - \frac{1}{a} = \frac{1}{d} - \frac{1}{b}$.

അതുകൊണ്ട്, $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$.

പരാമർശം

മുകളിലുള്ള ഉദാഹരണത്തിന്റെ വിപരീതവും ശരിയാണ്. അതായത് $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$ എന്ന നിബന്ധന യിലൂടെ വക്രങ്ങൾ പരസ്പരം സമകോണിൽ ഛേദിക്കുന്നുവെന്ന് തെളിയിക്കാം.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 13 2/25/2023 11:55:06 AM

ഉദാഹരണം 7.18

ദീർഘവൃത്തം $x^2+4y^2=8$ കൂടാതെ ഹൈപ്പർബോള $x^2-2y^2=4$ എന്നിവ സമകോണിൽ ഛേദിക്കുന്നുവെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

രണ്ട് വക്രങ്ങളുടെയും ഛേദകബിന്ദു (a,b) എന്നിരിക്കട്ടെ,

$$a^2+4b^2 = 8 \text{ കൂടാതെ } a^2-2b^2=4 \qquad \ldots (4)$$

അതിനാൽ നമ്മൾ രണ്ട് വക്രങ്ങളുടെയും ഗുണനഫലം (a,b) ൽ -1 എന്ന് തെളിയിക്കണം.

$x^2+4y^2=8$ നെ x നെ അടിസ്ഥാനമാക്കി അവകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ

$$2x+8y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{അതിനാൽ } \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y}$$

$$\text{അപ്പോൾ } (a,b) \text{ ൽ } \frac{dy}{dx} = m_1 = -\frac{a}{4b}.$$

$x^2-2y^2=4$ നെ x നെ അടിസ്ഥാനമാക്കി അവകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ

$$2x-4y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\text{അതിനാൽ, } \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y}$$

$$\text{അപ്പോൾ } (a,b) \text{ ൽ } \frac{dy}{dx} = m_2 = \frac{a}{2b}.$$

അതുകൊണ്ട്, $$m_1 \times m_2 = \left(-\frac{a}{4b}\right)\times\left(\frac{a}{2b}\right) = -\frac{a^2}{8b^2} \qquad \ldots (5)$$

(4) ൽ അനുപാതങ്ങളുടെ അംശബന്ധ പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ,

$$\frac{a^2}{-16-16} = \frac{b^2}{-8+4} = \frac{1}{-2-4} \text{ എന്ന് കിട്ടുന്നു.}$$

അതുകൊണ്ട് $\frac{a^2}{b^2}=\frac{32}{4}=8$. (5) ൽ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ, $m_1\times m_2=-1$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. അതിനാൽ വക്രങ്ങൾ സമകോണിൽ ഛേദിക്കുന്നു.

അഭ്യാസം 7.2

1. തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കളെ അടിസ്ഥാനമാക്കി തന്നിട്ടുള്ള വക്രങ്ങളുടെ ചായ്‌വ് കാണുക.

   (i) $y=x^4+2x^2-x$ ൽ $x=1$ (ii) $x=a\cos^3 t, y=b\sin^3 t$ ൽ $t=\frac{\pi}{2}$.

2. $y=x^2-5x+4$ എന്ന വക്രത്തിന്റെ ഏത് ബിന്ദുവിൽ വരക്കുന്ന സ്പർശരേഖ $3x+y=7$ എന്ന നേർ രേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമായിരിക്കും.

3. $y=x^3-6x^2+x+3$ എന്ന വക്രത്തിന്റെ ഏതൊക്കെ ബിന്ദുക്കളിൽ വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശരേഖ $x+y=1729$ എന്ന നേർരേഖക്ക് ലംബമായിരിക്കും.

4. $y^2-4xy=x^2+5$ എന്ന വക്രത്തിന് ഏതൊക്കെ ബിന്ദുക്കളിൽ സ്പർശരേഖ തിരശ്ചീനയായിരിക്കും.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 14 2/25/2023 11:55:14 AM

5. താഴെതന്നിട്ടുള്ള വക്രങ്ങൾക്ക് തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കളിൽ സ്പർശരേഖ, ലംബരേഖകളുടെ സമീകരണം കാണുക.

(i) $y = x^2 - x^4$ ൽ $(1,0)$ (ii) $y = x^4 + 2e^x$ ൽ $(0,2)$

(iii) $y = x\sin x$ ൽ $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (iv) $x = \cos t, y = 2\sin^2 t$ ൽ $t = \frac{\pi}{3}$

6. $y = 1 + x^3$ എന്ന വക്രത്തിന് $x + 12y = 12$ എന്ന നേർരേഖക്ക് ലംബമായുള്ള സ്പർശ രേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

7. $y = \frac{x+1}{x-1}$ എന്ന വക്രത്തിന് $x + 2y = 6$ എന്ന നേർരേഖയ്ക്ക് സമാന്തരമായുള്ള സ്പർശരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

8. $x = 7\cos t$ കൂടാതെ $y = 2\sin t, t \in \mathbb{R}$ എന്ന വക്രത്തിന് ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിൽ വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശരേഖ, ലംബരേഖയുടെ സമീകരണം കാണുക.

9. $xy = 2$ എന്ന സമകോണീയ അനുവൃത്തത്തിനും $x^2 + 4y = 0$ എന്ന അനുവൃത്തത്തിനും ഇടയിലുള്ള കോൺ കാണുക.

10. $x^2 - y^2 = r^2$ കൂടാതെ $xy = c^2$ എന്നീ വക്രങ്ങൾ സമകോണിലായി ഛേദിക്കുന്നു. എന്ന് തെളിയിക്കുക ഇവിടെ c, r എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങളാണ്.

7.3 ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്തം

ഒരു വക്രത്തിന്റെ ഞാണിന് സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുന്ന ഒരു സ്പർശരേഖയുടെ സ്പർശബിന്ദു ഞാണിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾക്കിടയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യും എന്ന് ശരാശരി മൂല്യസിദ്ധാന്തം സ്ഥാപിക്കുന്നു. നമുക്ക് ഈ പാഠ ഭാഗത്തിനെ ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ നിർവ്വചനത്തിലൂടെ തുടങ്ങാം :

സിന്താന്തം 7.1 (ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്തം)

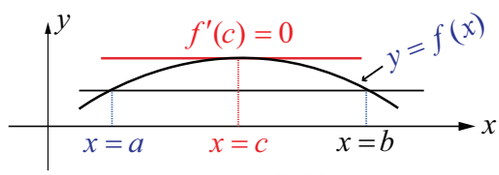
f എന്ന ഫലനം അടഞ്ഞ അന്തരാളം $[a,b]$ ൽ തുടർച്ചയായും c നും ഇടയിൽ $f(a)$ കൂടാതെ അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു x എന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഖ്യ ഉണ്ടായിരിക്കുകയും $[a,b]$, എന്ന അടഞ്ഞ അന്തരാളത്തിൽ കുറഞ്ഞത് x=0 എന്ന ഒരു സംഖ്യ എങ്കിലും $f(x) = c$ എന്ന രീതിയിൽ ഉണ്ടായിരിക്കുന്നത് കാണാം.

7.3.1 റോൾസ് സിദ്ധാന്തം

സിന്താന്തം 7.2 (റോൾസ് സിദ്ധാന്തം)

$f(x)$ എന്ന ഫലനം അടഞ്ഞ അന്തതളം $[a,b]$ ൽ തുടർച്ചയായും തുറന്ന അന്തരാളം (a,b) ൽ അവകലനം ചെയ്യാവുന്നതായിരിക്കാം $f(a) = f(b)$, മാത്രമല്ല $c \in (a,b)$ എങ്കിൽ കുറഞ്ഞത് ഒരു ബിന്ദു $c \in (a,b)$ എങ്കിലും $f'(c) = 0$ എന്ന രീതിയിൽ ഉണ്ടായിരിക്കും.

$x = a$ ൽ നിന്ന് $x = b$ വരെ ഒരുസ്പർശരേഖ വക്രത്തിന് മുകളിൽ ചിത്രം 7.12 ൽ ഉള്ളതുപൊലെ ചലിക്കുകയാണെങ്കിൽ $c \in (a,b)$ എന്ന സംഖ്യയെ വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശ രേഖ x-അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായിരിക്കുന്നതിനെ കാണാം.



ചിത്രം 7.11

ഉദാഹരണം 7.19

$f(x) = x^2(1-x)^2, x \in [0,1]$ എന്ന ഫലനത്തിനെ റോൾസ് സിദ്ധാന്തത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന 'c' യുടെ മൂല്യം കണക്കാക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$f(0) = 0 = f(1), f(x)$ എന്നത് അടഞ്ഞ അന്തരാളം $[0,1]$ ൽ തുടർച്ചയായും, തുറന്ന അന്തരാളം $(0,1)$ ൽ അവകലനം ചെയ്യാവുന്നതായും ഇരിക്കുന്നു. ഇപ്പോൾ,

$$f'(x) = 2x(1-x)(1-2x).$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 15 2/25/2023 11:55:22 AM

അതിനാൽ, $f'(c) = 0$ കിട്ടുന്നു $c = 0,1$, കൂടാതെ $\frac{1}{2}$

ഇതിൽ നിന്നും $\Rightarrow c = \frac{1}{2} \in (0,1)$.

ഉദാഹരണം 7.20

$\left(\frac{1}{2},2\right)$ എന്ന ഫലനത്തിന് $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \in \left[\frac{1}{2},2\right]$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ റോൾസ് സിദ്ധാന്തത്തെ തൃപ്തിപെടുത്തുന്ന മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$f(x)$ എന്നത് അടഞ്ഞ അന്തരാളം $\left[\frac{1}{2},2\right]$ ൽ തുടർച്ചയായും തുറന്ന അന്തരാളം $\left(\frac{1}{2},2\right)$ ൽ അവകലനം ചെയ്യാവുന്നതായും ഇരിക്കുന്നു. കൂടാതെ $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2} = f(2)$. ആയിരിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് റോൾസ് സിദ്ധാന്ത പ്രകാരം $c \in \left(\frac{1}{2},2\right)$ എന്ന സംഖ്യയെ, $f'(o)$ എന്ന രീതിയിൽ കാണാം $c = \pm 1$. ഇപ്പോൾ $f'(c) = 1 - \frac{1}{c^2} = 0 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow 1 \in \left(\frac{1}{2},2\right)$ അതുകൊണ്ട്, $c = 1$ എന്ന് തെരഞ്ഞെടുക്കാം.

ഉദാഹരണം 7.21

$f(x) = \log\left(\frac{x^2+6}{5x}\right)$ എന്ന ഫലനത്തിന് $[2,3]$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ റോൾസ് സിദ്ധാന്തത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തന്ന 'c' യുടെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$f(x) = \log\left(\frac{x^2+6}{5x}\right)$ എന്ന ഫലനം അടഞ്ഞ അന്തരാളം $f(x)$ ൽ തുടർച്ചയായും തുറന്ന അന്തരാളം $[2,3]$ ൽ അവകലനം ചെയ്യാവുന്നതുമായിരിക്കുന്നു. കൂടാതെ $f(2) = 0 = f(3)$ യായും ഇരിക്കുന്നു,

$$f'(x) = \frac{x^2-6}{x(x^2+6)}$$

ഇപ്പോൾ, $f'(c) = 0$

$$\frac{c^2-6}{c(c^2+6)} = 0$$

അതിനാൽ $c = \pm\sqrt{6}$

ഇപ്പോൾ $c = +\sqrt{6} \in (2,3)$.

$-\sqrt{6} \notin (2,3)$ അതിനാൽ $c = +\sqrt{6}$ ആയത് റോൾസ് സിദ്ധാന്തത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.

റോൾസ് സിദ്ധാന്തത്തെ ഒരു ബീജഗണിത സമീകരണത്തിന് തന്നിട്ടുള്ള അന്തരാളത്തിൽ നിരവധി നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും എന്നതിനെ സമീകരണത്തെ സാധാരണ രീതിയിൽ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാതെ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനും ഉപയോഗിക്കാം.

ഉദാഹരണം 7.22

$x^4 + 2x^3 - 2 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യാതെ $(0,1)$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ ഒരു നിർദ്ധാരണം മാത്രമേ ഉണ്ടായിരിക്കുകയുള്ളൂ എന്ന് കാണിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$f(x) = x^4 + 2x^3 - 2$ എന്നിരിക്കട്ടെ. $f(x)$ ആയത് $[0,1]$ ൽ തുടർച്ചയായും $(0,1)$ ൽ അവകലനം ചെയ്യാവുന്നതായും ഇരിക്കുന്നു. ഇപ്പോൾ, $f'(x) = 4x^3 + 6x^2$. $f'(x) = 0$ എങ്കിൽ,

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 16 2/25/2023 11:55:31 AM

$$2x^2(2x+3) = 0.$$

അതിനാൽ, $x = 0, -\frac{3}{2}$ പക്ഷേ $0, -\frac{3}{2} \notin (0,1)$.

അതുകൊണ്ട്, $f'(x) > 0, \ \forall x \in (0,1)$.

അതിനാൽ റോൾസ് സിദ്ധാന്ത പ്രകാരം $a, b \in (0,1)$ എന്ന സംഖ്യകളെ $f(a) = 0 = f(b)$ എന്ന രീതിയിൽ കാണുന്നത് സാധ്യമല്ല. പക്ഷേ, $f(0) = -2 < 0$ കൂടാതെ $f(1) = 1 > 0$ എന്നതിൽ നിന്നും $y = f(x)$ ആയത് മധ്യവർത്തി സിദ്ധാന്തപ്രകാരം 0 നും 1 നും ഇടയ്ക്ക് ഒരു പ്രാവശ്യം മാത്രം x- അക്ഷത്തെ ഛേദിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് $x^4 + 2x^3 - 2 = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന് $(0,1)$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ ഒരു നിർദ്ധാരണം മാത്രമേ ഉണ്ടായിരിക്കുകയുള്ളൂ.

റോൾസ് സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ഒരു പ്രയോഗയെന്ന നിലയിൽ നമുക്ക് താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ കാണാം,

ഉദാഹരണം 7.23

റോൾസ് സിദ്ധാന്ത പ്രകാരം $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ എന്ന ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത വാസ്തവിക പൂജ്യമാക്കുന്നവയ്ക്ക് ഇടയിൽ $na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$ എന്ന ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ ഒരു പൂജ്യമാക്കുന്നത് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നുവെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$ എന്നിരിക്കട്ടെ $\alpha < \beta$ എന്നിവ $P(x)$ ന്റെ പൂജ്യമാക്കുന്നവ എന്നിരിക്കട്ടെ. അതിനാൽ, $P(\alpha) = P(\beta) = 0$. $P(x)$ ആയത് $[\alpha, \beta]$ ൽ തുടർച്ചയായും തുറന്ന അന്തരാളം $\gamma \in (\alpha, \beta)$ $P'(\gamma) = 0$ എന്ന രീതിയിലായിരിക്കുന്നത് കാണാം. അതിനാൽ,

$P'(x) = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + \cdots + a_1$ അങ്ങനെ തെളിവ് പൂർത്തിയാകുന്നു.

ഉദാഹരണം 7.24

$x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 24x + 28$ എന്ന ബഹുപദവ്യംജകത്തിന്റെ പൂജ്യമാക്കുന്നവ 2 കൂടാതെ 7 എങ്കിൽ $2x^3 - 9x^2 - 11x + 12$ എന്ന ബഹുപദവ്യംജകത്തിന്റെ ഒരു പൂജ്യമാക്കുന്നത് $(2,7)$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നുവെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$P(x) = x^4 - 6x^3 - 11x^2 + 24x + 28$, എന്ന ബഹുപദവ്യംജകത്തിന് $\alpha = 2, \ \beta = 7$ എന്നെടുത്ത് ഉദാഹരണം 7.23 നെ പ്രയോഗിക്കുക

ഇപ്പോൾ $\frac{P'(x)}{2} = 2x^3 - 9x^2 - 11x + 12 = Q(x)$ (എന്നിരിക്കട്ടെ),

ഇതിൽ നിന്നും $Q(x)$ എന്ന ബഹുപദവ്യംജകത്തിന്റെ പൂജ്യമാക്കുന്നത് $(2,7)$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നുവെന്ന് തെളിയിക്കാം.

ശരിനോക്കൽ,

$$Q(2) = 16 - 36 - 22 + 12 = 28 - 58 = -30 < 0$$

$$Q(7) = 686 - 441 - 77 + 12 = 698 - 518 = 180 > 0$$

ഇതിൽ നിന്നും $Q(x)$ എന്ന ബഹുപദവ്യംജകത്തിന്റെ പൂജ്യമാക്കുന്നത് $(2,7)$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നുവെന്ന് കാണാം.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 17 2/25/2023 11:55:39 AM

പരാമർശം

റോൾസ് സിദ്ധാന്തം പ്രയോഗിക്കാൻ സാധിക്കാത്ത ഫലനങ്ങൾ ഉണ്ട്.

(1) $f(x)=|x|, x\in[-1,1]$ എന്ന ഫലനത്തിൽ $f(-1)=1=f(1)$ എന്നാണെങ്കിലും റോൾസിന്റെ സിദ്ധാന്തം പ്രയോഗിക്കാൻ സാധിക്കില്ല. എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ $f(x)$ ൽ $x=0$ അവകലനം ചെയ്യാൻ ആകുന്നില്ല.

(2)

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{when } x=0,\\ x & \text{when } 0<x\le 1\end{cases}$$

എന്ന ഫലനം $f(0)=f(1)=1$, എന്നാണെങ്കിലും റോൾന്റെ സിദ്ധാന്തം പ്രയോഗിക്കാൻ സാധിക്കില്ല. എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ $f(x)$ ആയത് $x=0$ ൽ തുടർച്ച അല്ല.

(3) $f(x)=\sin x,\ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ എന്ന ഫലനം അടഞ്ഞ അന്തരാളം $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ൽ തുടർച്ചയായും, തുറന്ന അന്തരാളം $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ ൽ അവകലനം ചെയ്യാവുന്നതാണെങ്കിലും $0=f(0)\neq f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ ആയത് കൊണ്ട് റോൾസ് സിദ്ധാന്തം പ്രയോഗിക്കാൻ സാധിക്കില്ല.

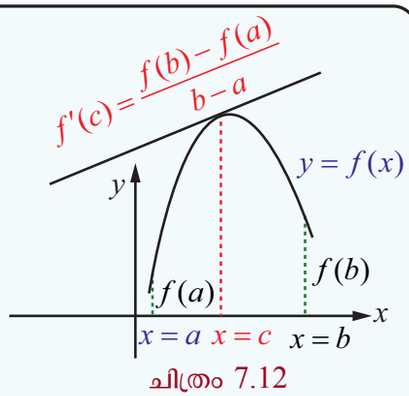
$f(x)$ ആയത് അടഞ്ഞ അന്തരാളം $[a,b]$ ൽ തുടർച്ചയായും തുറന്നഅന്തരാളം (a,b) ൽ അവകലനം ചെയ്യാവുന്നതായും $f(a)\neq f(b)$ എന്നാണെങ്കിലും റോൾസ് സിദ്ധാന്തത്തെ താഴെ ഉള്ളതുപോലെ സാമാന്യവൽക്കരിക്കാം.

7.3.2 ലഗ്രാഞ്ചിന്റെ ശരാശരി മൂല്യസിദ്ധാന്തം

സിദ്ധാന്തം 7.3

$f(x)$ ആയത് അടഞ്ഞ അന്തരാളം $[a,b]$ ൽ തുടർച്ചയായും തുറന്ന അന്തരാളം (a,b) ൽ അവകലനം ചെയ്യാവുന്നതായും ($f(a)$, $f(b)$ എന്നിവ തുല്യമായിരിക്കണം എന്നില്ല). ഇരിക്കുന്നു. എന്നിരിക്കട്ടെ അപ്പോൾ കുറഞ്ഞത് ഒരു ബിന്ദു $c\in(a,b)$ നെ

$f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ എന്ന രീതിയിൽ കാണാം,



ചിത്രം 7.12

പരാമർശം

$f(a)=f(b)$ എങ്കിൽ ലഗ്രാഞ്ചിന്റെ ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്തം റോൾസിന്റെ സിദ്ധാന്തത്തെ നൽകുന്നു. ലഗ്രാഞ്ചിന്റെ ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്തത്തെ **റോൾസിന്റെ കരങ്ങുന്ന സിദ്ധാന്തം** എന്നു പറയുന്നു.

പരാമർശം

ഈ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ആന്തരിക അർത്ഥം എന്നത് (a, b) അന്തരാളത്തിൽ $f(x)$ ന്റെ ശരാശരി മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിനെ $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ഉം കൂടാതെ c യിന്റെ തൽക്ഷണമാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിനെ $f'(c)$ ഉം സൂചിപ്പിക്കുന്നു

ലഗ്രാഞ്ചിന്റെ ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ജ്യാമിതീയ വിശദീകരണം എന്നത് ഒരു അന്തരാളത്തിൽ ശരാശരി മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് ആയത് ആ അന്തരാളത്തിന്റെ അകത്തുള്ള ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ തൽക്ഷണ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് തുല്യമായിരിക്കും. ഇതിനെ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഉദാഹരണത്തിലൂടെ മനസ്സിലാക്കാം :

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 18 2/25/2023 11:55:45 AM

ഒരു കാർ 200 മീറ്റർ ദൂരത്തിനെ 8 സെക്കന്റിൽ കടക്കുന്നുവെങ്കിൽ ഇതിന്റെ ശരാശരി വേഗത $\frac{200}{8}=25$ മീ/സെ ആണ് ഈ 8 സെക്കന്റ് കാല അളവിനുള്ളിൽ യാത്രക്കിടെ കാറിന്റെ സ്പീടോമീറ്റർ കൃത്രയമായി 25 മീ/സെ അതായത് 90 കി.മീ / മീ എന്ന് കാണിക്കും എന്നതിനെ ശരാശരി മൂല്യസിദ്ധാന്തം ഉറപ്പ് വരുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 7.4

$f(x)$ എന്ന ഫലനം അടഞ്ഞ അന്തരാളം $[a,b]$ ൽ തുടർച്ചയായും തുറന്ന അന്തരാളം (a,b) അവകലനം ചെയ്യാവുന്നതായും മാത്രമല്ല $f'(x)>0,\ \forall x\in(a,b)$, ആയുമാണെങ്കിൽ, $x_1,x_2\in[a,b]$ നെ, $x_1<x_2$ എങ്കിൽ, $f(x_1)<f(x_2)$ ആകുന്നു.

തെളിവ്

ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്തപ്രകാരം $c\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$ ആയത്,

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)$$ എന്ന രീതിയിൽ ആണെന്ന് കാണാം

$f'(c)>0$, കൂടാതെ $x_2-x_1>0$ എന്നത് കൊണ്ട് $f(x_2)-f(x_1)>0$ ആകുന്നു.

ഇതിൽ നിന്നും നമുക്ക് $x_1<x_2$ എങ്കിൽ, $f(x_1)<f(x_2)$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

പരാമർശം

$f'(x)<0,\ \forall x\in(a,b)$ കൂടാതെ, $x_1,x_2\in[a,b]$ ന്, $x_1<x_2$ എങ്കിൽ, $f(x_1)>f(x_2)$ ആകുന്നു.
ഇതിന്റെ തെളിവ് സമാനമാണ്.

ഉദാഹരണം 7.25

$f(x)=x-x^2$ $1\le x\le 2$ എന്ന ഫലനത്തിന് $(1,2)$ അന്തരാളത്തിൽ ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്തത്തിനെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന മൂല്യത്തെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

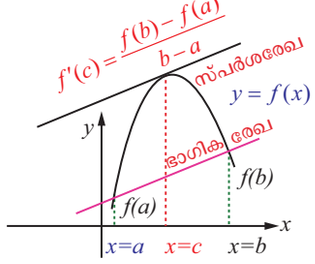
$f(x)$ എന്നത് തന്നിട്ടുള്ള അന്തരാളത്തിൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട് $1<x<2$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ അവകലനം ചെയ്യാവുന്നതുമായിരിക്കുന്നു. മാത്രമല്ല $f(1)=0$, $f(2)=-2$ അതുകൊണ്ട് ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്തപ്രകാരം $c\in(1,2)$ ആയത്

$$f'(c)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=1-2c$$ എന്നിരിക്കും

അതായത്, $1-2c=-2\Rightarrow c=\frac{3}{2}$.

ജ്യാമിതീയ വിശദീകരണം

y = f (x)എന്ന വക്രത്തിന്റെ ശരാശരി മൂല്യസിദ്ധാന്തം എന്നത് അഗ്ര ബിന്ദുക്കൾ $x=a$ കൂടാതെ $x=b$ എന്നിവയിലൂടെ കടന്ന് ചെല്ലുന്ന ഞാണിന് സമാന്തരമായി ഒരു സ്പർശരേഖയുടെ സ്പർശബിന്ദുവിനെ $c\in(a,b)$ എന്ന രീതിയിൽ കാണാൻ സാധിക്കും.



ചിത്രം 7.13

ലഗ്രാഞ്ചി ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ഫലങ്ങൾ.

ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്തത്തിലൂടെ നമുക്ക് മൂന്ന് പ്രധാനപ്പെട്ട ഫലങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു.

(1) തന്നിരിക്കുന്ന ഫലനത്തിന്റെ ഏകതാനത നിർണ്ണയിക്കുന്നതിന് സഹായിക്കുന്നു. (സിദ്ധാന്തം 7.4)

(2) $f'(x)=0$, (a,b) എങ്കിൽ f ആയത് (a,b), ൽ ഒരു സ്ഥിരാങ്കമാണ്.

(3) $f'(x)=g'(x)$ എങ്കിൽ $f(x)=g(x)+C$ ഇവിടെ C ഒരു സ്ഥിരാങ്കം.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 19 2/25/2023 11:55:53 AM

7.3.3 പ്രയോഗങ്ങൾ

ഉദാഹരണം 7.26

ഒരു ചരക്കുവണ്ടി ചുങ്കവാതിൽ റോഡിലൂടെ 80 കി.മീ വേഗതയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ആ ചരക്കുവണ്ടി 2 മണിക്കൂറിൽ 164 കി.മീ പൂർത്തിയാക്കുന്നു. ചുങ്കവാതിൽ റോഡിന്റെ അവസാനം വേഗത നിയന്ത്രണം ലംഘിച്ചതായി ലംഘന അറിയിപ്പ് നൽകുന്നു. ആ വണ്ടി വേഗത നിയന്ത്രണം ലംഘിച്ചതിനെ ശരാശരി മൂല്യസിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് ന്യായീകരിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

't' മണിക്കൂറിൽ ചരക്കുവണ്ടി സഞ്ചരിച്ച ദൂരം $f(t)$ എന്നിരിക്കട്ടെ $f(t)$ ആയത് $[0,2]$ ൽ തുടർച്ചയായും, $(0,2)$ ൽ അവകലനം ചെയ്യാവുന്നതുമാണ് $f(0)=0$ കൂടാതെ $f(2)=164$. ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് c സമയത്ത്,

$$f'(c)=\frac{164-0}{2-0}=82>80 \text{ എന്ന രീതിയിൽ കാണാം.}$$

അതിനാൽ 2 മണിക്കൂർ യാത്രക്കിടെ ചരക്ക് വണ്ടി 80 കി.മീ കൂടുതൽ വേഗതയിൽ സഞ്ചരിച്ചിരിക്കണം. അതിനാൽ ലംഘന അറിയിപ്പ് നൽകിയത് ന്യായികരിച്ചു.

ഉദാഹരണം 7.27

$f(x)$ എന്ന അവകലനം ചെയ്യാവുന്ന ഫലനം $f'(x)\le 29$ കൂടാതെ $f(2)=17$ എന്നിരിക്കുന്നു. എങ്കിൽ $f(7)$ ന്റെ പരമാവധി മൂല്യം കാണുക?

നിർദ്ധാരണം

ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്ത പ്രകാരം $'c'\in(2,7)$ നെ,

$$\frac{f(7)-f(2)}{7-2} = f'(c)\le 29.$$

$$f(7)\le 5\times 29+17 = 162 \text{ എന്ന് കാണാം}$$

അതുകൊണ്ട് $f(7)$ ന്റെ പരമാവധി മൂല്യം 162 ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 7.28

ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്ത പ്രകാരം

$$|\sin\alpha-\sin\beta|\le|\alpha-\beta|,\ \alpha,\ \beta\in\mathbb{R} \text{ എന്ന് തെളിയിക്കുക.}$$

നിർദ്ധാരണം

$f(x)=\sin x$ എന്നത് എല്ലാ തുറന്ന അന്തരാളങ്ങളിലും അവകലനം ചെയ്യാവുന്നതാണ്. അടഞ്ഞ അന്തരാളം $[\alpha,\beta]$ നെ കരുതുക. ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ $c\in(\alpha,\beta)$ നെ ,

$$\frac{\sin\beta-\sin\alpha}{\beta-\alpha} = f'(c)=\cos(c) \text{ എന്ന് കാണാം}$$

$$\text{അതിനാൽ, } \left|\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\alpha-\beta}\right| = |\cos(c)|\le 1$$

$$\text{അതുകൊണ്ട്, } |\sin\alpha-\sin\beta|\le|\alpha-\beta|.$$

പരാമർശം

$\beta=0$ ആണെങ്കിൽ $|\sin\alpha|\le|\alpha|$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 20 2/25/2023 11:55:59 AM

ഉദാഹരണം 7.29

ഒരു ഫ്രീസറിൽ നിന്ന് ഒരു താപമാതി എടുത്ത് ചുട്ട് തിളയ്ക്കുന്ന വെള്ളത്തിൽ വച്ചു താപമാതി $-10^\circ C$ ൽ നിന്ന് $100^\circ C$ ന് വർദ്ധിക്കുന്നതിന് 22 സെക്കന്റുകൾ ആകുന്നു. ഏതെങ്കിലും സമയം t ൽ താപനിലമാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് $5^\circ C$ സെക്കന്റ് ആയിരിക്കും എന്ന് കാണിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

t സമയത്ത് താപനില $f(t)$ എന്നിരിക്കട്ടെ ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്ത പ്രകാരം

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$= \frac{100-(-10)}{22}$$

$$= \frac{110}{22}$$

$= 5^\circ C$ സെക്കന്റിന്.

അതിനാൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു t സമയത്ത് താപനില മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് $5^\circ C$ സെക്കന്റിന് ആകുന്നു. ■

അഭ്യാസം 7.3

1. തന്നിട്ടുള്ള ഫലനങ്ങൾക്ക് തന്നിട്ടുള്ള അന്തരാളത്തിൽ റോൾസിന്റെ സിദ്ധാന്തത്തിനെ പ്രയോഗിക്കാൻ സാധിക്കില്ല എന്ന് വിശദീകരിക്കുക.

   (i) $f(x) = \left|\frac{1}{x}\right|,\ x \in [-1,1]$ (ii) $f(x) = \tan x, x \in [0,\pi]$

   (iii) $f(x) = x - 2\log x, x \in [2,7]$

2. റോൾസിന്റെ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഫലനങ്ങൾക്ക് x ന്റെ ഏത് മൂല്യങ്ങൾക്ക് വരയ്ക്കുന്ന സ്പർശരേഖ x - അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായിരിക്കും :

   (i) $f(x) = x^2 - x,\ x \in [0,1]$ (ii) $f(x) = \frac{x^2-2x}{x+2},\ x \in [-1,6]$

   (iii) $f(x) = \sqrt{x} - \frac{x}{3},\ x \in [0,9]$

3. തന്നിട്ടുള്ള ഫലനങ്ങൾക്ക് തന്നിട്ടുള്ള അന്തരാളത്തിൽ ലഗ്രാഞ്ചി ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്തം പ്രയോഗിക്കാൻ സാധിക്കില്ല എന്ന് വിശദീകരിക്കുക :

   (i) $f(x) = \frac{x+1}{x}, x \in [-1,2]$ (ii) $f(x) = |3x+1|,\ x \in [-1,3]$

4. ലഗ്രാഞ്ചി ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് തന്നിട്ടുള്ള ഫലനങ്ങൾക്ക് തന്നിട്ടുള്ള അന്തരാളത്തിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുന്ന ഞാണിന് സമാന്തരമായ സ്പർശ രേഖയുടെ സ്പർശ ബിന്ദുവിന്റെ x മൂല്യം കാണുക:

   (i) $f(x) = x^3 - 3x + 2,\ x \in [-2,2]$ (ii) $f(x) = (x-2)(x-7),\ x \in [3,11]$

5. (i) $f(x) = \frac{1}{x}$ നെ ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുള്ള അടഞ്ഞ അന്തരാളം $[a,b]$ ൽ ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്ത പ്രകാരം മൂല്യം $\sqrt{ab}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

   (ii) $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ എന്ന ഫലനത്തിന് ഒരു അടഞ്ഞ അന്തരാളം $[a,b]$ ൽ ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്തപ്രകാരം മൂല്യം $\frac{a+b}{2}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

6. ഒരു പന്തയ കാർ ഡ്രൈവർ 20 ാം കിലോ മീറ്ററിൽ നിന്നും ആരംഭിക്കുന്നു. അതിന്റെ വേഗത എല്ലായ്പ്പോഴും 150 കി.മീറ്ററിനെ കവിയുന്നില്ല. എങ്കിൽ അടുത്ത രണ്ട് മണിക്കൂറിനുള്ളിൽ അദ്ദേഹത്തിന് എത്താൻ കഴിയുന്ന പരമാവധി വേഗത കാണുക.

7. $f(x)$ എന്ന ഫലനം $f'(x) \le 1$ $1 \le x \le 4$ എങ്കിൽ $f(4) - f(1) \le 3$ എന്ന് കാണിക്കുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 21 2/25/2023 11:56:05 AM

8. $f(x)$ എന്ന അവകലനം ചെയ്യാവുന്ന ഫലനത്തിന് $f(0)=-1, f(2)=4$ കൂടാതെ $f'(x)\le 2$ x എന്ന രീതിയിൽ ഇരിക്കുക സാധ്യമാണോ ഉത്തരം ന്യായീകരിക്കുക.

9. $f(x)=x(x+3)e^{-\frac{\pi}{2}}, -3\le x\le 0$ എന്ന വക്രത്തിന് x-അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായി വരക്കുന്ന സ്പർശരേഖയുടെ സ്പർശ ബിന്ദുവിന്റെ x മൂല്യം (-3,0) എന്ന അന്തരാളത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യും എന്ന് തെളിയിക്കുക.

10. ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് $a>0, b>0, |e^{-a}-e^{-b}|<|a-b|$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

7.4 ശ്രേണിയുടെ വിപുലീകരണം

അനന്തമായി അവകലനം ചെയ്യാവുന്ന ഫലനങ്ങളുടെ ടെയ്ലർ കൂടാതെ മാക്ലറിന്റെ ശ്രേണി വിപുലീകരണങ്ങൾ.

സിദ്ധാന്തം 7.5

(a) ടെയ്ലറിന്റെ ശ്രേണി

$f(x)$ എന്ന ഫലനം $x=a$ ൽ അനന്തമായി അവകലനം ചെയ്യാവുന്നതായിരിക്കട്ടെ $(a-\varepsilon, a+\varepsilon), \varepsilon>0$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ $f(x)$ നെ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള രൂപത്തിൽ വിപുലീകരിക്കാം

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\cdots.$$

(b) മക്ലറിന്റെ ശ്രേണി

$a=0$, എങ്കിൽ മുകളിലുള്ള വിപുലീകരണത്തിന്റെ രൂപം

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots.$$

തെളിവ്

$f(x)$ ന്റെ വിപുലീകരണം, $(x-a)$, ന്റെ ഘാതങ്ങളായി താഴെ തന്നിട്ടുള്ളത് പോലെ വിപുലീകരിക്കാം

$$f(x) = A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n(x-a)^n \qquad \ldots (7)$$

$x=a$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $A_0=f(a)$ (7) നെ അവകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ

$$f'(x) = 1!A_1+\sum_{n=2}^{\infty}nA_n(x-a)^{n-1} \qquad \ldots (8)$$

$x=a$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $A_1=f'(a)$ (8) നെ അവകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ

$$f''(x) = 2!A_2+\sum_{n=3}^{\infty}n(n-1)A_n(x-a)^{n-2} \qquad \ldots (9)$$

$x=a$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $A_2=\frac{f''(a)}{2!}$ (9) നെ അവകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ

$$f'''(x) = 3!A_3+\sum_{n=4}^{\infty}n(n-1)(n-2)A_n(x-a)^{n-3} \text{ ആകുന്നു} \qquad \ldots (10)$$

(10) നെ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ $(k-3)$ പ്രാവശ്യം അവകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ

$$f^{(k)}(x) = k!A_k+\sum_{n=k+1}^{\infty}n(n-1)\ldots(n-k+1)A_n(x-a)^{n-k} \qquad \ldots(11)$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 22 2/25/2023 11:56:14 AM

$x = a$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $A_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ അങ്ങനെ മുകളിലുള്ള സിദ്ധാന്തം തെളിയിച്ചു.

ഒരു ഫലനത്തെ $x = a$, ന്റെ അരികിൽ വിപുലീകരണം ചെയ്യുന്നതിന്, അതായത് $(x - a)$ ന്റെ ഘാതങ്ങളിൽ വിപുലീകരണം ചെയ്യുന്നതിന് തന്നിട്ടുള്ള ഫലനത്തിന് ആവശ്യമായ പ്രാവശ്യം അവകലനം ചെയ്ത് $x = a$ ൽ മൂല്യത്തിനെ കാണണം. ഈ മൂല്യങ്ങൾ $(x - a)$ ന്റെ ഘാതങ്ങളുടെ ഗുണോത്തരങ്ങളെ നൽകും.

ഉദാഹരണം 7.30

$\log(1 + x)$ ന്റെ മെക്ലാറിന്റെ വിപുലീകരണത്തിനെ $-1 < x \leq 1$ ൽ നാല് പൂജ്യമല്ലാത്ത പദങ്ങൾ വരെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$f(x) = \log(1 + x)$ എന്നിരിക്കട്ടെ, $f(x)$ ന്റെ മക്ലാറിന്റെ വിശദീകരണം $f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n$, ഇവിടെ, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ $f(x)$ ന്റെ അവകലജങ്ങൾ കൂടാതെ $x = 0$ ൽ ഇതിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ പട്ടികയിലായിരിക്കുന്നു:

ഫലനം കൂടാതെ അതിന്റെ അവകലജങ്ങൾ	$\log(1 + x)$ കൂടാതെ അതിന്റെ അവകലജങ്ങൾ	$x = 0$ ൽ മൂല്യം
$f(x)$	$\log(1 + x)$	0
$f'(x)$	$\frac{1}{1 + x}$	1
$f''(x)$	$-\frac{1}{(1 + x)^2}$	-1
$f'''(x)$	$\frac{2}{(1 + x)^3}$	2
$f^{(iv)}(x)$	$-\frac{6}{(1 + x)^4}$	-6

പട്ടിക 7.2

ഈ മൂല്യങ്ങളെ പ്രതിസ്ഥാപിച്ച് ലഘൂകരിക്കുക. നമുക്ക് ആവശ്യമായ വിപുലീകരണം താഴെ കാണുന്ന പോലെ ലഭിക്കുന്നു,

$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \quad ; -1 < x \leq 1.$$

ഉദാഹരണം 7.31

$\tan x$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിനെ $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ ൽ x ന്റെ ഘാതങ്ങളായി 5 മത്തെ ഘാതം വരെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$f(x) = \tan x$ എന്നിരിക്കട്ടെ, $f(x)$ ന്റെ മെക്ലാറിന്റെ വിപുലീകരണം

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n x^n \text{, ഇവിടെ, } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} .$$

$f(x)$ ന്റെ അവകലജങ്ങൾ കൂടാതെ $x = 0$ ൽ ഇതിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ പട്ടികയിലാക്കിയിരിക്കുന്നു :

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 23 2/25/2023 11:56:21 AM

ഇപ്പോൾ,

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2(x)$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(\sec^2(x)) = 2\sec x \cdot \sec x \cdot \tan x = 2\sec^2 x \cdot \tan x$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}(2\sec^2(x) \cdot \tan x) = 2\sec^2(x) \cdot \sec^2 x + \tan x \cdot 4\sec x \cdot \sec x \cdot \tan x$$

$$= 2\sec^4 x + 4\sec^2 x \cdot \tan^2 x$$

$$f^{(iv)}(x) = 8\sec^3 x \cdot \sec x \cdot \tan x + 4\sec^2 x \cdot 2\tan x \cdot \sec^2 x + 8\sec x \cdot \sec x \cdot \tan x \cdot \tan^2 x$$

$$= 16\sec^4 x \tan x + 8\sec^2 x \cdot \tan^3 x$$

$$f^{(v)}(x) = 16\sec^4 x \cdot \sec^2 x + 64\sec^3 x \cdot \sec x \cdot \tan x \cdot \tan x + 8\sec^2 x \cdot 3\tan^2 x \cdot \sec^2 x$$
$$+16\sec x \cdot \sec x \cdot \tan x \cdot \tan^3 x$$
$$= 16\sec^6 x + 88\sec^4 x \cdot \tan^2 x + 16\sec^2 x \cdot \tan^4 x.$$

ഫലനം കൂടാതെ അതിന്റെ അവകലജങ്ങൾ	$\tan x$ കൂടാതെ അതിന്റെ അവകലജങ്ങൾ	$x = 0$ ൽ മൂല്യം
$f(x)$	$\tan x$	0
$f'(x)$	$\sec^2 x$	1
$f''(x)$	$2\sec^2 x \tan x$	0
$f'''(x)$	$2\sec^4 x + 4\sec^2 x \cdot \tan^2 x$	2
$f^{(iv)}(x)$	$16\sec^4 x \cdot \tan x + 8\sec^2 x \cdot \tan^3 x$	0
$f^{(v)}(x)$	$16\sec^6 x + 88\sec^4 x \cdot \tan^2 x + 16\sec^2 x \cdot \tan^4 x$	16

പട്ടിക 7.3

ഈ മൂല്യങ്ങളെ പ്രതിസ്ഥാപിച്ച് ലഘൂകരിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് ആവശ്യമായ വിപുലീകരണം താഴെ കാണുന്ന പോലെ ലഭിക്കുന്നു.

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots \quad ; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

ഉദാഹരണം 7.3 2

$\frac{1}{x}$ ന്റെ ടെയ്‌ലർ ശ്രേണിയുടെ വിപുലീകരണത്തെ $x = 2$ ൽ ആദ്യത്തെ മൂന്ന് പൂജ്യമല്ലാത്ത പദങ്ങൾ വരെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$f(x) = \frac{1}{x}$ എന്നിരിക്കട്ടെ, $f(x)$ ന്റെ വിപുലീകരണം

$$f(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n (x-2)^n \text{ , ഇവിടെ } a_n = \frac{f^{(n)}(2)}{n!}.$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 24 2/25/2023 11:56:29 AM

$f(x)$ ന്റെ അവകലജങ്ങൾ കൂടാതെ $x=2$ ൽ ഇതിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ പട്ടികയിലാക്കിയിരിക്കുന്നു.

ഫലനം കൂടാതെ അവകലജങ്ങൾ	$\frac{1}{x}$ കൂടാതെ അതിന്റെ അവകലജങ്ങൾ	$x=2$ ൽ മൂല്യം
$f(x)$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$	$-\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{4}$
$f''(x)$	$\frac{2}{x^3}$	$\frac{1}{4}$
$f'''(x)$	$-\frac{6}{x^4}$	$-\frac{3}{8}$

പട്ടിക 7.4

ഈ മൂല്യങ്ങളെ പ്രതിസ്ഥാപിച്ച് ലഘൂകരിക്കുക നമുക്ക് ആവശ്യമായ വിപുലീകരണം താഴെ കാണുന്ന പോലെ ലഭിക്കുന്നു

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\frac{(x-2)}{1!} + \frac{1}{4}\frac{(x-2)^2}{2!} - \frac{3}{8}\frac{(x-2)^3}{3!} + \cdots$$

which is, $$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{(x-2)}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + \cdots$$

അഭ്യാസം 7.4

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഫലനങ്ങൾക്ക് മക്ലാറിന്റെ വിപുലീകരണം കാണുക:

   (i) e^x (ii) $\sin x$ (iii) $\cos x$

   (iv) $\log(1-x)\,; -1 \le x < 1$ (v) $\tan^{-1}(x)\,; -1 \le x \le 1$ (vi) $\cos^2 x$

2. $\log x\,,\ x > 0$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ ടെയ്ലർ ശ്രേണിയുടെ വിപുലീകരണത്തെ $x=1$ നെ അടിസ്ഥാനമാക്കി ആദ്യത്തെ മൂന്ന് പൂജ്യമല്ലാത്ത പദങ്ങൾ വരെ കാണുക.

3. $\sin x$ ന്റെ വിപുലീകരണത്തിനെ $x-\frac{\pi}{4}$ ന്റെ ഘാതങ്ങളായി ആദ്യത്തെ മൂന്ന് പൂജ്യമല്ലാത്ത പദങ്ങൾ വരെ കാണുക.

4. $f(x) = x^2 - 3x + 2$ എന്ന ബഹുപദ വ്യംജകത്തെ $x-1$ ന്റെ ഘാതങ്ങളായി കാണുക.

7.5 അനിശ്ചിത രൂപങ്ങൾ

ഈ വിഭാഗത്തിൽ പരിധി മൂല്യം കാണുമ്പോൾ അനിശ്ചിത രൂപങ്ങൾ വരുമ്പോൾ എങ്ങനെ പരിധി മൂല്യം കാണാം എന്നതിനെ കാണാം.

7.5.1 പരിധി കാണുന്ന രീതി

$\lim\limits_{x\to\alpha} R(x)$ എന്ന ഒരു ഫലനത്തിന് $R(x)$ എന്ന പരിധി കാണുമ്പോൾ നമുക്ക്,

$$\frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0\times\infty,\ \infty-\infty,\ 1^{\infty},\ 0^0,\ \infty^0$$ എന്നീ സാഹചര്യങ്ങളെ നേരിടേണ്ടി വന്നേക്കാം.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 25 2/25/2023 11:56:34 AM

ഇതുപോലത്തെ രൂപങ്ങളിലുള്ള സംഖ്യകളെ, നമുക്ക് സാധാരണ സങ്കലനം, ഗുണനം നിയമങ്ങളിലൂടെ കണക്കാക്കുക സാധ്യമല്ല. ഇതുപോലത്തെ രൂപങ്ങളെ നമ്മൾ അനിശ്ചിത രൂപങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. ഈ രൂപങ്ങളെ ഒരു സംഖ്യയായി കരുതാനാവില്ല. എന്നിരുന്നാലും ഈ അനിശ്ചിത രൂപങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ ഒരു പ്രധാന പങ്ക് വഹിക്കുന്നു.

കോൺ ബെർണൂലി എന്നയാൾ അംശം അല്ലെങ്കിൽ ഛേദം എന്നിവ രണ്ടും പൂജ്യത്തെയോ, അല്ലെങ്കിൽ ∞ നെയോ സമീപിക്കുമ്പോൾ അവകലജങ്ങളിലൂടെ എങ്ങനെ പരിധി മൂല്യത്തെ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതിയെ കണ്ടു പിടിച്ചു. ഈ നിയമത്തെ ലോബിടാൽ നിയമം എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. ഫ്രഞ്ച് കുലീനനായ ഗുലോഡി എൽ ഹാസ്പിറ്റൽ രചിച്ച ശകലകകലനത്തിലേക്ക് ആമുഖം എന്ന പുസ്തകത്തിൽ ആദ്യമായി അച്ചടിച്ചു. അതുകൊണ്ട് ഈ നിയമത്തെ ലോബിടാൽ നിയമം എന്ന് പറയുന്നു.

7.5.2 ലോബിടാൽ നിയമം

$f(x)$ കൂടാതെ $g(x)$ എന്നിവ അവകലനം ചെയ്യാവുന്ന ഫലനങ്ങൾ കൂടാതെ $g'(x) \neq 0$

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to a} g(x)$. എങ്കിൽ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ആകുന്നു

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty = \lim\limits_{x\to a} g(x)$. എങ്കിൽ $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ ആകുന്നു

7.5.3 അനിശ്ചിത രൂപങ്ങൾ $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\times\infty, \infty-\infty$

ഉദാഹരണം 7.33

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക : $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}\right)$.

നിർദ്ധാരണം

$x=1$ എന്ന് നേരിട്ട് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് $\dfrac{0}{0}$. എന്ന അനിശ്ചിത രൂപം കിട്ടുന്നു. അംശം കൂടാതെ ഛേദം എന്നിവ ഘാതം രണ്ട് ഉള്ള ബഹുപദ വ്യംജകങ്ങൾ ആണ്. അതിനാൽ അവകലനം ചെയ്യാം. അതുകൊണ്ട് ലോബിടാൽ നിയമം പ്രയോഗിക്കുക

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{2x-3}{2x-4}\right)$$
$$= \frac{1}{2}.$$

പരിധി മൂല്യത്തിനെ $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4x+3} = \dfrac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-3)}$ എന്ന് ഘടകങ്ങളാക്കൽ രീതിയിലും കാണാം.

ഉദാഹരണം 7.34

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{x^n-a^n}{x-a}\right)$.

നിർദ്ധാരണം

$x=a$ എന്ന് നേരിട്ട് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് $\dfrac{0}{0}$ എന്ന അനിശ്ചിത രൂപം കിട്ടുന്നു. അംശം കൂടാതെ ഛേദം എന്നിവ ബഹുപദവ്യംജകങ്ങൾ അതിനാൽ അവകലനം ചെയ്യാം.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 26 2/25/2023 11:56:39 AM

അതുകൊണ്ട് ലോബിടാൽ നിയമം പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ,

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{x^n-a^n}{x-a}\right) = \lim_{x\to a}\left(\frac{n\times x^{n-1}}{1}\right)$$

$$= n\times a^{n-1}.$$

ഉദാഹരണം 7.35

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin mx}{x}\right)$.

നിർദ്ധാരണം

$x=0$ എന്ന് നേരിട്ട് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് $\frac{0}{0}$ എന്ന അനിശ്ചിത രൂപം കിട്ടുന്നു. അതുകൊണ്ട് ലോബിടാൽ നിയമം പ്രയോഗിക്കാം.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin mx}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{m\times\cos mx}{1}\right)$$

$$= m$$

അടുത്ത ഉദാഹരണത്തിലൂടെ പരിധിയില്ല എന്നതിനെ മനസ്സിലാക്കും,

ഉദാഹരണം 7.36

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x^2}\right)$.

നിർദ്ധാരണം

$x=0$ എന്ന് നേരിട്ട് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് $\frac{0}{0}$ എന്ന അനിശ്ചിത രൂപം കിട്ടുന്നു. അതുകൊണ്ട് ലോബിടാൽ നിയമം പ്രയോഗിക്കാം,

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{2x}\right)=\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\sin x}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{\cos x}{2x}\right)=-\infty$$

ഇടത്തെ കൂടാതെ വലത്തെ പരിധികൾ തുല്യമല്ല അതിനാൽ പരിധി ഇല്ല.

പരാമർശം

$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{2x}\right)$ ന് വീണ്ടും ലോബിടാൽ നിയമം പ്രയോഗിച്ച്

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{2x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{-\sin x}{2}\right)=0.$$

എന്ന് കാണുന്നത് ശരിയല്ല. എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{2x}\right)$ എന്നത് അനിശ്ചിത രൂപത്തിൽ ഇല്ല.

ഉദാഹരണം 7.37

$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1-\cos m\theta}{1-\cos n\theta}\right)=1$, എങ്കിൽ $m=\pm n$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇത് $\left(\frac{0}{0}\right)$, എന്ന അനിശ്ചിത രൂപത്തിലുള്ളത് കൊണ്ട്, ലോബിടാൽ നിയമം പ്രയോഗിക്കാം

$$\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{1-\cos m\theta}{1-\cos n\theta}\right) = \lim_{\theta\to 0}\left(\frac{m\sin m\theta}{n\sin n\theta}\right)$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 27 2/25/2023 11:56:44 AM

ഉദാഹരണം 7.35 നെ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ,

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{m}{n}\times\left(\frac{\frac{\sin m\theta}{\theta}}{\frac{\sin n\theta}{\theta}}\right) = \frac{m^2}{n^2}$$

$$\text{അതിനാൽ } m^2 = n^2$$

$$\text{അതായത് } m = \pm n\,.$$

ഉദാഹരണം 7.38

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക : $\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\log(1-x)}{\cot(\pi x)}\right)$.

നിർദ്ധാരണം

ഇത് $\frac{\infty}{\infty}$ എന്ന അനിശ്ചിത രൂപത്തിലാണ്. അതുകൊണ്ട് പരിധി കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ലോബിടാൽ നിയമം ഉപയോഗിക്കാം

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\log(1-x)}{\cot(\pi x)} = \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{-\frac{1}{1-x}}{-\pi\operatorname{cosec}^2(\pi x)}\right) \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\text{ രൂപം}\right)$$

ഇതിനെ ലഘൂകരിക്കുമ്പോൾ,

$$= \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\sin^2(\pi x)}{\pi(1-x)}\right) \qquad \left(\frac{0}{0}\text{ രൂപം}\right)$$

വീണ്ടും ലോബിടാൽ നിയമം പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ

$$= \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{2\pi\sin(\pi x)\cdot\cos(\pi x)}{-\pi}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1^-}\left(-2\sin(\pi x)\cdot\cos(\pi x)\right)$$

$$= 0\,.$$

ഉദാഹരണം 7.39

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക : $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$.

നിർദ്ധാരണം

ഇത് $\infty-\infty$ എന്ന അനിശ്ചിത രൂപത്തിലാണ്. ഇതിനെ $\left(\frac{0}{0}\right)$ രൂപത്തിന് മാറ്റി, ലോബിടാൽ നിയമം പ്രയോഗിക്കുക,

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}\right). \quad \left(\frac{0}{0}\text{ form}\right)$$

ഇപ്പോൾ,

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-x-1}{x(e^x-1)}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x-1}{xe^x+e^x-1}\right) \quad \left(\frac{0}{0}\text{ form}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x}{xe^x+2e^x}\right) = \frac{1}{2}\,.$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 28 2/25/2023 11:56:50 AM

ഉദാഹരണം 7.40

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക : $\lim_{x\to 0^+} x\log x$.

നിർദ്ധാരണം

ഇത് $(0\times\infty)$ എന്ന അനിശ്ചിത രൂപത്തിലാണ്. പരിധി കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ എന്ന രൂപത്തിന് മാറ്റണം. അതിന് ശേഷം ലോബിടാൽ നിയമം പ്രയോഗിക്കുക

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\log x}{\frac{1}{x}}\right) \quad \left(\frac{\infty}{\infty} \text{ രൂപം}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right) = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0 .$$

ഉദാഹരണം 7.41

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക : $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+17x+29}{x^4}\right)$.

നിർദ്ധാരണം

ഇത് $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ എന്ന അനിശ്ചിത രൂപത്തിലാണ്. പരിധി കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ലോബിടാൽ നിയമം പ്രയോഗിക്കുക.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+17x+29}{x^4}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+17}{4x^3}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{12x^2}\right) = 0 .$$

ഉദാഹരണം 7.42

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക : $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{x^m}\right), m\in N$.

നിർദ്ധാരണം

ഇത് $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ എന്ന അനിശ്ചിത രൂപത്തിലാണ്.

പരിധി കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ലോബിടാൽ നിയമം m പ്രാവശ്യം പ്രയോഗിക്കുക.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^m} = \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{m!}$$

$$= \infty .$$

7.5.4 അനിശ്ചിത രൂപങ്ങൾ $0^0, 1^\infty, \infty^0$

ഇതുപോലുള്ള അനിശ്ചിത രൂപങ്ങൾക്ക് മൂല്യം കാണുന്നതിന്, നമുക്ക് ആദ്യം പരിധിലെ സംയോജന ഫലനത്തെ നിർവ്വചിക്കാം.

സിദ്ധാന്തം 7.6

$\lim_{x\to\alpha} g(x)$ കണ്ടുപിടിക്കാം കൂടാതെ ഇതിന്റെ മൂല്യം L എന്നിരിക്കട്ടെ മാത്രമല്ല $f(x)$ ആയത് $x = L$ ൽ തുടർച്ചയായിരിക്കും എന്നിരിക്കട്ടെ. അതിനാൽ,

$$\lim_{x\to\alpha} f(g(x)) = f\left(\lim_{x\to\alpha} g(x)\right).$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 29 2/25/2023 11:56:55 AM

പരിധി കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതി

(1) $A = \lim_{x \to a} g(x)$ ലോഗരിത ഫലനത്തിന്റെ തുടർച്ചയായി $A > 0$ എന്നെടുത്ത് ഇരുവശവും ലോഗരിതം എടുക്കുമ്പോൾ, $\log A = \lim_{x \to a} \log(g(x))$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. അതിനാൽ $f(x) = \log x$ ന് മുകളിലുള്ള സിദ്ധാന്തത്തിനെ ഉപയോഗിക്കാം

$$\lim_{x \to a} \log(g(x)) \;=\; \log\left(\lim_{x \to a} g(x)\right).$$

(2) ലോബിടാൽ നിയമം പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ $\lim_{x \to a} \log(g(x))$ ആയത് $\left(\frac{0}{0}\right)$ അല്ലെങ്കിൽ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ രൂപത്തിൽ ആയിരിക്കണം.

(3) കണ്ടുപിടിച്ച പരിധി α എന്നാണെങ്കിൽ ആവശ്യമായ പരിധി e^{α} ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 7.43

ലോബിടാൽ നിയമം ഉപയോഗിച്ച്, $\lim_{x \to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇത് 1^{∞} എന്ന അനിശ്ചിത രൂപത്തിലാണ് $g(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$$\log g(x) \;=\; \frac{\log(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log(g(x)) \;=\; \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\log(1+x)}{x}\right) \quad \left(\frac{0}{0} \text{ രൂപം}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{\frac{1}{1+x}}{1}\right) \qquad \text{(ലോബിടാൽ നിയമ പ്രകാരം)}$$

$$= 1 \,.$$

$$\text{പക്ഷേ, } \lim_{x \to 0^+} \log g(x) \;=\; \log\left(\lim_{x \to 0^+} g(x)\right)$$

$$\text{അതിനാൽ, } \log\left(\lim_{x \to 0^+} g(x)\right) \;=\; 1.$$

ഘാതാങ്കം ചെയ്യുന്നതിലൂടെ $\lim_{x \to 0^+} g(x) = e$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം 7.44

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക : $\lim_{x \to \infty} (1+2x)^{\frac{1}{2\log x}}$.

നിർദ്ധാരണം

ഇത് ∞^0 എന്ന അനിശ്ചിത രൂപത്തിലാണ്.

$$g(x) \;=\; (1+2x)^{\frac{1}{2\log x}} \text{ എന്നിരിക്കട്ടെ.}$$

ലോഗരിതം എടുക്കുമ്പോൾ

$$\log g(x) \;=\; \frac{\log(1+2x)}{2\log x}$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 30 2/25/2023 11:57:02 AM

$$\lim_{x\to\infty}\log g(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\log(1+2x)}{2\log x}\right) \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\text{ രൂപം}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{2}{1+2x}}{\frac{2}{x}}\right) \quad \text{(ലോബിടാൽ നിയമം പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+2x}\right) \quad \left(\frac{\infty}{\infty}\text{ രൂപം}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{പക്ഷേ,}$$

$$\lim_{x\to\infty}\log g(x) = \log\left(\lim_{x\to\infty} g(x)\right).$$

അതുകൊണ്ട്, ഘാതാങ്കം ചെയ്യുന്നതിലൂടെ $\sqrt{e}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം 7.45

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക : $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

നിർദ്ധാരണം

ഇത് 1^{∞} എന്ന അനിശ്ചിത രൂപത്തിലാണ് $g(x) = x^{\frac{1}{1-x}}$ ലോഗരിതം എടുക്കുമ്പോൾ,

$$\log g(x) = \frac{\log x}{1-x}.$$

$$\text{അതിനാൽ, } \lim_{x\to 1}\log g(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{\log x}{1-x}\right) \quad \left(\frac{0}{0}\text{ രൂപം}\right).$$

ലോബിടാൽ നിയമം പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ,

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-1}\right) = -1$$

$$\text{പക്ഷേ, } \lim_{x\to 1}\log g(x) = \log\left(\lim_{x\to 1} g(x)\right)$$

അതുകൊണ്ട്, ഘാതാങ്കം ചെയ്യുന്നതിലൂടെ

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \text{ എന്ന് കിട്ടുന്നു.}$$

അഭ്യാസം 7.5

തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ പരിധികൾ ആവശ്യമെങ്കിൽ ആവശ്യമുള്ള സ്ഥലത്ത് ലോബിടാൽ നിയമം ഉപയോഗിച്ച് കാണുക

1. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$
2. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3}{x^2-5x+3}$
3. $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\log x}$
4. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-}\frac{\sec x}{\tan x}$
5. $\lim_{x\to\infty} e^{-x}\sqrt{x}$
6. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)$
7. $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2}{x^2-1}-\frac{x}{x-1}\right)$
8. $\lim_{x\to 0^+} x^x$
9. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 31 2/25/2023 11:57:09 AM

10. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\tan x}$

11. $\lim_{x\to 0^+}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

12. A_0 എന്ന പ്രാരംഭ തുക, ഒരു വർഷത്തിന് n പ്രാവശ്യം r എന്ന കൂട്ടു പലിശ നിരക്കിൽ നിക്ഷേപിക്കുന്നു വെങ്കിൽ നിക്ഷേപിച്ച് t വർഷത്തിന് ശേഷം ആ തുകയുടെ മൂല്യം $A = A_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$. പലിശ തുടർച്ചയായ രീതിയിൽ കൂട്ടുകയാണെങ്കിൽ (അതായത് $n \to \infty$), t വർഷത്തിന് ശേഷം ആ തുകയുടെ മൂല്യം $A = A_0e^{rt}$ എന്ന് കാണിക്കുക

7.6 ആദ്യത്തെ അവകലജത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ

ആദ്യത്തെ അവകലജം ഉപയോഗിച്ച് ഒരു വക്രം $f(x)$ ന്റെ ഏകതാനത (വർദ്ധിക്കുന്ന അല്ലെങ്കിൽ കുറയുന്ന) സ്വഭാവമത്തെയും ഒരു മണ്ഡലത്തിൽ നിശ്ചിത ബിന്ദുവിനെ കേന്ദ്രികരിച്ച് സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ച (ഉച്ചതമം അല്ലെങ്കിൽ ന്യൂനതമം) മൂല്യങ്ങളെ കാണുക.

7.6.1 ഫലനങ്ങളുടെ ഏകതാനത

ഫലനങ്ങളുടെ ഏകതാനത എന്നത് ആ വക്രത്തിന്റെ വർദ്ധിക്കുന്ന അല്ലെങ്കിൽ കുറയുന്ന സ്വഭാവത്തെ കുറിച്ച് പറയുന്നു.

നിർവ്വചനം 7.4

$f(x)$ എന്ന ഫലനം I എന്ന അന്തരാളത്തിൽ $a<b \Rightarrow f(a)\le f(b), \forall a,b \in I$ എന്നാണെങ്കിൽ ആ ഫലനം I അന്തരാളത്തിൽ വർദ്ധിക്കും.

നിർവ്വചനം 7.5

$f(x)$ എന്ന ഫലനം I എന്ന അന്തരാളത്തിൽ $a<b \Rightarrow f(a)\ge f(b), \forall a,b \in I$ എന്നാണെങ്കിൽ ആ ഫലനം എന്ന I അന്തരാളത്തിൽ കുറയും.

$f(x)=x$ എന്ന ഫലനം വാസ്തവിക സംഖ്യ നേർരേഖയിൽ പൂർണ്ണമായും വർദ്ധിക്കുന്നു. പക്ഷേ $f(x)=-x$ എന്ന ഫലനം വാസ്തവിക സംഖ്യാ നേർരേഖയിൽ പൂർണ്ണമായും കുറയുന്നു. പൊതുവായി ഒരു ഫലനം ഒരു നിശ്ചിത അന്തരാളത്തിൽ വർദ്ധിക്കും കൂടാതെ മറ്റൊരു നിശ്ചിത അന്തരാളത്തിൽ കുറയും ഉദാഹരണമായി $f(x)=|x|$ എന്ന ഫലനം $(-\infty,0]$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ കുറയും കൂടാതെ $[0,\infty)$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ വർദ്ധിക്കും. ഈ ഫലനങ്ങളുടെ ഏകതാനതയെ മനസ്സിലാക്കുക എളുപ്പമാണ്. പക്ഷേ ഏതെങ്കിലും തന്നിട്ടുള്ള ഫലനത്തിന് ഏകതാനതയെ വാസ്തവിക സംഖ്യ നേർരേഖയിൽ എങ്ങനെ തീരുമാനിക്കാം? അതിനായി താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സിദ്ധാന്തത്തെ (തെളിവില്ലാതെ) ഉപയോഗിക്കാം.

സിദ്ധാന്തം 7.7

$f(x)$ എന്ന ഫലനം (a,b) തുറന്ന അന്തരാളത്തിൽ അവകലനം ചെയ്യാം എന്നിരിക്കട്ടെ,

(1)
$$\frac{d}{dx}(f(x)) \ge 0, \forall x \in (a,b). \qquad \ldots (1)$$
എങ്കിൽ (a,b) എന്ന അന്തരാളത്തിൽ വർദ്ധിക്കും.

(2)
$$\frac{d}{dx}(f(x)) > 0, \forall x \in (a,b). \qquad \ldots (2)$$
എങ്കിൽ (a,b) എന്ന അന്തരാളത്തിൽ $f(x)$ ക്യത്യമായി വർദ്ധിക്കും.

ഇതിന്റെ തെളിവിനെ സിദ്ധാന്തം 7.3 ൽ കാണാം.

(3) എങ്കിൽ (a,b) എന്ന അന്തരാളത്തിൽ $f(x)$ കുറയും

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 32 2/25/2023 11:57:16 AM

$$\frac{d}{dx}(f(x)) \leq 0, \forall x \in (a,b). \quad \ldots(3)$$

(4) എങ്കിൽ (a,b) എന്ന അന്തരാളത്തിൽ $f(x)$ കൃത്യമായി കുറയും

$$\frac{d}{dx}(f(x)) < 0, \forall x \in (a,b). \quad \ldots(4)$$

പരാമർശം

ഇനിപ്പറയുന്ന വസ്തുത ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടത് വളരെ പ്രധാനമാണ് $f(x)$ എന്ന ഫലനം I എന്ന അന്തരാളത്തിൽ അവകലനം ചെയ്യാം, കൃത്യമായി വർദ്ധിക്കുന്നു എങ്കിൽ $f'(x) > 0, x \in I$ എന്ന് പറയുന്നത് തെറ്റാണ്. ഉദാഹരണമായി $y = x^3, x \in (-\infty, \infty)$ എന്ന ഫലനത്തിനു പരിഗണിക്കാം ഇത് $(-\infty, \infty)$ ൽ കൃത്യമായി വർദ്ധിക്കുന്നു. ഇത് തെളിയിക്കുന്നതിന് $a > b$ എന്നിരിക്കട്ടെ എങ്കിൽ നമ്മൾ $f(a) > f(b)$ എന്ന് തെളിയിക്കണം അതിനായി $a^3 - b^3 > 0$ എന്ന് തെളിയിക്കണം. ഇപ്പോൾ,

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2) \\ &= (a-b)\frac{1}{2}(2a^2 + 2ab + 2b^2) \\ &= (a-b)\frac{1}{2}\left((a+b)^2 + a^2 + b^2\right) > 0 \end{aligned}$$

എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ $a - b > 0$ കൂടാതെ അന്തരാളത്തിനകത്തുള്ള അംഗങ്ങൾ > 0.

അതിനാൽ ഈ ദ്വിഘാത വ്യംജകം എല്ലായ്പ്പോഴും ധനമാണ്. ഇതിന്റെ മൂല്യം $a = b = 0$, ആണെങ്കിൽ മാത്രം പൂജ്യമായിരിക്കും, ഇത് $a < b$). ന് വിരുദ്ധമാണ് അതുകൊണ്ട് $y = x^3$ എന്ന ഫലനം $(-\infty, \infty)$ ൽ കൃത്യമായി വർദ്ധിക്കും $f'(x) = 3x^2$ ന്റെ മൂല്യം $x = 0$ ൽ പൂജ്യമായിരിക്കും.

നിർവ്വചനം 7.6

$f(x)$ എന്ന അവകലനം ചെയ്യാവുന്ന ഫലനത്തിന് $(x_0, f(x_0))$ ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദു ആണെങ്കിൽ $f'(x_0) = 0$ ആയിരിക്കും.

നിർവ്വചനം 7.7

$f(x)$ എന്ന ഫലനത്തിന് $(x_0, f(x_0))$ ഒരു നിർണ്ണായക ബിന്ദു ആണെങ്കിൽ $f'(x_0) = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $f'(x_0)$ കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധിക്കില്ല.

കുറിപ്പ്

$f(x)$ ന്റെ സഹമണ്ഡലത്തിലുള്ള x ന് (x, y) ഒരു നിശ്ചിത അഥവാ നിർണ്ണായക ബിന്ദു ആണെങ്കിൽ x നെ നിശ്ചിത അഥവാ നിർണ്ണായക സംഖ്യ എന്നു പറയുന്നു.

എല്ലാ നിശ്ചിത ബിന്ദുക്കളും നിർണ്ണായക ബിന്ദുക്കളാണ്. എന്നിരുന്നാലും എല്ലാ നിർണ്ണായക ബിന്ദുക്കളും നിശ്ചല ബിന്ദുക്കളായിരിക്കണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി $f(x) = |x - 17|$ എന്ന ഫലനത്തിന് $(17, 0)$ ഒരു നിർണ്ണായക ബിന്ദു പക്ഷേ $(17, 0)$ ഒരു നിർണ്ണായക ബിന്ദു അല്ല. എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ $x = 17$ ൽ ഫലനത്തിനെ അവകലനം ചെയ്യാനാവില്ല.

ഉദാഹരണം 7.46

$f(x) = x^2 + 2$ എന്ന ഫലനം $(2, 7)$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ കൃത്യമായി വർദ്ധിക്കുന്നു $(-2, 0)$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ കൃത്യമായി കുറയുന്നു.

നിർദ്ധാരണം

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x > 0, \forall x \in (2, 7) \\ f'(x) &= 2x < 0, \forall x \in (-2, 0) \end{aligned}$$

അതിനാൽ തെളിവ് പൂർത്തിയായി. ■

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 33 2/25/2023 11:57:25 AM

ഉദാഹരണം 7.47

$f(x)=x^2-2x-3$ എന്ന ഫലനം $(2,\infty)$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ കൃത്യമായി വർദ്ധിക്കുന്നതുവെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$f(x)=x^2-2x-3$, $f'(x)=2x-2>0\ \forall\ x\in(2,\infty)$ എന്നതിനാൽ $f(x)$ ആയത് $(2,\infty)$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ കൃത്യമായി വർദ്ധിക്കുന്നു.

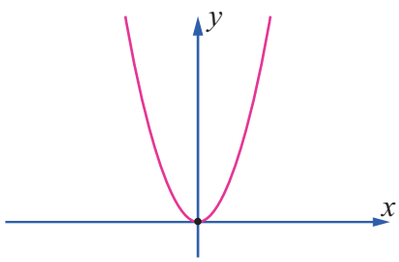
7.6.2 പരമാവധി ഉച്ചതമം, ന്യൂനതമം

പരമാവധി ഉച്ചതമം, ന്യൂനതമം എന്നിവ തന്നിട്ടുള്ള അന്തളാളത്തിൽ ഫലനത്തിന്റെ ഏറ്റവും വലിയ കൂടാതെ ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

നിർവ്വചനം 7.8

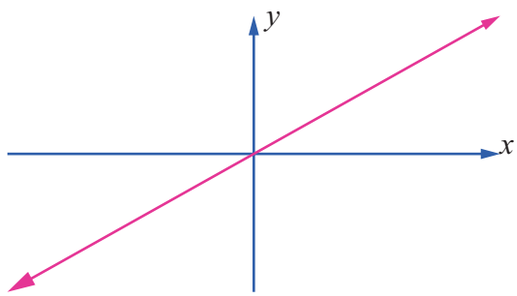
$f(x)$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ മണ്ഡലം D യിലുള്ള ബിന്ദു x_0 എന്നിരിക്കട്ടെ. $f(x_0)\geq f(x)\forall x\in D$ എങ്കിൽ $f(x_0)$ എന്നത് D ൽ പരമാവധി ഉച്ചതമം കൂടാതെ $f(x_0)\leq f(x)\forall x\in D$ എങ്കിൽ $f(x_0)$ എന്നത് D ൽ പരമാവധി ന്യൂനതമം ആയിരിക്കും.

പൊതുവായി ഒരു ഫലനത്തിന് തന്നിട്ടുള്ള അന്തരാളത്തിൽ പരമാവധി ഉച്ചതമം അല്ലെങ്കിൽ ന്യൂനതമം ഉണ്ടായിരിക്കണമെന്നില്ല. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രങ്ങൾ തുടർച്ചയായ വക്രങ്ങൾക്ക് അടഞ്ഞ അല്ലെങ്കിൽ തുറന്ന അന്തരാളങ്ങളിൽ നരമാവധി ഉച്ചതമം അല്ലെങ്കിൽ ന്യൂനതമം ഉണ്ടായിരിക്കാം അല്ലെങ്കിൽ ഉണ്ടായിരിക്കാതെയുമായിരിക്കാം എന്നതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.



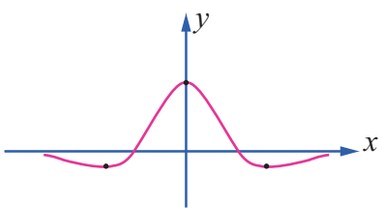
ചിത്രം 7.14

$(-\infty,\infty)$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ $f(x)$ ന് പരമാവധി ന്യൂനതമം ഉണ്ട്, പക്ഷേ പരമാവധി ഉച്ചതമം ഇല്ല



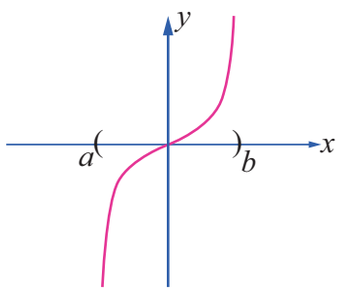
ചിത്രം 7.15

$(-\infty,\infty)$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ $f(x)$ ന് പരമാവധി ഉച്ചതമം കൂടാതെ ന്യൂനതമം ഇല്ല.



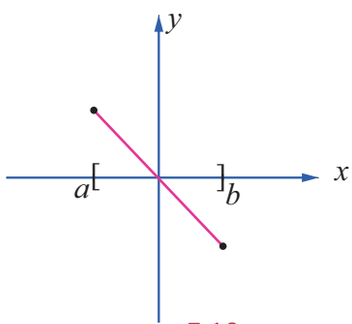
ചിത്രം 7.16

$(-\infty,\infty)$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ $f(x)$ ന് പരമാവധി ഉച്ചതമം കൂടാതെ ന്യൂനതമ മൂല്യങ്ങൾ ഉണ്ട്



ചിത്രം 7.17

(a,b) എന്ന അന്തരാളത്തിൽ $f(x)$ ന് പരമാവധി ഉച്ചതമം അല്ലെങ്കിൽ ന്യൂനതമ മൂല്യങ്ങൾ ഇല്ല.



ചിത്രം 7.18

$[a,b]$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ $f(x)$ ന് പരമാവധി ഇച്ചതമം അല്ലെങ്കിൽ ന്യൂനതമ മൂല്യങ്ങൾ ഉണ്ട്

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സിദ്ധാന്തം ഒരു പരമാവധി ഉച്ചതമ മൂല്യവും കൂടാതെ ഒരു പരമാവധി ന്യൂനതമ മൂല്യവും ഉണ്ടായിരിക്കും എന്നതിനെ കാണിക്കുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 34 2/25/2023 11:57:31 AM

സിദ്ധാന്തം 7.8 (അത്യുച്ച മൂല്യ സിദ്ധാന്തം)

$f(x)$ എന്ന അടഞ്ഞ അന്തരാളത്തിൽ $[a,b]$,ൽ തുടർച്ചയായിരുന്നാൽ f ന് $[a,b]$ ൽ ഒരു പരമാവധി ഉച്ചതമ മൂല്യവും, പരമാവധി ന്യൂനതമ മൂല്യവും ലഭിക്കും.

$f(x)$ ന്റെ ഉച്ചതമ അല്ലെങ്കിൽ ന്യൂനതമ അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങൾ അടഞ്ഞ അന്തരാളം $[a,b]$ ന്റെ അഗ്ര ബിന്ദുക്കളിലായോ അല്ലെങ്കിൽ (a,b) എന്ന അന്തരാളത്തിനുള്ളിലായോ സ്ഥിതി ചെയ്യും. ഉച്ചതമം അല്ലെങ്കിൽ ന്യൂനതമ അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങൾ ഉള്ളിലായി സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ അത് നിർണ്ണായക ബിന്ദുവിലായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള രീതി ഉപയോഗിച്ച് പരമാവധി ഉച്ചതമ കൂടാതെ ന്യൂനതമ മൂല്യങ്ങളെ അടഞ്ഞ അന്തരാളം $[a,b]$ ൽ കണ്ടുപിടിക്കാം.

അടഞ്ഞ അന്തരാളം $[a,b]$ൽ തുടർച്ചയായ, ഫലനം $f(x)$ ന് ഉച്ചതമ കൂടാതെ ന്യൂനതമ അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങളെ കാണുന്ന രീതി.

ഘട്ടം 1 : $f(x)$ ന് (a,b) ൽ നിർണ്ണായക ബിന്ദു കാണുക

ഘട്ടം 2 : $f(x)$ ന്റെ മൂല്യങ്ങളെ എല്ലാ നിർണ്ണായക ബിന്ദുക്കൾ കൂടാതെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ a കൂടാതെ b ൽ കാണുക

ഘട്ടം 3 : ഘട്ടം 2 ൽ കണ്ടുപിടിച്ച മൂല്യങ്ങളിൽ ഏറ്റവും ഉയർന്ന സംഖ്യ പരമാവധി ഉച്ചതമ കൂടാതെ ഏറ്റവും ചെറിയ സംഖ്യ പരമാവധി ന്യൂനതമം ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 7.48

$f(x)=2x^3+3x^2-12x$ എന്ന ഫലനത്തിന് $[-3,2]$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ പരമാവധി ഉച്ചതമ കൂടാതെ പരമാവധി ന്യൂനതമ മൂല്യങ്ങളെ കാണുക

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള ഫലനത്തെ അവകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6x^2+6x-12 \\ &= 6(x^2+x-2) \\ f'(x) &= 6(x+2)(x-1) \end{aligned}$$

അതിനാൽ, $f'(x)=0 \Rightarrow x=-2,1 \in (-3,2)$.

അതുകൊണ്ട് $x=-2,1$ എന്നിവ നിർണ്ണായക ബിന്ദുക്കൾ. $f(x)$ ന്റെ മൂല്യങ്ങളെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ $x=-3,2$ കൂടാതെ നിർണ്ണായക ബിന്ദുക്കൾ $x=-2,1$, ൽ കാണുമ്പോൾ നമുക്ക് $f(-3)=9$, $f(2)=4$, $f(-2)=20$ കൂടാതെ $f(1)=-7$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഈ മൂല്യങ്ങളിൽ നിന്ന് $x=-2$ ൽ പരമാവധി ഉച്ചതമം 20 കൂടാതെ, $x=1$ ൽ പരമാവധി ന്യൂനതമം -7.

ഉദാഹരണം 7.49

$f(x)=3\cos x$ എന്ന ഫലനത്തിന് $[0,2\pi]$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ പരമാവധി ഉച്ചതമ കൂടാതെ ന്യൂനതമ മൂല്യങ്ങളെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള ഫലനത്തെ അവകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ $f'(x)=-3\sin x$.

അതിനാൽ, $f'(x)=0 \Rightarrow \sin x=0 \Rightarrow x=\pi \in (0,2\pi)$ $f(x)$ ന്റെ മൂല്യങ്ങളെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ $x=0,\ 2\pi$ കൂടാതെ നിർണ്ണായക സംഖ്യ $x=\pi$ ൽ കാണുമ്പോൾ നമുക്ക് കൂടാതെ, $f(0)=3$, $f(2\pi)=3$, $f(\pi)=-3$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഈ മൂല്യങ്ങളിൽ നിന്ന് $x=0,\ 2\pi$ ൽ പരമാവധി ഉച്ചതമം 3, കൂടാതെ $x=\pi$ ൽ പരമാവധി ന്യൂനതമം -3

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 35 2/25/2023 11:57:39 AM

7.6.3 ഒരു അന്തരാളത്തിൽ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ചങ്ങൾ

$f(x)$ എന്ന ഫലനത്തിൽ x_0, ഉൾപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ഒരു ചെറിയ തുറന്ന അന്തരാളത്തിൽ $f(x_0)$ ൽ ഏറ്റവും വലിയ മൂല്യം എങ്കിൽ x_0 ൽ $f(x)$ എന്ന ഫലനം സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ചം എത്തുന്നു. ഇതുപോലെ x_0, ഉൾപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ഒരു ചെറിയ അന്തരാളത്തിൽ $f(x_0)$ ആണ് ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യം എങ്കിൽ x_0 ൽ $f(x)$ എന്ന ഫലനം സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമത്തിൽ എത്തുന്നു.

മുഴുവൻ മണ്ഡലത്തിൽ ഒരു സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ചം പരമാവധി ഉച്ചതമയായിരിക്കണമെന്നില്ല. അതുപോലെ ഒരു സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമം പരമാവധി ന്യൂനതമമായിരിക്കണമെന്നില്ല. അതിനാൽ ഒരു ഫലനത്തിന് അതിന്റെ മുഴുവൻ മണ്ഡലത്തിൽ ഒന്നിലധികം സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ഉച്ചതമം അല്ലെങ്കിൽ ന്യൂന തമം ഉണ്ടായിരിക്കാം.

ഒരു ഫലനത്തിന് സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങൾ (ഉച്ചതമം അല്ലെങ്കിൽ ന്യൂനതമം) എന്നത് $f(x), \forall x \in I \subset D$ ന്റെ മൂല്യങ്ങളിൽ അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങൾ ആകുന്നു. ഇവിടെ I എന്നത് തുറന്ന അന്തരാളമായോ അല്ലെങ്കിൽ അടഞ്ഞ അന്തരാളമായോ ആയിരിക്കാം. സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങൾ അതിന്റെ നിർണ്ണായക ബിന്ദുക്കളിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. മാത്രമല്ല. ഒരു ഫലനത്തിന് ഒരു നിർണ്ണായക ബിന്ദു $x = c$ ൽ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങൾ ഇല്ലാതെയും ഇരിക്കാം. ഉദാഹരണമായി $y = x^3$ കൂടാതെ $y = x^{\frac{1}{3}}$ എന്നീ ഫലനങ്ങൾക്ക് മൂല ബിന്ദു ഒരു നിർണ്ണായക ബിന്ദു, പക്ഷേ മൂല ബിന്ദുവിൽ അത്യുച്ച ബിന്ദുക്കൾ സ്ഥിതി ചെയ്യില്ല.

സിദ്ധാന്തം 7.9 (ഫെർമാറ്റ്)

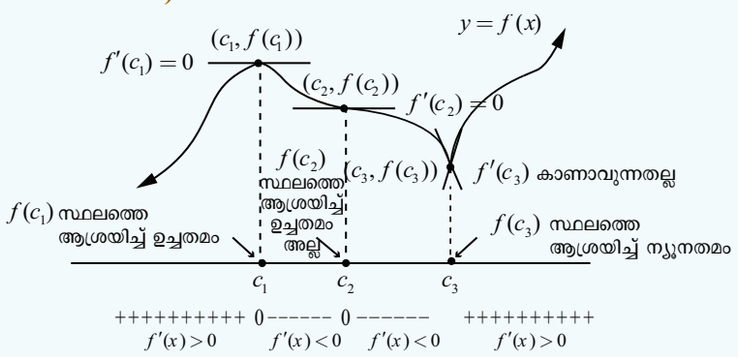
$f(x)$ ന് $x = c$ ൽ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ചം ഉള്ളതെങ്കിൽ c ഒരു നിർണ്ണായക ബിന്ദുവാണ്. ഈ നിർണ്ണായക സംഖ്യയെ $f'(x) = 0$ എന്ന സമീകരണത്തെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിലൂടെയും $f'(x)$ അവകലനം ചെയ്യാവുന്നതായുള്ള x ന്റെ മൂല്യങ്ങളെ കാണുന്നതിലൂടെയും ലഭിക്കാം.

7.6.4 ആദ്യത്തെ അവകലജം പരീക്ഷണം ഉപയോഗിച്ച് അത്യുച്ചങ്ങൾ

ഒരു ഫലനത്തിന് വർദ്ധിക്കുന്ന അല്ലെങ്കിൽ കുറയുന്ന അന്തരാളങ്ങളെ കണക്കാക്കിയതിന് ശേഷം ആ ഫലനത്തിന്റെ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങളെ കാണുന്നത് അത്ര എളുപ്പമല്ല $y = f(x)$ ന്റെ ഗ്രാഫിലൂടെ അതിന്റെ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ചുള്ള മൂല്യങ്ങളെ കണ്ടെത്താം. ഇതിന് ചില പരീക്ഷണങ്ങൾ ചെയ്യുന്നു. അത്തരത്തിലുള്ള ഒരു പരീക്ഷണമാണ് ആദ്യത്തെ അവകലന പരീക്ഷണം. അത് ഇനിപ്പറയുന്ന സിദ്ധാന്തത്തിൽ പ്രസ്താവിച്ചിരിക്കുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 7.10 (ആദ്യത്തെ അവകലജ പരീക്ഷണം)

$f(x)$ എന്ന തുടർച്ചയായ ഫലനത്തിന് c ഉൾപ്പെട്ടിട്ടുള്ള തുറന്ന അന്തരാളം I ൽ $(c, f(c))$ എന്നത് നിർണ്ണായക ബിന്ദു എന്നിരിക്കട്ടെ $f(x)$ ആയത് c ഒഴികെയുള്ള അന്തരാളത്തിൽ അവകലനം ചെയ്യാവുന്നതെങ്കിൽ $f(c)$ നെ, താഴെ തന്നിട്ടുള്ളത് പോലെ ക്രമീകരിക്കാം:



ചിത്രം 7.19

(x ആയത് I എന്ന അന്തരാളത്തിൽ ഇടത്തു നിന്ന് വലത്തോട്ട് ചലിക്കുമ്പോൾ)

(i) $f'(x)$ ആയത് c ൽ ഋണത്തിൽ നിന്ന് ധനത്തിലേക്ക് മാറ്റിയാൽ, $f(x)$ ന് $f(c)$ എന്നത് സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമമായിരിക്കും.

(ii) $f'(x)$ ആയത് c ൽ ധനത്തിൽ നിന്ന് ഋണത്തിലേക്ക് മാറിയാൽ, $f(x)$ ന് $f(c)$ എന്നത് സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ഉച്ചതും ആയിരിക്കും.

(iii) $f'(x)$ ന്റെ ചിഹ്നമായ് c ന്റെ ഇരുവശവും ധനമായോ അല്ലെങ്കിൽ c ന്റെ ഇരുവശവും ഋണമായോ ആണെങ്കിൽ, $f(c)$ എന്നത് സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ഉച്ചതമം, ന്യൂതമം എന്നിവ ഇല്ല.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 36 2/25/2023 11:57:46 AM

ഉദാഹരണം 7.50

$f(x) = x^2 - 4x + 4$ എന്ന ഫലനത്തിന് ഏകതാനത അന്തരാളങ്ങളെ കണക്കാക്കി അതിൽ നിന്നും സ്ഥലത്തെ അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങളെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$f(x) = (x-2)^2,$$
$$f'(x) = 2(x-2) = 0,\ x = 2\ .$$

ഏകതാനത അന്തരാളങ്ങൾ $(-\infty, 2)$ കൂടാതെ $(2, \infty)$ ആകുന്നു. $f'(x) < 0 \quad x \in (-\infty, 2)$ എന്നതിനാൽ $(-\infty, 2)$ ൽ $f(x)$ കൃത്യമായി കുറയുന്നു. അതുപോലെ $f'(x) > 0$, $x \in (2, \infty)$ എന്നതിനാൽ $(2, \infty)$ ൽ $f(x)$ കൃത്യമായി വർദ്ധിക്കുന്നു $f'(x)$ ന്റെ ചിഹ്നം $x = 2$ ലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുമ്പോൾ (ഇടത്തെ നിന്നും വലത്തോട്ട്) ഋണത്തിൽ നിന്നും ധനമായി മാറുന്നതിനാൽ $x = 2$ ൽ, $f(x)$ ന് സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമം ഉണ്ടായിരിക്കും. സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമ മൂല്യം $f(2) = 0$ ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 7.51

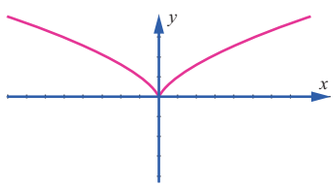
$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ എന്ന ഫലനത്തിന് ഏകതാനത അന്താരാളങ്ങൾ കണക്കാക്കി അതിൽ നിന്ന് സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങളെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, അതിനാൽ $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3x^{\frac{1}{3}}}$. $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ കൂടാതെ $f'(x)$ ആയത് $x = 0$ ൽ കണ്ടുപിടിക്കാനാവില്ല. അതുകൊണ്ട് ഈ ഫലനത്തിന് നിർണ്ണായക ബിന്ദുക്കൾ ഇല്ല. പക്ഷേ $x = 0$ ൽ നിർണ്ണായക ബിന്ദു ഉണ്ട്.

അന്തരാളം	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$f'(x)$ ന്റെ ചിഹ്നം	−	+
ഏകതാനത	കൃത്യമായി കുറയും	കൃത്യമായി വർദ്ധിക്കും

പട്ടിക 7.5



ചിത്രം 7.20

$f'(x)$ ന്റെ ചിഹ്നം $x = 0$ ലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുമ്പോൾ ഋണത്തിൽ നിന്ന് ധനമായി മാറുന്നത് കൊണ്ട് $x = 0$ ൽ $f(x)$ ന് സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമം ഉണ്ട്. ഇവിടെ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമ മൂല്യം $f(0) = 0$ ഇവിടെ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമം നിർണ്ണായക ബിന്ദുവിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. പക്ഷേ ഇത് നിശ്ചിത ബിന്ദുവല്ല എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

ഉദാഹരണം 7.52

$f(x) = x - \sin x$ എന്ന ഫലനം വാസ്തവിക സംഖ്യരേഖയിൽ വർദ്ധിക്കുന്നുവെന്ന് തെളിയിക്കുക. കൂടാതെ അതിന്റെ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങളെ വിശകലനം ചെയ്യുക.

നിർദ്ധാരണം

$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ ൽ മാത്രമല്ല $x = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ പൂജ്യം എന്നിവകളിൽ നിന്ന് $f(x)$ എന്ന ഫലനം വാസ്തവിക സംഖ്യ രേഖയിൽ വർദ്ധിക്കുന്നു .

$x = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$ ലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുമ്പോൾ $f'(x)$ ചിഹ്നത്തിൽ മാറ്റമൊന്നുമില്ലാത്തതിനാൽ ആദ്യത്തെ അവകലജ പരീക്ഷണ പ്രകാരം ഇവിടെ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങൾ ഇല്ല.

ഉദാഹരണം 7.53

$f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}, x > -1$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ ഏകതാനത സ്വഭാവം കൂടാതെ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങൾ വിശകലനം ചെയ്യുക. കൂടാതെ ഇതിൽ നിന്നും, $\log(1+x) > \frac{x}{1+x}$ എന്ന രീതിയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന അന്തരാളത്തിനെ കാണുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 37 2/25/2023 11:57:54 AM

നിർദ്ധാരണം

അതിനാൽ,

$$f(x) = \log(1+x) - \frac{x}{1+x}$$

അതുകൊണ്ട്, $f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}$

$$= \frac{x}{(1+x)^2}.$$

ആയത്,

$$f'(x) \text{ ആയത് } \begin{cases} < 0 & -1 < x < 0 \\ = 0 & x = 0 \\ > 0 & x > 0 \end{cases}$$

അതിനാൽ $x > 0$ എങ്കിൽ $f(x)$ കൃത്യമായി വർദ്ധിക്കുന്നു. $x < 0$ $f(x)$ കൃത്യമായി കുറയുന്നു. $f'(x)$ ന്റെ ചിഹ്നം $x = 0$ യിലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുമ്പോൾ ഋണത്തിൽ നിന്ന് ധനമായി മാറുന്നതിനാൽ ആദ്യത്തെ അവകലജ പരീണ പ്രകാരം $x = 0$, ൽ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമം $f(0) = 0$ ആയിരിക്കും മാത്രമല്ല $x > 0$ ൽ, $f(x) > f(0) = 0$ എന്നതിനാൽ $(0, \infty)$ ൽ

$$\log(1+x) - \frac{x}{1+x} > 0 \Rightarrow \log(1+x) > \frac{x}{1+x} \text{ on } (0, \infty).$$

ഉദാഹരണം 7.54

$f(x) = x \log x + 3x$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ ഏകതാനത അന്തരാളങ്ങൾ കൂടാതെ അതിൽ നിന്നും സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള ഫലനം $x \in (0, \infty)$ ൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട് അവകലനം ചെയ്യാവുന്നതായിരിക്കുന്നു.

$$f(x) = x \log x + 3x.$$

അതിനാൽ $f'(x) = \log x + 1 + 3 = 4 + \log x$.

നിർണ്ണായക ബിന്ദുക്കളെ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് $4 + \log x = 0$ നെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ.

$x = e^{-4}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

$(0, e^{-4})$ നെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ (e^{-4}, ∞) എന്ന് കിട്ടുന്നു.

അതിനാൽ, ഫലനം $f(x)$ ന്റെ ഏകതാനത അന്തരാളങ്ങൾ $(0, e^{-4})$ കൂടാതെ (e^{-4}, ∞) എന്നിവയാണ് .

$x = e^{-3} \in (e^{-4}, \infty)$ ൽ $f'(e^{-3}) = 1 > 0$ മാത്രമല്ല ഇതിൽ നിന്ന് (e^{-4}, ∞) ൽ $f(x)$ കൃത്യമായി വർദ്ധിക്കുന്നു $f'(x)$ ന്റെ ചിഹ്നം $x = e^{-4}$ ലൂടെ കടന്നുചെല്ലുമ്പോൾ ഋണത്തിൽ നിന്ന് ധനമായി മാറുന്നത് കൊണ്ട് ആദ്യത്തെ അവകലജ പരീക്ഷണ പ്രകാരം $x = e^{-4}$ ൽ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമ മൂല്യം $f(e^{-4}) = -e^{-4}$ ആണ്.

ഉദാഹരണം 7.55

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ എന്ന ഫലനത്തിന് ഏകതാനത അന്തരാളങ്ങളെ കണക്കാക്കി അതിൽ നിന്ന് സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള ഫലനം $x \in (-\infty, \infty)$ ൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട് അവകലനം ചെയ്യാവുന്നതായി ഇരിക്കുന്നു.

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

ഇതിൽ നിന്ന് $f'(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 38 2/25/2023 11:58:04 AM

നിർണ്ണായക ബിന്ദു കാണുന്നതിന് $-\frac{2x}{(1+x^2)^2}=0$ നെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ $x=0$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

അതിനാൽ $f(x)$ ന്റെ ഏകതാനത ആന്തരാളങ്ങൾ $(-\infty,0)$ കൂടാതെ $(0,\infty)$ എന്നിവയാണ്.

$f'(x)>0$ എന്നതിനാൽ $(-\infty,0)$ അന്തരാളത്തിൽ ഫലനം കൃത്യമായി വർദ്ധിക്കുന്നു.

$f'(x)<0$ $(0,\infty)$ എന്നതിനാൽ $f(x)$ ആയത് ഈ അന്തരാളത്തിൽ കൃത്യമായി കുറയുന്നു. മാത്രമല്ല $f'(x)$ ന്റെ ചിഹ്നം $x=0$, ലൂടെ കടക്കുമ്പോൾ ധനത്തിൽ നിന്നും ഋണത്തിലേക്ക് മാറുന്നതിനാൽ ആദ്യത്തെ അവകലജ പരീക്ഷണ പ്രകാരം $x=0$ ൽ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ഉച്ചതമ മൂല്യം $f(0)=1$ ആകുന്നു. ■

ഉദാഹരണം 7.56

$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ എന്ന ഫലനത്തിന് ഏകതാനത അന്തരാളങ്ങൾ കണക്കാക്കി അതിൽ നിന്ന് സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള ഫലനം $x\in(-\infty,\infty)$ ൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട് അവകലനം ചെയ്യാവുന്നതായിരിക്കുന്നു,

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

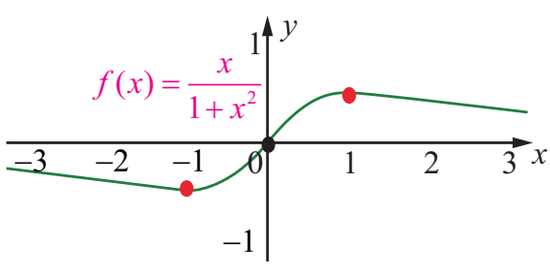
$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

നിർണ്ണായക ബിന്ദുക്കളെ കാണുന്നതിന് $1-x^2=0$ നെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ $x=\pm1$ എന്ന് കിട്ടുന്നു അതിനാൽ ഏകതാനത അന്തരാളങ്ങൾ $(-\infty,-1),(-1,1)$ കൂടാതെ $(1,\infty)$ എന്നിവയാണ്.

അന്തരാളം	(-∞, -1)	(-1, 1)	(1, ∞)
$f'(x)$ ന്റെ ചിഹ്നം	−	+	−
ഏകതാനത	കൃത്യമായി കുറയുന്നു	കൃത്യമായി വർദ്ധിക്കുന്നു	കൃത്യമായി കുറയുന്നു

പട്ടിക 7.6

അതിനാൽ, $(-\infty,-1)$ കൂടാതെ $(1,\infty)$ എന്നീ അന്തരാളങ്ങളിൽ $f(x)$ കൃത്യമായി കുറയും, $(-1,1)$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ കൃത്യമായി വർദ്ധിക്കുന്നു



ചിത്രം 7.21

$f'(x)$ ന്റെ ചിഹ്നം $x=-1$, ലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുമ്പോൾ ഋണത്തിൽ നിന്ന് ധനത്തിലേക്ക് മാറുന്നതിനാൽ, ആദ്യത്തെ അവകലജ പരീക്ഷണ പ്രകാരം $x=-1$ ൽ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമത്തിൽ എത്തുന്നു. ഇവിടെ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമ മൂല്യം $f(-1)=-\frac{1}{2}$ ആണ്.

ഇതുപോലെ $f'(x)$ ന്റെ ചിഹ്നം $x=1$ നെ കടന്നു ചെല്ലുമ്പോൾ ധനത്തിൽ നിന്ന് ഋണത്തിലേക്ക് മാറുന്നതിനാൽ ആദ്യത്തെ അവകലജ പരീക്ഷണ പ്രകാരം $x=1$ ൽ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ഉച്ചതമ മൂല്യം $f(1)=\frac{1}{2}$ ആണ്.

■

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 39 2/25/2023 11:58:12 AM

അഭ്യാസം 7.6

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഫലനങ്ങൾക്ക് തന്നിട്ടുള്ള അന്തരാളങ്ങളിൽ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ഉച്ചതമ കൂടാതെ ന്യൂനതമ മൂല്യങ്ങളെ കാണുക.

(i) $f(x) = x^2 - 12x + 10$; $[1, 7]$ (ii) $f(x) = 3x^4 - 4x^3$; $[-1, 2]$

(iii) $f(x) = 6x^{\frac{4}{3}} - 3x^{\frac{1}{3}}$; $[-1, 1]$ (iv) $f(x) = 2\cos x + \sin 2x$; $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

2. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഫലനങ്ങൾക്ക് ഏകതാനത അന്തരാളങ്ങളെ കണക്കാക്കി അതിൽ നിന്ന് സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങൾ കാണുക:

(i) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ (ii) $f(x) = \frac{x}{x-5}$

(iii) $f(x) = \frac{e^x}{1-e^x}$ (iv) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \log x$

(v) $f(x) = \sin x \cos x + 5,\ x \in (0, 2\pi)$

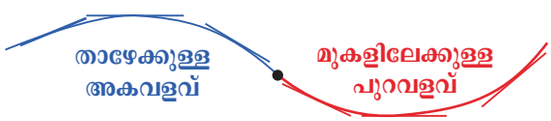
OFWQ9

7.7 രണ്ടാമത്തെ അവകലജത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ

രണ്ടാമത്തെ അവകലജം ഒരു ഫലനത്തിന്റെ അകവളവ്, പുറവളവ്, വക്രത്തിന്റെ വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദുക്കൾ കൂടാതെ സ്ഥലത്തെ അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങളെ തീരുമാനിക്കാൻ സഹായിക്കുന്നു.

7.7.1 അകവളവ്, പുറവളവ്, വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദുക്കൾ

ഒരു വക്രത്തിന്റെ ഒരു ബിന്ദുവിലൂടെ വരക്കുന്ന സ്പർശരേഖ വക്രത്തിന് മുകളിലായി സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ ആ ബിന്ദുവിൽ വക്രത്തിന്റെ മുകളിലേക്കുള്ള പുറവളവ് (താഴേക്കുള്ള അകവളവ്) എന്നു പറയുന്നു ഇതിനെ സമീപത്തുള്ള ചിത്രത്തിലൂടെ എളുപ്പത്തിൽ മനസ്സിലാക്കാം.



ചിത്രം 7.22

നിർവ്വചനം 7.8

$f(x)$ എന്ന ഫലനത്തിന് $I = (a, b)$ എന്ന തുറന്ന അന്തരാളത്തിൽ അവകലനം ചെയ്യാവുന്നതാണ് എന്നിരിക്കട്ടെ അപ്പോൾ $f(x)$ നെ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള രീതിയിൽ ക്രമീകരിക്കാം

(i) $f'(x)$ ആയത് തുറന്ന അന്തരാളം I, ൽ കൃത്യമായി വർദ്ധിക്കുന്നുവെങ്കിൽ $f(x)$ ആയത് I ൽ മുകളിലേക്കുള്ള അകവളവായിരിക്കും.

(ii) $f'(x)$ ആയത് തുറന്ന അന്തരാളം I, ൽ കൃത്യമായി കുറയുന്നുവെങ്കിൽ $f(x)$ ആയത് I ൽ മുകളിലേക്കുള്ള പുറവളവായിരിക്കും.

വിശകലനപരമായി $y = f(x)$, എന്ന അവകലനം ചെയ്യാവുന്ന വക്രത്തിന്റെ തിരിവ് സ്വഭാവത്തെ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഫലനത്തിലൂടെ വിശദീകരിച്ചിരിക്കുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 7.11 (തിരിക്കൽ സ്വഭാവ പരീക്ഷണം)

(i) $f''(x) > 0$ തുറന്ന അന്തരാളം I ൽ, $f(x)$ മുകളിലേക്കുള്ള തിരിയുന്ന അകവളവായിരിക്കും.

(ii) $f''(x) < 0$ തുറന്ന അന്തരാളം I ൽ, $f(x)$ താഴേക്കുള്ള തിരിയുന്ന അകവളവായിരിക്കും.

പരാമർശം

(1) $[a, b]$ ൽ മുകളിലേക്കുള്ള പുറ വളവിന്റെ ഏതൊരു സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ഉച്ചതമവും അത്യുച്ച ഉച്ചതമവുമായിരിക്കും.

(2) $[a, b]$ ൽ താഴേക്കുള്ള പുറവളവിന്റെ ഏതൊരു സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമവും, അത്യുച്ച ന്യൂനതമമായിരിക്കും.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 40 2/25/2023 11:58:20 AM

(3) ഏതൊരു വക്രത്തിനും ഒരേയൊരു അത്യുച്ചതമം (അല്ലെങ്കിൽ ന്യൂനതമം) മാത്രമേ ഉണ്ടായിരിക്കുകയുള്ളൂ. പക്ഷേ ഒന്നിലധികം സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ഉച്ചതമം അല്ലെങ്കിൽ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമം ഉണ്ടായിരിക്കാം.

വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദു

നിർവ്വചനം 7.9

ഒരു ഫലനത്തിന്റെ വക്രം ഏതൊക്കെ ബിന്ദുക്കളിൽ **അകവളവിൽ നിന്ന് താഴേക്ക് അകവളവായി** അല്ലെങ്കിൽ **താഴേക്ക് അകവളവിലേ നിന്ന് മുകളിലേക്ക് അകവളവായി** മാറുന്ന ആ ബിന്ദുക്കളെ $f(x)$ **ന്റെ വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദുക്കൾ** എന്നു പറയുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 7.12 (വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദു പരീക്ഷണം)

(i) $f''(c)$ കാണാവുന്നത് കൂടാതെ $f''(c)$ ന്റെ ചിഹ്നം $x=c$ ലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുമ്പോൾ മാറുന്നു. എങ്കിൽ $(c, f(c))$ ആയത് f ന്റെ വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദു ആണ്.

(ii) വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദു c ൽ $f''(c)$ കാണാവുന്നതാണെങ്കിൽ $f''(c)=0$ ആകുന്നു.

പരാമർശം

$y=f(x)$ എന്ന വക്രത്തിന്റെ വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദുക്കളെ കാണുന്നതിന് $f''(x)$ ആയത് ഏതൊക്കെ ബിന്ദുക്കളിൽ അതിന്റെ ചിഹ്നം മാറുന്നു. എന്നതിനെക്കുറിച്ച് അറിയേണ്ടത് അത്യാവശ്യമാണ്. മിനുസമാർന്ന വക്രങ്ങളിൽ (മൂർച്ചയുള്ള അഗ്രങ്ങളില്ലാത്ത) താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവ ഏതെങ്കിലും സംഭവിക്കാൻ സാധ്യതയുണ്ട്

(i) $f''(x)=0$ അല്ലെങ്കിൽ

(ii) $f''(x)$ ബിന്ദുവിൽ കാണുന്നത് സാധ്യമല്ല.

പരാമർശം

(1) $f''(c)$ കാണാവുന്നതായില്ലെങ്കിലും, $(c, f(c))$ വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദുവായിരിക്കാനുള്ള സാധ്യത ഉണ്ട് ഉദാഹരണമായി $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$ എന്ന വക്രത്തിൽ, $c=0$.

(2) $f''(c)=0$ എങ്കിൽ $(c, f(c))$ ഒരു വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദുവായി അല്ലാതെ ഇരിക്കുവാനും സാധ്യത ഉണ്ട് ഉദാഹരണമായി, $f(x)=x^4$ എന്ന വക്രത്തിൽ $c=0$.

(3) ഒരു വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദു നിശ്ചല ബിന്ദുവായിരിക്കണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി $f(x)=\sin x$ എങ്കിൽ, $f'(x)=\cos x$ കൂടാതെ $f''(x)=-\sin x$ മാത്രമല്ല ഇതിൽ നിന്ന് $(\pi, 0)$ ആയത് ഒരു വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദു. പക്ഷേ അത് $f(x)$ ൽ ഒരു നിശ്ചല ബിന്ദു അല്ല.

ഉദാഹരണം 7.57

$f(x)=(x-1)^3\cdot(x-5), x\in\mathbb{R}$ വക്രത്തിന്റെ വളവ് അന്തരാളങ്ങളെ കാണുക. മാത്രമല്ല ഏതെങ്കിലും വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദുക്കളുണ്ടെങ്കിൽ അവയെ കാണുക.

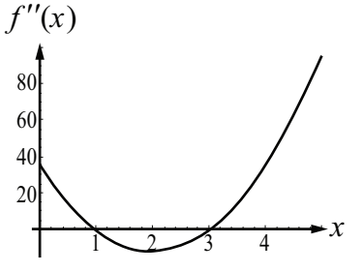
നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള ഫലനം 4 ാം കൃതി ബഹുപദ വ്യംജകമാണ്. ഇപ്പോൾ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1)^3+3(x-1)^2\cdot(x-5) \\ &= 4(x-1)^2\cdot(x-4) \\ f''(x) &= 4((x-1)^2+2(x-1)\cdot(x-4)) \\ &= 12(x-1)\cdot(x-3) \end{aligned}$$

ഇപ്പോൾ,

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x=1, x=3.$$



ചിത്രം 7.23

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 41 2/25/2023 11:58:28 AM

വളവ് അന്തരാളങ്ങളെ പട്ടിക 7.7 ൽ ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്നു.

അന്തരാളം	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
$f''(x)$ ന്റെ ചിഹ്നം	+	−	+
വളവ് സ്വഭാവം	മുകളിലേക്കുള്ള വളവ്	താഴേക്കുള്ള വളവ്	മുകളിലേക്കുള്ള വളവ്

പട്ടിക 7.7

$(-\infty,1)$ കൂടാതെ $(3,\infty)$ എന്നീ അന്തരാളങ്ങളിൽ മുകളിലേക്കുള്ള വളവാണ്.

$(1,3)$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ താഴേക്കുള്ള വളവാണ്.

$f''(x)$ ന്റെ ചിഹ്നം $x=3$, കൂടാതെ $x=1$ എന്നിവയിലൂടെ കടന്നുചെല്ലുമ്പോൾ ചിഹ്നം മാറുന്നു. അതിനാൽ $(1, f(1)) = (1,0)$ കൂടാതെ $(3, f(3)) = (3,-16)$ എന്നിവ $f''(x)$ എന്ന വക്രത്തിന്റെ വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദുക്കൾ ആണ് ചിഹ്നം മാറുന്നതിനെ അടുത്തുള്ള $f''(x)$ ന്റെ ഗ്രാഫിലൂടെ മനസ്സിലാക്കാം. ■

ഉദാഹരണം 7.58

$y = 3 + \sin x$ എന്ന വക്രത്തിന്റെ വളവ് അന്തരാളങ്ങളെ കാണുക.

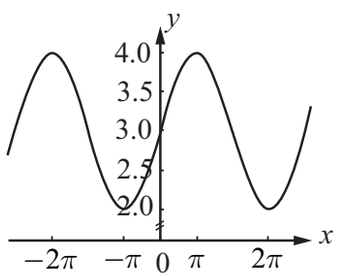
നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള ഫലനം 2π കാലയളവ് അന്തരാളമുള്ള ഫലനമാണ്. അതിനാൽ ഈ ഒരോ കാലയളവ് ആന്തരാളങ്ങളിലും നിശ്ചിത ബിന്ദുക്കൾ കൂടാതെ വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ടായിരിക്കും,

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \text{ കൂടാതെ } \frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x$$

ഇപ്പോൾ, $\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x = 0 \Rightarrow x = n\pi$.

$(-\pi,\pi)$ എന്ന അന്തരാളത്തിനെ $(-\pi,0)$ കൂടാതെ $(0,\pi)$ എന്ന് ഉപ അന്തരാളങ്ങളായി വിഭജിക്കാം.



ചിത്രം 7.24

$(-\pi,0)$, എന്ന അന്തരാളത്തിൽ $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ അതിനാൽ ഫലനം മുകളിലേക്കുള്ള വളവായിരിക്കും.

$(0,\pi)$, എന്ന അന്തരാളത്തിൽ $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ മാത്രമല്ല ഇതിൽ നിന്നും $(0,\pi)$, ൽ ഫലനം താഴേക്കുള്ള വളവാണ്. അതിനാൽ $(0,3)$ എന്നത് വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദുവാണ്. (ചിത്രം 7.25 ൽ കാണുക) $(n\pi,(n+1)\pi)$, എന്ന പൊതുവായ അന്തരാളങ്ങളെ പരിഗണിക്കുക. n ഒരു പൂർണ്ണ സംഖ്യാ. ഈ അന്തരാളത്തിൽ വളവ് സ്വഭാവത്തെ വിശകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ $(n\pi,3)$ എന്നിവയും വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദുക്കളാണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. ■

7.7.2 രണ്ടാമത്തെ അവകലജ പരീക്ഷണം ഉപയോഗിച്ച് അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങൾ

രണ്ടാമത്തെ അവകലജ പരീക്ഷണം: രണ്ടാമത്തെ അവകലജ പരീക്ഷണം എന്നത് നിർണ്ണായക ബിന്ദുക്കൾ , അത്യുച്ചം കൂടാതെ വളവ് സ്വഭാവം എന്നീ ആശയങ്ങളെ ബന്ധിപ്പിക്കുന്നതാണ്. മാത്രമല്ല ഇത് നിർണ്ണായക ബിന്ദുക്കളിൽ ഫലനത്തിന്റെ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ഉച്ചതമ, ന്യൂനതമ ബിന്ദുക്കളെ വിശകലനം ചെയ്യുന്നതിന് ഉപയോഗപ്രദമായ ഉപകരണമാണ്.

സിദ്ധാന്തം 7.13 (രണ്ടാമത്തെ അവകലജ പരീക്ഷണം)

c എന്ന നിർണ്ണായക ബിന്ദുവിൽ $f'(c) = 0$, എന്നും c ന്റെ പരിസരത്ത് $f'(x)$, കാണാവുന്നത് മാത്രമല്ല $f''(c)$ കാണാവുന്നത് $f''(c) < 0$ എങ്കിൽ c ൽ f ന്റെ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ഉച്ചതമത്തിൽ എത്തുന്നു c എങ്കിൽ $f''(c) > 0$.എങ്കിൽ ആയത് സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമത്തിൽ എത്തുന്നു. $f''(c) = 0$ എങ്കിൽ ഈ പരീക്ഷണത്തിൽ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങളെക്കുറിച്ച് പരീക്ഷണം വിവരദായകമല്ല.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 42 2/25/2023 11:58:37 AM

ഉദാഹരണം 7.59

$f(x) = x^4 + 32x$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങളെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$f'(x) = 4x^3 + 32 = 0 \Rightarrow x^3 = -8$$
$$\Rightarrow x = -2$$

മാത്രമല്ല $f''(x) = 12x^2$.

$f''(-2) > 0$, എന്നതിനാൽ $x = -2$ ൽ ഫലനം സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂന മൂല്യത്തിൽ എത്തുന്നു. സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമം $f(-2) = -48$ ആണ്. അതിനാൽ അത്യുച്ചം $(-2, -48)$. ■

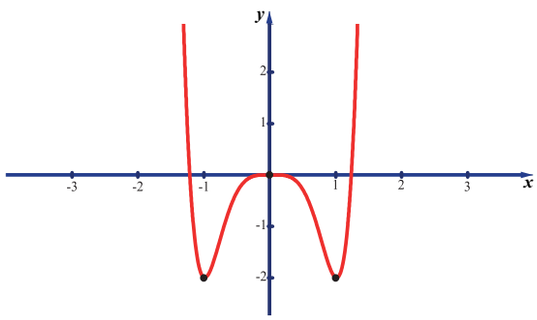
ഉദാഹരണം 7.60

$f(x) = 4x^6 - 6x^4$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങളെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

xനെ അടിസ്ഥാനമാക്കി അവകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ

$$f'(x) = 24x^5 - 24x^3$$
$$= 24x^3(x^2 - 1)$$
$$= 24x^3(x+1)(x-1)$$



ചിത്രം 7.25

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -1, 0, 1$. അതിനാൽ നിർണ്ണായക ബിന്ദുക്കൾ $x = -1, 0, 1$ ആണ്

ഇപ്പോൾ, $f''(x) = 120x^4 - 72x^2 = 24x^2(5x^2 - 3)$.

$\Rightarrow f''(-1) = 48$, $f''(0) = 0$, $f''(1) = 48$.

$f''(-1)$ കൂടാതെ $f''(1)$ എന്നിവ ധനമാണ്. അതിനാൽ രണ്ടാമത്തെ അവകലജ പരീക്ഷണ പ്രകാരം x = -1, 1 ൽ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമ മൂല്യങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. പക്ഷേ $x = 0$ എങ്കിൽ $f''(0) = 0$ രണ്ടാമത്തെ പരീക്ഷണം വിവരദായകമല്ല. അതിനാൽ എമുക്ക് ആദ്യത്തെ അവകലജ പരീക്ഷണം ഉപയോഗിക്കാം. ഏകതാനത സ്വഭാവം അന്തരാളങ്ങൾ പട്ടിക 7.8 ൽ ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്നു.

അന്തരാളം	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$ ന്റെ ചിഹ്നം	$-$	$+$	$-$	$+$
ഏകതാനത	കൃത്യമായി കുറയുന്നു	കൃത്യമായി വർദ്ധിക്കുന്നു	കൃത്യമായി കുറയുന്നു	കൃത്യമായി വർദ്ധിക്കുന്നു

പട്ടിക 7.8

ആദ്യത്തെ അവകലജ പരീക്ഷണ പ്രകാരം $x = -1$ ൽ $f(x)$, ആയത് സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂന തമത്തിൽ എത്തുന്നു. മാത്രമല്ല സ്ഥലത്തെ ന്യൂനതമം -2 ആയിരിക്കും $x = 0$ ൽ $f(x)$ ആയത് സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ഉച്ചതമത്തിൽ എത്തുന്നു. മാത്രമല്ല സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ഉച്ചതമം 0 ആയിരിക്കും $x = 1$ ൽ $f(x)$ ആയത് സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമത്തിൽ എത്തുന്നു. മാത്രമല്ല സ്ഥലത്തെ ന്യൂനതമം -2 ആയിരിക്കും. ■

പരാമർശം

രണ്ടാമത്തെ അവകലജം അപ്രത്യക്ഷമാക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങളെ കുറിച്ച് വിവരങ്ങൾ ലഭ്യമാവില്ല. അതിനാൽ ഈ സാഹചര്യങ്ങളിൽ ആദ്യത്തെ അവകലജ പരീക്ഷണം ഉപയോഗിക്കാം.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 43 2/25/2023 11:58:45 AM

ഉദാഹരണം 7.61

x^2y^2 ന്റെ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ഉച്ചതമ കൂടാതെ ന്യൂനതമ മൂല്യങ്ങളെ $x+y=10$ എന്ന നേർരേഖയിൽ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള ഫലനത്തെ നമുക്ക് $f(x)=x^2(10-x)^2$ എന്ന് എഴുതാം. ഇപ്പോൾ,

$$f(x) = x^2(100-20x+x^2) = x^4-20x^3+100x^2$$

അതിനാൽ, $$f'(x) = 4x^3-60x^2+200x = 4x(x^2-15x+50)$$

$$f'(x) = 4x(x^2-15x+50)=0 \Rightarrow x=0,\ 5,\ 10$$

മാത്രമല്ല $$f''(x) = 12x^2-120x+200$$

$f(x)$ ന്റെ നിശ്ചല ബിന്ദുക്കൾ $x=0,\ 5,\ 10$ എന്നിവയാണ്. ഈ സംഖ്യകളിൽ $f''(x)$ ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ ക്രമേണ $200, -100$ കൂടാതെ 200 ആയിരിക്കും. $x=0$ ൽ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമ മൂല്യം $f(0)=0$ ആയിരിക്കും. $x=5$, ൽ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ച മൂല്യം $f(5)=625$ ആണ്. $x=10$ ൽ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമ മൂല്യം, $f(10)=0$ ആയിരിക്കും.

അഭ്യാസം 7.7

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഫലനത്തിന് വളവ് അന്തരാളങ്ങൾ കൂടാതെ വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദുക്കൾ കാണുക:
   (i) $f(x)=x(x-4)^3$ (ii) $f(x)=\sin x+\cos x,\ 0<x<2\pi$ (iii) $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$
2. രണ്ടാമത്തെ അവകലജ പരീക്ഷണം ഉപയോഗിച്ച് സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങള കാണുക :
   (i) $f(x)=-3x^5+5x^3$ (ii) $f(x)=x\log x$ (iii) $f(x)=x^2e^{-2x}$
3. $f(x)=4x^3+3x^2-6x+1$ എന്ന ഫലനത്തിന് ഏകതാനത അന്തരാളങ്ങൾ, സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങൾ, വളവ് ആന്തരാളങ്ങൾ കൂടാതെ വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദുക്കൾ കാണുക.

7.8 ഉത്തമീകരിക്കൽ പ്രശ്നങ്ങളുടെ പ്രയോഗങ്ങൾ

ഉത്തമികരിക്കൽ പ്രശ്നങ്ങൾ എന്നത് അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങളെ (ഉച്ചതമം അല്ലെങ്കിൽ ന്യൂനതമം) ചില വ്യവസ്ഥകളോടെ കണ്ടെത്തുന്ന പ്രക്രിയയാണ്.

അത്യുച്ച അല്ലെങ്കിൽ ഉത്തമീകരിക്കൽ പ്രശ്നങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്ന രീതി.

ഘട്ടം 1 : ഉചിതമായ ചിത്രം വരച്ച് പ്രശ്നത്തിന് പ്രസക്തമായ അളവുകൾ അടയാളപ്പെടുത്തുക.

ഘട്ടം 2 : ഏത് അളവാണെങ്കിലും വർദ്ധിപ്പിക്കുന്നതിനോ, കുറയ്ക്കുന്നതിനോ ഉള്ള സമീകരണം കണ്ടെത്തുക.

ഘട്ടം 3 : തന്നിരിക്കുന്ന വ്യവസ്ഥകൾക്കനുസരിച്ച് അളവിനെ വർദ്ധിപ്പിക്കുകയോ, കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്യുക .

ഘട്ടം 4 : പ്രശ്നത്തിൽ തന്നിരിക്കുന്ന വ്യവസ്ഥകൾക്കനുസരിച്ച് ചരത്തിന് ഉചിതമായ അന്തരാളങ്ങൾ കണ്ടെത്തുക.

ഘട്ടം 5 : അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതിയിലൂടെ (ഉച്ചതമം അല്ലെങ്കിൽ ന്യൂനതമം അത്യുച്ചങ്ങൾ ആദ്യത്തെ അവകലജ പരീക്ഷണം, അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടാമത്തെ അവകലജ പരീക്ഷണം) ഉച്ചതമം അല്ലെങ്കിൽ ന്യൂനതമം കണ്ടെത്തുക.

ഉദാഹരണം 7.62

12 ചതുരശ്ര മാത്രകൾ വിസ്തീർണ്ണമുള്ള കനം കുറഞ്ഞ തകിട് ഞങ്ങൾക്ക് ഉണ്ട്. ബാഹ്യമായി അതിന്റെ മൂലകളിൽ ചെറിയ സമചതുരങ്ങൾ മുറിച്ച് മടക്കുന്നതിലൂടെ തുറന്ന പെട്ടികൾ രൂപീകരിക്കാൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. ഞങ്ങളുടെ ചോദ്യം എന്താണെന്നാൽ , ഏത് മുറിക്കൽ പരമാവധി വ്യാപ്തം രൂപീകരിക്കും?

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 44 2/25/2023 11:58:52 AM

നിർദ്ധാരണം

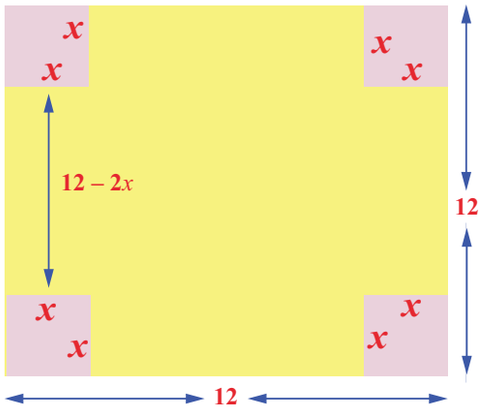
x = മുറിച്ചെടുക്കുന്ന ഓരോ സമചതുരങ്ങളുടെ നീളം.

V = മടക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന പെട്ടിയുടെ വ്യാപ്തം എന്നിരിക്കട്ടെ.

നീളത്തിന്റെ രണ്ട് മൂലകളിൽ നിന്നും x നീളമുള്ള സമചതുരങ്ങൾ മുറിച്ചതിന് ശേഷമുള്ള നീളം $12-2x$. മടക്കിയ ശേഷം പെട്ടിയുടെ ആഴം x, അതിനാൽ വ്യാപ്തം $V = x\times(12-2x)^2$ ആകുന്നു. $x=0$ അല്ലെങ്കിൽ 6 ൽ വ്യാപ്തം പൂജ്യമാകുന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. അതിനാൽ, $V = x\times(12-2x)^2, x\in(0,6)$.

ഇപ്പോൾ, $$\frac{dV}{dx} = (12-2x)^2 - 4x(12-2x)$$
$$= (12-2x)(12-6x).$$

$\frac{dV}{dx}=0$ എന്നതിനാൽ $x=2,6$ $6\notin(0,6)$ എന്നതിനാൽ $x = 2, \in (0, 6)$ എന്നത് മാത്രമാണ് നിശ്ചിത ബിന്ദു. മാത്രമല്ല $\frac{dV}{dx}$ ന്റെ ചിഹ്നം $x=2$ ലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുമ്പൊൾ ധനത്തിൽ നിന്നും ഋണത്തിലേക്ക് മാറുന്നു. അതിനാൽ, $x=2$ ൽ V ആയത് സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ഉച്ചതമത്തിൽ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ഉച്ചതമത്തിൽ എത്തും. ഈ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ഉച്ചതമ വ്യാപ്തം $V=128$ ച. മാത്രകൾ അതുകൊണ്ട് പരമാവധി വ്യാപ്തത്തിന് $x=2$ മാത്രകൾ മുറിക്കണം.



ചിത്രം 7.26

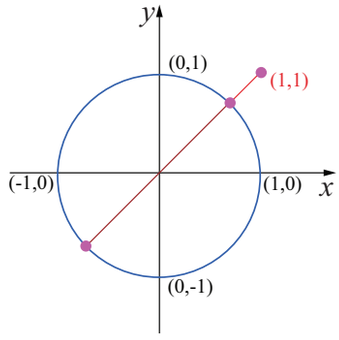
ഉദാഹരണം 7.63

$(1,1)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും $x^2+y^2=1$ എന്ന ഏക മാത്ര വൃത്തത്തിന് മുകളിലുള്ള ഏത് ബിന്ദു വളരെ അടുത്തും, ഏത് ബിന്ദു വളരെ ദൂരെയുമായിരിക്കും.

നിർദ്ധാരണം

$(1,1)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ നിന്നും ഏതൊരു ബിന്ദു (x,y) ന് ഉള്ള ദൂരം $d=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$. d ൽ കണക്കാക്കുന്നതിന് പകരം നമ്മുടെ സൗകര്യാർതം $D=d^2=(x-1)^2+(y-1)^2$ ൽ കണക്കാക്കാം. ഇവിടെ വ്യവസ്ഥ $x^2+y^2=1$. ആണ്. ഇപ്പോൾ, $\frac{dD}{dx}=2(x-1)+2(y-1)\times\frac{dy}{dx}$. ഇവിടെ, $\frac{dy}{dx}$ നെ $x^2+y^2=1$ ൽ അവകലനം ചെയ്ത് കണക്കാക്കാം. അതിനാൽ $2x+2y\frac{dy}{dx}=0$, $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഇതിനെ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $$\frac{dD}{dx}=2(x-1)+2(y-1)\left(-\frac{x}{y}\right)$$
$$=\frac{2[xy-y-xy+x]}{y}$$
$$=2\left[\frac{x-y}{y}\right]=0$$
$$\Rightarrow x=y$$



ചിത്രം 7.27

(x,y) ആയത് $x^2+y^2=1$ എന്ന വൃത്തത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത് കൊണ്ട് $2x^2=1$, $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. അതിനാൽ അത്യുച്ച ദൂരങ്ങൾ, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ എന്ന ബിന്ദുക്കളിൽ കിട്ടുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 45 2/25/2023 11:59:01 AM

രണ്ടാമത്തെ അവകലജ പരീക്ഷണപ്രകാരം,

$$\frac{d^2D}{dx^2} = 2\frac{y^2+x^2}{y^3}.$$

മാത്രമല്ല $\left(\frac{d^2D}{dx^2}\right)_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} > 0$; $\left(\frac{d^2D}{dx^2}\right)_{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} < 0$.

വളരെ ദൂരത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കൾ ക്രമേണ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ കൂടാതെ $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ എന്നിവയാണ്.

അതുകൊണ്ട് വളരെ അടുത്ത ദൂരം കൂടാതെ ഏറ്റവും കൂടിയ ദൂരം $\sqrt{2}-1$ കൂടാതെ $\sqrt{2}+1$ എന്നിവയാണ്.

ഉദാഹരണം 7.64

ഒരു സ്റ്റീൽ പ്ലാന്റിന് ഒരു ദിവസം കുറഞ്ഞ ഗ്രേഡ് സ്റ്റീൽ x ടണ്ണും ഉയർന്ന ഗ്രേഡ് സ്റ്റീൽ y ടണ്ണും ഉല്പാദിപ്പിക്കാൻ കഴിയും. ഇവിടെ $y=\frac{40-5x}{10-x}$ കുറഞ്ഞ ഗ്രേഡ് സ്റ്റീലിന്റെ വിപണി വില ഉയർന്ന ഗ്രേഡ് ഡീലിന്റെ പകുതിയാണെങ്കിൽ പരമാവധി വില കുറഞ്ഞ ഗ്രേഡ്, ഉയർന്ന ഗ്രേഡ് സ്റ്റീലിന് ലഭിക്കാൻ ഉചിതമായ ഉല്പാദനം എങ്ങനെയായിരിക്കണം.

നിർദ്ധാരണം

ഒരു ടൺ കുറഞ്ഞ ഗ്രേഡ് സ്റ്റീലിന്റെ വില ₹p എന്നിരിക്കട്ടെ അതിനാൽ ഒരു ടൺ ഉയർന്ന ഗ്രേഡ് സ്റ്റീലിന്റെ വില ₹$2p$ ആയിരിക്കും.

പ്രതിദിനം ആകെ വരുമാനം $R = px+2py = px+2p\left(\frac{40-5x}{10-x}\right)$. അതുകൊണ്ട് R . നെ വർദ്ധിപ്പിക്കണം R നെ x, അടിസ്ഥാനമാക്കി അവകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ

$$R = p\left(\frac{80-x^2}{10-x}\right)$$

$$\frac{dR}{dx} = p\left(\frac{x^2-20x+80}{(10-x)^2}\right)$$

$$\frac{d^2R}{dx^2} = -\frac{40p}{(10-x)^3}$$

ഇപ്പോൾ, $\frac{dR}{dx} = 0 \Rightarrow x^2-20x+80=0$ മാത്രമല്ല $x = 10\pm 2\sqrt{5}$

$x=10-2\sqrt{5}$, $\frac{d^2R}{dx^2} < 0$ എന്ന് കിട്ടുന്നു

മാത്രമല്ല ഇതിൽ നിന്ന് R ഉച്ചതമം $x = 10-2\sqrt{5}$ ൽ എത്തുന്നു. എങ്കിൽ $y = 5-\sqrt{5}$. ആണ്. അതുകൊണ്ട് കുറഞ്ഞ ഗ്രേഡ്, ഉയർന്ന ഗ്രേഡ് സ്റ്റീൽ പ്രതിദിനം ക്രമേണ $10-2\sqrt{5}$, $5-\sqrt{5}$ ടൺകൾ എന്ന രീതിയിൽ ഉൽപാദിപ്പിക്കണം.

ഉദാഹരണം 7.65

തന്നിരിക്കുന്ന വിസ്തീർണ്ണമുള്ള ദീർഘചതുരങ്ങളിൽ സമചതുരം മാത്രമാണ് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ചുറ്റളവുള്ളത് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ദീർഘചതുരത്തിന്റെ x, y വശങ്ങൾ x, y എന്നിരിക്കട്ടെ അതിനാൽ ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $xy = k$. (തന്നിരിക്കുന്നു) ദീർഘചതുരത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് $2(x+y)$. നമുക്ക് $2(x+y)$ എന്ന വ്യവസ്ഥയിലൂടെ കുറയ്ക്കണം $P(x) = 2\left(x+\frac{k}{x}\right)$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 46 2/25/2023 11:59:09 AM

$$P'(x) = 2\left(1-\frac{k}{x^2}\right)$$

$$P'(x) = 0 \ \left(1-\frac{k}{x^2}\right)=0$$

അതിനാൽ $x = \sqrt{k}$

$x=\sqrt{k}$ എന്ന് $xy=k$ ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $y=\sqrt{k}$. അതിനാൽ സമചതുരം മാത്രമാണ് ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ചുറ്റളവുള്ളത്.

അഭ്യാസം 7.8

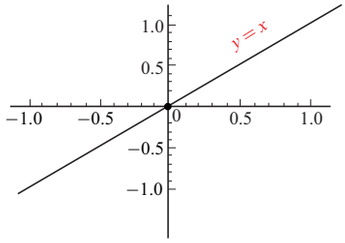
1. രണ്ട് ധനസംഖ്യകളുടെ തുക 12 കൂടാതെ അവയുടെ ഗുണനഫലം ഉച്ചതമം എങ്കിൽ ആ സംഖ്യകളെ കാണുക.
2. രണ്ട് ധനസംഖ്യകളുടെ ഗുണനഫലം 20 കൂടാതെ അവയുടെ തുക ന്യൂനതമം എങ്കിൽ ആ സംഖ്യകളെ കാണുക.
3. x^2+y^2 ന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ മൂല്യത്തിനെ $x+y=10$ എന്നതിലൂടെ കാണുക.
4. ഒരു പൂന്തോട്ടം ദീർഘചതുരാകൃതിയിൽ നിർമ്മിക്കുകയും കമ്പി വേലി ഉപയോഗിച്ച് സംരക്ഷിക്കുകയും വേണം. 40 മീ കമ്പിവേലിയിലൂടെ സംരക്ഷിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ആ പൂന്തോട്ടത്തിന്റെ ഉച്ചതമ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.
5. ഒരു ദീർഘചതുരാകൃതിയിലുള്ള പേജിൽ 24 സെ.മീ^{2} അച്ചടിച്ചിരിക്കുന്നു. പേജിന്റെ മുകളിലും താഴെയുള്ള മാർജിനുകൾ 1.5 സെ.മീ പേജിന്റെ മറ്റ് വശങ്ങളിലെ മാർജിനുകൾ 1 സെ.മീറ്ററുമാണ്. പേജിന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ വിസ്തീർണ്ണത്തിൽ അച്ചടി അടങ്ങിയിരിക്കണം എങ്കിൽ അതിന്റെ നീളം, വീതി എന്നിവയുടെ അളവുകൾ എന്തായിരിക്കണം.
6. ഒരു കർഷകൻ ഒരു നദിനോട് ചേർന്നുള്ള ദീർഘ ചതുരാകൃതിയിലുള്ള മേച്ചിൽപ്പുറത്ത് വേലിസ്ഥാപിക്കാൻ പദ്ധതിയിടുന്നു. കന്നുകാലികൾക്ക് ആവശ്യമായ പുല്ല് നൽകുന്നതിന് $1,80,000$ ച.മീറ്റർ മേച്ചിൽപ്പുറം അടങ്ങിയിരിക്കണം. നദിയിനോടൊപ്പം വേലി ആവശ്യമില്ല വേലി നിർമ്മിക്കുന്നതിന് ആവശ്യമായ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ കമ്പിയുടെ നീളം എത്ര?
7. 10 സെ.മീ വ്യാസാർദ്ധമുള്ള വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ ആലേഖനം ചെയ്യാവുന്ന പരമാവധി വിസ്തീർണ്ണമുള്ള ദീർഘചതുരത്തിന്റെ അളവുകൾ കാണുക.
8. തന്നിരിക്കുന്ന ചുറ്റളവുള്ള ദീർഘചതുരങ്ങളിൽ സമചതുരത്തിന് മാത്രമാണ് പരമാവധി വിസ്തീർണ്ണമുണ്ടെന്ന് തെളിയിക്കുക.
9. r സെ.മീ വ്യാസാർദ്ധമുള്ള അർദ്ധവൃത്തത്തിൽ ആലേഖനം ചെയ്യാൻ കഴിയുന്ന ഏറ്റവും വലിയ ദീർഘ ചതുരത്തിന്റെ അളവുകൾ കാണുക.
10. ഒരു ഉല്പാദകർ ഒരു സമചതുരാകൃതിയിൽ ആധാരവും 108 സെ.മീ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണമുള്ള ഒരു തുറന്നപെട്ടി നിർമ്മിക്കുന്നതിന് ആഗ്രഹിക്കുന്നു. പരമാവധി വ്യാപ്തത്തിനായി പെട്ടിയുടെ അളവുകൾ കാണുക.
11. ഒരു വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $V=\pi r^2 h$. കൂടാതെ $r+h=6$ എങ്കിൽ വ്യാപ്തത്തിന്റെ ഉച്ചതമം, ന്യൂനതമം എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.
12. വ്യാസാർദ്ധം a സെ.മീ കൂടാതെ ഉയരം b സെ.മീ ഉള്ള ഒരു പൊള്ളയായ വൃത്തസ്തൂപിക ഒരു മേശയിൽ സ്ഥാപിച്ചിരിക്കുന്നു. അതിന്റെ അടിയിൽ മറയ്ക്കാൻ കഴിയുന്ന ഏറ്റവും വലിയ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തത്തേക്കാൾ $\frac{4}{9}$ മടങ്ങ് എന്ന് തെളിയിക്കുക

7.9 പ്രതിസമത കൂടാതെ അനന്തതാസ്പർശകങ്ങൾ

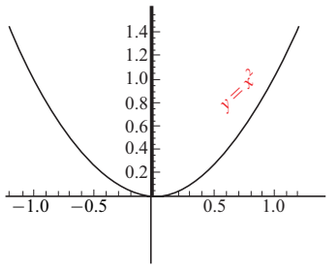
7.9.1 പ്രതിസമത

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വക്രങ്ങൾ ഓരൊന്നിനും ചില പ്രത്യേക ഗുണങ്ങൾ ഉണ്ട് അതായത് ഒരു ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കിയോ ഒരു രേഖയെ ആധാരമാക്കിയോ പ്രതിസമതയുള്ളതിനെ ശ്രദ്ധിക്കുക.

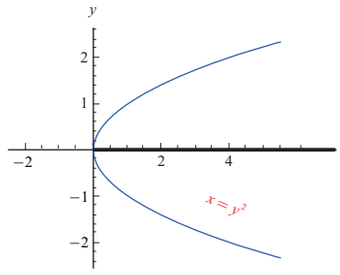
12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 47 2/25/2023 11:59:12 AM



ചിത്രം 7.28



ചിത്രം 7.29



ചിത്രം 7.30

നമുക്ക് ഇപ്പോൾ യഥാവിധി പ്രകാരം പ്രതിസമത നിർവ്വചിക്കാം :

ഒരു ചിത്രം അല്ലെങ്കിൽ ഒരു വക്രം ഒരു രേഖയെ ആധാരമാക്കി മറ്റൊരു ചിത്രത്തിന്റെ പ്രതിഫലനമായി കാണപ്പെടുന്നുവെങ്കിൽ ആ രേഖയെ ആധാരമാക്കി ചിത്രം അല്ലെങ്കിൽ വക്രം പ്രതിസമതയിലാണെന്ന് പറയാം. ആ രേഖയെ പ്രതിസമത രേഖ എന്ന് പറയുന്നു.

ഒരു വക്രം ഒരു ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി θ കോൺ ചുറ്റുമ്പോൾ വക്രത്തിന് മാറ്റമില്ല എങ്കിൽ ആ വക്രത്തിന് ആ ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി θ കോൺ പ്രതിസമത ഉണ്ടെന്ന് പറയുന്നു.

ഒരു വക്രം അനേകം രേഖയുള്ള ആധാരമാക്കി പ്രതിസമത ഉള്ളതായിരിക്കും പ്രത്യേകിച്ചു നമുക്ക് സമാക്ഷങ്ങളുടെ പ്രതിസമത കൂടാതെ മൂല ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി പ്രതിസമത കൂടാതെ മൂല ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി പ്രതിസമത എന്നിവയെ കരുതുക $f(x, y) = 0$ ഗണിതശാസ്ത്രപരമായി, ഒരു വക്രം എന്ന് പറയപ്പെടുന്നു.

- **y-അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കി പ്രതിസമത** $f(x, y) = f(-x, y)$ $\forall x, y$ അല്ലെങ്കിൽ (x, y) ഉം $(-x, y)$ ഉം വക്രത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കളാണെങ്കിൽ y-അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കി പ്രതിസമതയിലാണ്. y-അക്ഷത്തിന് മുകളിൽ ഒരു കണ്ണാടി വയ്ക്കുകയാണെങ്കിൽ, കണ്ണാടിയുടെ ഒരു വശത്ത് വളവിന്റെ ഭാഗം കണ്ണാടിയുടെ മറുവശത്തുള്ള വക്രത്തിന്റെ ഭാഗത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും.

- **x-അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കി പ്രതിസമത** $f(x, y) = f(x, -y)$ $\forall x, y$ അല്ലെങ്കിൽ (x, y) ഉം $(x, -y)$ ഉം വക്രത്തിലുള്ള ബിന്ദുക്കളാണെങ്കിൽ x-അക്ഷത്തെ ആധാരമാക്കി പ്രതിസമതയിലാണ്. നമ്മൾ x-അക്ഷത്തിന് മുകളിൽ ഒരു കണ്ണാടി വയ്ക്കുകയാണെങ്കിൽ കണ്ണാടിയുടെ ഒരു വശത്ത് വളവിന്റെ ഭാഗം കണ്ണാടിയുടെ മറുവശത്തുള്ള വക്രത്തിന്റെ ഭാഗത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും.

- **മൂല ബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി പ്രതിസമത** $f(x, y) = f(-x, -y)$ $\forall x, y$ എങ്കിൽ വക്രം മൂലബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി പ്രതിസമത ആകുന്നു. അല്ലെങ്കിൽ (x, y) ആയത് വക്രത്തിലുള്ള ബിന്ദു എങ്കിൽ $(-x, -y)$. ഉം വക്രത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ വക്രം മൂലബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി പ്രതിസമത ആകുന്നു. അതായത് മൂലബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി $180°$ ചുറ്റുമ്പോൾ വക്രത്തിന് മാറ്റമില്ല.

ഉദാഹരണമായി വക്രങ്ങൾ $x = y^2, y = x^2$ കൂടാതെ $y = x$ എന്നിവ ക്രമേണ x-അക്ഷം, y-അക്ഷം കൂടാതെ മൂലബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി പ്രതിസമതയിലാണ്.

7.9.2 അനന്തതാസ്പർശകങ്ങൾ

$y = f(x)$ എന്ന വക്രം ∞ ൽ സ്പർശിക്കുമ്പോൾ, അത് അനന്തതാസ്പർശകം ആകുന്നു. അതായത് വക്രത്തിലെ ബിന്ദു അനന്തതയെ സമീപിക്കുമ്പോൾ വക്രവും നേർരേഖയും തമ്മിലുള്ള ദൂരം പൂജ്യമായിരിക്കും, മൂന്ന് തരത്തിലുള്ള അനന്തതാ സ്പർശകങ്ങൾ ഉണ്ട്. അവ

1. **തിരശ്ചീന അനന്തതാസ്പർശകം,** എന്നത് x-അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായിരിക്കും $y = f(x)$ എന്ന വക്രത്തിന് $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ അല്ലെങ്കിൽ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$ എങ്കിൽ $y = L$ എന്ന രേഖ തിരശ്ചീന അനന്തതാസ്പർശകം ആകുന്നു.

2. **ലംബ അനന്തതാസ്പർശകം** എന്നത് y-അക്ഷത്തുന് സമാന്തരമായിരിക്കും $y = f(x)$ എന്ന വക്രത്തിന് $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$ അല്ലെങ്കിൽ $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ എങ്കിൽ $x = a$ എന്ന രേഖ, ലംബ അനന്തതാസ്പർശകം ആയിരിക്കും.

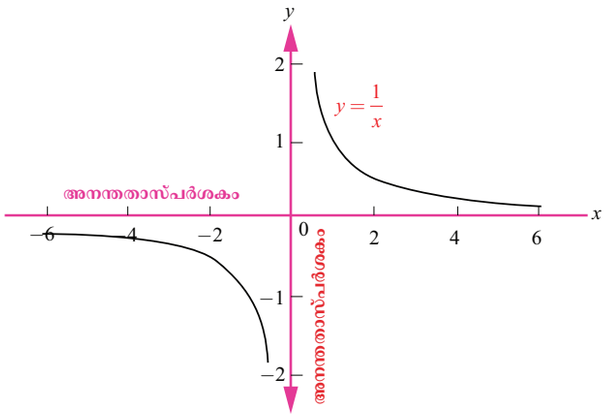
3. **ചരിഞ്ഞ അനന്തതാസ്പർശകം,** ചരിഞ്ഞ അനന്തതാസ്പർശകം ലഭിക്കുന്നതിന് ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ കൃതി ഛേദത്തിലുള്ള ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ കൃതിയേക്കാൾ കൂടുതലായിരിക്കണം.

   ചരിഞ്ഞ അനന്താസ്പർശകം കണ്ടെത്തുന്നതിന് അംശത്തെ ഛേദം കൊണ്ട് ദീർഘഹരണ രീതി അല്ലെങ്കിൽ സിന്തറ്റിക് ഹരണരീതി ഉപയോഗിച്ച് ഹരിക്കുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 48 2/25/2023 11:59:20 AM

ഉദാഹരണം 7.66

$f(x)=\frac{1}{x}$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ അനന്തതാസ്പർശനം കാണുക.



ചിത്രം 7.31

നിർദ്ധാരണം

$\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$ കൂടാതെ $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty$ അതിനാൽ ആവശ്യമായ ലംബ അനന്തതാസ്പർശകം $x=0$ അല്ലെങ്കിൽ y -അക്ഷം ആയിരിക്കും.

ഈ വക്രം രണ്ട് സമാക്ഷങ്ങളെ ആധാരമാക്കല പ്രതിസമതയിലായിരിക്കും എന്നതിനാൽ, $y=0$ അല്ലെങ്കിൽ x -അക്ഷം ഒരു അനന്തതാസ്പർശകം ആകുന്നു. അതിനാൽ ഈ (ദീർഘ ചതുരാകൃതിയായ ഹൈപ്പർബോള) വക്രത്തിന് തിരശ്ചീന കൂടാതെ ലംബ അനന്തതാസ്പർശകങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. ■

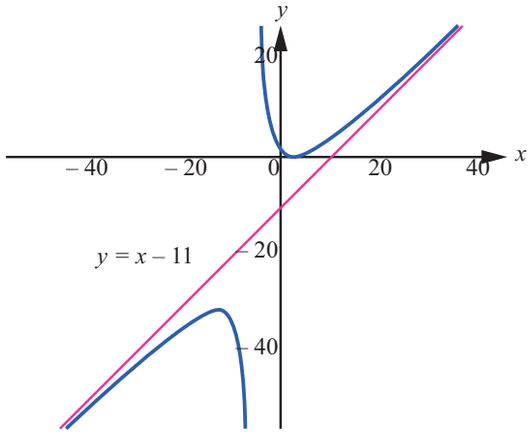
ഉദാഹരണം 7.67

$f(x)=\frac{x^2-6x+7}{x+5}$ എന്ന ഫലനത്തിന് ചരിഞ്ഞ അനന്തതാ സ്പർശകം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ചരിഞ്ഞ അനന്തതാസ്പർശകം കാണുന്നതിന് അംശത്തിലുള്ള ബഹുപദവ്യംജകത്തിന്റെ കൃതി (കൃതി 2) ഛേദത്തിലുള്ള ബഹുപദ വ്യംജകത്തിന്റെ കൃതി (കൃതി 1) കൂടുതലായത് കൊണ്ട് അംശത്തെ ഛേദം കൊണ്ട് ഹരിക്കുക. ദീർഘഹരണ രീതി ഉപയോഗിച്ച് ഹരിക്കാം:

$$\begin{array}{r} x-11 \\ x+5\overline{)\,x^2-6x+7} \\ \underline{x^2+5x} \\ -11x+7 \\ \underline{-11x-55} \\ 62 \end{array}$$



ചിത്രം 7.32

ഇവിടെ ശിഷ്ടം കാണണമെന്നില്ല. അതുകൊണ്ട് ദീർഘഹരണം പൂർത്തീകരിക്കണമെന്നില്ല. നമുക്ക് രേഖയുടെ പദങ്ങൾ മാത്രമാണ് ആവശ്യം. അതുകൊണ്ട് $y=x-11$ ചരിഞ്ഞ അനന്തതാസ്പർശകം ആകുന്നു. ■

ഈ ഗ്രാഫിൽ നിന്നും വക്രവും അനന്തതാസ്പർശകവും $y=x-11$ ഉം പരസ്പരം അടുക്കുന്നു. പക്ഷേ ഛേദിക്കുന്നില്ല എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക:

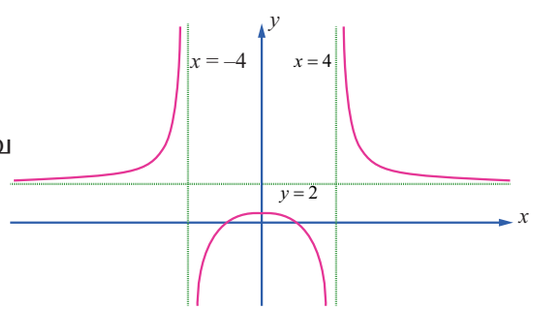
ഉദാഹരണം 7.68

$f(x)=\frac{2x^2-8}{x^2-16}$ എന്ന വക്രത്തിന്റെ അനന്തതാസ്പർശങ്ങൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$\lim\limits_{x\to -4^+}\frac{2x^2-8}{x^2-16}=-\infty$ കൂടാതെ $\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{2x^2-8}{x^2-16}=\infty$.

അതിനാൽ $x=-4$ കൂടാതെ $x=4$ എന്നിവ ലംബ അനന്തതാസ്പർശകങ്ങൾ ആകുന്നു.



ചിത്രം 7.33

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-8}{x^2-16}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{8}{x^2}}{1-\frac{16}{x^2}}=2$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 49 2/25/2023 11:59:26 AM

കൂടാതെ $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2-8}{x^2-16}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2-\frac{8}{x^2}}{1-\frac{16}{x^2}}=2$

എന്നിവയിൽ നിന്ന്, $y=2$ എന്നത് ഒരു തിരശ്ചീന അനന്തതാസ്പർശകം ആണ് നമുക്ക് ഇതിനെ അംശത്തിനെ ഛേദം കൊണ്ട് ഹരിച്ചും കണ്ടുപിടിക്കാം.

7.10 വക്രങ്ങളുടെ രേഖാചിത്രം

നമുക്ക് വക്രത്തിനെ കൈ കൊണ്ടോ ഏതെങ്കിലും ഗ്രാഫിംഗ് സോഫ്റ്റ് വെയർ വഴിയോ വരയ്ക്കുമ്പോൾ മുഴുവൻ വക്രവും വരയ്ക്കാൻ കഴിയില്ല. വക്രത്തിന്റെ ഒരു ഭാഗം മാത്രമേ വരയ്ക്കാൻ കഴിയൂ. അതിനാൽ വക്രത്തിന്റെ ഏത് ഭാഗമാണ് നമുക്ക് കാണിക്കേണ്ടത്, ആ ഭാഗം എങ്ങനെ തീരുമാനിക്കണം എന്നതാണ് ഒരു നിർണ്ണായക ചോദ്യം. നമുക്ക് വക്രത്തിനെ നല്ല രീതിയിൽ വരയ്ക്കുന്നതിന് ആവശ്യമായ നല്ലൊരു ദീർഘചതുരം നിർണ്ണയിക്കുന്നതിന് ചില മാർഗ്ഗ നിർദ്ദേശങ്ങൾ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു. അവ:

(i) ഫലനത്തിന്റെ മണ്ഡലം കൂടാതെ പരിസരം.
(ii) വക്രത്തിന്റെ അന്തഃ ഖണ്ഡങ്ങൾ (ഉണ്ടെങ്കിൽ).
(iii) ഫലനത്തിന്റെ നിശ്ചല ബിന്ദുക്കൾ.
(iv) സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങൾ.
(v) വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദുക്കൾ
(vi) വളവ് അന്തരാളങ്ങൾ .
(vii) വക്രത്തിന്റെ അനന്തതാസ്പർശകങ്ങൾ (ഉണ്ടെങ്കിൽ)

ഉദാഹരണം 7.69

$y=f(x)=x^2-x-6$ എന്ന വക്രം വരക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിരിക്കുന്ന ഫലനത്തിന്റെ ഘടകങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുമ്പോൾ $y=f(x)=(x-3)(x+2)$.

(1) ഫലനം $f(x)$ ന്റെ മണ്ഡലം ഒരു പൂർണ്ണ വാസ്തവിക സംഖ്യ രേഖയാണ്.

(2) $y=0$ എന്നത് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ $x=-2,3$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. അതിനാൽ x-അന്തഃഭാഖണ്ഡങ്ങൾ $(-2,0)$ കൂടാതെ $(3,0)$. $x=0$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ $y=-6$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. അതിനാൽ y അന്തഃമഖണ്ഡം $(0,-6)$.

(3) $f'(x)=2x-1$ കൂടാതെ ഇതിൽ നിന്നും $x=\dfrac{1}{2}$ വക്രത്തിന്റെ നിർണ്ണായക ബിന്ദുക്കൾ സ്ഥിതി ചെയ്യും.

(4) $f''(x)=2>0,\forall x$ അതിനാൽ $x=\dfrac{1}{2}$ ൽ വക്രത്തിന്റെ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമത്തിൽ എത്തുന്നു. ഇതിന്റെ മൂല്യം $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{25}{4}$.

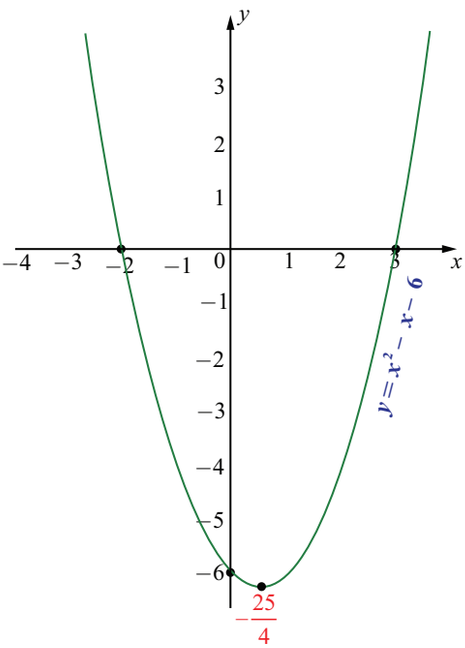
(5) ഫലനത്തിന്റെ പരിസരം $y\geq-\dfrac{25}{4}$

(6) $f''(x)=2>0,\forall x$ എന്നതിനാൽ ഈ ഫലനത്തിന്റെ വാസ്തവിക സംഖ്യ നേർരേഖ പൂർണ്ണമായും മുകളിലേക്കുള്ള അകവളവായിരിക്കും.

(7) $f(x)=2\neq0,\forall x$ അതിനാൽ വക്രത്തിന് വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദുക്കൾ ഇല്ല.

(8) വക്രത്തിന് അനന്തതാസ്പർശങ്ങൾ ഇല്ല.

വക്രത്തിന്റെ ഏകദേശ രേഖാ ചിത്രം വലതുവശത്ത് കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

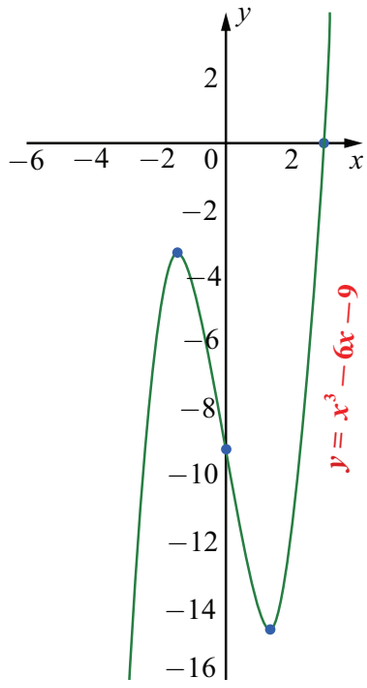


ചിത്രം 7.34

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 50 2/25/2023 11:59:32 AM

ഉദാഹരണം 7.70

$y = f(x) = x^3 - 6x - 9$ എന്ന വക്രം വരക്കുക.



ചിത്രം 7.35

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള ഫലനത്തിന്റെ ഘടകങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുമ്പോൾ

$$y = f(x) = (x-3)(x^2+3x+3)\,.$$

(1) ഫലനം $f(x)$ ന്റെ മണ്ഡലം കൂടാതെ പരിസരം എന്നിവ പൂർണ്ണ വാസ്തവിക സംഖ്യ നേർരേഖയാണ്.

(2) $y = 0$, എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ $x = 3$. മറ്റ് രണ്ട് മൂല്യങ്ങളും സാങ്കല്പികമാണ്. അതിനാൽ x-അന്തഃഖണ്ഡം $(3,0)$. ആകുന്നു $x = 0$, ആയാൽ $y = -9$. അതിനാൽ y-അന്തഃഖണ്ഡം $(0,-9)$.

(3) $f'(x) = 3(x^2 - 2)$ കൂടാതെ ഇതിൽ നിന്നും നിർണ്ണായക ബിന്ദുക്കൾ $x = \pm\sqrt{2}$ ആകുന്നു.

(4) $f''(x) = 6x$ മാത്രമല്ല $x = \sqrt{2}$ ൽ $f''\left(\sqrt{2}\right) = 6\sqrt{2} > 0$ അതിനാൽ $x = -\sqrt{2}$ ൽ വക്രം സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമ മൂല്യത്തെ $f\left(\sqrt{2}\right) = -4\sqrt{2} - 9$ ൽ എത്തുന്നു. ഇതുപോലെ $x = -\sqrt{2}$ ൽ $f''\left(-\sqrt{2}\right) = -6\sqrt{2} < 0$ അതിനാൽ $x = -\sqrt{2}$ ൽ വക്രം സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ഉച്ചതമ മൂല്യത്തെ $f\left(-\sqrt{2}\right) = 4\sqrt{2} - 9$ ൽ എത്തുന്നു.

(5) $f''(x) = 6x > 0,\ \forall\, x > 0$ എന്നതിനാൽ വക്രം ധന വാസ്തവിക സംഖ്യ നേർരേഖയിൽ മുകളിലേക്കുള്ള അകവളവായിരിക്കും $f''(x) = 6x < 0,\ \forall\, x < 0$ എന്നതിനാൽ വക്രം ഋണ വാസ്തവിക സംഖ്യാ രേഖയിൽ താഴേക്കുള്ള അകവളവായിരിക്കും.

(6) $x = 0$ ൽ $f''(x) = 0$ കൂടാതെ $f''(x)$ ന്റെ ചിഹ്നം $x = 0$ നെ കടന്നു ചെല്ലുമ്പോൾ മാറുന്നു. അതിനാൽ വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദു $(0, f(0)) = (0,-9)$.

(7) ഈ രേഖയ്ക്ക് അനന്തതാസ്പർശകങ്ങൾ ഇല്ല.

ഈ വക്രത്തിന്റെ ഏകദേശ രേഖാ ചിത്രം വലത് വശത്ത് കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ■

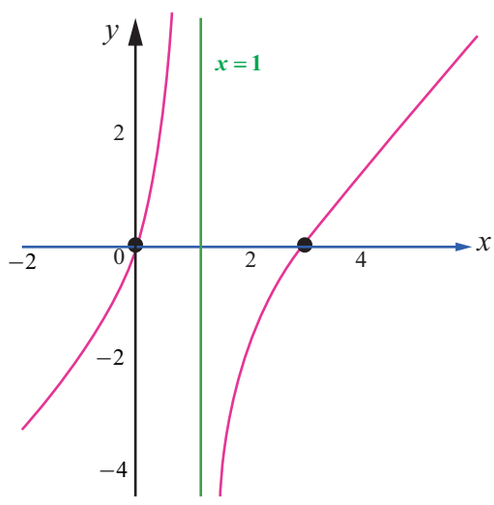
ഉദാഹരണം 7.71

$y = \dfrac{x^2 - 3x}{(x-1)}$ എന്ന വക്രം വരക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിരിക്കുന്ന ഫലനത്തിന്റെ ഘടകങ്ങൾ,

$y = f(x) = \dfrac{x(x-3)}{(x-1)}$ കണ്ടുപിടിക്കുമ്പോൾ.



ചിത്രം 7.36

(1) ഫലനം $f(x)$ ന്റെ പരിസരം $R \setminus \{1\}$ കൂടാതെ പരിസരം പൂർണ്ണ വാസ്തവിക ധന സംഖ്യ നേർരേഖയാണ്.

(2) $y = 0$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ $x = 0, 3$ അതിനാൽ x-അന്തഃഖണ്ഡം $(3,0)$ $x = 0$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ $y = 0$ അതിനാൽ വക്രം മൂലബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 51 2/25/2023 11:59:40 AM

(3) $f'(x)=\frac{x^2-2x+3}{(x-1)^2}$ മാത്രമല്ല ഇതിൽ നിന്ന് $f'(1)$ കാണാവുന്നതല്ല എന്നതു കൊണ്ട് $x=1$ ൽ നിർണ്ണായക ബിന്ദു സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. പക്ഷെ $x^2-2x+3=0$ വാസ്തവിക നിർദ്ധാരണം ഇല്ല. അതിനാൽ നിർണ്ണായക ബിന്ദു $x=1$ മാത്രമായിരിക്കും.

(4) $x=1$ എന്നത് മണ്ഡലത്തിൽ ഇല്ല മാത്രമല്ല $f'(x)\neq 0\ \forall\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$,അതിനാൽ ഇതിന് സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ഉച്ചതമം, ന്യൂനതമം എന്നിവ ഇല്ല.

(5) $f''(x)=-\frac{4}{(x-1)^3}\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ അതിനാൽ $x<1$, എങ്കിൽ $f''(x)>0$ അതിനാൽ $(-\infty,1)$ ൽ വക്രം മുകളിലേയ്ക്കുള്ള അകവളവായിരിക്കും മാത്രമല്ല $x>1$, എങ്കിൽ $f''(x)<0$ അതുകൊണ്ട് $(1,\infty)$ ൽ വക്രം താഴേയ്ക്കുള്ള അകവളവായിരിക്കും. $x=1$ മണ്ഡലത്തിൽ ഇല്ല. കൂടാതെ $f''(x)\neq 0\ x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ എന്നത് കൊണ്ട് $f(x)$ ന് വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദുക്കൾ ഇല്ല.

(6) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x}{(x-1)}=+\infty$ കൂടാതെ $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-3x}{(x-1)}=-\infty, x=1$ എന്നത് കൊണ്ട് എന്നത് ലംബ അനന്തതാ സ്പർശകം ആയിരിക്കും.

വക്രത്തിന്റെ ഏകദേശ രേഖാചിത്രം വലതു വശത്ത് കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 7.72

$y=\frac{3x}{x^2-1}$ എന്ന വക്രം വരക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

(1) $f(x)$ ന്റെ പരിസരം $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$.

(2) $f(-x,-y)=f(x,y)$ വക്രം മൂലബിന്ദുവിനെ ആധാരമാക്കി പ്രതിസമത ആയിരിക്കും.

(3) $y=0$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ $x=0$ ആകുന്നു. അതിനാൽ x -അന്തഃഖണ്ഡം $(0,0)$ ആകുന്നു.

(4) $x=0$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ $y=0$ ആകുന്നു. അതിനാൽ y -അന്തഃഖണ്ഡം $(0,0)$ ആകുന്നു.

(5) ഏകതാനത സ്വഭാവം വിശകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ ആദ്യത്തെ അവകലജം കാണാം $f'(x)=\frac{-3(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$

അതിനാൽ, $x=-1,1$ ൽ $f'(x)$ കാണാവുന്നതല്ല. അതിനാൽ $x=-1,1$ എന്നിവ നിർണ്ണായക സംഖ്യകളാണ് ഏകതാനത അന്തരാളത്തെ പട്ടിക 7.9 ൽ ക്രമീകരിക്കാം.

അന്തരാളം	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$ ന്റെ ചിഹ്നം	–	–	–
ഏകതാനത	കൃത്യമായി കുറയുന്നു	കൃത്യമായി കുറയുന്നു	കൃത്യമായി കുറയുന്നു

പട്ടിക 7.9

(6) $f'(x)$ നിർണ്ണായക സംഖ്യകളിലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുമ്പോൾ ചിഹ്നത്തിൽ മാറ്റങ്ങളൊന്നുമില്ല. അതിനാൽ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ചു അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങൾ ഇല്ല.

(7) പുറ വളവ് സ്വഭാവം വിശകലനം ചെയ്യുന്നതിന് രണ്ടാമത്തെ അവകലജം കാണാം

$f''(x)=\frac{6x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$ $f''(x)=0\Rightarrow x=0$ കൂടാതെ $f''(x)$ ആയത് $x=-1,1$ കാണാവുന്നതല്ല.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 52 2/25/2023 11:59:49 AM

പുറവളവ് അന്തരാളങ്ങൾ പട്ടിക 7.10 ൽ ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്നു.

അന്തരാളം	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$f''(x)$ ന്റെ ചിഹ്നം	$-$	$+$	$-$	$+$
പുറവളവ് സ്വഭാവം	താഴേക്കുള്ള അകവളവ്	മുകളിലേക്കുള്ള അകവളവ്	താഴേക്കുള്ള അകവളവ്	മുകളിലേക്കുള്ള അകവളവ്

പട്ടിക 7.10

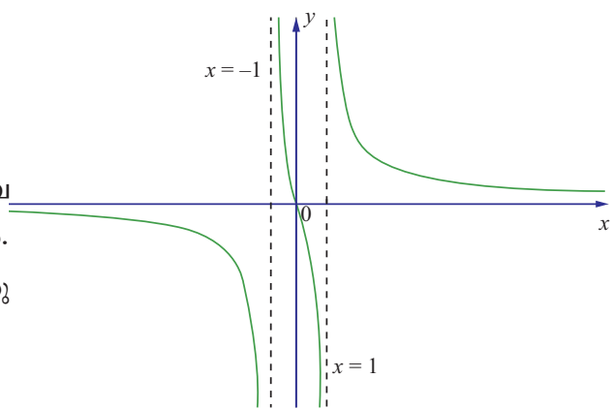
(8) $x=-1$ കൂടാതെ 1 എന്നിവ $f(x)$ ന്റെ പരിസരത്തിൽ ഇല്ല $x=0$ ൽ രണ്ടാമത്തെ അവകലജം പൂജ്യമാണ് കൂടാതെ $f''(x)$ ന്റെ ചിഹ്നം പൂജ്യത്തിലൂടെ കടന്നു ചെല്ലുമ്പോൾ മാറുന്നു. അതിനാൽ വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദുക്കൾ $(0, f(0))=(0,0)$ ആകുന്നു.

(9) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3}{x-\dfrac{1}{x}}=0$ അതിനാൽ $y=0$ എന്നത് തിരശ്ചിന അനന്തതാ സ്പർശകം ആണ് ഛേദം $x=\pm1$ ആകുമ്പോൾ പൂജ്യം എന്നതിനാൽ.

$\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{3x}{x^2-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{3x}{x^2-1}=+\infty$,

$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{3x}{x^2-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{3x}{x^2-1}=\infty$.

അതിനാൽ $x=-1$ കൂടാതെ $x=1$ എന്നിവ ലംബ അനന്തതാസ്പർശകങ്ങൾ ആയിരിക്കും. വക്രത്തിന്റെ ഏകദേശ രേഖാ ചിത്രം വലതു വശത്ത് കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 7.37

അഭ്യാസം 7.9

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ അനന്തതാസ്പർശകങ്ങൾ വരക്കുക :

(i) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$ (ii) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ (iii) $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+2}}$

(iv) $f(x)=\dfrac{x^2-6x-1}{x+3}$ (v) $f(x)=\dfrac{x^2+6x-4}{3x-6}$

2. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഫലനങ്ങൾക്ക് വക്രങ്ങൾ വരക്കുക:

(i) $y=-\dfrac{1}{3}(x^3-3x+2)$ (ii) $y=x\sqrt{4-x}$ (iii) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

(iv) $y=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 53 2/25/2023 11:59:54 AM

അഭ്യാസം 7.10

ശരിയായ അല്ലെങ്കിൽ ഏറ്റവും അനുയോജ്യമായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുക:

1. ഒരു ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം സെക്കൻഡിന് $3\pi\ \text{cm}^3/\text{sec}$ എന്ന നിരക്കിൽ വർദ്ധിക്കുന്നു. വ്യാസാർദ്ധം $\frac{1}{2}$ സെ.മീ ആയിരിക്കുമ്പോൾ വ്യാസാർദ്ധത്തിന്റെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക്

(1) 3 സെ.മീ/സെ (2) 2 സെ.മീ/സെ (3) 1 സെ.മീ/സെ (4) $\frac{1}{2}$ സെ.മീ/സെ

2. ഒരു ബലൂൺ ലംബമായി മുകളിലേക്ക് 10 മീ/സെ നിരക്കിൽ ഉയരുന്നു. ബലൂൺ നിലം വിട്ട സ്ഥലത്ത് നിന്ന് 40 മീറ്റർ അകലെയുള്ള നിരീക്ഷകൻ ഇതിനെ നിരീക്ഷിക്കുന്നു. ബലൂൺ നിലത്ത് നിന്ന് 30 മീ ആയിരിക്കുമ്പോൾ ബലൂണിന്റെ കോണിലുണ്ടാകുന്ന മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് കാണുക.

(1) $\frac{3}{25}$ റേഡിയൻസ്/സെ (2) $\frac{4}{25}$ റേഡിയൻസ്/സെ (3) $\frac{1}{5}$ റേഡിയൻസ്/സെ (4) $\frac{1}{3}$ റേഡിയൻസ്/സെ

3. തിരശ്ചീനയായി ചലിക്കുന്ന ഒരു വസ്തു t സമയത്ത് അതിന്റെ സ്ഥാനം $s(t) = 3t^2 - 2t - 8$ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു. വസ്തു നിശ്ചലാവസ്ഥയിലെത്തുമ്പോൾ സമയം

(1) $t = 0$ (2) $t = \frac{1}{3}$ (3) $t = 1$ (4) $t = 3$

4. ഒരു കല്ല് ലംബമായി മുകളിലേക്ക് എറിയുന്നു t സമയത്ത് അതെത്തുന്ന ദൂരം $x = 80t - 16t^2$ പരമാവധി ഉയരത്തെ t സെക്കന്റിൽ എത്തിയെങ്കിൽ t

(1) 2 (2) 2.5 (3) 3 (4) 3.5

5. $6y = x^3 + 2$ എന്ന വക്രത്തിന്റെ ഏത് ബിന്ദുവിൽ y-നിർദ്ദേശാങ്കത്തിന്റെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് x-നിർദ്ദേശാങ്കത്തിന്റെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിന്റെ 8 മടങ്ങ് ആയിരിക്കും

(1) (4,11) (2) (4,−11) (3) (−4,11) (4) (−4,−11)

6. $f(x) = \sqrt{8 - 2x}$ എന്ന വക്രത്തിന്റെ ഏത് x : നിർദ്ദേശാങ്ക ദൂരത്ത് വരക്കുന്ന സ്പർശരേഖയുടെ ചായ്വ് -0.25 ആയിരിക്കും?

(1) −8 (2) −4 (3) −2 (4) 0

7. $f(x) = 2\cos 4x$ എന്ന വക്രത്തിന് $x = \frac{\pi}{12}$ ൽ ലംബരേഖയുടെ ചായ്വ്

(1) $-4\sqrt{3}$ (2) −4 (3) $\frac{\sqrt{3}}{12}$ (4) $4\sqrt{3}$

8. $y^2 - xy + 9 = 0$ എന്ന വക്രത്തിന്റെ സ്പർശരേഖ എപ്പോൾ ലംബമായിരിക്കും

(1) $y = 0$ (2) $y = \pm\sqrt{3}$ (3) $y = \frac{1}{2}$ (4) $y = \pm 3$

9. മൂലബിന്ദുവിൽ $y^2 = x$ കൂടാതെ $x^2 = y$ എന്നീ വക്രങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള കോൺ

(1) $\tan^{-1}\frac{3}{4}$ (2) $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ (3) $\frac{\pi}{2}$ (4) $\frac{\pi}{4}$

10. $\lim_{x\to 0}\left(\cot x - \frac{1}{x}\right)$ ന്റെ മൂല്യം?

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) ∞

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 54 2/25/2023 12:00:03 PM

11. $\sin^4 x + \cos^4 x$ എന്ന ഫലനം വർദ്ധിക്കുന്ന അന്തരാളം

(1) $\left[\frac{5\pi}{8}, \frac{3\pi}{4}\right]$ (2) $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{8}\right]$ (3) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ (4) $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

12. $x^3 - 3x^2, x \in [0,3]$ എന്ന ഫലനത്തിന് റോൾസ് സിദ്ധാന്തത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന സംഖ്യ

(1) 1 (2) $\sqrt{2}$ (3) $\frac{3}{2}$ (4) 2

13. $\frac{1}{x}, x \in [1,9]$ എന്ന ഫലനത്തിന് ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്തത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന സംഖ്യ

(1) 2 (2) 2.5 (3) 3 (4) 3.5

14. $|3-x|+9$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ മൂല്യം

(1) 0 (2) 3 (3) 6 (4) 9

15. $y = e^x \sin x, x \in [0, 2\pi]$ എന്ന വക്രത്തിന്റെ പരമാവധി ചായ്‌വ് എവിടെ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു

(1) $x = \frac{\pi}{4}$ (2) $x = \frac{\pi}{2}$ (3) $x = \pi$ (4) $x = \frac{3\pi}{2}$

16. $x^2 e^{-2x}, x > 0$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ ഉച്ചതമ മൂല്യം

(1) $\frac{1}{e}$ (2) $\frac{1}{2e}$ (3) $\frac{1}{e^2}$ (4) $\frac{4}{e^4}$

17. $x^2 - y^2 = 4$ എന്ന വക്രത്തിന് $(6,0)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഏറ്റവും അടുത്ത് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന ബിന്ദു

(1) $(2,0)$ (2) $\left(\sqrt{5},1\right)$ (3) $\left(3,\sqrt{5}\right)$ (4) $\left(\sqrt{13},-\sqrt{3}\right)$

18. രണ്ട് ധന സംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക 200 ആയിരിക്കുമ്പോൾ അവയുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ ഉച്ചതമ മൂല്യം

(1) 100 (2) $25\sqrt{7}$ (3) 28 (4) $24\sqrt{14}$

19. The curve $y = ax^4 + bx^2$, $ab > 0$ എന്ന വക്രം

(1) തിരശ്ചീന സ്പർശരേഖ ഇല്ല (2) മുകളിലേക്കുള്ളഅകവളവ്

(3) താഴേക്കുള്ള അകവളവ് (4) വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദുക്കൾ ഇല്ല

20. $y = (x-1)^3$ എന്ന വക്രത്തിന്റെ വളവ് തിരിക്കൽ ബിന്ദു

(1) $(0,0)$ (2) $(0,1)$ (3) $(1,0)$ (4) $(1,1)$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 55 2/25/2023 12:00:10 PM

സംഗ്രഹം

- $y = f(x)$ ആയിരിക്കുമ്പോൾ, $\frac{dy}{dx}$ എന്നത് y നെ അടിസ്ഥാനമാക്കി x ന്റെ തൽക്ഷണ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു .
- $y = f\big(g(t)\big)$ ആയിരിക്കുമ്പോൾ, $\frac{dy}{dt} = f'\big(g(t)\big)\cdot g'(t)$ ആകുന്നു ഇതിനെ ചങ്ങല നിയമം എന്ന് പറയുന്നു.
- $y = f(x)$ എന്ന വക്രത്തിലുള്ള (a,b) എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശരേഖയുടെ സമീകരണം $y-b=\left(\frac{dy}{dx}\right)_{(a,b)}(x-a)$ അല്ലെങ്കിൽ $y-b=f'(a)(x-a)$ ആണ്.
- റോൾസ് സിദ്ധാന്തം

  $f(x)$ എന്ന ഫലനം അടഞ്ഞ അന്തരാളം $[a,b]$ ൽ തുടർച്ചയായും തുറന്ന അന്തരാളം (a,b) ൽ അവകലനം ചെയ്യാവുന്നതുമാണ്. കൂടാതെ $f(a)=f(b)$, എങ്കിൽ കുറഞ്ഞത് ഒരു ബിന്ദു $c\in(a,b)$ എങ്കിലും $f'(c)=0$ എന്ന രീതിയിൽ ഉണ്ടായിരിക്കും.
- ലഗ്രാഞ്ചിന്റെ ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്തം

  $f(x)$ ആയത് അടഞ്ഞ അന്തരാളം $[a,b]$ ൽ തുടർച്ചയായും തുറന്ന അന്തരാളം (a,b) ൽ അവകലനം ചെയ്യാവുന്നതായും $(f(a), f(b)$ എന്നിവ തുല്യമായിരിക്കണമെന്നില്ല). ഇരിക്കുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ അപ്പോൾ കുറഞ്ഞത് ഒരു ബിന്ദു $c\in(a,b)$ നെ $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ എന്ന രീതിയിൽ കാണാം.
- ടെയ്ലറിന്റെ ശ്രേണി

  $f(x)$ എന്ന ഫലനം $x=a$ ൽ അനന്തമായി അവകലനം ചെയ്യാവുന്നതായിരിക്കട്ടെ. $(x-a, x+a)$ എന്ന അന്തരാളത്തിൽ $f(x)$ നെ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള രൂപത്തിൽ വിപുലീകരിക്കാം

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{\lfloor n}(x-a)^n = f(a)+\frac{f'(a)}{\lfloor 1}(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{\lfloor n}(x-a)^n+\cdots$$

- മക്ലറിന്റെ ശ്രേണി

  $a=0$, എങ്കിൽ മുകളിലുള്ള വിപുലീകരണത്തിന്റെ രൂപം

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{\lfloor n}(x)^n = f(0)+\frac{f'(0)}{\lfloor 1}(x)+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{\lfloor n}(x^n)+\cdots$$

- ലോബിടാൽ നിയമം

  $f(x)$ കൂടാതെ $g(x)$ എന്നിവ അവകലനം ചെയ്യാവുന്ന ഫലനങ്ങൾ കൂടാതെ $g'(x)\neq 0$ എങ്കിൽ $\lim_{x\to a} f(x)=0=\lim_{x\to a} g(x)$. എങ്കിൽ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

  $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty=\lim_{x\to a} g(x)$. എങ്കിൽ $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ ആകുന്നു.
- $f(x)$ എന്ന ഫലനം (a,b) എന്ന തുറന്ന അന്തരാളത്തിൽ നിർവ്വചിക്കാവുന്നത് കൂടാതെ $\frac{d}{dx}\big(f(x)\big)>0$, $\forall x\in(a,b)$ എങ്കിൽ $f(x)$ ആയത് (a,b) എന്ന അന്തരാളത്തിൽ കൃത്യമായി വർദ്ധിക്കുന്നു.

  $\frac{d}{dx}\big(f(x)\big)<0$, $\forall x\in(a,b)$ എങ്കിൽ $f(x)$ ആയത് (a,b) അന്തരാളത്തിൽ കൃത്യമായി കുറയുന്നു

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 56 2/25/2023 12:00:21 PM

- അടഞ്ഞ അന്തരാളം $[a,b]$ ൽ തുടർച്ചയായ ഫലനം $f(x)$ ന് ഉച്ചതമം കൂടാതെ ന്യൂനതമ അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങളെ കാണുന്ന രീതി.

  ഘട്ടം 1 : $f(x)$ ന് (a,b) ൽ നിർണ്ണായക ബിന്ദു കാണുക.

  ഘട്ടം 2 : $f(x)$ ന്റെ മൂല്യങ്ങളെ എല്ലാ നിർണ്ണായക ബിന്ദുക്കൾ കൂടാതെ അഗ്രബിന്ദുക്കൾ a കൂടാതെ b ൽ കാണുക.

  ഘട്ടം 3 : ഘട്ടം 2 ൽ കണ്ടുപിടിച്ച മൂല്യങ്ങളിൽ ഏറ്റവും ഉയർന്ന സംഖ്യ പരമാവധി ഉച്ചതമം കൂടാതെ ഏറ്റവും ചെറിയ സംഖ്യ പരമാവധി ന്യൂനതമം ആയിരിക്കും $f(x)$ $[a,b]$.

- ആദ്യത്തെ അവകലജ പരീക്ഷണം

  $f(x)$ എന്ന തുടർച്ചയായ ഫലനത്തിന് c ഉൾപ്പെട്ടിട്ടുള്ള തുറന്ന അന്തരാളം I ൽ $(c,f(c))$ എന്നത് നിർണ്ണായക ബിന്ദു എന്നിരിക്കട്ടെ $f(x)$ ആയത് c, ഒഴികെയുള്ള അന്തരാളത്തിൽ അവകലനം ചെയ്യാവുന്നതെങ്കിൽ $f(c)$ നെ തന്നിട്ടുള്ളത് പോലെ ക്രമീകരിക്കാം: (x ആയത് I എന്ന അന്തരാളത്തിൽ ഇടത്തു നിന്ന് വലത്തോട്ട് ചലിക്കുമ്പോൾ)

  (i) $f'(x)$ ആയത് c ൽ ഋണത്തിൽ നിന്ന് ധനത്തിലേക്ക് മാറിയാൽ, $f(x)$ ന് $f(c)$ എന്നത് സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമം ആയിരിക്കും.

  (ii) $f'(x)$ ആയത് c ൽ ധനത്തിൽ നിന്ന് ഋണത്തിലേക്ക് മാറിയാൽ, $f(x)$ ന് $f(c)$ എന്നത് സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ഉച്ചതമം ആയിരിക്കും.

  (iii) $f'(x)$ ചിഹ്നമായത് c, ന്റെ ഇരുവശവും ധനമായോ അല്ലെങ്കിൽ c ന്റെ ഇരുവശവും ഋണമായോ ആണെങ്കിൽ $f(x)$ എന്നത് സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ഉച്ചതമം, ന്യൂനതമം എന്നിവ ഇല്ല.

- രണ്ടാമത്തെ അവകലജ പരീക്ഷണം

  c എന്ന നിർണ്ണായക ബിന്ദുവിൽ $f'(c)=0$ എന്നും, c ന്റെ പരിസരത്ത് $f'(c)$, കാണാവുന്നത്. മാത്രമല്ല $f''(c)$ കാണാവുന്നത്. $f''(c)<0$ എങ്കിൽ c ൽ f ആയത് സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച്, ഉച്ചതമത്തിൽ എത്തുന്നു $f''(c)>0$ എങ്കിൽ c ൽ f ആയത് സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് ന്യൂനതമത്തിൽ എത്തുന്നു. $f''(c)=0$, എങ്കിൽ ഈ പരീക്ഷണത്തിൽ സ്ഥലത്തെ ആശ്രയിച്ച് അത്യുച്ച മൂല്യങ്ങളെ കുറിച്ച് പരീക്ഷണം വിവരദായകമല്ല.

ICT കോർണർ

https://ggbm.at/dy9kwgbt അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക

ബ്രൗസർ തുറന്ന് തന്നിരിക്കുന്ന ലിങ്ക് ടൈപ്പ് ചെയ്യുക. അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക "**12th Standard Mathematics Vol-2**" എന്ന് പ്രത്യക്ഷപ്പെടും. നിങ്ങളുടെ പുസ്തകവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട അധ്യായങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും. അവയിൽ "**Applications of Differential Calculus**" എന്ന അധ്യായം ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. നിങ്ങളുടെ അധ്യായവുമായി ബന്ധമുള്ള നിരവധി വർക്ക് ഷീറ്റുകൾ അവിടെ നിങ്ങൾക്ക് കാണാൻ കഴിയും. എല്ലാ വർക്ക് ഷീറ്റുകളെയും ചെയ്ത് നോക്കുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 07 Malayalam.indd 57 2/25/2023 12:00:25 PM

അധ്യായം

8

അവകലനങ്ങളും ഭാഗീക അവകലജങ്ങളും

IGKR1

"കയ്പുള്ളവ രുചിക്കാത്തവൻ മധുരമായവ സമ്പാദിച്ചിട്ടില്ല"

- ഗോട്ട്ഫ്രഡ് വിൽഹം ലിബ്നിസ്

8.1 മുഖവുര

പ്രചോദനം

നിത്യ ജീവിതത്തിൽ നമുക്ക് നിരവധി പ്രശ്നങ്ങൾ കൈകാര്യം ചെയ്യേണ്ടുണ്ട്. ചില സമയങ്ങളിൽ സ്വതന്ത്ര ചരങ്ങളുടെ മാറ്റങ്ങൾക്കനുസരിച്ച് ഫലനങ്ങളുടെ മൂല്യത്തിന് ഏർപ്പെടുന്ന മാറ്റങ്ങളെ കണക്കാക്കേണ്ടതുണ്ട്. ചില സാഹചര്യങ്ങൾ ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്.

- വൃത്താകൃതിയിലുള്ള കനം കുറഞ്ഞ ഒരു ലോഹത്തകിടിനെ ഒരേ ക്രമത്തിൽ ചൂടാക്കുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ ആ തകിടിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം വർദ്ധിക്കുമ്പോൾ വിസ്തീർണ്ണവും വർദ്ധിക്കുന്നു. വ്യാസാർദ്ധത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റത്തിന്റെ ഏകദേശ അളവ് കണക്കാക്കാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തിൽ ഏർപ്പെടുന്ന മാറ്റത്തെ എങ്ങനെ കണക്കാക്കാം?
- തലകീഴായ വൃത്തസ്തൂപികയിലുള്ള ടാങ്കിൽ ജലം നിറയ്ക്കുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ. ഈ പ്രക്രിയയിൽ ജലനിരപ്പിന്റെ ഉയരം, ജലനിരപ്പിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം, ടാങ്കിലുള്ള ജലത്തിന്റെ വ്യാപ്തം എന്നിവ സമയോജിതമായി മാറുന്നു. ഒരു പ്രത്യേക ഇടവേളയിൽ ഉണ്ടുകുന്ന ഉയരത്തിന്റെയും വ്യാസാർദ്ധത്തിന്റേയും മാറ്റത്തെ കണക്കാക്കാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ ആ ഇടവേളയിൽ ഉണ്ടാകുന്ന വ്യാപ്തത്തിന്റെ മാറ്റം എപ്രകാരം കണക്കാക്കാം.
- ഒരു ഉപഗ്രഹം വിക്ഷേപണകേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് ആകാശത്തേയ്ക്ക് വിക്ഷേപിക്കുന്നു. വിക്ഷേപണ കേന്ദ്രത്തിൽ നിന്ന് സുരക്ഷിത ദൂരത്തിൽ ഉപഗ്രഹത്തെ നിരീക്ഷിക്കുന്നതിന് ക്യാമറ ഘടിപ്പിച്ചിട്ടുണ്ട് ഉപഗ്രഹം ഉയരുമ്പോൾ ക്യാമറയുടെ മേൽകോൺ മാറുന്നു. ഒരു പ്രത്യേക സമയ ഇടവേളയിൽ ക്യാമറയുടെ രണ്ട് മേൽകോണുകൾ അറിയാമെങ്കിൽ ആ കുറുകിയ സമയ ഇടവേളയിൽ ഉപഗ്രഹം സഞ്ചരിച്ച ദൂരം എപ്രകാരം കണക്കാക്കാം.

ഇത്തരത്തിലുള്ള ചോദ്യങ്ങളെ അഭിസംബോധന ചെയ്യുന്നത് അവകലജങ്ങളുടേയും ഭാഗീക അവകലജങ്ങളുടേയും ആശയങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ആ ഫലനങ്ങളിൽ ഉൾപ്പെടുന്ന രേഖീയ ഏകദേശമൂല്യങ്ങളും അവകലനങ്ങളും കണ്ടുപിടിക്കാം.

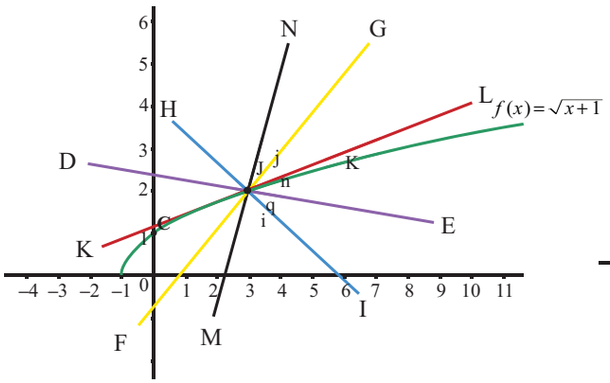
ആമുഖം

ഗോട്ട്ഫ്രഡ് W ലിബ്നിസ്
(1646 - 1716)

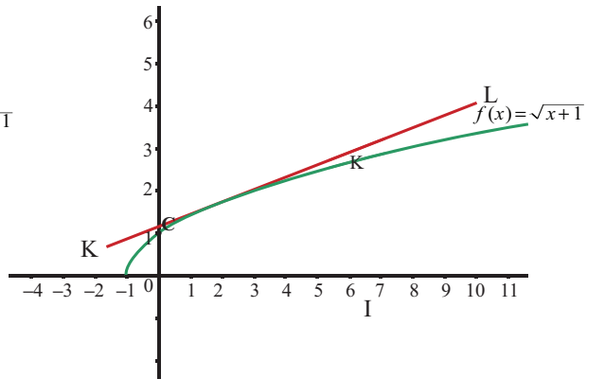
ഒരു ചരത്തിന്റെ രേഖീയ മൂല്യ ഏകദത്തിന്റെ അവകലജത്തിനായ തത്വങ്ങളെ നാം കഴിഞ്ഞ അധ്യായങ്ങളിൽ പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു. ഒരു ഫലനത്തിന്റെ മണ്ഡലത്തിൽ അതിന്റെ പരമാവധി കാണുന്നത് കൂടാതെ ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുന്നതു പോലുള്ള അവകലജത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങളെ കുറിച്ചും പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു. ഈ അധ്യായത്തിൽ ഒരു ഫലനത്തിന്റെ മൂല്യത്തെ ഒരു നിശ്ചിത ബിന്ദുവിൽ മൂല്യം കാണുന്നതിന് അവകലജത്തിന്റെ മറ്റൊരു പ്രയോഗം കൂടി കാണാം, $y = mx + b$, എന്ന ഫലനത്തിന്റെ മൂല്യത്തെ കാണുന്നതിനെക്കാളും രേഖീയമല്ലാത്ത ഫലനത്തിന്റെ മൂല്യം കാണുന്നത് ശ്രമരമാണ്.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 58 15-02-2023 17:51:28

ഉദാഹരണമായി $f(x)=\sqrt{x+1},\ g(x)=2x-7$ എന്ന രണ്ട് ഫലനങ്ങളെ പരിഗണിക്കുക. $x=3.25$. ൽ ഈ രണ്ട് ഫലനങ്ങളുടെ മൂല്യം കാണുന്നതിന് ഏതാണ് എളുപ്പം, $f(3.25)$. ന്റെ മൂല്യത്തെ കണക്കാക്കുന്നതിനെക്കാളും $g(3.25)$ ന്റെ മൂല്യം കണക്കാക്കുന്നതാണ് എളുപ്പം $f(3.25)$, ന്റെ മൂല്യം കാണുന്നതിന് ചെറിയ പിശകുകൾ സ്വീകരിക്കാൻ തയ്യാറാണെങ്കിൽ $x=3$ യ്ക്ക് സമീപം f ന്റെ ഏകദേശമൂല്യം കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള രേഖീയ ഫലനം കണ്ടെത്താനും ഈ രേഖീയ ഫലനം $f(3.25)$. ന്റെ ഏകദേശമൂല്യം കണക്കാക്കുന്നതിനും ഉപയോഗിക്കാം. ഒരു ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ലംബരേഖ അല്ലാതിരിക്കണമെങ്കിൽ അത് ഒരു രേഖീയ ഫലനമായിരിക്കണം. കൂടാതെ അതിന്റെ വിപരീത പ്രസ്ഥാവനയും ശരിയായിരിക്കും. ഒരു ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഒരു ബിന്ദു വഴിയായി അനേകം നേർരേഖകൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ അവയിൽ സ്പർശരേഖയ്ക്കു മാത്രമേ ആ ഫലനത്തിന്റെ ശരിയായ ഏകദേശ മൂല്യം നൽകാൻ കഴിയൂ. എന്തെന്നാൽ ആ ബിന്ദു $(3,2)$ ന് അടുത്തായി f ന്റെ ഗ്രാഫ് ഒരു നേർരേഖ പോലെ കാണാൻ കഴിയും.



ചിത്രം. 8.1



ചിത്രം. 8.2 സ്പർശരേഖ

ഈ നേർരേഖകളിൽ $f(x)$ ന്റെ ഗ്രാഫിനായുള്ള സ്പർശരേഖ മാത്രമേ $x=3$ യ്ക്ക് f ന്റെ ഏകദേശ മൂല്യം തരുന്നതിന് കഴിയും എന്നത് സ്പഷ്ടമാണ്. അടിസ്ഥാനപരമായി നമ്മൾ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഫലനത്തെ $(3,2)$ ൽ **രേഖീയ വൽക്കരണം** ചെയ്യുന്നു. ഈ ആശയം തിരഞ്ഞെടുത്ത ബിന്ദുവിന്റെ അടുത്തായി നൽകിയിരിക്കുന്ന ഇൻപുട്ടിന്റെ മാറ്റത്തിനനുസരിച്ച് ഫലനത്തിന്റെ മൂല്യത്തിൽ ഏർപ്പെടുന്ന മാറ്റത്തെ കണക്കാക്കാൻ ഉപകരിക്കുന്നു. **അവകലജ**ത്തെ ഉപയോഗിച്ച് **അവകലന**ത്തിന്റെ ആശയത്തെ പ്രയോഗത്തിൽ കൊണ്ടു വരുന്നു. ഇത് തിരഞ്ഞെടുക്കപ്പെട്ട ബിന്ദുവിന്റെ അരികിൽ ഏകദേശമൂല്യം കണക്കാക്കുന്നതിന് ഉപയോഗപ്രദമാകും. അവകലജം തൽക്ഷണ മാറ്റനിരക്ക് നൽകുന്നു. എന്നാൽ അവകലനം ഒരു ഫലനത്തിന്റെ മൂല്യത്തിൽ ഏർപ്പെടുന്ന ഏകദേശമാറ്റത്തെ കാണാൻ ഉതകുന്നു. കൂടാതെ പ്രതിയിടൽ മുറയിൽ നിശ്ചിത സമാകലനത്തിന്റെ മൂല്യം കാണുന്നതിനും മേലും അവകലന സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുന്നതിനും അവകലനങ്ങൾ ഉപയോഗപ്പെടുന്നു.

അവകലനങ്ങളെ പഠിച്ചശേഷം നിരവധി, ചരങ്ങളുടെ രേഖീയ മൂല്യ ഏകദത്തിൽ ശ്രദ്ധ കേന്ദ്രീകരിക്കാം, നിരവധി ചരങ്ങളുടെ ഫലനങ്ങൾക്ക് ഒരു ചരത്തിൻമേലുള്ള രേഖീയ മൂല്യ ഏകദം **അവകലജം** പൊതു സ്വഭാവമാക്കി **ഭാഗീക അവകലജം** പ്രയോഗത്തിൽ കൊണ്ട് വരാം. നാം ഒന്നിലധികം ചരങ്ങളെ കൊണ്ട ഫലനങ്ങളെ എന്തുകൊണ്ട് പരിഗണിക്കണം. അതിന്റെ ആവശ്യകത വിശദീകരിക്കുന്ന ലളിതമായ സാഹചര്യം പരിഗണിക്കാം. ഒരു കമ്പനി പേനകളും നോട്ട് ബുക്കുകളും നിർമ്മിക്കുന്നു. ഈ കമ്പനി അതിന്റെ ലാഭം വർദ്ധിപ്പിക്കാൻ താത്പര്യപ്പെടുന്നു. അപ്പോൾ അത് പരമാവധി ലാഭം നൽകുന്ന ഉൽപാദന നില കണ്ടെത്തേണ്ടതുണ്ട്. ഈ സംഭവത്തിൽ രണ്ട് ചരങ്ങളുടെ ഫലനമായ വരവ്, ചെലവ് എന്നിവ നിർണ്ണയിക്കാൻ ഫലനങ്ങളെ വിശകലനം ചെയ്യേണ്ടതുണ്ട്. അതു പോലെ ഒരു പെട്ടിയുടെ വ്യാപ്തം പരിഗണിച്ചാൽ അതിന്റെ നീളം, അകലം, ഉയരം എന്നീ മൂന്നു ചരങ്ങളുടെ ഫലനമായിട്ടുണ്ട്. കൂടാതെ ഒരു രാജ്യത്തിന്റെ സമ്പദ്‌വ്യവസ്ഥ നിരവധി മേഖലകളെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. എന്തെന്നാൽ അത് അനേകം ചരങ്ങളെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇപ്രകാരം ഒന്നിലധികം ചരങ്ങളെ കൊണ്ട ഫലനങ്ങളുടെ ആവശ്യകതയും പ്രാധാന്യത്തേയും കൊണ്ട് അവയ്ക്കായ് **അവകലജ** ആശയത്തെ രൂപപ്പെടുത്തുന്നതും ആവശ്യമായിരിക്കുന്നു കൂടാതെ രണ്ട് മൂന്ന് ചരങ്ങളെ കൊണ്ട ഫലനങ്ങളായ അവകലനം കൂടാതെ അവയുടെ പ്രയോജനങ്ങളേയും കാണാം. ഈ അധ്യായത്തിൽ നമുക്ക് രേഖീയ മൂല്യ ഏകദങ്ങളെ മാത്രം പരിഗണിക്കാം.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 59 15-02-2023 17:51:30

പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പൂർത്തിയാകുമ്പോൾ വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവ വ്യക്തമാകുന്നു.

- ഒരു ചരത്തോടു കൂടിയ ഫലനത്തിന്റെ ഒരു ബിന്ദുവിലെ രേഖീയ ഏകദേശ മൂല്യം കണക്കാക്കുക.
- രേഖീയ ഏകദേശമൂല്യം ഉപയോഗിച്ച് കാൽക്കുലേറ്ററുകളില്ലാതെ ഒരു ഫലനത്തിന്റെ ഏകദേശമൂല്യം കാണുക
- ഒരു ഫലനത്തിന്റെ അവകലനം കാണുക
- ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന സാഹചര്യങ്ങൾക്ക് രേഖീയ ഏകദേശ മൂല്യവും അവകലനവും ഉപയോഗപ്പെടുത്തുക
- ഒന്നിലധികം ചരങ്ങളെ കൊണ്ട ഫലനങ്ങൾക്ക് ഭാഗീക അവകലജം കാണുക
- രണ്ടോ അതിലധികമോ ചരങ്ങളെ കൊണ്ട ഫലനങ്ങളുടെ രേഖീയ ഏകദേശ മൂല്യം കാണുക.
- ഒന്നിലധികം ചരങ്ങളെകൊണ്ട ഫലനം എന്നത് ഏകതാനമായതാണോ അല്ലയോ എന്ന് നിർണ്ണയിക്കുക
- ഏകതാനമായ ഫലനങ്ങൾക്ക് യൂളറുടെ സിദ്ധാന്തം പ്രയോഗിക്കുക.

8.2 രേഖീയ ഏകദേശനവും അവകലനങ്ങളും

8.2.1 രേഖീയ ഏകദേശനം

ഈ വിഭാഗത്തിൽ ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഒരു ഫലനത്തിന്റെ ഏകദേശ മൂല്യത്തിനെ പരിജയപ്പെടുത്താം. രേഖീയ ഏകദേശമൂല്യം ഉപയോഗിച്ച് തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുവിനരികിൽ ഫലനത്തെ വിലയിരുത്താം. അതിനുശേഷം ഒരു ചരത്തോടു കൂടിയ രേഖീയ മൂല്യഫലനത്തിന്റെ അവകലനത്തെ പരിജയപ്പെടുത്താം. ഇതു പ്രയോഗങ്ങൾക്ക് ഉപകാരപ്രദമാകും.

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ എന്നത് ഒരു അവകലന ഏകപദം കൂടാതെ $x\in(a,b)$. എന്നിരിക്കട്ടെ x എന്ന ബിന്ദുവിൽ f, അവകലനം ചെയ്യുന്നത് എന്നാൽ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x) \qquad \ldots (1)$$

Δx ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യം എന്നാൽ (1) ൽ നിന്ന്

$$f(x+\Delta x)-f(x) \approx f'(x)\Delta x\,; \qquad \ldots (2)$$

അതായത്

$$f(x+\Delta x) \approx f(x)+f'(x)\Delta x, \qquad \ldots (3)$$

ഇവിടെ $\approx$ എന്നത് **ഏകദേശമൂല്യ**ത്തിന് സമം, കൂടാതെ സ്വതന്ത്രചരം x ൽ നിന്ന് $(x+\Delta x)$ ലേക്ക് മാറുമ്പോൾ $f(x)$ ഫലനം $f(x+\Delta x)$. ലേക്ക് മാറുന്നതിനെ ശ്രദ്ധിക്കുക അതിനാൽ Δx ചെറിയ ചരമായും Δf അല്ലെങ്കിൽ Δy, ലഭിക്കുന്ന ഫലമായും ഇരിക്കുമ്പോൾ സമീകരണം (2) നെ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളതു പോലെ തിരുത്തി എഴുതാം. ലഭിക്കുന്ന ഫലനത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റം

$$\Delta y=\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x\,.$$

$f(x)$ കൂടാതെ $f'(x)\Delta x$ നെ ഉപയോഗിച്ച് $f(x+\Delta x)$ ന്റെ ഏകദേശ മൂല്യം കണക്കാക്കുന്നതിന് സമീകരണം (3) പ്രയോജനപ്പെടുന്നത് കാണാം. കൂടാതെ ഒരു നിശ്ചിത x ന് $x_0, y(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), x\in\mathbb{R}$, എന്നത് $(x_0,f(x_0))$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ f ന്റെതായ സ്പർശരേഖയുടെ സമീകരണം ലഭിക്കുന്നു. ഇത് x_0 യ്ക്കു അരികിൽ f ന്റെ ശരിയായ ഏകദേശ മൂല്യത്തെ തരുന്നു. ഇത് താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള നിർവ്വചനത്തിലേയ്ക്ക് നയിക്കുന്നു.

നിർവ്വചനം 8.1 (രേഖീയ ഏകദേശനം)

$f:(a,b)\to\mathbb{R}$ എന്നതിനെ അവകലിക്കപ്പെട്ട ഫലനമായും $x_0\in(a,b)$ ആണെങ്കിൽ x_0 എന്ന ബിന്ദുവിൽ f ന്റെ ഏകദേശമൂല്യം L എന്ന് നമുക്ക് നിർവചിക്കാം.

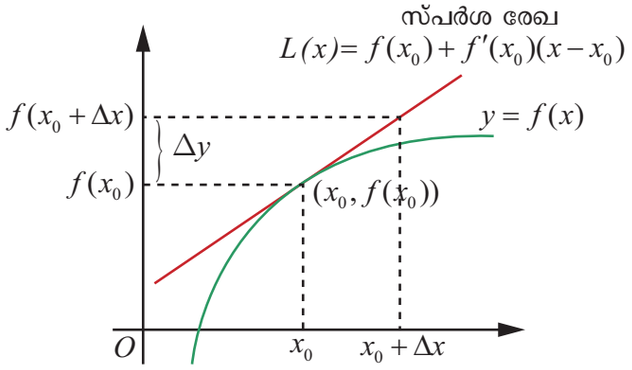
$$L(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0), \quad \forall x\in(a,b) \quad \ldots (4)$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 60 15-02-2023 17:51:36

സമീകരണം (3), (4) ൽ നിന്ന്

$$f(x+\Delta x) \approx f(x)+f'(x)\Delta x,$$

എന്ന് നമുക്ക് കാണാൻ കഴിയും $f(x+\Delta x)$ ന്റെ ഏകദേശ മൂല്യം കണ്ടെത്തുന്നതിന് ഉപയോഗപ്രദമാണ്. ഇവിടെ x ന്റെ മൂല്യം x_0 യോട് അടുക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന് മികച്ച ഏകദേശ മൂല്യം x_0 എന്ന ബിന്ദുവിൽ f ന് രേഖീയ ഏകദേശ മൂല്യം നൽകുന്നു. എന്തെന്നാൽ x ന്റെ മൂല്യം x_0, യോട് അടുക്കുമ്പോൾ x_0 യിൽ തുടർന്നു കൊണ്ടിരിക്കുന്നു



ചിത്രം. 8.3
സ്പർശരേഖ മൂലം രേഖീയ ഏകദേശം

$$\text{പിശക്} = f(x)-L(x) = f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) \qquad \ldots (5)$$

x ന്റെ തുടർച്ചയായി x_0 യിലേയ്ക്ക് x അടുക്കുമ്പോൾ പൂജ്യത്തോട് അടുക്കുന്നു. കൂടാതെ $f(x)=mx+c$ ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ രേഖീയ ഏകദേശമാണ് $L(x)=(mx_0+c)+m(x-x_0)=mx+c=f(x)$ ഏത് ബിന്ദുവിനും $x\in(a,b)$ അതായത് രേഖീയ ഏകദേശമാണ് ഈ സാഹചര്യത്തിൽ അതിന്റേതായ യഥാർത്ഥ പ്രവർത്തനം (ഇത് ആശ്ചര്യകരമല്ലേ)

ഉദാഹരണം 8.1

$f(x)=\sqrt{1+x}, x\geq -1$, ന് $x_0=3$. യിൽ രേഖീയ ഏകദേശമൂല്യം കണക്കാക്കി, ആ രേഖീയ ഏകദേശ മൂല്യം ഉപയോഗിച്ച് $f(3.2)$ കണക്കിടുക.

നിർദ്ധാരണം

സമീകരണം (4) ൽ നിന്ന് $L(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. എന്ന് നമുക്കറിയാം $x_0=3, \Delta x=0.2$ കൂടാതെ $f(3)=\sqrt{1+3}=2$. കൂടാതെ,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \text{ അതിനാൽ } f'(3)=\frac{1}{2\sqrt{1+3}}=\frac{1}{4}.$$

$$L(x) = 2+\frac{1}{4}(x-3)=\frac{x}{4}+\frac{5}{4} \text{ എന്നത് ആവശ്യപ്പെട്ട രേഖീയ ഏകദേശം.}$$

$$\text{ഇപ്പോൾ, } f(3.2) = \sqrt{4.2} \approx L(3.2)=\frac{3.2}{4}+\frac{5}{4}=2.050.$$

കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നുവെങ്കിൽ $\sqrt{4.2}=2.04939$ എന്ന് ലഭിക്കുമായിരുന്നു.

8.2.2 പിശക്, സമ്പൂർണ്ണപിശക്, ആപേക്ഷിക പിശക്, ശതമാനപിശക്

ഞങ്ങൾ ഒരു മൂല്യത്തെ ഏകദേശപ്പെടുത്തുമ്പോൾ അവിടെ പിശക് സംഭവിക്കുന്നു. ഈ വിഭാഗത്തിൽ സമീകരണം (4) ൽ രേഖീയ ഏകദേശത്താൽ ഉണ്ടാകുന്ന പിശകിനെ പരിഗണിക്കാം. പിശകുകൾ പല വകഭേദങ്ങളെ പറ്റിയും കാണാം. $h=x-x_0$, എന്നെടുത്താൽ നമുക്ക് $x=x_0+h$, എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. ഇതിൽ നിന്ന് സമീകരണം (5) നൽകുന്നത്

$$E(h) = f(x_0+h)-f(x_0)-f'(x_0)h. \qquad \ldots (6)$$

$E(0)=0$ എന്നതിനെ ശ്രദ്ധിക്കുക, കൂടാതെ x_0 എന്ന ബിന്ദുവിൽ f ന്റെ തുടർച്ചയിൽ നിന്ന് $\lim\limits_{h\to 0}E(h)=0$ എന്നതിനെ നാം നേരത്തേ കണ്ടറിഞ്ഞിരുന്നിരുന്നു. കൂടാതെ f അവകലിക്കപ്പെടുമെങ്കിൽ മീകരണം (1) ൽ നിന്ന്

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 61 15-02-2023 17:51:42

$$\lim_{h\to 0}\frac{E(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} - f'(x) = 0\,.$$

f എന്ന ഫലനം x_0, യിൽ അവകലിക്കപ്പെടുന്നു എങ്കിൽ h പൂജ്യത്തോട് അടുക്കുന്നതിനെക്കാളും $E(h)$ വേഗത്തിൽ പൂജ്യത്തോട് അടുക്കുന്നതായി കാണാം.

നിർവ്വചനം 8.2

ഒരു നിശ്ചിത അളവ് നിർണ്ണയിക്കേണ്ടതുണ്ടെന്ന് കരുതുക. ഇതിന്റെ **കൃത്യമായ മൂല്യത്തെ** യഥാർത്ഥ വില എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ചില സമയങ്ങളിൽ ഏകദേശ പ്രക്രിയകളിലൂടെ ഞങ്ങൾ അതിന്റെ **ഏകദേശ മൂല്യം** നിർണ്ണയിക്കുന്നു.

സമ്പൂർണ്ണ പിശക് = യഥാർത്ഥമൂല്യം − ഏകദേശ മൂല്യം

അതിനാൽ സമീകരണം (6) ൽ ഒരു രേഖീയ ഏകദേശത്തിലൂടെ സംഭവിക്കുന്ന സമ്പൂർണ്ണ പിശക് നൽകുന്നു. ഇനി നമുക്ക് രേഖീയ ഏകദേശത്തിന്റെ ഉപയോഗം ലഘൂകരിക്കുന്നതിനെ നോക്കാം.

ഉദാഹരണം 8.2

കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിക്കാതെ രേഖീയ ഏകദേശം ഉപയോഗിച്ച് $\sqrt{9.2}$ ന്റെ ഏകദേശ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

രേഖീയ ഏകദേശമൂല്യ രീതി അനുസരിച്ച് $\sqrt{9.2}$ ന്റെ ഏകദേശ മൂല്യം കാണേണ്ടതുണ്ട്. സമീകരണം (3) ൽ നിന്ന് $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x$. ഇപ്പോൾ ഇത് ചെയ്യുന്നതിന് ഉചിതമായ ഒരു ഫലനം f, ബിന്ദു x_0 കൂടാതെ Δx. മുതലായവയെ തിരിച്ചറിയേണ്ടതുണ്ട്. ഈ തിരഞ്ഞെടുപ്പ് മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഏകദേശമൂല്യ സമീകരണത്തിന്റെ വലതുവശത്തെ കാൽകുലേറ്ററിന്റെ സഹായം കൂടാതെ കണക്കാക്കുന്ന രീതിയിൽ ഇരിക്കണം. അതിനാൽ $f(x)=\sqrt{x}, x_0=9$ കൂടാതെ $\Delta x=0.2$, $f'(x_0)=\dfrac{1}{2\sqrt{9}}$ ഇതിൽ നിന്നും

$$\sqrt{9.2} \approx f(9)+f'(9)(0.2) = 3+\frac{0.2}{6} = 3.03333\,.$$

ഇപ്പോൾ ഞങ്ങൾ ഒരു കാൽക്കുലേറ്റർ ഉപയോഗിക്കുകയാണെങ്കിൽ $\sqrt{9.2}=3.03315$ എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുന്നു. എന്നാൽ ഏകദേശമൂല്യം ആദ്യത്തെ മൂന്നു ദശാംശസ്ഥാനങ്ങൾക്ക് ശരിയായിരിക്കുന്നത് കാണാം. അതിനാൽ പ ിശക് $3.03315-3.03333=-0.00018$. [കൂടാതെ ഇവിടെ ഒരാൾ $f(x)=\sqrt{1+x}, x_0=8$, $\Delta x=0.2$. എന്നും തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. അതിനാൽ f, x_0 യുടെ തിരഞ്ഞെടുപ്പ് അദ്വിതീയമാണ്].

അതിനാൽ മുകളിൽ കൊടുത്ത ഉദാഹരണത്തിൽ സമ്പൂർണ്ണ പിശക് $3.03315-3.03333=-0.00018$. ഇത് എത്രത്തോളം പിശക് അണെന്നുള്ളത് യഥാർത്ഥമൂല്യത്തിനോട് എത്രത്തോളം മെച്ചം എന്ന് പറയുന്നതിനു സാധ്യമല്ല ഇതിനായി രണ്ട് എളിയ കാരണങ്ങൾ പരിഗണിക്കാം.

കാരണം 1 : ഏതെങ്കിലും ഒരു അളവിന്റെ യഥാർത്ഥ മൂല്യം 5 ഏകദേശമൂല്യം 4, എന്നാൽ സമ്പൂർണ്ണ പിശക് $5-4=1$.

കാരണം 2 : ഏതെങ്കിലും ഒരു അളവിന്റെ യഥാർത്ഥ മൂല്യം 100 ഏകദേശമൂല്യം 95. എന്നാൽ ഇപ്പോൾ അതിന്റെ സമ്പൂർണ്ണ പിശക് $100-95=5$. അതിനാൽ കാരണം 1 ന്റെ സമ്പൂർണ്ണ പിശക്, കാരണം 2 ന്റെ സമ്പൂർണ്ണ പിശകിനെക്കാൾ കുറവായിരിക്കുന്നു.

ഈ രണ്ട് ഏകദേശ മൂല്യങ്ങളിൽ ഏതാണ് മികച്ച ഏകദേശമൂല്യം എന്തുകൊണ്ട് ഏതൊരു ഏകദേശ മൂല്യവും മികച്ചതാണോ അല്ലയോ എന്ന് സംപൂർണ്ണ പിശക് കൃത്യമായി സൂചിപ്പിക്കുന്നില്ല അതേ സമയം ആപേക്ഷിക പിശകും ശതമാനപിശകും (ചുവടെ നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു) കണക്കാക്കുമ്പോൾ ആ ഏകദേശ മൂല്യം എത്രത്തോളം മികച്ചത് എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. യഥാർത്ഥ മൂല്യം പൂജ്യം എങ്കിൽ നമ്മുടെ ഏകദേശമൂല്യം യഥാർത്ഥ മൂല്യത്തോട് എത്രത്തോളം അടുത്തായിരിക്കും എന്ന് മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിയുന്നു. യഥാർത്ഥ മൂല്യം പൂജ്യം അല്ലാ എങ്കിൽ അതിനെ ചുവടെ തന്നിട്ടുള്ളതു പോലെ നിർവ്വചിക്കാം.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 62 15-02-2023 17:51:46

നിർവ്വചനം 8.3

യഥാർത്ഥമൂല്യം പൂജ്യം അല്ല എങ്കിൽ

$$\text{ആപേക്ഷിക പിശക്} = \frac{\text{യഥാർത്ഥ മൂല്യം} - \text{ഏകദേശ മൂല്യം}}{\text{യഥാർത്ഥ മൂല്യം}}$$

$$\text{ശതമാന പിശക്} = \text{ആപേക്ഷികപിശക്} \times 100 \quad .$$

കുറിപ്പ്: സമ്പൂർണ്ണ പിശകിന് മാത്ര ഉണ്ട്. ആപേക്ഷിക പിശകിനും ശതമാന പിശകിനും അളവ് മാത്ര ഇല്ല. .

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഉദാഹരണങ്ങളിലെ കാരണങ്ങളിൽ ഒന്നാമത്തെ കാരണത്തിൽ

$$\text{ആപേക്ഷിക പിശക്} = \frac{1}{5} = 0.2\,;\ \text{ശതമാന പിശക്} = \frac{1}{5} \times 100 = 20\% \,.$$

രണ്ടാമത്തെ കാരണത്തിൽ

$$\text{ആപേക്ഷിക പിശക്} = \frac{5}{100}\,;\ \text{ശതമാന പിശക്} = \frac{5}{100} \times 100 = 5\% \,.$$

ഇവിടെ രണ്ടാമത്തെ ഏകദേശനം, ഒന്നാമത്തെ ഏകദേശനത്തേക്കാൾ മികച്ചതാകുന്നു. ആപേക്ഷിക പിശക് അല്ലെങ്കിൽ ശതമാന പിശക് കണക്കാക്കുന്നതിന് ഏതിന്റെ ഏകദേശനം കണക്കാക്കുന്നുവോ അതിന്റെ യഥാർത്ഥ മൂല്യം അറിഞ്ഞിരിക്കേണ്ടതുണ്ട് എന്നത് ശ്രദ്ധേയമാണ്.

ഇനിയും പല ഉദാഹരണങ്ങൾ പരിഗണിക്കാം.

ഉദാഹരണം 8.3

ഒരു സോപ്പു കുമിള ഗോളാകൃതിയിലുള്ളതാണെന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക. അതിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 5 സെ.മീയിൽ നിന്ന് 5.2 സെ.മീ ആയി വ്യത്യാസപ്പെടുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ ഏകദേശം വർദ്ധനവിനെ രേഖീയ ഏകദേശരീതിയിൽ കണക്കാക്കുക. കൂടാതെ അതിന്റെ ശതമാന പിശകും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

r വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു ഗോളത്തിന്റെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം $S(r) = 4\pi r^2$ എന്നത് ഓർമ്മ പുതുക്കുക സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് കൃത്യമായ മാറ്റത്തെ കണക്കാക്കുന്നതിന് സാധിക്കും. എന്നിരുന്നാലും രേഖീയ ഏകദേശനം ഉപയോഗിച്ച് സമീകരണം (4), ഉപയോഗിച്ച്

$$\begin{aligned}\text{ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ ഏകദേശ മാറ്റം} &= S(5.2) - S(5) \approx S'(5)(0.2)\\ &= 8\pi(5)(0.2)\\ &= 8\pi \ \text{സെ.മീ}^2\end{aligned}$$

കൃത്യമായ കണക്കിടൽ മൂലം ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ വ്യത്യാസം

$$S(5.2) - S(5) = 108.16\pi - 100\pi = 8.16\pi \ \text{സെ.മീ}^2.$$

$$\text{ശതമാനപിശക്} = \text{അപേക്ഷികപിശക്} \times 100 = \frac{8.16\pi - 8\pi}{8.16\pi} \times 100 = 1.9607\%$$

ഉദാഹരണം 8.4

ഒരു സമവൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം $r = 10$ സെ.മീ, ഉയരം $h = 20$ സെ.മീ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 10 ൽ നിന്ന് 10.1 ആയി അധികരിക്കുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ. ഉയരത്തിന് മാറ്റം ഇല്ല എങ്കിൽ വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിൽ ഏർപ്പെടുന്ന മാറ്റം കണക്കാക്കുക കൂടാതെ ആപേക്ഷിക പിശക്, ശതമാന പിശക് എന്നിവയും കണക്കാക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

വ്യാസാർദ്ധം r ഉം ഉയരം h ഉം ഉള്ള സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തംഭത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $V = \pi r^2 h$, എന്നത് ഓർമ്മ പുതുക്കുക. അതായത് $V(r) = \pi r^2 h = 20\pi r^2$.

$$V(10.1) - V(10) \approx \left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=10} (10.1 - 10) = 20\pi\, 2(10(0.1)) \,.$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 63 15-02-2023 17:51:50

വ്യാപ്തത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റത്തിന്റെ അളവ് 40π സെ.മീ^{3} ആകുന്നു.

കൃത്യമായ കണക്കുപ്രകാരം വ്യാപ്തത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റം എന്നത്

$$V(10.1)-V(10) = 2040.2\pi - 2000\pi = 40.2\pi \text{ cm}^3.$$

എങ്കിൽ ആപേക്ഷിക പിശക് $= \dfrac{40.2\pi - 40\pi}{40.2\pi} = \dfrac{1}{201} = 0.00497$

കൂടാതെ ശതമാന പിശക് = ആപേക്ഷിക പിശക് $\times 100 = \dfrac{1}{201}\times 100 = 0.497\%$. ■

അഭ്യാസം 8.1

1. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ എന്നിരിക്കട്ടെ $x = 27$ ന്റെ രേഖീയ ഏകദേശനം കാണുക. രേഖീയ ഏകദേശനം ഉപയോഗിച്ച് $\sqrt[3]{27.2}$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.
2. രേഖീയ ഏകദേശനം ഉപയോഗിച്ച് താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയുടെ ഏകദേശമൂല്യം കാണുക.
   (i) $(123)^{\frac{2}{3}}$ (ii) $\sqrt[4]{15}$ (iii) $\sqrt[3]{26}$
3. ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഫലനങ്ങൾക്ക് രേഖപ്പെടുത്തിയിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കളിൽ രേഖീയഏകദേശനം കാണുക.
   (i) $f(x) = x^3 - 5x + 12,\ x_0 = 2$ (ii) $g(x) = \sqrt{x^2+9},\ x_0 = -4$
   (iii) $h(x) = \dfrac{x}{x+1},\ x_0 = 1$
4. വൃത്താകൃതിയിലുള്ള തകിടിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 12.65 സെ.മീറ്ററിനു പകരമായി 12.5 സെ.മീ എന്ന് കണക്കാക്കുന്നു എങ്കിൽ അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ മാറ്റം കണക്കാക്കുന്നതിന് ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവ കാണുക:
   (i) സംപൂർണ്ണ പിശക് (ii) ആപേക്ഷിക പിശക് (iii) ശതമാന പിശക്
5. ഗോളാകൃതിയിലുള്ള ഒരു മഞ്ഞ്കട്ടയുടെ വ്യാസാർദ്ധം 10 സെ.മീ ഇതിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 10 സെ.മീറ്ററിൽ നിന്ന് 9.8 സെ.മീ ആയി കുറയുന്നു. എങ്കിൽ ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയുടെ മൂല്യം കാണുക:
   (i) വ്യാപ്തത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റം (ii) ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റം
6. l നീളുമുള്ള ഒരു സിമ്പിൾ പെന്റുലത്തിന്റെ പൂർണ്ണദോലന സമയം T എന്നാൽ $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$, g ഒരു സ്ഥിര സംഖ്യ l ൽ ഉണ്ടാകുന്ന 2 % പിശക് അനുസരിച്ച് T യുടെ മൂല്യം കണക്കാക്കുന്നതിൽ ഉണ്ടാകുന്ന ശതമാന പിശകിന്റെ ഏകദേശം കാണുക.
7. ഒരു സംഖ്യയുടെ n ാം മൂലം കണക്കാക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന ശതമാന പിശക് ഏകദേശമായി ആ സംഖ്യയുടെ ശതമാന പിശകിന്റെ $\dfrac{1}{n}$ മടങ്ങ് ആണ് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

8.2.3 അവകലനങ്ങൾ

ഇവിടെ **അവകലന**ത്തെപ്പറ്റി പരിചയപ്പെടുത്തുന്നതിന് വീണ്ടും ഞങ്ങൾ അവകലജത്തിന്റെ തത്വത്തെ ഉപയോഗിക്കുന്നു. സമീകരണം (1) നെ മറ്റൊരു രീതിയിൽ വീക്ഷിച്ചാൽ,

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}. \qquad ...(7)$$

ഇവിടെ $\dfrac{df}{dx}$ എന്നത് ഹരണഫലത്തിന്റെ വ്യത്യാസങ്ങളുടെ പരിധിയെ കുറിക്കുന്നതിന് വ്യത്യാസങ്ങളുടെ പരിധിയെ കുറിക്കുന്നതിന് ലിബിനിസ് ഉപയോഗിച്ച ചിഹ്നം ആകുന്നു. ഇത് x നെ സംബന്ധിച്ച y ന്റെ **അവകലന ഗുണാങ്കം** എന്നു പറയുന്നു. $\dfrac{df}{dx}$ നെ df കൂടാതെ dx ന്റെ ഹരണമായി കരുതുന്നത് യോജിക്കുന്നതാകുമോ?

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 64 15-02-2023 17:51:54

മറ്റൊരു രീതി അവകലജം എന്നത് df കൂടാതെ dx ന്റെ ഹരണഫലമായി അർത്ഥ നിർണ്ണയം സാധ്യമാണോ? ചില സമയങ്ങളിൽ അതെ എന്നു പറയാം. ഉദാഹരണമായി $f(x) = mx + c$ ഇവിടെ m, c എന്നിവ സ്ഥിരങ്ങൾ ആണെങ്കിൽ $y = f(x)$.

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = m\Delta x = f'(x)\Delta x \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{കൂടാതെ } \Delta x$$

നും ആയതിനാൽ സമീകരണം (2) ഉം (3) ഉം സമം എന്ന് തെളിയുന്നു. ഇവിടെ x നും y യ്ക്കും ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റം നേർരേഖയിൻമേൽ ഉണ്ടാകുന്നു. ഈ സന്ദർഭത്തിൽ,

$$\frac{f \text{ ന്റെ മാറ്റം}}{x \text{ ന്റെ മാറ്റം}} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

ഈ അവസരത്തിൽ $df = \Delta f = dy$ കൂടാതെ $dx = \Delta x$. എന്ന് എടുക്കുകയാണെങ്കിൽ അവകലനം $\frac{df}{dx}$ എന്നത് യഥാർത്ഥത്തിൽ df ന്റെയും dx ന്റെയും ഹരണഫലമാകുന്നു. ഇത് f ന്റെ അവകലനത്തെ ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള നിർവചനത്തിലേയ്ക്ക് നയിക്കുന്നു:

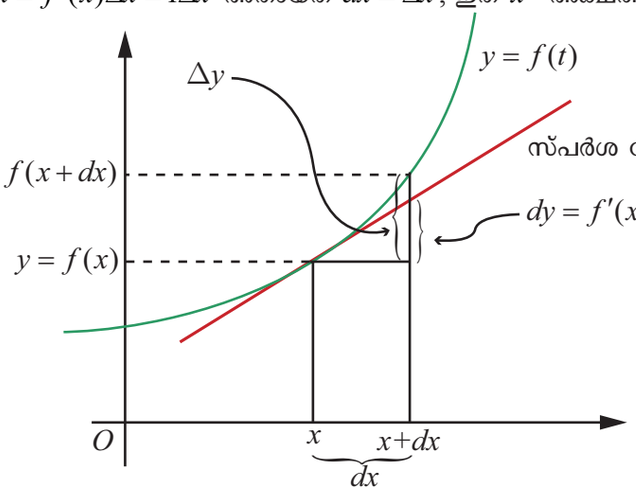
നിർവ്വചനം 8.4

x ന്റെ വർദ്ധനവ് Δx നോടും കൂടാതെ എല്ലാ $x \in (a,b)$ യ്ക്കും $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ഒരു അവകലിക്കപ്പെട്ട ഫലനം എങ്കിൽ f ന്റെ അവകലനം

$$df = f'(x)\Delta x \text{ എന്ന് നിർവ്വചിക്കാം.} \qquad \ldots (8)$$

$f(x) = x$, എന്നാൽ സമീകരണം 8 ൽ നിന്നും $dx = f'(x)\Delta x = 1\Delta x$ അതായത് $dx = \Delta x$, ഇത് x - അക്ഷത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റം ഇതിനാൽ സമീകരണം (8) ൽ f ന്റെ അവകലനം $df = f'(x)dx$.

ഏതെങ്കിലും ഒരു $y = f(x)$. ന് അവകലനം കാണം. $\Delta f = f(x+dx) - f(x)$ എന്നത് $y = f(x)$ എന്ന ഫലനത്തിൽ കിട്ടുന്ന ഔട്ട്പുട്ടിൽ ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റത്തെ തരുന്നു. $f'(x)$ എന്നത് x, $f'(x)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശ രേഖയുടെ ചെരിവിനെ കുറിക്കുന്നു. സ്പർശ രേഖയിൽ ഉടനീളം f ൽ ഏർപ്പെടുന്ന വർദ്ധനവ് dy അല്ലെങ്കിൽ df എന്നിരിക്കട്ടെ എന്നാൽ മേൽ പ്പറഞ്ഞ നിരീക്ഷണ പ്രകാരം $dy = f'(x)dx$.



ചിത്രം. 8.4
രേഖീയ ഏകദേശവും അവകലനവും

ചിത്രം 8.4 ൽ നന്ന് $\Delta f \approx dy = df = f'(x)dx$ എന്നത് സൃഷ്ടം കൂടാതെ $f'(x)$ എന്നത് ഏകദേശമായി Δf ന്റേയും Δx ന്റേയും ഹരണഫലമായും കാണാം അതിനാൽ $\frac{df}{dx}$ എന്നതിനെ df ന്റേയും dx ന്റേയും ഹരണഫലം എന്നും അർത്ഥമാക്കാം.

പ്രസ്താവന

ഒരു ഫലനത്തിന്റെ അവകലനവും ഒരു ഫലനം തന്നെയെന്ന് നമുക്കറിയാം. ഒരു ഫലനം f ന്റെ അവകലനം സ്വതന്ത്ര ചരത്തിന്റെ ഫലനം മാത്രമല്ലാതെ ഇൻപുട്ടിൽ ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റം $dx = \Delta x$ നെ ആശ്രയിച്ചുള്ളതാണ്. എന്നാൽ df എന്നത് x മറ്റും dx എന്ന രണ്ടു വ്യത്യാസപ്പെടുന്ന അളവുകളുടെ ഫലനമാകുന്നു. $\Delta f \approx df$, എന്നതിനെ ചിത്രം. 8.4 ലൂടെ നിരീക്ഷിക്കാം.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 65 15-02-2023 17:52:01

താരതമ്യം ചെയ്തു നോക്കാൻ ചില ഫലനങ്ങളും അവയുടെ അവകലജങ്ങളും അവകലനങ്ങളും ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്.

ക്ര. നമ്പ	ഫലനം	അവകലജം	അവകലനം
1	$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$df=nx^{n-1}dx$
2	$f(x)=\cos(x^2+7x)$	$f'(x)=-\sin(x^2+7x)(2x+7)$	$df=-\sin(x^2+7x)(2x+7)dx$
3	$f(x)=\cot(x^2)$	$f'(x)=-\operatorname{cosec}^2(x^2)2x$	$df=-\operatorname{cosec}^2(x^2)2x\,dx$
4	$f(x)=\sin^{-1}(x)$	$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$df=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
5	$f(x)=\tan^{-1}x$	$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$df=\frac{1}{1+x^2}dx$
6	$f(x)=e^{x^3-5x+7}$	$f'(x)=e^{x^3-5x+7}(3x^2-5)$	$df=e^{x^3-5x+7}(3x^2-5)dx$
7	$f(x)=\log(x^2+1)$	$f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}$	$df=\frac{2x}{x^2+1}dx$

അടുത്തതായി നമുക്ക് അവകലനത്തിന്റെ ഗുണങ്ങളെപ്പറ്റി നോക്കാം. ഈ ഫലങ്ങൾ അവകലനത്തിന്റെ നിർവ്വചനത്തേയും അവകലനത്തിന്റെ നിയമങ്ങളേയും അനുസരിച്ചുള്ളവയാണ്. ഇവിടെ (5) ാമത്തെ ഗുണത്തിന് മാത്രം തെളിവ് നല്കിയിട്ടുണ്ട്. ബാക്കിയുള്ളവ സ്വയം തെളിയിക്കുക.

അവകലനങ്ങളുടെ ഗുണങ്ങൾ

ഇവിടെ നമുക്ക് യഥാർത്ഥ ചരങ്ങളുടെ യഥാർത്ഥ മൂല്യ ഫലനങ്ങളെ പരിഗണിക്കാം.

(1) f ഒരു സ്ഥിര ഫലനം എങ്കിൽ $df=0$.

(2) $f(x)=x$ എന്നത് ഒരു അനന്യ ഫലനം എങ്കിൽ $df=1dx$.

(3) f അവകലിക്കപ്പെടുന്നതും കൂടാതെ $c\in\mathbb{R}$, ഉം എങ്കിൽ $d(cf)=cf'(x)dx$.

(4) f,g അവകലിക്കപ്പെടുന്നവ എങ്കിൽ $d(f+g)=df+dg=f'(x)dx+g'(x)dx$.

(5) f,g എന്നിവ അവകലിക്കപ്പെടുന്നവ എങ്കിൽ $d(fg)=fdg+gdf=(f(x)g'(x)+f'(x)g(x))dx$.

(6) f,g എന്നിവ അവകലിക്കപ്പെടുന്നവ എങ്കിൽ $d(f/g)=\frac{gdf-fdg}{g^2}=\frac{g(x)f'(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}dx$

ഇവിടെ $g(x)\neq 0$.

(7) f,g എന്നിവ അവകലിക്കപ്പെടുന്നവയും കൂടാതെ $h=f\circ g$ എന്നും നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട് എങ്കിൽ $dh=f'(g(x))g'(x)dx$.

(8) $h(x)=e^{f(x)}$, എങ്കിൽ $dh=e^{f(x)}f'(x)dx$.

(9) എല്ലാ x നും $f(x)>0$ കൂടാതെ $g(x)=\log(f(x))$, എങ്കിൽ $dg=\frac{f'(x)}{f(x)}dx$.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 66 15-02-2023 17:52:09

ഉദാഹരണം 8.5

$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ എന്നത് അവകലിക്കപ്പെട്ട ഫലനം എന്നാൽ $d(fg) = fdg + gdf$.

നിർദ്ധാരണം

$f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ എന്നത് അവകലിക്കപ്പെട്ട ഫലനങ്ങൾ എന്നതോട് $h(x) = f(x)g(x)$ എന്നിരിക്കട്ടെ. h , എന്നത് അവകലിക്കപ്പെട്ട ഫലനങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം എന്നതിനാൽ (a, b) യിൽ h ഉം അവകലിക്കത്തക്കതാണ്. നിർവ്വചനമനുസരിച്ച് $dh = h'(x)dx$ ഇപ്പോൾ ഗുണന നിയമം ഉപയോഗിച്ച് $h'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$.

$$dh = h'(x)dx = (f(x)g'(x) + f'(x)g(x))dx = f(x)g'(x)dx + f'(x)g(x)dx$$
$$= f(x)dg + g(x)df = fdg + gdf$$

ഉദാഹരണം 8.6

$g(x) = x^2 + \sin x$ എങ്കിൽ dg കണക്കാക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ഫലനം g അവകലിക്കത്തക്കത് കൂടാതെ $g'(x) = 2x + \cos x$ അതിനാൽ.

$dg = (2x + \cos x)dx$.

ഉദാഹരണം 8.7

10 സെ.മീ വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഗോളത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 0.1 സെ.മീ കുറയുന്നു. എന്നാൽ അതിന്റെ വ്യാപ്തത്തിൽ ഏകദേശമായി എത്ര കുറയും?

നിർദ്ധാരണം

ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, എന്ന് നമുക്കറിയാം, ഇവിടെ $r > 0$ എന്നത് വ്യാസാർദ്ധം അതിനാൽ അവകലനം $dV = 4\pi r^2 dr$

$$\Delta V \approx dV = 4\pi(10)^2(9.9\text{-}10) \text{ സെ.മീ}^3$$
$$= 4\pi 10^2(-0.1) \text{ സെ.മീ}^3$$
$$= -40\pi \text{ സെ.മീ}^3$$

വ്യാസാർദ്ധം 10 ൽ നിന്ന് 9.9 ആയി കുറയുന്നതിനാൽ $dr = (9.9 - 10)$ സെ.മീ എന്ന് ഉപയോഗിച്ചിരിക്കുന്നു. വീണ്ടും ഇത്തരത്തിൽ വരുന്ന ഋണചിഹ്നം ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം 40π സെ.മീ^{3} കുറയുന്നതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

അഭ്യാസം 8.2

1. ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഫലനങ്ങൾ ഓരോന്നിനും അവകലനം dy കാണുക :

   (i) $y = \frac{(1-2x)^3}{3-4x}$ (ii) $y = (3 + \sin(2x))^{2/3}$ (iii) $y = e^{x^2-5x+7} \cos(x^2 - 1)$

2. $f(x) = x^2 + 3x$ എന്ന ഫലനത്തിന് df കാണുക കൂടാതെ

   (i) $x = 2$, $dx = 0.1$ (ii) $x = 3$, $dx = 0.02$

3. f എന്ന ഫലനത്തിന് തന്നിട്ടുള്ള $x, \Delta x$ ന്റെ മൂല്യങ്ങൾക്ക് Δf ഉം df ഉം കാണുക കൂടാതെ അവയെ താരതമ്യം ചെയ്യുക

   (i) $f(x) = x^3 - 2x^2; x = 2, \ \Delta x = dx = 0.5$

   (ii) $f(x) = x^2 + 2x + 3; \ x = -0.5, \ \Delta x = dx = 0.1$

4. $\log_{10} e = 0.4343$, ഉപയോഗിച്ച് $\log_{10} 1003$ ന്റെ ഏകദേശ മൂല്യം കാണുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 67 15-02-2023 17:52:16

5. ഒരു മരത്തിന്റെ അടിവശത്തിന്റെ വ്യാസം 30 സെ.മീ അടുത്ത വർഷം അതിന്റെ ചുറ്റളവ് 6 സെ.മീ വർദ്ധിക്കുന്നു. എന്നാൽ.
   (i) ഏകദേശമായി മരത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം എത്രത്തോളം വളർന്നു?
   (ii) അതിന്റെ തിര്യക്ഛേദത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം എത്ര ശതമാനം വർദ്ധിക്കും?

6. ഒരു പ്രത്യേക തരം പക്ഷിയുടെ മുട്ട ഗോളാകൃതിയോട് വളരെ അടുത്ത സാദൃശ്യമുണ്ട്. മുട്ടയുടെ വ്യാസാർദ്ധം പുറം തോടിനുള്ളിൽ 5 മില്ലിമീറ്ററും പുറം തോടിനു വെളിയിൽ 5.3 മില്ലിമീറ്ററും ഉണ്ടായിരുന്നു. എന്നാൽ തോടിന്റെ ഏകദേശ വ്യാപ്തം കാണുക.

7. ഒരു മനുഷ്യന്റെ രക്തധമനിയുടെ തിര്യക്ഛേദം വൃത്താകൃതി എന്നിരിക്കട്ടെ. ഒരു രോഗിക്ക് രക്ത ധമനി വികസിക്കുന്നതിനുള്ള മരുന്ന് നൽകുന്നു. എന്നിരിക്കട്ടെ. രക്ത ധമനിയുടെ വ്യാസാർദ്ധം 2 മില്ലിമീറ്ററിൽ നിന്ന് 2.1 മില്ലിമീറ്ററായി അധികരിക്കുമ്പോൾ തിര്യക്ഛേദത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം ഏകദേശമായി എത്രകത്തോളം വികസിക്കുന്നു?

8. പുതുതായിരൂപീകരിക്കപ്പെട്ടഒരുനഗരത്തിന്റെസമദിദായകരുടെവർദ്ധനവ് $V(t) = 30 + 12t^2 - t^3,\ 0 \le t \le 8$ എന്ന് നിർണ്ണയിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇതിൽ t എന്നത് വർഷങ്ങളെ കുറിക്കുന്നു. (സമയം വർഷത്തിലാണ്) സമയം 4 ൽ നിന്ന് $4\frac{1}{6}$ വർഷം ആയിരിക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റത്തെ കാണുക.

9. ഒരു മനുഷ്യൻ x മണിക്കൂർ സമയത്തിൽ അഭ്യസിക്കുന്ന y വാക്കുകളുടെ ബന്ധനം $y = 52\sqrt{x},\ 0 \le x \le 9$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്. x ന്റെ മൂല്യം താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള രീതിയിൽ മാറുമ്പോൾ പഠന വാക്കുകളുടെ എണ്ണത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന ഏകദേശ മാറ്റത്തെ കാണുക.
   (i) 1 ൽ നിന്ന് 1.1 മണിക്കൂർ? (ii) 4 ൽ നിന്ന് 4.1 മണിക്കൂർ?

10. ഒരു വൃത്താകൃതിയിലുള്ള തകിട് ഊഷ്മാവിനാൽ ക്രമമായി വികസിക്കുന്നു. അതിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 10.5 സെ.മീറ്ററിൽ നിന്ന് 10.75 സെ.മീ ആയി വർദ്ധിക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന ഏകദേശ വർദ്ധനവിന്റെ മാറ്റവും ഏകദേശ ശതമാനത്തിന്റെ മാറ്റവും കാണുക.

11. 10 സെ.മീ വശം അളവുള്ള ഒരു സമചതുര ഘനികയുടെ വശങ്ങൾക്ക് 0.2 സെ.മീ കനത്തിൽ ചായം പൂശുന്നു. അവകലനത്തെ ഉപയോഗിച്ച് ആ സമചതുരഘനികയ്ക്ക് ചായം പൂശുന്നതിന് ഏകദേശം എത്ര ഘന സെ.മീ അളവിന് ചായം പ്രയോജനപ്പെടുത്തി എന്ന് കാണുക. കൂടാതെ സമചതുര ഘനിക ചായം പൂശുന്നതിന് ആവശ്യമായ പെയിന്റിന്റെ (ചായത്തിന്റെ) കൃത്യമായ അളവും കാണുക.

8.3 വിവിധ ചരങ്ങളോടു കൂടിയ ഫലനങ്ങൾ

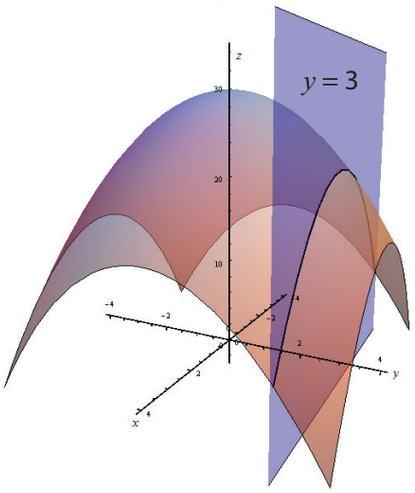
x എന്ന ചരത്തിലായ f എന്ന ഫലനത്തിന്റെ ഓർമ്മ പുതുക്കാം. $y = f(x)$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ പ്രത്യേകത യെ നല്ലവണ്ണം മനസ്സിലാക്കാൻ അതിന്റെ ഗ്രാഫിനെ വരയ്ക്കാം. പൊതുവായി $y = f(x)$ എന്ന ഫലനത്തിൽ ഗ്രാഫ് എന്നത് xy തലത്തിൽ രൂപപ്പെട്ട ഒരു വക്രരേഖ ആകുന്നു. കൂടാതെ $x = a$ യിൽ f ന്റെ അവകലജം $f'(a)$ എന്നത് $x = a$, യിൽ f ന്റെ വക്രരേഖയ്ക്കായുള്ള സ്പർശരേഖയിൽ ചായ്വിനെ കുറിക്കുന്നു. മുഖവുരയിൽ ഒന്നിലധികം ചരങ്ങളുടെ ഫലനങ്ങളുടെ ആവശ്യകതയെക്കുറിച്ച് പഠിച്ചു. ഇവിടെ ഒന്നിലധികം ചരങ്ങളോടു കൂടിയ ഫലനങ്ങളെ അറിയുന്നതിന് ചില തത്വങ്ങൾ രൂപീകരിക്കാം. ആദ്യമായി രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള ഫലനങ്ങളെ പരിഗണിക്കാം. x കൂടതെ y ൽ ഉള്ള ഫലനം $F(x, y)$ എന്നിരിക്കട്ടെ F, ന്റെ ഗ്രാഫ് കിട്ടുന്നതിന് ത്രിതലം xyz ൽ $z = F(x, y)$ ന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക. കൂടാതെ രണ്ട് ചരങ്ങളോട് കൂടിയ ഒരു ഫലനത്തിന്റെ ഭാഗീക അവകലനത്തിന്റേയും തുടർച്ചയുടേയും തത്വങ്ങളെ നമുക്ക് വികസിപ്പിക്കാം.

ഉദാഹരണമായി, $g(x, y) = 30 - x^2 - y^2,\quad x, y \in \mathbb{R}$. എന്നതിനെ പരിഗണിക്കാം. തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദു $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, എങ്കിൽ $z = 30 - x^2 - y^2$ എന്നത് ഗ്രാഫിൽ z അക്ഷത്തിന്റെ ദൂരത്തെ കുറിക്കുന്നു. $(x, y, 30 - x^2 - y^2)$ എന്ന ബിന്ദു xy പ്രദലത്തിൽ (x, y) എന്ന ബിന്ദുവിന് $30 - x^2 - y^2$ ഉയരത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. ഉദാഹരണമായി $(2,3) \in \mathbb{R}^2$, എങ്കിൽ $(2,3,30 - 2^2 - 3^2) = (2,3,17)$ എന്നത് g യുടെ ഗ്രാഫിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. നമ്മൾ $y = 3$ എന്ന് എടുത്താൽ $g(x,3) = -x^2 + 21$ എന്ന ഫലനം x നെ മാത്രം ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. എന്നതിനാൽ ഇത് ഒരു വക്രരേഖയായിരിക്കും. ഇതുപോലെ $x = 2$, എന്ന് എടുക്കുകയാണെങ്കിൽ $g(2, y) = 26 - y^2$ എന്ന ഫലനം y നെ മാത്രം ആശ്രയിച്ചിട്ടുള്ളതാണ്. ഈ രണ്ട് പ്രയോഗങ്ങളിൽ നിന്നും കിട്ടുന്ന ഫലനം ദ്വിഘാത ഫലനം ആയിരിക്കുന്നതിനാൽ ഗ്രാഫ് ഒരു പരാബോള ആയിരിക്കും. $z = g(x, y)$ ൽ നിന്ന് കിട്ടുന്ന ഫലനം ഒരു പരാബോളായിട്ട് ആയിരിക്കും.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 68 15-02-2023 17:52:22

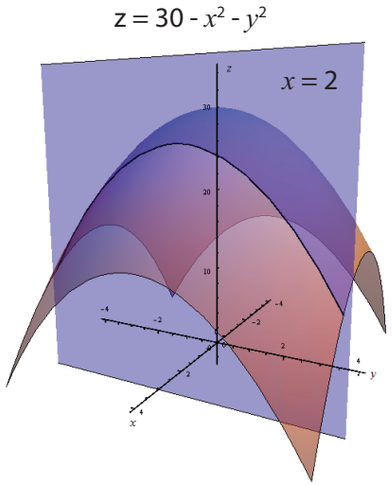
$g(x,3) = 21 - x^2$ എന്നത് ഒരു പരാബോള. ഇത് $z = 30 - x^2 - y^2$ എന്ന പ്രദലവും $y = 3$ എന്ന തലവും ഛേദിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്നതാണ്. [ചിത്രം. 8.5 ശ്രദ്ധിക്കുക). അതുപോലെ $g(2,y) = 26 - y^2$ എന്ന പരാബോള $z = 30 - x^2 - y^2$ എന്ന പ്രദലവും $x = 2$ എന്ന തലവും ഛേദിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്നതാണ്. [ചിത്രം. 8.6 ശ്രദ്ധിക്കുക). ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

$z = 30 - x^2 - y^2$



ചിത്രം. 8.5

$z = 30 - x^2 - y^2$



ചിത്രം. 8.6

x, y എന്ന രണ്ടു ചരങ്ങളാൽ രൂപപ്പെട്ട ഫലനം F എന്നതുപോലെ $z = F(x,y)$. എന്ന സമീകരണത്തെ ആസ്പദമാക്കി ത്രിമാന തലത്തിലും പ്രദർശിപ്പിക്കാം. ഇത് പൊതുവായി $\mathbb{R}^3$ ലുള്ള പ്രദലത്തെ കുറിക്കുന്നു.

8.3.1 ഒരു ചരമുള്ള ഫലനങ്ങളുടെ പരിധിയും തുടർച്ചയും ഓർമ്മ പുതുക്കുക

അടുത്തതായി നമുക്ക് രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള ഫലനത്തിന്റെ തുടർച്ചയെ നോക്കാം. അതിനു മുൻപ് ഒരു ചരമുള്ള ഫലനത്തിന്റെ തുടർച്ചയെ ഓർമ്മ പുതുക്കുന്നത് പ്രയോജന പ്രദമായിരിക്കും. ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഒരു ഫലന ത്തിന്റെ തുടർച്ചയുടെ നിർവ്വചനം നാം XI ാം ക്ലാസ്സിൽ നോക്കിയിട്ടുണ്ട്..

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ എന്ന ഫലനം $x_0 \in (a,b)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ തുടർച്ചയായിരിക്കണം എന്നാൽ ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന നിബന്ധനകളെ പൂർത്തീകരിക്കുക:

(1) x_0 യിൽ f നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു. (2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ നിലവിലുണ്ട് (3) $L = f(x_0)$

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള രണ്ടാമത്തെ നിബന്ധനയെ ശരിയായി മനസ്സിലാക്കുന്നതിൽ തന്നെയാണ് തുടർന്നു കൊണ്ടിരിക്കുന്നതിന്റെ പ്രധാന തത്വമുള്ളത്. x ന്റെ മൂല്യം x_0 നോട് അടുക്കും തോറും $f(x)$ ന്റെ മൂല്യം പ രിധിയോട് അടുക്കുന്നതിനെ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ എന്ന് എഴുതാം.

ഇനിയും തെളിവായും തുല്യമായും മനസിലാക്കാൻ രണ്ടാമത്തെ നിബന്ധനയെ അടുത്ത ഖണ്ഡികയിൽ മാറ്റി എഴുതാം. ഇത് രണ്ട് ചരങ്ങളോടു കൂടിയ സമീകരണത്തിന്റെ തുടർച്ചയെപ്പറ്റി അറിയുന്നതിന് പ്രയോജനപ്പെടും.

നിർവ്വചനം 8.5 (ഒരു ഫലനത്തിന്റെ പരിധി)

$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ കൂടാതെ $x_0 \in (a,b)$ എന്ന് കരുതുക. $x = x_0$ യിൽ f ന് ഒരു പരിധി L ഉണ്ടെന്ന് പറയുന്നു. L ന്റെ സമീപഭാഗം $(L-\varepsilon, L+\varepsilon), \varepsilon > 0$ എങ്കിൽ അവിടെ ഒരു സമീപഭാഗം $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b), \delta > 0$, x_0 യ്ക്ക് എന്നാൽ

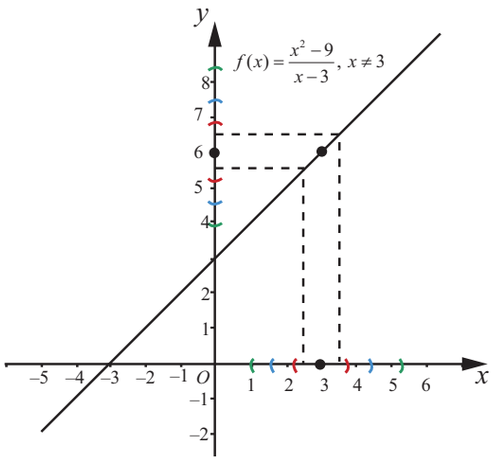
$f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon)$ എല്ലായ്പ്പോഴും $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$.

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള അടുത്തുള്ള ഭാഗം വഴിയായ നിബന്ധനയെ മോഡുലസ് ഉപയോഗിച്ചും, താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളതു പോലെ എഴുതാം:

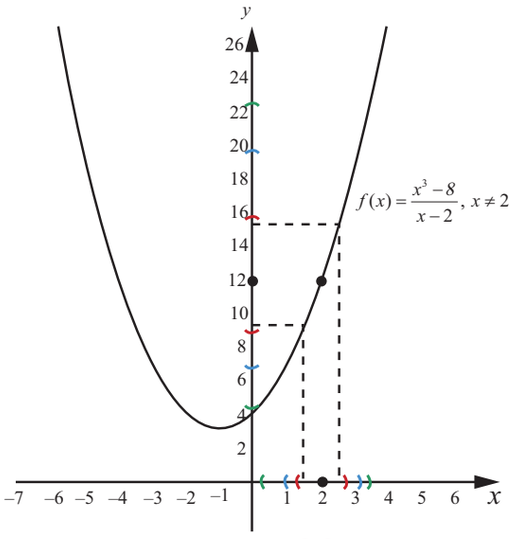
12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 69 15-02-2023 17:52:26

$\forall \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0\ \ |f(x) - L| < \varepsilon$ കൂടാതെ $0 < |x - x_0| < \delta$.

ഇതിന്റെ മൂല്യം $x \neq x_0$ x ന്റെ മൂല്യം x_0 യിൽ ഇരുന്ന് δ ദൂരത്തിലുള്ളതിനാൽ $f(x)$ എന്നത് L . ൽ നിന്ന് ε ദൂരത്തിൽ ഇരിക്കും. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിൽ ε നും δ യ്ക്കും ഇടയിൽ ഉള്ള ബന്ധത്തെ വിശദീകരിക്കും.



ചിത്രം. 8.7



ചിത്രം. 8.8

x_0 ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള നിബന്ധനകൾ സമമാണെങ്കിൽ x_0 കൂടാതെ x_0 യുടെ സമീപഭാഗത്തിൽ f എന്ന ഫലനത്തിന്റെ x_0 യുടെ പരിധിയുടെ മൂല്യം ലഭ്യമാണ് എന്നത് നാം XI ാം ക്ലാസ്സിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട് :

(1) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = L_1$ (വലതു പരിധി)

(2) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L_2$ (ഇടതു പരിധി)

(3) $f(x_0) = L$ എന്നിരിക്കട്ടെ

ഇവിടെ $L = L_1 = L_2$ എങ്കിൽ ഫലനം f എന്നത് x= x_0 യിൽ തുടർന്നു കൊണ്ടിരിക്കുന്നു. ഒരു ചരത്തോടു കൂടിയ ഫലനങ്ങളുടെ പരിധിയും സമീപഭാഗത്തിന്റെ തുടർച്ചയും ഒരു പ്രധാന പങ്ക് വഹിക്കുന്നു. ഈ സാഹചര്യത്തിൽ $x_0 \in \mathbb{R}$ ന്റെ സമീപഭാഗം $(x_0 - r, x_0 + r)$, $r > 0$ ആയിരിക്കും. രണ്ട് ചരങ്ങളോടു കൂടിയ ഫലനത്തിന്റെ പരിധിയും തുടർച്ചയും അറിയുന്നതിന് $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ന്റെ സമീപഭാഗത്തെ നിർവ്വചിക്കേണ്ടതുണ്ട്. അതിനാൽ $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ഉം $r > 0$, യ്ക്ക് (u, v) എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സമീപഭാഗം

$$B_r((u, v)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-u)^2 + (y-v)^2 < r^2\}.$$

എന്ന ഗണമാകുന്നു. (u, v) എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ r സമീപഭാഗം, കേന്ദ്രം (u, v) കൂടാതെ വ്യാസാർദ്ധം $r > 0$. യോടു കൂടിയ ഒരു തുറന്ന ഡിസ്ക് ആകുന്നു. മാറ്റിയാൽ അത് **ദ്വാരമുള്ള** ഒരു **സമീപ ഭാഗമായി** മാറും.

8.4 രണ്ടു ചരങ്ങളോടു കൂടിയ ഫലനങ്ങളുടെ പരിധിയും തുടർച്ച എന്ന ആശയവും

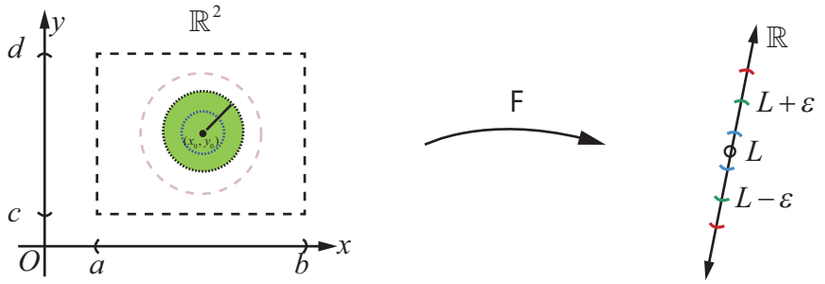
നിർവ്വചനം 8.6 (ഫലനങ്ങളുടെ പരിധി)

$A = \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2, F : A \to \mathbb{R}$. എന്നിരിക്കട്ടെ F ന്റെ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള നിബന്ധനകളെ പൂർത്തീകരിക്കുമെങ്കിൽ (u, v) യിൽ F ന്റെ പരിധി L ആകുന്നു :

L ന്റെ എല്ലാ സമീപഭാഗത്തിനും $(L - \varepsilon, L + \varepsilon), \varepsilon > 0$, യ്ക്കും $(x, y) \in B_\delta((u, v)) \setminus \{(u, v)\}$, $\delta > 0 \Rightarrow f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ എന്ന പ്രകാരം (u, v) യുടെ ഒരു δ സമീപഭാഗം $B_\delta((u, v)) \subset A$ ഉണ്ടായിരിക്കും ഇതിനെ.

$\lim\limits_{(x,y) \to (u,v)} F(x, y) = L$ എന്ന് എഴുതാം.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 70 15-02-2023 17:52:31



ചിത്രം. 8.9 ഫലനത്തിന്റെ പരിധി

ഒരു ചരമുള്ള ഫലനങ്ങളെ താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ രണ്ടു ചരങ്ങളുള്ള ഫലനങ്ങളുടെ പരിധി കാണുന്ന രീതി സൂക്ഷ്മമായതാണ്. ഇവിടെ (u,v) യുടെ സാധ്യമായ **എല്ലാ വഴികളിലൂടെയും** (x,y) എന്നത് (u,v) യോട് അടുക്കുമ്പോൾ $F(x,y)$ യുടെ മൂല്യം L, എന്ന അതേ മൂല്യത്തെ സമീപിക്കണം. (നേർരേഖകളല്ലാത്ത വഴികളേയും ഉൾപ്പെടെ) ചിത്രം.8.9 പരിമിതപ്പെടുത്തൽ പ്രക്രിയ വിശദീകരിക്കുന്നു.

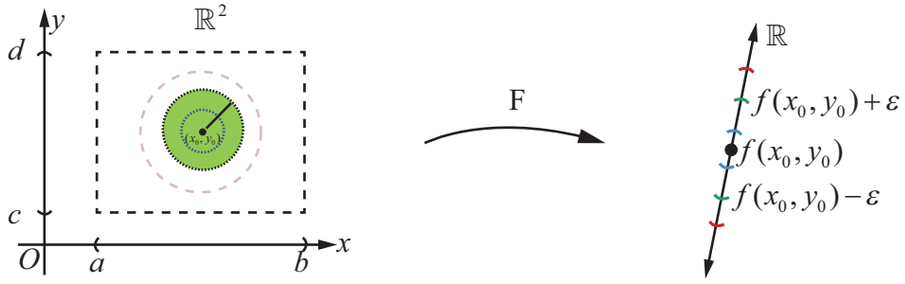
ഒരു ചരത്തോടു കൂടിയ ഫലനങ്ങളുടെ പരിധിയുടെ നിയമങ്ങൾ (പരിധിയുടെ സിദ്ധാന്തങ്ങൾ) ഒന്നിലധികം ചരങ്ങളോടു കൂടിയ ഫലനങ്ങൾക്കും അനുയോജ്യമാണ്.

ഇപ്പോൾ ഒരു ചരത്തെ കൊണ്ടുള്ള ഫലനങ്ങളുടെ തുടർച്ച എന്ന ആശയത്തെ പിൻ തുടർന്ന് രണ്ട് ചരങ്ങളോടു കൂടിയ ഫലനങ്ങളുടെ തുടർച്ച എന്ന ആശയത്തെ നിർവ്വചിക്കാം.

നിർവ്വചനം 8.7 (തുടർച്ച)

$A=\{(x,y)\,|\,a<x<b, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2, F:A\to\mathbb{R}$. എന്ന ഫലനം F (u,v) ൽ തുടർച്ചയായത് എങ്കിൽ ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവ പൂർത്തീകരിക്കുക :

(1) (u,v) ൽ F നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട് (2) $\lim\limits_{(x,y)\to(u,v)} F(x,y)=L$ (3) $L=F(u,v)$.



ചിത്രം. 8.10 ഫലനങ്ങളുടെ തുടർച്ച

പരാമർശം

(1) ചിത്രം. 8.10 ൽ $L=F(x_0,y_0)$ എന്നത് (x_0,y_0) യിൽ തുടർച്ച എന്ന ആശയം വ്യക്തമാകും.

(2) $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ ന്റെ തുടർച്ചയും മുകളിൽ നിർവ്വചിച്ചതുപോലെ നിർവ്വചിക്കപ്പെടും.

രണ്ടു ചരങ്ങളോടു കൂടിയ ഫലനങ്ങളുടെ തുടർച്ചയെ മനസ്സിലാക്കുന്നതിനും വിശദീകരിക്കുന്നതിനുമുള്ള ഉദാഹരണങ്ങളെ പരിഗണിക്കാം.

ഉദാഹരണം 8.8

എല്ലാ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ എന്നും $f(x,y)=\dfrac{3x-5y+8}{x^2+y^2+1}$ എന്നാൽ $\mathbb{R}^2$ ൽ f തുടർച്ചയായത് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 71 15-02-2023 17:52:35

നിർദ്ധാരണം

$(a,b) \in \mathbb{R}^2$ എന്നത് ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു എന്നിരിക്കട്ടെ (a,b) യിൽ f ന്റെ തുടർച്ചയെ കണ്ടുപിടിക്കാം. അതായത് (a,b) യിൽ f ന്റെ തുടർച്ചയ്ക്കായുള്ള മൂന്നു നിബന്ധനകളെ പരിശോധിക്കാം.

$f(a,b) = \dfrac{3a-5b+8}{a^2+b^2+1}$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ളതിനാൽ ഒന്നാമത്തെ നിബന്ധ ശരിയാകുന്നു.

രണ്ടാമതായി $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ യ്ക്ക് പരിധി നിലവിലുണ്ടോ ഇല്ലയോ എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കണം.

കൂടാതെ $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (3x-5y+8) = 3a-5b+8$ and $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (x^2+y^2+1) = a^2+b^2+1 \neq 0$.

എന്നതിനാൽ പരിധിയുടെ ഗുണങ്ങൾ പ്രകാരം

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (3x-5y+8)}{\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} (x^2+y^2+1)} = \frac{3a-5b+8}{a^2+b^2+1} = f(a,b) = \text{L}$$ നിലവിലുണ്ട്.

ഇപ്പോൾ $\lim\limits_{x,y\to(a,b)} f(x,y) = L = f(a,b)$. ശ്രദ്ധേയമാണ്. അതിനാൽ (a,b) ൽ f ന്റെ തുടർച്ചയ്ക്കായുള്ള 3 നിബന്ധനകളും തൃപ്തിപ്പെടുന്നു. (a,b) എന്നത് R^2 ന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു എന്നതിനാൽ, f ന്റെ ഫലനം $\mathbb{R}^2$ ന്റെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും തുടർച്ച ഉള്ളതായി തീരുമാനിക്കാം. ■

ഉദാഹരണം 8.9

$f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y) \neq (0,0)$ കൂടാതെ $f(0,0) = 0$. എന്ന ഫലനത്തെ പരിഗണിച്ചാൽ ഈ ഫലനം f $(0,0)$ നെ ഒഴികെ $\mathbb{R}^2$ ന്റെ മറ്റെല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും തുടർച്ചയുണ്ട് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ഓരോ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ നും f നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ളതിനെ ശ്രദ്ധിക്കുക. ഒന്നാമതായി $(a,b) \neq (0,0)$ യുടെ തുടർച്ചയെ ശരിനോക്കാം. ഉദാഹരണമായി $(a,b) = (2,5)$ എങ്കിൽ $f(2,5) = \dfrac{10}{29}$ ആയതിനാൽ മുകളിൽ കൊടുത്ത ഉദാഹരണത്തെ പിൻതുടർന്ന് $\lim\limits_{(x,y)\to(2.5)} xy = 2(5) = 10$ കൂടാതെ $\lim\limits_{(x,y)\to(2.5)} x^2+y^2 = 2^2+5^2 = 29 \neq 0$.

ആയതിനാൽ $\lim\limits_{(x,y)\to(2,5)} \dfrac{xy}{x^2+y^2} = \dfrac{10}{29}$.

$f(2,5) = \dfrac{10}{29} = \lim\limits_{(x,y)\to(2,5)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$, എന്നതിനാൽ $(2,5)$ ൽ f ന് തുടർച്ച ഉള്ളതായി തെളിയുന്നു.

ഇതു പോലുള്ള വാഗ്വാദങ്ങളെ കൊണ്ട് $(a,b) \neq (0,0)$ ആയിട്ടുള്ള ഓരോ ബിന്ദുവിലും f ന് തുടർച്ചയുള്ളത് എന്നു പറയാം. ഇപ്പോൾ $(0,0)$ യിലും തുടർച്ച ഉള്ളതായി കാണാം. നിർവ്വചനപ്രകാരം $f(0,0) = 0$ അടുത്തതായി $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$.

$(0,0)$ വഴി കടന്നു ചെല്ലുന്ന $y = mx$, എന്ന നേർരേഖയുടെ പരിധി ആദ്യം പരിശോധിക്കുക.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{(1+m^2)x^2} = \frac{m}{1+m^2} \neq f(0,0), \text{ if } m \neq 0.$$

എന്നതിനാൽ m, ന്റെ വിവിധതരമായ മൂല്യങ്ങൾക്ക് വിവിധതരമായ $\dfrac{m}{1+m^2}$ മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു. ആയതിനാൽ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ ന് മൂല്യം ഇല്ല. അതിനാൽ $(0,0)$ യിൽ f തുടർച്ചയായിട്ടുള്ളതല്ല. എന്നതിനാൽ $(0,0)$ ഒഴികെ മറ്റെല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും f തുടർച്ചയായിട്ടുള്ളതാകുന്നു. ■

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 72 15-02-2023 17:52:42

ഉദാഹരണം 8.10

$g(x,y)=\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}$ $(x,y)\neq(0,0)$, $g(0,0)=0$. എന്നാൽ $\mathbb{R}^2$ ൽ g തുടർച്ചയായിട്ടുള്ളത് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ഫലനം g എല്ലാ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. നും നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ളത് എന്നിരിക്കട്ടെ. മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഉദാഹരണങ്ങളെപ്പോലെ $(x,y)\neq(0,0)$. ആയിട്ടുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കൾക്കും g യുടെ തുടർച്ചയെ ശരിനോക്കാം. $(0,0)$. ൽ g യ്ക്ക് പരിധി ഉണ്ട്. കൂടാതെ $L=g(0,0)=0$. എന്നാൽ

$$|g(x,y)-g(0,0)|=\left|\frac{2x^2y}{x^2+y^2}-0\right|=\frac{2|x^2y|}{|x^2+y^2|}=\frac{2|xy||x|}{x^2+y^2}\leq\frac{(x^2+y^2)|x|}{x^2+y^2}\leq|x| \qquad \ldots(9)$$

ഇവിടെ അവസാനത്തെ വരിയിൽ നമ്മൾ $2|xy|\leq x^2+y^2$ എന്നതിന് എല്ലാ $x,y\in\mathbb{R}$ എന്ന് ഉപയോഗിച്ചിട്ടുള്ളതിനെ ശ്രദ്ധിക്കുക (ഇത് $0\leq(x-y)^2$ ൽ നിന്ന് ലഭിക്കുന്നു) $(x,y)\to(0,0)$ എന്നതിനാൽ $|x|\to0$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. സമീകരണം (9) ൽ നിന്ന് $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2x^2y}{x^2+y^2}=0=g(0,0)$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. ആയതിനാൽ $(0,0)$ യിൽ g തുടർച്ചയായിട്ടുള്ളത് എന്ന് തെളിയുന്നു. ആയതിനാൽ $\mathbb{R}^2$ ന്റെ ഓരോ ബിന്ദുവിലും g തുടർച്ച ഉള്ളതാകുന്നു.

അഭ്യാസം 8.3

1. ഫലനം $g(x,y)=\dfrac{3x^2-xy}{x^2+y^2+3}$ ന് പരിധിയുടെ മൂല്യം നിലവിലുണ്ടെങ്കിൽ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}g(x,y)$ യുടെ മൂല്യം കാണുക.
2. പരിധിയുടെ മൂല്യം നിലവിലുണ്ടെങ്കിൽ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\cos\left(\dfrac{x^3+y^2}{x+y+2}\right)$. ന്റെ മൂല്യം കാണുക.
3. $(x,y)\neq(0,0)$ യ്ക്ക് $f(x,y)=\dfrac{y^2-xy}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$ എന്നാൽ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.
4. പരിധിയുടെ മൂല്യം നിലവിലുണ്ടെങ്കിൽ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\cos\left(\dfrac{e^x\sin y}{y}\right)$, യുടെ മൂല്യം കാണുക.
5. $(x,y)\neq(0,0)$ യ്ക്ക് $g(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ കൂടാതെ $f(0,0)=0$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

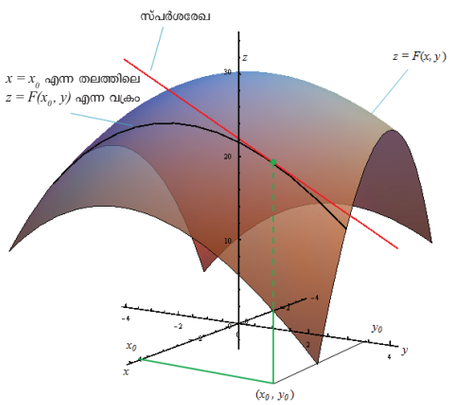
   (i) ഓരോ $y=mx, m\in\mathbb{R}$ നേർരേഖയിലൂടെ നീളം $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

   (ii) ഓരോ $y=kx^2, k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ പരാബോളയിലൂടെ നീളം $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}g(x,y)=\dfrac{k}{1+k^2}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.
6. ഫലനം $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{y^2+1}$ ഓരോ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ നും തുടർച്ചയായത് എന്ന് തെളിയിക്കുക.
7. ഫലനം $g(x,y)=\dfrac{e^y\sin x}{x}$, $x\neq0$ കൂടാതെ $g(0,0)=1$. എന്നിരിക്കട്ടെ. ബിന്ദു $(0,0)$ യിൽ g തുടർച്ചയായിട്ടുള്ളത് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

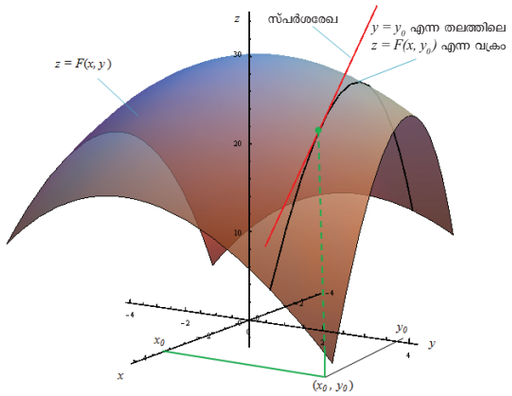
12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 73 15-02-2023 17:52:50

8.5 ഭാഗീക അവകലജങ്ങൾ

ഈ വിഭാഗത്തിൽ ഒരു ചതം കൊണ്ടുള്ള ഫലനങ്ങളുടെ അവകലജത്തിന്റെ തത്വത്തെ പല ചരങ്ങളോടു കൂടിയ രേഖീയ മൂല്യ ഫലനങ്ങൾക്ക് എപ്രകാരം സാമാത്യവത്കരിക്കപ്പെടുന്നത് എന്ന് കാണാം. ഒന്നാമതായി രണ്ടു ചരങ്ങളോടു കൂടിയ ഫലനങ്ങളെ പരിഗണിക്കാം. $A=\{(x,y)\,|\,a<x<b, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2$, കൂടാതെ $F:A\to\mathbb{R}$ എന്നത് ഒരു യഥാർത്ഥ മൂല്യ ഫലനം എന്നിരിക്കട്ടെ $(x_0,y_0)\in A$ എന്നാൽ (x_0,y_0) എന്ന ബിന്ദുവിൽ x എന്ന ചരത്തിന് മാത്രം ഏർപ്പെടുന്ന മാറ്റത്തിനനുസരിച്ച് F ൽ ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റത്തെ കാണാം. മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പ്രകാരം $F(x,y_0)$ എന്നത് x മാത്രമുള്ൾ ഫലനമാണ്. കൂടാതെ $y=y_0$ എന്ന തലവും $z=F(x,y)$ എന്ന പ്രദലവും ഛേദിക്കുന്ന ഒരു വക്രരേഖ ആകുന്നു. അതിനാൽ $z=F(x,y_0)$ എന്ന വക്രരേഖയിൽ സ്പർശരേഖ ചായ്വിനെ $x=x_0$ യിൽ $F(x,y_0)$ യുടെ x നെ ആസ്പദമാക്കി ഭാഗീക അവകലജത്തിനെ $x=x_0$. ൽ ലഭിക്കുന്നതു മൂലം കാണാം. അതുപോലെ $z=F(x_0,y)$ y നെ സംബന്ധിച്ച അവകലജത്തെ $y=y_0$ ൽ ലഭിക്കുന്നതു മൂലം കാണാം. ഈ പ്രധാന തത്വങ്ങൾ തന്നെയാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഭാഗീക അവകലജത്തിന്റെ നിർവ്വചനത്തിന് നമ്മെ പ്രോത്സാഹിപ്പിക്കുന്നത്.



ചിത്രം. 8.11



ചിത്രം. 8.12

നിർവ്വചനം 8.8

$A=\{(x,y)\,|\,a<x<b, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2, F:A\to\mathbb{R}$ ഉം $(x_0,y_0)\in A$.

(i) x ൽ $(x_0,y_0)\in A$ സംബന്ധിച്ച് F ന് ഒരു ഭാഗീക അവകലജം ഉണ്ടെന്ന് ഞങ്ങൾ പറയുന്നു.

$$\lim_{h\to0}\frac{F(x_0+h,y_0)-F(x_0,y_0)}{h}$$ നിലനിൽക്കുന്നു. ... (10)

ഈ സാഹചര്യത്തിൽ പരിധി മൂല്യം $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

(ii) y ൽ $(x_0,y_0)\in A$ സംബന്ധിച്ച് F ന് ഒരു ഭാഗീക അവകലജം ഉണ്ടെന്ന് ഞങ്ങൾ പറയുന്നു.

$$\lim_{k\to0}\frac{F(x_0,y_0+k)-F(x_0,y_0)}{k}$$ ... (11)

നിലനിൽക്കുന്നു. ഈ സാഹചര്യത്തിൽ പരിധി മൂല്യം $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

പരാമർശങ്ങൾ

1. മൂന്നോ അതിലധികമോ ചരങ്ങളോടു കൂടിയ ഫലനങ്ങൾക്കും ഭാഗീക അവകലജം ഇതേ രീതിയിൽ കൃത്യമായി നിർവ്വചിക്കാം.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 74 15-02-2023 17:52:55

2. ∂F എന്നത് **"ഭാഗീക F"** എന്നും ∂x എന്നത് **"ഭാഗീക x"** എന്നും വായിക്കണം അതിനാൽ $\frac{\partial F}{\partial x}$ നെ ഭാഗീക F ഹരണം ഭാഗീക x". എന്നും കൂടാതെ ഇതിനെ F ബൈ ഡോ x" എന്നും വായിക്കാം.

3. അതുപോലെ $\frac{\partial F}{\partial x}$ നെ ഭാഗീക F ഭാഗം ഭാഗീക y" അല്ലെങ്കിൽ ദെം F ബൗ ദൊ y എന്നും വായിക്കാം.

4. ചില സമയങ്ങളിൽ $\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)$ നെ $F_x(x_0, y_0)$ അല്ലെങ്കിൽ $\left.\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)\right|_{(x_0, y_0)}$ എന്നും കുറിക്കുന്നു

   അതുപോലെ $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)$ നെ $F_y(x_0, y_0)$, അല്ലെങ്കിൽ $\left.\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)\right|_{(x_0, y_0)}$ എന്നും കുറിക്കുന്നു.

5. x നെ സംബന്ധിച്ച് F ന്റെ ഭാഗീക അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുമ്പോൾ റശദ്ധിക്കേണ്ടത് ചരം y നെ സ്ഥിരമായി കരുതി x നെ സംബന്ധിച്ച് അവകലജം കാണേണ്ടതുണ്ടോ അതൊഴികെ മറ്റെല്ലാ ചരങ്ങളും സ്ഥിരമായി കരുതണം. അതിനാൽ തന്നെയാണ് നാം ഇവയെ ഭാഗീക അവകലജം എന്ന് ചൊല്ലുന്നത്.

6. A യുടെ ഓരോ ബിന്ദുവിനും F ന് x നെ സംബന്ധിച്ച് **ഭാഗീക അവകലജം** ഉണ്ട് എങ്കിൽ A യ്ക്ക് $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ നിലവിലുണ്ട് എന്ന് പറയുന്നു. ഈ സന്ദർഭത്തിൽ $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$ എന്നത് A യുടെ ഒരു യഥാർത്ഥ മൂല്യഫലനം എന്ന് ആവർത്തിച്ചു പ്രസ്താവിക്കുന്നു.

7. (4), ൽ നിന്ന് ലഭിക്കുന്നതു പ്രകാരം അവകലനത്തിന്റെ എല്ലാ നിയമങ്ങളും **(ചങ്കലനം, ഗുണനം, ഹരണം, കൂടാതെ ചെയിൻ നിയമം)** സൂത്രങ്ങളും ഭാഗീക അവകലജത്തിന് യോജിക്കും എന്നത് നാം നേരത്തെ പഠിച്ചു കഴിഞ്ഞു.

ശരിയാണ്, ഒരു ചരത്തിന്റെ ഫലനത്തിന് ഒരു ഘട്ടത്തിലെ വ്യത്യാസം എല്ലായ്പോഴും തുടർച്ചയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു എന്ന് ഓർക്കുക. ബിന്ദു (x, y) എന്നീ രണ്ട് ചരങ്ങളുടെ F എന്ന ഫലനമായി ഞങ്ങൾ നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു. $\frac{\partial F}{\partial x}(u, v)$ യും $\frac{\partial F}{\partial y}(u, v)$ യും ഒരു ബിന്ദുവിൽ (u, v) F ന്റെ ഭാഗീക അവകലജങ്ങളുടെ (u, v) ൽ F ന്റെ തുടർച്ചയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നുണ്ടോ? ഇത് എല്ലായ്പ്പോഴും സംഭവിക്കണമെന്നില്ലെന്ന് ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഉദാഹരണം വിശദീകരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 8.11

$xy \neq 0$ എങ്കിൽ $f(x, y) = 0$ കൂടാതെ $xy = 0$ എന്നാൽ $f(x, y) = 1$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ എന്നിവ കാണുക.

(ii) $(0,0)$ യിൽ f തുടർച്ചയില്ലാത്തത് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$\mathbb{R}^2$ ൽ x, y അക്ഷങ്ങളിൽ f ന്റെ മൂല്യം 1 എന്നും മറ്റു എല്ലാ സ്ഥലങ്ങളിലും 0 എന്നതിനേയും ശ്രദ്ധിക്കുക.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h, 0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1-1}{h} = 0;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0, 0+k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{1-1}{k} = 0.$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 75 15-02-2023 17:53:01

(ii) ഇത് തെളിയിക്കുന്നതിന് $y = x$ എന്ന രേഖയിലൂടെ നീളം $(x, y) \to (0, 0)$ ആകുമ്പോൾ f ന്റെ പരിധി കണക്കാക്കാം. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$ എന്തെന്നാൽ $y = x$ എന്ന രേഖയിലൂടെ നീളം $x \neq 0$ ആകുമ്പോൾ $f(x, y) = 0$, എന്നാൽ $f(0, 0) = 1 \neq 0$ അതിനാൽ f തുടർച്ചയില്ലാത്തതായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 8.12

എല്ലാ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ നും $F(x, y) = x^3y + y^2x + 7$ എന്നാൽ $\frac{\partial F}{\partial x}(-1, 3)$ ഉം $\frac{\partial F}{\partial y}(-2, 1)$ ഉം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ആദ്യമായി $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)$, കണക്കാക്കി അതിനെ $(-1, 3)$. ൽ മൂല്യം കാണുക. y നെ അവകലിക്കുക. x അതായത്,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial(x^3y + y^2x + 7)}{\partial x} = \frac{\partial(x^3y)}{\partial x} + \frac{\partial(y^2x)}{\partial x} + \frac{\partial(7)}{\partial x}$$

$$= 3x^2y + y^2 + 0$$

$$= 3x^2y + y^2.$$

അതിനാൽ $\frac{\partial F}{\partial x}(-1, 3) = 3(-1)^2 3 + 3^2 = 18$.

അടുത്തതായി y നെ സംബന്ധിച്ച ഭാഗീക അവകലജം കാണുന്നതിനും ഇതേ രീതിയിൽ.

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial(x^3y + y^2x + 7)}{\partial y} = \frac{\partial(x^3y)}{\partial y} + \frac{\partial(y^2x)}{\partial y} + \frac{\partial(7)}{\partial y}$$

$$= x^3 + 2yx + 0$$

$$= x^3 + 2yx.$$

അതിനാൽ $\frac{\partial F}{\partial y}(-2, 1) = (-2)^3 + 2(1)(-2) = -12$.

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഉദാഹരണങ്ങളിൽ $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 3x^2y + y^2$, എന്നത് വീണ്ടും രണ്ട് ചരങ്ങളോടു കൂടിയ ഒരു ഫലനമാകുന്നു. ആയതിനാൽ ഈ ഫലനത്തിൽ x നെ സംബന്ധിച്ച് അല്ലെങ്കിൽ y നെ സംബന്ധിച്ച് ഭാഗീക അവകലജം കാണാൻ സാധിക്കും. ഉദാഹരണമായി $G(x, y) = 3x^2y + y^2$, എന്ന് കണക്കാക്കിയാൽ $\frac{\partial G}{\partial x} = 6xy$. $G(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 6xy$. എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. ഇത് F ന് x നെ സംബന്ധിച്ച **രണ്ടാം ക്രമഭാഗീക അവകലജം** എന്നു പറയുന്നു. കൂടാതെ, $\frac{\partial G}{\partial y} = 3x^2 + 2y$. $G(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}$, എന്നതിനാൽ $\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = 3x^2 + 2y$. ഇതിനെ $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$ എന്നും കുറിക്കാം. ഇത് x, y നെ സംബന്ധിച്ച് F ന്റെ **മിശ്രഭാഗീക അവകലജം** എന്ന് പറയപ്പെടുന്നു. ഇതുപോലെ $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = 3x^2 + 2y$ നേയും കണക്കാക്കാൻ നമുക്ക് സാധിക്കും.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 76 15-02-2023 17:53:09

കൂടാതെ $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ യിനെ സംബന്ധിച്ച ഭാഗീക അവകലജം ചെയ്യുമ്പോൾ $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. ഇത് F ന്റെ y നെ സംബന്ധിച്ച രണ്ടാം ക്രമ ഭാഗീക അവകലജം എന്ന് പറയുന്നു. അതിനാൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു ഉപഗണം $\{(x,y) \mid a < x < b, c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$ ൻ മേൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട F എന്ന ഫലനത്തിന് ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ചിഹ്നങ്ങൾ ഉണ്ട് :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = F_{xx}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = F_{xy}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = F_{yx}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) = F_{yy}$$

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയെ F ന്റെ രണ്ടാം ക്രമ ഭാഗീക അവകലജങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു. ഇപ്രകാരം രണ്ടിലധികം ക്രമമുള്ള ഭാഗീക അവകലജങ്ങളും നിർവ്വചിക്കാം. ഉദാഹരണമായി, $\frac{\partial^3 F}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right)$, കൂടാതെ $\frac{\partial^3 F}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\right)$.

ഭാഗീക അവകലജത്തിനായ മറ്റൊരു ഉദാഹരണം കൂടെ നമുക്ക് നോക്കാം.

ഉദാഹരണം 8.13

എല്ലാ $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ നും $f(x,y) = \sin(xy^2) + e^{x^3+5y}$ എന്നാൽ $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ എങ്കിൽ കണക്കാക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ആദ്യം കണക്കാക്കാം $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ f എന്നത് രണ്ടു ഫലനത്തിന്റെ സങ്കലനം, എന്നതിനാൽ

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\sin(xy^2) + \frac{\partial}{\partial x}\left(e^{x^3+5y}\right)\\ &= \cos(xy^2)\frac{\partial}{\partial x}(xy^2) + e^{x^3+5y}\frac{\partial}{\partial x}(x^3+5y)\\ &= \cos(xy^2)y^2 + e^{x^3+5y}3x^2.\end{aligned}$$

ഇതുപോലെ,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\sin(xy^2) + \frac{\partial}{\partial y}\left(e^{x^3+5y}\right)\\ &= \cos(xy^2)\frac{\partial}{\partial y}(xy^2) + e^{x^3+5y}\frac{\partial}{\partial y}(x^3+5y)\\ &= \cos(xy^2)2xy + 5e^{x^3+5y}.\end{aligned}$$

അടുത്തതായി,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\cos(xy^2) + 3x^2e^{x^3+5y}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial y}(y^2\cos(xy^2)) + \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2e^{x^3+5y}\right)\\ &= 2y\cos(xy^2) + y^2\left(-\sin(xy^2)2xy\right) + 3x^2e^{x^3+5y}5\\ &= 2y\cos(xy^2) - 2xy^3\sin(xy^2) + 15x^2e^{x^3+5y}.\end{aligned}$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 77 15-02-2023 17:53:15

അവസാനമായി,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos(xy^2)2xy + 5e^{x^3+5y}\right)$$

$$= -\sin(xy^2)y^2 2xy + \cos(xy^2)2y + 5e^{x^3+5y}3x^2$$

$$= 2y\cos(xy^2) - 2xy^3\sin(xy^2) + 15x^2e^{x^3+5y}.$$

ഇവിടെ നമ്മൾ ആദ്യം സങ്കലന നിയമത്തേയും അടുത്തതായി ചെയിൻ നിയമത്തേയും മൂന്നാമതായി ഗുണന നിയമത്തേയും ഉപയോഗിച്ചു എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. കൂടാതെ $f_{xy} = f_{yx}$. ആയതായും കാണാം. ഇത് താൽക്കാലികമായതാണോ? അതോ നിരന്തര സത്യമാണോ? യഥാർത്ഥത്തിൽ ചില ബിന്ദുക്കളിൽ ചില ഫലനങ്ങൾക്ക് $f_{xy} \neq f_{yx}$ ആയും കാണാം. ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള സിദ്ധാന്തം $f_{xy} = f_{yx}$ ആയിരിക്കുന്നതിനുള്ള നിബന്ധനകളെ തരുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 8.1 (ക്ലൈറൗട്ടിന്റെ സിദ്ധാന്തം)

$A = \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$, $F : A \to \mathbb{R}$. എന്ന ഫലനം A യിൽ f_{xy} യും f_{yx} ഉം കാണാൻ സാധിക്കുകയും അവ തുടർച്ചയായും ഇരുന്നാൽ A, യിൽ $f_{xy} = f_{yx}$ ആയിരിക്കും.

ഈ ഘട്ടത്തിൽ തെളിവ് സംബന്ധിച്ച ചർച്ച ഞങ്ങൾ ഒഴിവാക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 8.14

എല്ലാ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ നും $w(x, y) = xy + \frac{e^y}{y^2+1}$ എന്നാൽ $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$ കൂടാതെ $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ആദ്യമായി $\frac{\partial w}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial(xy)}{\partial x} + \frac{\partial\left(\frac{e^y}{y^2+1}\right)}{\partial x}$.

ഇത് തരുന്നു $\frac{\partial w}{\partial x}(x, y) = y + 0$ ഉം അതിനാൽ $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}(x, y) = 1$. കൂടാതെ,

$$\frac{\partial w}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial(xy)}{\partial y} + \frac{\partial\left(\frac{e^y}{y^2+1}\right)}{\partial y}.$$

$$= x + \frac{(y^2+1)e^y - e^y 2y}{(y^2+1)^2}.$$

എന്നതിനാൽ $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$.

നിർവ്വചനം 8.9

$A = \{(x, y) \mid a < x < b, c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$ ഒരു ഫലനം $u : A \to \mathbb{R}^2$ എന്നത് $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \forall (x, y) \in A$ എന്നപ്രകാരം ഇരുന്നാൽ U എന്നത് A യിൽ **ക്രമമായത്** എന്നു പറയാം. ഇതിനെ **ലാപ്ലേസ്സിന്റെ സമീകരണം** എന്നു പറയുന്നു.

ലാപ്ലേസിന്റെ സമീകരണം ഊഷ്മാവ് കടത്തി വിടൽ, കാന്തികക്ഷേത്രം, ദ്രാവക ഒഴുക്ക് തുടങ്ങിയ പ്രകൃതിദത്ത പ്രതിഭാസങ്ങളിൽ സംഭവിക്കുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 78 15-02-2023 17:53:21

ഉദാഹരണം 8.15

എല്ലാ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ നും $u(x, y) = e^{-2y}\cos(2x)$ എന്നാൽ $\mathbb{R}^2$ ൽ u ഒരു ക്രമമായ ഫലനം എന്ന് തെളിയിക്കുക

നിർദ്ധാരണം

$\mathbb{R}^2$ ലുള്ള ലാപ്ലേസിന്റെ സമവാക്യം u തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു എന്ന് ഞങ്ങൾ കാണിക്കേണ്ടതുണ്ട്

$u_x(x, y) = e^{-2y}(-2)\sin(2x)$, $u_{xx}(x, y) = e^{-2y}(-2)(2)\cos(2x)$.

ഇതുപോലെ, $u_y(x, y) = e^{-2y}(-2)\cos(2x)$, $u_{yy}(x, y) = (-2)(-2)e^{-2y}\cos(2x)$.

അതിനാൽ, $u_{xx} + u_{yy} = -4e^{-2y}\cos(2x) + 4e^{-2y}\cos(2x) = 0$. ■

അഭ്യാസം 8.4

1. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഫലനങ്ങൾക്ക് രേഖപ്പെടുത്തിയിട്ടുള്ള ബിന്ദുവിൽ ഭാഗീക അവകലജം കാണുക.

   (i) $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 + 5x + 2, \quad (2, -5)$

   (ii) $g(x, y) = 3x^2 + y^2 + 5x + 2, \quad (1, -2)$

   (iii) $h(x, y, z) = x\sin(xy) + z^2x, \quad \left(2, \frac{\pi}{4}, 1\right)$

   (iv) $G(x, y) = e^{x+3y}\log(x^2 + y^2), (-1, 1)$

2. കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഫലനങ്ങൾക്ക് f_x, f_y, കാണുക. കൂടാതെ $f_{xy} = f_{yx}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

   (i) $f(x, y) = \frac{3x}{y + \sin x}$ (ii) $f(x, y) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ (iii) $f(x, y) = \cos(x^2 - 3xy)$

3. $U(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2}{xy} + 3z^2y$, എങ്കിൽ $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}$, കൂടാതെ $\frac{\partial U}{\partial z}$ എന്നിവ കാണുക.

4. $U(x, y, z) = \log(x^3 + y^3 + z^3)$, എങ്കിൽ $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}$ കാണുക.

5. ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഫലനങ്ങൾക്ക് $g_{xy}, g_{xx}, g_{yy}, g_{yx}$ എന്നിവ കാണുക.

   (i) $g(x, y) = xe^y + 3x^2y$ (ii) $g(x, y) = \log(5x + 3y)$

   (iii) $g(x, y) = x^2 + 3xy - 7y + \cos(5x)$

6. $w(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ എന്നാൽ $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

7. $V(x, y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$, എങ്കിൽ $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

8. $w(x, y) = xy + \sin(xy)$, എങ്കിൽ $\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 79 15-02-2023 17:53:28

9. $v(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+3xyz$, എങ്കിൽ $\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial z}=\frac{\partial^2 v}{\partial z\partial y}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

10. ഒരു സ്ഥാപനം ഓരോ ആഴ്ചയിലും രണ്ടു വിദത്തിലുള്ള കാൽക്കുലേറ്ററുകൾ ഉൽപാദിപ്പിക്കുന്നു. അവയിൽ A തരത്തിലുള്ള കാൽക്കുലേറ്ററുകൾ x എണ്ണവും B തരത്തിലുള്ള കാൽക്കുലേറ്ററുകൾ y എണ്ണവും ഉൽപാദിപ്പിക്കുന്നു. ആഴ്ചതോറും ഉള്ള വരവു ചെലവു ഫലനങ്ങൾ (രൂപയിൽ) യഥാക്രമം $R(x,y)=80x+90y+0.04xy-0.05x^2-0.05y^2$ കൂടാതെ $C(x,y)=8x+6y+2000$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

(i) ലാഭ ഭലനം $P(x,y)$, കാണുക.

(ii) $\frac{\partial P}{\partial x}(1200,1800)$ തും $\frac{\partial p}{\partial y}(1200,1800)$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിച്ച് ഉത്തരം വിശദീകരിക്കുക.

8.6 വിവിധ ചരങ്ങളോടു കൂടിയ ഒരു ഫലനത്തിന്റെ രേഖീയ ഏകദേശവും അവകലനവും

ഈ അധ്യായത്തിന്റെ ആരംഭത്തിൽ ഒരു ചരത്തോടു കൂടിയ ഫലനത്തിന്റെ രേഖീയ ഏകദേശ മൂല്യം അവകലനം ഇവയെക്കുറിച്ച് പഠിച്ചു. ഇവിടെ ഇതു പോലുള്ള തത്വങ്ങളെ രണ്ട് കൂടാതെ മൂന്ന് ചരങ്ങളോടു കൂടിയ ഫലനങ്ങൾക്ക് കാണാം പൊതുവായി ഇതുപോലെ അനേകം ചരങ്ങളോടു കൂടിയ ഫലനങ്ങളേയും നിർവ്വചിക്കാം..

നിർവ്വചനം 8.10

$A=\{(x,y)\mid a<x<b, c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2, F:A\to\mathbb{R}$, കൂടാതെ $(x_0,y_0)\in A$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

(i) $(x_0,y_0)\in A$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ F ന്റെ രേഖീയ ഏകദേശ മൂല്യം

$$L(x,y)=F(x_0,y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y-y_0) \qquad \ldots(12)$$

(ii) F ന്റെ അവകലനം

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)dx+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)dy, \qquad \ldots(13)$$

ഇവിടെ $dx=\Delta x$ ഉം $dy=\Delta y$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെടുന്നു,

ഇവിടെ മൂന്നു ചരങ്ങളോടു കൂടിയ ഫലനത്തിന്റെ രേഖീയ ഏകദേശമൂല്യവും അവകലനവും നോക്കാം. അനേകം ചരങ്ങളോടു കൂടിയ യഥാർത്ഥ മൂല്യ ഫലനങ്ങൾക്ക് രേഖീയ ഏകദേശ മൂല്യവും അവകലനവും നിർവ്വചിക്കാൻ സാധിക്കും. എന്നിരുന്നാലും മൂന്നു ചരങ്ങളോടു കൂടിയ ഫലനങ്ങളോട് നാം അവസാനിപ്പിക്കുന്നു.

നിർവ്വചനം 8.11

$A=\{(x,y,z)\mid a<x<b, c<y<d,\ e<z<f\}\subset\mathbb{R}^3, F:A\to\mathbb{R}$ കൂടാതെ $(x_0,y_0,z_0)\in A$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

(i) $(x_0,y_0,z_0)\in A$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ F ന്റെ രേഖീയ ഏകദേശ മൂല്യം

$$L(x,y,z)=F(x_0,y_0,z_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(z-z_0);$$

$$\ldots(14)$$

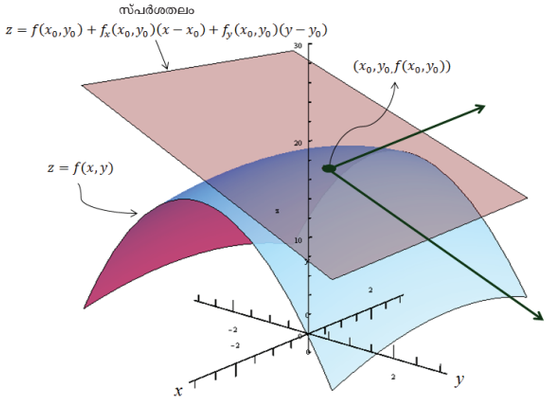
(ii) F ന്റെ അവകലനം

$$dF=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z)dx+\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z)dy+\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z)dz, \qquad \ldots(15))$$

ഇവിടെ $dx=\Delta x, dy=\Delta y$ കൂടാതെ $dz=\Delta z$,

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 80 15-02-2023 17:53:33

ജ്യാമിതീയ രീതിയിൽ ഒരു ചരത്തോടു കൂടിയ ഫലനം f ന്റെ x_0 എന്ന ബിന്ദുവിന് രേഖീയ ഏകദേശമൂല്യം x_0 എന്ന ബിന്ദുവിൽ $y=f(x)$ ന്റെ ഗ്രാഫിന്റെ സ്പർശരേഖയെ കുറിക്കുന്നു. അതുപോലെ രണ്ട് ചരങ്ങളോടു കൂടിയ ഫലനം F ന്റെ (x_0,y_0) എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ രേഖീയ ഏകദേശ മൂല്യം (x_0,y_0) എന്ന ബിന്ദുവിൽ $z=F(x,y)$ എന്ന ഗ്രാഫിൽ സ്പർശതലത്തെ കുറിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 8.13
സ്പർശതലം മുഖേന രേഖീയ ഏകദേശം

ഉദാഹരണം 8.16

$w(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2x,\ x,y,z\in\mathbb{R}$, എങ്കിൽ അവകലനത്തിന്റെ dw കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ആദ്യമായി w_x, w_y, കൂടാതെ w_z എന്നിവ കാണാം.

$w_x=2xy+z^2, w_y=2yz+x^2$, $w_z=2zx+y^2$.

(15), ഇപ്രകാരം അവകലനം

$$dw=(2xy+z^2)dx+(2yz+x^2)dy+(2zx+y^2)dz\ .$$

ഉദാഹരണം 8.17

$U(x,y,z)=x^2-xy+3\sin z,\ x,y,z\in\mathbb{R}$. എന്നാൽ $(2,-1,0)$ ൽ U ന്റെ രേഖീയ ഏകദേശ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

(14), ൽ നിന്ന് രേഖീയ ഏകദേശ മൂല്യം

$$L(x,y,z)=U(x_0,y_0,z_0)+\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(y-y_0)+\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)}(z-z_0)\ .$$

$U_x=2x-y, U_y=-x$ കൂടാതെ $U_z=3\cos z$.

$(x_0,y_0,z_0)=(2,-1,0)$, എന്നാൽ $U_x(2,-1,0)=5,\ U_y(2,-1,0)=-2$ കൂടാതെ $U_z(2,-1,0)=3$.

ആയതിനാൽ $L(x,y,z)=6+5(x-2)-2(y+1)+3(z-0)=5x-2y+3z-6$ എന്നത് $(2,-1,0)$ ൽ U ന്റെ രേഖീയ ഏകദേശ മൂല്യമാകുന്നു.

അഭ്യാസം 8.5

1. $w(x,y)=x^3-3xy+2y^2,\ x,y\in\mathbb{R}$, എങ്കിൽ $(1,-1)$ ൽ w ന് രേഖീയ ഏകദേശ മൂല്യം കാണുക.
2. $z(x,y)=x^2y+3xy^4,\ x,y\in\mathbb{R}$ എന്നാൽ $(2,-1)$ ൽ z ന്റെ രേഖീയ ഏകദേശമൂല്യം കാണുക.
3. $v(x,y)=x^2-xy+\frac{1}{4}y^2+7,\ x,y\in R$, എങ്കിൽ അവകലനം dv കാണുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 81 15-02-2023 17:53:39

4. $V(x, y, z) = xy + yz + zx, x, y, z \in \mathbb{R}$. എന്നാൽ dV കാണുക.

8.6.1 ഫലനത്തിന്റെ ഫലന നിയമം

രണ്ട് ചരങ്ങൾ x, y ൽ രൂപപ്പെട്ട ഫലനം F എന്നിരിക്കട്ടെ. ചില സമയങ്ങളിൽ ഈ ചരങ്ങൾ അതേ മണ്ഡലത്തോടു കൂടിയ മറ്റൊരു ചരത്തിന്റെ ഫലനമായും ഇരിക്കാം. അതിനാൽ ഫലനം F ഒരേ ഒരു ചരത്തെ ആശ്രയിച്ചുള്ളതാണ്. ഇതിനാർ ഫലനം F നെ ഏകചരഫലനമായി കരുതി $\frac{dF}{dt}$. യെ കുറിച്ച് പഠിക്കാം. ഇത് താൽക്കാലികമായതല്ല. ഇതിനെ തെളിയിക്കാൻ സാധിക്കും.

സിദ്ധാന്തം 8.2

$W(x, y)$ എന്നത് $\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}$ എന്നീ ഭാഗീക അവകലജങ്ങളോടു കൂടിയ x, y എന്ന രണ്ട് ചരങ്ങളാൽ രൂപപ്പെട്ട ഫലനം എന്നിരിക്കട്ടെ. x, y എന്നീ രണ്ടു ചരങ്ങളും t , എന്ന മറ്റൊരു ചരത്തെ സംബന്ധിച്ച് അവകലനം ചെയ്യത്തക്ക ഫലനങ്ങൾ എന്നാൽ t യെ സംബന്ധിച്ച് W യും അവകലനം ചെയ്യത്തക്ക ഫലനമാണ്.

$$\frac{dW}{dt} = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad ...(16)$$

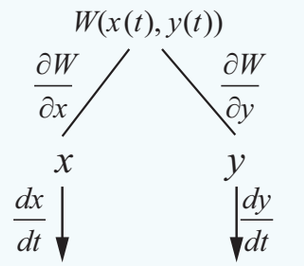


Fig. 8.14

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള സിദ്ധാന്തത്തെ വിശദീകരിക്കാൻ ഒരു ഉദാഹരണത്തെ പരിഗണിക്കാം..

ഉദാഹരണം 8.18

$F(x, y) = x^2 - 2y^2 + 2xy$ കൂടാതെ $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t, t \in [0, 2\pi]$ എന്നാൽ.

നിർദ്ധാരണം

$F(x,y) = x^2 - 2y^2 + 2xy$ കൂടാതെ $x(t) = \cos t, y(t) = \sin t$.

$F(x, y) = \cos^2 t - 2\sin^2 t + 2\cos t \sin t$ എന്നതിനാൽ F എന്നത് t എന്ന ചരത്തോടു കൂടിയ ഫലനമാണ്. ചെയിൻ നിയമം ഉപയോഗിച്ച്

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= 2\cos t(-\sin t) - 4\sin t\cos t + 2(-\sin^2 t + \cos^2 t)\\ &= -6\cos t\sin t + 2(-\sin^2 t + \cos^2 t)\,.\end{aligned}$$

മറ്റൊരു രീതിയിൽ കണക്കാക്കുകയാണെങ്കിൽ

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} &= (2x + 2y)\frac{dx}{dt} + (2x - 4y)\frac{dy}{dt}\\ &= 2(\cos t + \sin t)(-\sin t) + 2(\cos t - 2\sin t)(\cos t)\\ &= -6\cos t\sin t + 2(-\sin^2 t + \cos^2 t)\\ &= \frac{dF}{dt}\,.\end{aligned}$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 82 15-02-2023 17:53:44

ഉദാഹരണം 8.19

$g(x,y) = x^2 - yx + \sin(x+y)$, $x(t) = e^{3t}$, $y(t) = t^2$ എന്നിരിക്കട്ടെ $t \in \mathbb{R}$ $\dfrac{dg}{dt}$.

നിർദ്ധാരണം

വൃക്ഷം ശാഖാചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് കണക്കാക്കാം.

ആദ്യമായി $\dfrac{\partial g}{\partial x}$, $\dfrac{\partial g}{\partial y}$, $\dfrac{dx}{dt}$ കൂടാതെ $\dfrac{dy}{dt}$ എന്നിവ കാണുക.

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2x - y + \cos(x+y),\ \frac{\partial g}{\partial y} = -x + \cos(x+y),\ \frac{dx}{dt} = 3e^{3t} \text{ കൂടാതെ } \frac{dy}{dt} = 2t.$$

അതിനാൽ

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dt} &= \frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dt}\\ &= \big(2x - y + \cos(x+y)\big)3e^{3t} + \big(-x + \cos(x+y)\big)(2t)\\ &= (2e^{3t} - t^2 + \cos(e^{3t} + t^2))3e^{3t} + (-e^{3t} + \cos(e^{3t} + t^2))(2t)\\ &= 6e^{6t} - 3t^2e^{3t} + 3e^{3t}\cos(e^{3t} + t^2) - 2te^{3t} + 2t\cos(e^{3t} + t^2).\end{aligned}$$

$W(x,y)$ എന്ന ഫലനം ചില സമയങ്ങളിൽ $x = x(s,t)$, യും $y = y(s,t)$, $s,t \in \mathbb{R}$ എന്നും ഇരിക്കാം. ഇപ്പോൾ W എന്ന ഫലനം x,t എന്നിവയെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നതായി കാണാം. x,y എന്ന രണ്ടു ചരങ്ങൾക്കും s,t യെ സംബന്ധിച്ച് ഭാഗീക അവകലജവുംW യ്ക്ക് x,y യെ സംബന്ധിച്ച ഭാഗീക അവകലജവും ഉണ്ട് എങ്കിൽ ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവ സംബന്ധിച്ച് ഭാഗീക അവകലജം കാണാൻ സാധിക്കും.

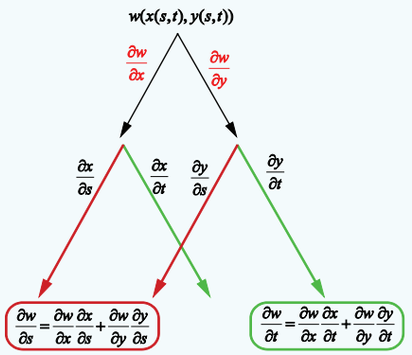
സിദ്ധാന്തം 8.3

$W(x,y)$ എന്നത് x, y എന്ന രണ്ട് ചരങ്ങളോടു കൂടിയ $\dfrac{\partial W}{\partial x}, \dfrac{\partial W}{\partial y}$.

എന്നീ ഭാഗീക അവകലജങ്ങളോടു കൂടിയ ഫലനമാകുന്നു. $x = x(s,t)$ ഉം $y = y(s,t)$, $s,t \in \mathbb{R}$, എന്ന രണ്ടു ചരങ്ങൾക്കും s, t എന്നിവയെ സംബന്ധിച്ച് ഭാഗീക അവകലജം ഉണ്ട് എങ്കിൽ

$$\frac{\partial W}{\partial s} = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}, \quad \dots (17)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}. \quad \dots (18)$$



ചിത്രം. 8.15

ഈ പാദഭാഗത്തിൽ മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള സിദ്ധാന്തത്തിന് തെളിവ് ആവശ്യമില്ല എന്ന് വിചാരിച്ച് ഒഴിവാക്കിയിരിക്കുന്നു. മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള സിദ്ധാന്തം വളരെ പ്രയോജനകരമാണ്. ഉദാഹരണമായി $x = r\cos\theta$, $y = \sin\theta, r \geq 0$ $\theta \in \mathbb{R}$, എന്ന സാഹചര്യത്തെ പരിഗണിക്കാം. (കാർട്ടീഷ്യൻ അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് പോലാർ അക്ഷത്തിലേയ്ക്ക് മാറ്റുന്നു) മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള സിദ്ധാന്തത്തെ n ചരങ്ങളോടു കൂടിയ ഫലനങ്ങൾക്കും പൊതുവൽക്കരിക്കാം. ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം.

ഉദാഹരണം 8.20

$g(x,y) = 2y + x^2, x = 2r - s, y = r^2 + 2s, r,s \in \mathbb{R}$ എന്നാൽ $\dfrac{\partial g}{\partial r}, \dfrac{\partial g}{\partial s}$ എന്നിവ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

മരം ശാഖ ചിത്രം ഉപയോഗിച്ച് $\dfrac{\partial g}{\partial r}, \dfrac{\partial g}{\partial s}$ കണക്കാക്കുന്നതിന്

$\dfrac{\partial g}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial g}{\partial y} = 2$, $\dfrac{\partial x}{\partial r} = 2$, $\dfrac{\partial x}{\partial s} = -1$, $\dfrac{\partial y}{\partial r} = 2r$, കൂടാതെ $\dfrac{\partial y}{\partial s} = 2$ എന്ന് കണ്ടുപിടിച്ചു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 83 15-02-2023 17:53:51

ഇപ്പോൾ $$\frac{\partial g}{\partial r} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = 2x(2) + 2(2r) = 12r - 4s\,.$$

കൂടാതെ, $$\frac{\partial g}{\partial s} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = 2x(-1) + (2)2 = 2s - 4r + 4\,.$$

അഭ്യാസം 8.6

1. $u(x,y) = x^2y + 3xy^4$, $x = e^t$ ഉം $y = \sin t$, യും എന്നാൽ $\frac{du}{dt}$ കാണുക, കൂടാതെ $t = 0$ ൽ അതിന്റെ മൂല്യം കാണുക.
2. $u(x,y,z) = xy^2z^3$, $x = \sin t$, $y = \cos t$, $z = 1 + e^{2t}$ എന്നാൽ $\frac{du}{dt}$ കാണുക.
3. $w(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $x = e^t$, $y = e^t \sin t$ കൂടാതെ $z = e^t \cos t$, എങ്കിൽ $\frac{dw}{dt}$ കാണുക.
4. $U(x,y,z) = xyz$, $x = e^{-t}$, $y = e^{-t}\cos t$, $z = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$ എങ്കിൽ $\frac{dU}{dt}$ കാണുക.
5. $w(x,y) = 6x^3 - 3xy + 2y^2$, $x = e^s$, $y = \cos s$, $s \in \mathbb{R}$, എന്നാൽ $\frac{dw}{ds}$, കാണുക കൂടാതെ $s = 0$ ൽ അതിന്റെ മൂല്യം കാണുക,
6. $z(x,y) = x\tan^{-1}(xy)$, $x = t^2$, $y = se^t$, $s, t \in \mathbb{R}$ എങ്കിൽ $\frac{\partial z}{\partial s}$ യും $\frac{\partial z}{\partial t}$ യും $s = t = 1$ ൽ കാണുക.
7. $U(x,y) = e^x \sin y$, എന്നാൽ ഇവിടെ $x = st^2$, $y = s^2t$, $s, t \in \mathbb{R}$ $\frac{\partial U}{\partial s}, \frac{\partial U}{\partial t}$ കാണുക, കൂടാതെ $s = t = 1$ ൽ അവയുടെ മൂല്യം കാണുക.
8. $z(x,y) = x^3 - 3x^2y^3$, എന്നാൽ ഇവിടെ $x = se^t, y = se^{-t}$, $s, t \in \mathbb{R}$ യും $\frac{\partial z}{\partial s}$ യും $\frac{\partial z}{\partial t}$ കാണുക.
9. $W(x,y,z) = xy + yz + zx$, $x = u - v$, $y = uv$, $z = u + v$, $u, v \in \mathbb{R}$. എന്നാൽ $\frac{\partial W}{\partial u}, \frac{\partial W}{\partial v}$, കാണുക കൂടാതെ $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ ൽ ഇവയുടെ മൂല്യം കാണുക.

8.6.2 ഏകീകൃത ഫലനങ്ങളും യൂലറുടെ സിദ്ധാന്തവും

നിർവ്വചനം 8.12

(a) $A = \{(x,y) \mid a < x < b,\ c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$, $F : A \to \mathbb{R}$, എന്നത് A യിലെ ഒരു ഏകീകൃത ഫലനമാണ് F എന്നത് ഞങ്ങൾ പറയുന്നു. ഒരു സ്ഥിരം p ഉണ്ടെങ്കിൽ $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^p F(x,y)$ എന്നത് എല്ലാ $\lambda \in \mathbb{R}$ നും നിയന്ത്രിതമായ $(\lambda x, \lambda y) \in A$ ഈ സ്ഥിരം p യെ F ന്റെ ക്രമം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

(b) $B = \{(x,y,z) \mid a < x < b,\ c < y < d,\ u < z < v\} \subset \mathbb{R}^3$, $G : B \to \mathbb{R}$, G എന്നത് ഏകീകൃത ഫലനം എന്ന് പറയുന്നു. ഒരു സ്ഥിരം p ഉണ്ടെങ്കിൽ $G(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = \lambda^p G(x,y,z)$ എന്നത് എല്ലാ $\lambda \in \mathbb{R}$ നും നിയന്ത്രിതമായ അതുപോലെ $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \in B$. ഈ സ്ഥിരം p യെ G യുടെ ക്രമം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

കുറിപ്പ് : ഏതൊരു ചരത്തെ കൊണ്ടു ഹരിക്കാൻ സാധിക്കും എന്നതിനാൽ പൂജ്യം കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നതിനെ ഒഴിവാക്കാൻ വേണ്ടി λ, x, y, z എന്നിവ അനുയോജ്യമായി നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ളതായി പറയുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 84 15-02-2023 17:54:00

ഇതു പോലുള്ള ഫലനങ്ങൾ സാധാരണ അവകലന സമീകരണങ്ങളിൽ (അധ്യായം 100) പ്രധാനമെപ്പട്ടവയാണ്. ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ ചുവടെ കാണാം.

$$F(x,y) = x^3 - 2y^3 + 5xy^2,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 .$$ എങ്കിൽ

$$F(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^3 - 2(\lambda y)^3 + 5(\lambda x)(\lambda y)^2 = \lambda^3 (x^3 - 2y^3 + 5xy^2)$$

എന്നാൽ F എന്നത് ഘാതം 3 യുടെ സമഘാതഫലനം ആകുന്നു. കൂടാതെ.

$G(x,y) = e^{x^2} + 3y^2$ എന്നത് സമഘാത ഫലനം അല്ല. കാരണം ഏതെങ്കിലും ഒരു $\lambda \neq 1$ എന്നും ഏതെങ്കിലും ഒരു p യ്ക്ക്

$$G(\lambda x, \lambda y) = e^{(\lambda x)^2} + 3(\lambda y)^2 \neq \lambda^p G(x,y)$$

ഉദാഹരണം 8.21

$F(x,y) = \dfrac{x^2 + 5xy - 10y^2}{3x + 7y}$ എന്നത് ക്രമം 1 ഉള്ള സമഘാതഫലനം എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$F(\lambda x, \lambda y) = \frac{(\lambda x)^2 + 5(\lambda x)(\lambda y) - 10(\lambda y)^2}{3\lambda x + 7\lambda y} = \frac{\lambda^2}{\lambda}\left(\frac{x^2 + 5xy - 10y^2}{3x + 7y}\right) = \lambda F(x,y)$$

എല്ലാ $\lambda \in \mathbb{R}$. നും F എന്നത് ക്രം ഒന്ന് ഉള്ള ഒരു ഏകീകൃത ഫലനമാണ്.

ഏകതാനമായ ഫലനങ്ങളെക്കുറിച്ച് ലിയോനാട് യൂലറുടെ ഇനിപറയുന്ന സിദ്ധാന്തം ഞങ്ങൾ പ്രസ്ഥാവിക്കുന്നു.

നിർവ്വചനം 8.13 (യൂലർ)

$A = \{(x,y) \mid a < b,\ c < y < d\} \subset \mathbb{R}^2$, $F : A \to \mathbb{R}^2$ എങ്കിൽ F ന് തുടർച്ചയായ ഭാഗീക അവകലജവും A യിൽ ഏകീകൃതവും ക്രമം p , യും ഉണ്ടെങ്കിൽ

$$x\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = pF(x,y)\ \forall\ (x,y) \in A .$$

$B = \{(x,y,z) \mid a < x < b,\ c < y < d,\ u < z < v\} \subset \mathbb{R}^3$, $F : B \to \mathbb{R}^3$ എങ്കിൽ F ന്, തുടർച്ചയായ ഭാഗീക അവകലജം B യിൽ ഏകീകൃതവും ക്രമം p യും ഉണ്ടെങ്കിൽ

$$x\frac{\partial F}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) + z\frac{\partial F}{\partial z}(x,y,z) = pF(x,y,z)\ \forall\ (x,y,z) \in B .$$

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള സിദ്ധാന്തം n ചരങ്ങളോടു കൂടിയ ഏതൊരു സമഘാത ഫലനത്തിനും യോജിക്കും. ഇത് ക്രമം 1 ഉള്ള ഭാഗീക അവകലജം.

ഉദാഹരണം 8.22

$u = \sin^{-1}\left(\dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}\right)$, എന്നാൽ $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\tan u$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഫലനം u സമഘാത ഫലനമല്ല എന്നതിനാൽ യൂലറിന്റെ സിദ്ധാന്തം, ഫലനം u . യിന് ഉപയോഗിക്കാൻ സാധ്യമല്ല. എന്നിരുന്നാലും $f(x,y) = \dfrac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \sin u$ എന്നത് സമഘാതമാണ്. എന്തെന്നാൽ

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 85 15-02-2023 17:54:06

$$f(tx,ty)=\frac{tx+ty}{\sqrt{tx}+\sqrt{ty}}=t^{1/2}f(x,y),\ \forall\ x,y,t\geq 0\,.$$

ഇവിടെ f ന്റെ ക്രമം $\frac{1}{2}$, വോടു കൂടിയ ഒരു സമഘാത ഫലനമാകുന്നു. അതിനാൽ യൂലറിന്റെ സിദ്ധാന്ത പ്രകാരം

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\ =\ \frac{1}{2}f(x,y)\,.$$

ഇപ്പോൾ $f=\sin u$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുക

$$\begin{aligned}x\frac{\partial(\sin u)}{\partial x}+y\frac{\partial(\sin u)}{\partial y}\ &=\ \frac{1}{2}\sin u\\ x\cos u\frac{\partial u}{\partial x}+y\cos u\frac{\partial u}{\partial y}\ &=\ \frac{1}{2}\sin u\end{aligned}\qquad \ldots (19)$$

ഇരുവശങ്ങളിലും $\cos u$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുക

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}\ =\ \frac{1}{2}\tan u\,.$$

കുറിപ്പ്:

ഈ കണക്കിനെ നേരടിയായ കണക്കാക്കൽ രീതിയിലും നിർദ്ധാരണം കാണാം. എന്നാൽ അപ്രകാരം കണക്കാക്കുന്നത് ദീർഘമായിരിക്കും.

അഭ്യാസം 8.7

1. ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഓരോ ഫലനവും സമഘാതമാണോ അല്ലയോ എന്ന് തിരിച്ചറിഞ്ഞ് സമഘാത മാണെങ്കിൽ അതിന്റെ ക്രമം കാണുക.

   (i) $f(x,y)=x^2y+6x^3+7$ (ii) $h(x,y)=\dfrac{6x^2y^3-\pi y^5+9x^4y}{2020x^2+2019y^2}$

   (iii) $g(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{3x^2+5y^2+z^2}}{4x+7y}$ (iv) $U(x,y,z)=xy+\sin\left(\dfrac{y^2-2z^2}{xy}\right)$.

2. $f(x,y)=x^3-2x^2y+3xy^2+y^3$ എന്ന ഫലനം സമഘാതമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക f ന്റെ ക്രമം കണ്ടുപിടിച്ച് f ന് യൂലിയർ സിദ്ധാന്തം ശരിനോക്കുക.

3. $g(x,y)=x\log\left(\dfrac{y}{x}\right)$ എന്ന ഫലനം സമഘാതമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക. g യുടെ ക്രമം കണ്ടുപിടിച്ച് g യ്ക്ക് യൂലിയർ സിദ്ധാന്തം ശരിനോക്കുക.

4. $u(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x+y}}$, എങ്കിൽ $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{3}{2}u$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

5. $v(x,y)=\log\left(\dfrac{x^2+y^2}{x+y}\right)$, എങ്കിൽ $x\dfrac{\partial v}{\partial x}+y\dfrac{\partial v}{\partial y}=1$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

6. $w(x,y,z)=\log\left(\dfrac{5x^3y^4+7y^2xz^4-75y^3z^4}{x^2+y^2}\right)$, എങ്കിൽ $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+y\dfrac{\partial w}{\partial y}+z\dfrac{\partial w}{\partial z}$ കാണുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 86 15-02-2023 17:54:12

അഭ്യാസം 8.8

കൊടുത്തിട്ടുള്ള 4 ഉത്തരങ്ങളിൽ നിന്ന് ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക :

1. ഒരു വൃത്താകൃതിയിലുള്ള വാർപ്പിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം 10 സെ.മീ വ്യാസാർദ്ധത്തിന്റെ അളവിൽ ഏകദേശമായി 0.02 സെ.മീ പിശക് ഉണ്ട് എങ്കിൽ അതിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തിൽ ഉണ്ടാകുന്ന ഏകദേശ ശതമാനപ്പിശക് കാണുക

   (1) 0.2% (2) 0.4% (3) 0.04% (4) 0.08%

2. 31 ന്റെ ഫിഫ്ത്ത് റൂട്ട് ശതമാന പിശക് ഏകദേശമായി 31 ന്റെ ശതമാന പിശകിനെ പോലെ എത്രമടങ്ങ് ആകും?

   (1) $\frac{1}{31}$ (2) $\frac{1}{5}$ (3) 5 (4) 31

3. $u(x, y) = e^{x^2+y^2}$, എങ്കിൽ $\frac{\partial u}{\partial x}$

   (1) $e^{x^2+y^2}$ (2) $2xu$ (3) x^2u (4) y^2u

4. If $v(x, y) = \log(e^x + e^y)$, എങ്കിൽ $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$

   (1) $e^x + e^y$ (2) $\frac{1}{e^x + e^y}$ (3) 2 (4) 1

5. $w(x, y) = x^y, x > 0$, എങ്കിൽ $\frac{\partial w}{\partial x}$

   (1) $x^y \log x$ (2) $y \log x$ (3) yx^{y-1} (4) $x \log y$

6. $f(x, y) = e^{xy}$, എങ്കിൽ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

   (1) xye^{xy} (2) $(1+xy)e^{xy}$ (3) $(1+y)e^{xy}$ (4) $(1+x)e^{xy}$

7. ഒരു സമചതുര ഘനികയുടെ വശ അളവ് 4 സെ.മീ അതിന്റെ പിശക് 0.1 സെ.മീ എന്നാൽ വ്യാപ്തം കണക്കാക്കുമ്പോൾ ഏർപ്പെടുന്ന പിശക്

   (1) 0.4 ഘന.സെ.മീ (2) 0.45 ഘന.സെ.മീ (3) 2 ഘന.സെ.മീ (4) 4.8 ഘന.സെ.മീ

8. ഒരു സമചതുരഘനികയുടെ വശഅളവ് x_0 ൽ നിന്ന് $x_0 + dx$ ആയി മാറുമ്പോൾ അതിന്റെ ഉപരിതല വിസ്തീർണ്ണം $S = 6x^2$ ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റം

   (1) $12x_0 + dx$ (2) $12x_0 dx$ (3) $6x_0 dx$ (4) $6x_0 + dx$

9. x മീറ്റർ വശഅളവിലുള്ള ഒരു സമചതുര ഘനികയുടെ വശഅളവ് 1% വർദ്ധിക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ വ്യാപ്തം V യിൽ ഉണ്ടാകുന്ന ഏകദേശമാറ്റം

   (1) $0.3x dx$ മീ^{3} (2) $0.03x$ മീ^{3} (3) $0.03x^2$ മീ^{3} (4) $0.03x^3$ മീ^{3}

10. If $g(x, y) = 3x^2 - 5y + 2y^2, x(t) = e^t$ കൂടാതെ $y(t) = \cos t$, എങ്കിൽ $\frac{dg}{dt}$

    (1) $6e^{2t} + 5\sin t - 4\cos t \sin t$ (2) $6e^{2t} - 5\sin t + 4\cos t \sin t$

    (3) $3e^{2t} + 5\sin t + 4\cos t \sin t$ (4) $3e^{2t} - 5\sin t + 4\cos t \sin t$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 87 15-02-2023 17:54:20

11. $f(x)=\frac{x}{x+1}$, എങ്കിൽ അതിന്റെ അവകലനം

(1) $\frac{-1}{(x+1)^2}dx$ (2) $\frac{1}{(x+1)^2}dx$ (3) $\frac{1}{x+1}dx$ (4) $\frac{-1}{x+1}dx$

12. $u(x,y)=x^2+3xy+y-2019$, എങ്കിൽ $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(4,-5)}$

(1) -4 (2) -3 (3) -7 (4) 13

13. ഫലനം $g(x)=\cos x$ എന്നത് രേഖീയ ഏകദേശ മൂല്യം $x=\frac{\pi}{2}$ ൽ

(1) $x+\frac{\pi}{2}$ (2) $-x+\frac{\pi}{2}$ (3) $x-\frac{\pi}{2}$ (4) $-x-\frac{\pi}{2}$

14. $w(x,y,z)=x^2(y-z)+y^2(z-x)+z^2(x-y)$, എങ്കിൽ $\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$ ന്റെ മൂല്യം

(1) $xy+yz+zx$ (2) $x(y+z)$ (3) $y(z+x)$ (4) 0

15. If $f(x,y,z)=xy+yz+zx$, എങ്കിൽ f_x-f_z ന്റെ മൂല്യം

(1) $z-x$ (2) $y-z$ (3) $x-z$ (4) $y-x$

പാഠച്ചുരുക്കം

- $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ എന്നതിനെ അവകലിക്കപ്പെട്ട ഫലനമായും $x_0\in(a,b)$ ആണെങ്കിൽ x_0 എന്ന ബിന്ദുവിൽ f ന്റെ ഏകദേശമൂല്യം L ന്റെ നിർവ്വചനം
  $L(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\forall x\in(a,b)$ ആകുന്നു.
- സമ്പൂർണ്ണ പിശക് =യഥാർത്ഥ മൂല്യം– ഏകദേശ മൂല്യം
  ആപേക്ഷിക പിശക്= $\frac{\text{സമ്പൂർണ്ണ പിശക്}}{\text{യഥാർത്ഥ മൂല്യം}}$
  ശതമാന പിശക് = ആപേക്ഷികപിശക് $\times 100$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{\text{സമ്പൂർണ്ണ പിശക്}}{\text{യഥാർത്ഥ മൂല്യം}}\times 100$
- x പിശക് വർദ്ധനവ് Δx നോടും കൂടാതെഎല്ലാ $x\in(a,b)$ യ്ക്കും $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ ഒരു അവകലിക്കപ്പെട്ട ഫലനം എങ്കിൽ f ന്റെ അവകലനം $df=f'(x)\Delta x$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കാം.
- ഒരു ചരത്തോടു കൂടിയ ഫലനങ്ങളുടെ പരിധിയുടെ നിയമങ്ങൾ (പരിധിയുടെ സിദ്ധാന്തങ്ങൾ) ഒിലധികം ചരങ്ങളോടു കൂടിയ ഫലനങ്ങൾക്കും അനുയോജ്യമാണ്.
- $A=\{(x,y)\mid a<x<b,\ c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2, F:A\to\mathbb{R}$ കൂടാതെ $(x_0,y_0)\in A$.
  (i) $\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h,y_0)-F(x_0,y_0)}{h}$ ന്റെ മൂല്യം കാണുന്നതിന് സാധിക്കുമെങ്കിൽ $(x_0,y_0)\in A$ യിൽ F ന് x നെ സംബന്ധിച്ച ഭാഗീക അവകലജം ഉണ്ടായിരിക്കും. ഈ പരിധിയുകടെ മൂല്യത്തെ $\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}$ എന്ന് കുറിക്കുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 88 15-02-2023 17:54:28

$\lim_{k\to 0}\dfrac{F(x_0,y_0+k)-F(x_0,y_0)}{k}$ യുടെ പരിധിയുടെ മൂല്യം കാണാൻ സാധിക്കുമെങ്കിൽ $(x_0,y_0)\in A$ F ന് y നെ സംബന്ധിച്ച ഭാഗീക അവകലജം ഉള്ളതാകുന്നു. ഈ പരിധിയുടെ മൂല്യത്തെ $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}$ എന്ന് കുറിക്കുന്നു.

- ക്ലാരിയന്റിന്റെ സിദ്ധാന്തം $A=\{(x,y)\,|\,a<x<b,\ c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2$, $F:A\to\mathbb{R}$. എന്ന ഫലനം A യിൽ f_{xy} യും f_{yx} ഉം കാണാൻ സാധിക്കുകയും, അവ തുടർച്ചയായും ഇരുന്നാൽ A യിൽ $f_{xy}=f_{yx}$ ആയിരിക്കും.
- $A=\{(x,y)\,|\,a<x<b,\ c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2$ ഒരു ഫലനം $U:A\to\mathbb{R}$ എന്നത് $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \forall(x,y)\in A$. എന്ന പ്രകാരം ഇരുന്നാൽ U എന്നത് A യിൽ ക്രമമായത് എന്നുപറയാം. ഇതിനെ ലാപ്ലേസ്സിന്റെ സമീകരണം എന്നു പറയുന്നു.
- $A=\{(x,y)\,|\,a<x<b,\ c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2$, $F:A\to\mathbb{R}$ കൂടാതെ $(x_0,y_0)\in A$ എന്നിരിക്കട്ടെ

  (i) $(x_0,y_0)\in A$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ F ന്റെ രേഖീയ ഏകദേശ മൂല്യം നിർവ്വചിക്കപ്പെടുന്നു.

  $$L(x,y)=F(x_0,y_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0)+\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y-y_0)$$

  (ii) F ന്റെ അവകലനം $dF=\dfrac{\partial F}{\partial x}dx+\dfrac{\partial F}{\partial y}dy$ ഇവിടെ $\Delta x=dx$ ഉം $\Delta y=dy$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെടുന്നു.
- wഎന്നത് x, y എന്ന രണ്ട് ചരങ്ങളാൽ രൂപപ്പെട്ട ഫലനം എന്നിരിക്കട്ടെ x, y എന്നീ രണ്ടു ചരങ്ങളും 't' എന്ന മറ്റൊരു ചരത്തെ സംബന്ധിച്ച് $\dfrac{dw}{dt}=\dfrac{\partial w}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}$
- w എന്നത് x, y എന്നീ ചരങ്ങളുടെ ഫലനം ആകുന്നു. എന്നാൽ x ഉം y യും s ന്റേയും t യുടേയും ഫലനങ്ങളാണ്, $\dfrac{\partial w}{\partial s}=\dfrac{\partial w}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial s}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial s}$, $\dfrac{\partial w}{\partial t}=\dfrac{\partial w}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial t}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial t}$
- $A=\{(x,y)\,|\,a<x<b,\ c<y<d\}\subset\mathbb{R}^2$, $F:A\to\mathbb{R}^2$. എങ്കിൽ F ന് A യിൽ ക്രമം p, യോടു കൂടിയ തുടർച്ചയായ ഭാഗീക അവകലജവും, ഏകീകൃതവും ഉണ്ട്, എന്നാൽ $x\dfrac{\partial F}{\partial x}+y\dfrac{\partial F}{\partial y}=pF$.

ICT കോർണർ

https://ggbm.at/dy9kwgbt അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക

ബ്രൗസർ തുറക്കുക നൽകിയിരിക്കുന്ന URL ലിങ്ക് തന്നിട്ടുണ്ട് (അല്ലെങ്കിൽ) QR കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക. ജിയോജീബ്രാ വർക്ക് ബുക്ക് **"12th Standard Mathematics Vol-2"** തുറക്കുക. വർക്കുബുക്കിന്റെ ഇടതുവശത്ത് പാഠപുസ്തകത്തിന്റെ അധ്യായങ്ങൾ ബന്ധപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട് **അവകലനങ്ങളും ഭാഗീക അവകലജങ്ങളും** എന്ന അധ്യായം ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക, അധ്യായവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട നിരവധി വർക്ക് ഷീറ്റുകൾ നിങ്ങൾക്ക് കാണാൻ സാധിക്കും എല്ലാ വർക്ക് ഷീറ്റുകളും പരിശോധിക്കുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 08 Malayalam.indd 89 15-02-2023 17:54:34

അദ്ധ്യായം

9

സമാകലനത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ

QK76H

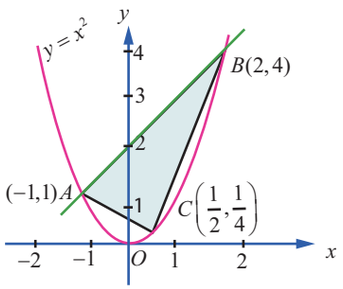
"നിൽക്കാൻ ഒരു സ്ഥലം തന്നാൽ ഭൂമിയെയും ചലിപ്പിക്കാൻ എനിക്ക് സാധിക്കും."
- ആർക്കിമിഡീസ്

9.1. മുഖവുര

സിറക്യൂസിലെ ആർക്കിമിഡീസ് (288BC(BCE)-212BC(BCE)) ഒരു ഗ്രീക്ക് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ, ഭൗതികശാസ്ത്രജ്ഞൻ, എഞ്ചിനീയർ, കണ്ടുപിടിത്തക്കാരൻ

ജ്യാമിതീയ വസ്തുക്കളുടെ വിസ്തൃതിയും വ്യാപ്തവും കണക്കാക്കാൻ അതിശയകരമായ കണ്ടെത്തലുകൾ നടത്തിയ ആദ്യകാല ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞരിൽ ഒരാളാണ് ആർക്കിമിഡീസ്. ഒരു സമവക്രവും ഒരു നേർരേഖയും ഉൾക്കൊള്ളുന്ന മേഖല അതിൽ അന്തർലേഖനം ചെയ്യപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തൃതിയുടെ $\frac{4}{3}$ മടങ്ങ് ആണെന്ന് ആർക്കിമിഡീസ് തെളിയിച്ചു. (ചിത്രം 9.1 കാണുക)

വിസ്തൃതിയെ അനേകം ലഘുഭാഗങ്ങളായി വിഭജിച്ച് അവയുടെ തുക കണ്ടെത്തിയാണ് അദ്ദേഹം വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കിയത്. ഈ പരിമിതപ്പെടുത്തൽ ആശയം നാം ഇവിടെ വികസിപ്പിക്കാൻ പോകുന്ന നിർവചനീയ സമാകലനത്തിന്റെ നിർവചനത്തിൽ അന്തർ നിർമ്മിതമാണ്. കൂടാതെ ചില ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണവും വ്യാപ്തവും കണ്ടെത്തുന്നതിലും ഇത് മൂലം കണ്ടെത്താൻ സാധിക്കും.



ചിത്രം. 9.1

പഠനലക്ഷ്യങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പൂർത്തിയാകുമ്പോൾ വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് താഴെ കാണുന്ന ആശയങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കാൻ സാധിക്കും

- ഒരു നിർവചനീയ സമാകലനത്തെ ഒരു തുകയുടെ പരിധിയായി നിർവചിക്കുക
- ഒരു നിർവചനീയ സമാകലനത്തെ ജ്യാമിതീയ രീതിയിൽ വിശദീകരിയ്ക്കൽ
- സമാകലന കലനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുക
- എതിർ അവകലജങ്ങൾ വിലയിരുത്തി നിർവചനീയ സമാകലനങ്ങൾ നിർണ്ണയിക്കുക
- നിർവചനീയ സമാകലനങ്ങളുടെ ചില സവിശേഷതകൾ പ്രസ്താപിക്കൽ
- അനുചിത സമാകലനങ്ങൾ നിരിച്ചറിയൽ കൂടാതെ ഗാമാ സമാകലനങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കൽ
- ലഘൂകരണ സൂത്രവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കൽ
- നിർവചനീയ സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച് ഒരു തലത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കണക്കാക്കൽ
- നിർവചനീയ സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച് ചുഴറ്റലിൽ ലഭിക്കുന്ന ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കണ്ടുപിടിക്കൽ

ആമുഖം തന്നിട്ടുള്ള $F(x)$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ എതിർ-അവകലജങ്ങളെ പറ്റി പഠിച്ചതിനെ കുറിച്ച് നമുക്ക് ഓർമ്മിയ്ക്കാം $\frac{d}{dx}F(x) = f(x)$, എന്ന രീതിയിൽ ഒരു ഫലനം സാധ്യമാണെങ്കിൽ ആ ഫലനം $F(x)$ നെ $F(x)$ ന്റെ **എതിർ അവകലജം** എന്ന് പറയാം.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 90 15-02-2023 15:09:59

ഇത് അതുല്യമല്ല. കാരണം ഏതൊരു പൊതുസ്ഥിരാങ്കം C, യ്ക്കും $\frac{d}{dx}[F(x)+C]=\frac{d}{dx}[F(x)]=f(x)$. എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. അതായത് $F(x)$ എന്നത് $f(x)$, ന്റെ എതിർ-അവകലജം ആണെങ്കിൽ $F(x)+C$ എന്ന ഫലനവും അതേ ഫലനം $f(x)$ ന്റെ എതിർ അവകലജം ആയിരിക്കും. $f(x)$ ന്റെ എല്ലാ എതിർ അവകലജങ്ങളും സ്ഥിരാങ്കത്തിന് അനുസരിച്ച് വ്യത്യാസപ്പെടുന്നു എന്നത് ശ്രദ്ധിയ്ക്കുക. $f(x)$ ന്റെ എതിർ അവകലജത്തിനെ സാധാരണയായി x അടിസ്ഥാനമാക്കിയ $f(x)$ ന്റെ **അനിർവചനീയ സമാകലനം** എന്ന് പറയാം. ഇതിനെ $\int f(x)dx$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. (ഒരു അനിർവചനീയ സമാലകനത്തിന്റെ വളരെ നന്നായി അറിയപ്പെടുന്ന സവിശേഷത അതിന്റെ **രേഖീയ സവിശേഷതയാണ്**)

$\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int f(x)dx+\beta\int g(x)dx$, ഇവിടെ α, β എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ.

ചില ഫലനങ്ങളും അവയുടെ എതിർ അവകലജങ്ങളും (അനിർവചനീയ സമാകലനം) താഴെ പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്.

ഫലനം $f(x)$	അനിർവചനീയ $\int f(x)dx$ സമാകലനം
K, ഒരു സ്ഥിരാങ്കം	$Kx+C$
$(ax+b)^n$, ഇവിടെ $a\neq 0$ കൂടാതെ b എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ $n\neq -1$	$\frac{1}{a}\left[\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1}\right]+C$
$\frac{1}{ax+b}$, $a\neq 0$ കൂടാതെ b എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ	$\frac{1}{a}\log_e\lvert(ax+b)\rvert+C$
e^{ax}, ഇവിടെ a ഒരു പൂജ്യമല്ലാത്ത സ്ഥിരാങ്കം	$\frac{e^{ax}}{a}+C$
$\sin(ax+b)$, ഇവിടെ $a\neq 0$, b എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ	$-\frac{\cos(ax+b)}{a}+C$
$\cos(ax+b)$, ഇവിടെ $a\neq 0$, b എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ	$\frac{\sin(ax+b)}{a}+C$
$\tan(ax+b)$, ഇവിടെ $a\neq 0$, b എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ	$\frac{1}{a}\log\lvert\sec(ax+b)\rvert+C$
$\cot(ax+b)$, ഇവിടെ $a\neq 0$, b എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ	$\frac{1}{a}\log\lvert\sin(ax+b)\rvert+C$
$\sec(ax+b)$, ഇവിടെ $a\neq 0$, b എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ	$\frac{1}{a}\log\lvert\sec(ax+b)+\tan(ax+b)\rvert+C$
$\operatorname{cosec}(ax+b)$, ഇവിടെ $a\neq 0$, b എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ	$-\frac{1}{a}\log\lvert\operatorname{cosec}(ax+b)-\cot(ax+b)\rvert+C$
$\frac{1}{a^2+x^2}$, ഇവിടെ $a\neq 0$ ഒരു സ്ഥിരാങ്കം	$\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$
$\frac{1}{a^2-x^2}$, ഇവിടെ $a\neq 0$ ഒരു സ്ഥിരാങ്കം	$\frac{1}{2a}\log_e\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert+C$
$\frac{1}{x^2-a^2}$, ഇവിടെ $a\neq 0$ ഒരു സ്ഥിരാങ്കം	$\frac{1}{2a}\log_e\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert+C$

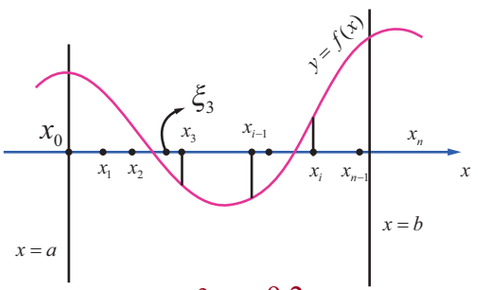
12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 91 15-02-2023 15:10:07

ഫലനം $f(x)$	അനിർവചനീയ സമാകലനം $\int f(x)dx$
$\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}$, ഇവിടെ a ഒരു സ്ഥിരാങ്കം	$\log_e\left\|x+\sqrt{a^2+x^2}\right\|+C$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$, ഇവിടെ $a\neq 0$ ഒരു സ്ഥിരാങ്കം	$\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$
$\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$, ഇവിടെ a ഒരു സ്ഥിരാങ്കം	$\log_e\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\|+C$
$\sqrt{a^2+x^2}$, ഇവിടെ a ഒരു സ്ഥിരാങ്കം	$\frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\log_e\left\|x+\sqrt{a^2+x^2}\right\|+C$
$\sqrt{a^2-x^2}$, ഇവിടെ a ഒരു സ്ഥിരാങ്കം	$\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+C$
$\sqrt{x^2-a^2}$, ഇവിടെ a ഒരു സ്ഥിരാങ്കം	$\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\log_e\left\|x+\sqrt{x^2-a^2}\right\|+C$

9.2 ഒരു തുകയുടെ പരിധി എന്ന നിലയിൽ നിർവചനീയ സമാകലനം

9.2.1 റീമൻ സമാകലനം

$[a,b]$, $a<b$. എന്ന അടയ്ക്കപ്പെട്ട അതിർത്തി ഇടവേളയിൽ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ഒരു വാസ്തവിക മൂല്യ പരിമിതഫലനം $f(x)$ നെ പരിഗണിക്കുക. $f(x)$ എന്ന ഫലനം $[a,b]$ എന്ന ഇടവേളയിൽ ഒരേ ചിഹ്നം ആയിരിക്കണമെന്നില്ല. അതായത് $[a,b]$ എന്ന ഇടവേളയിൽ $f(x)$ ന് ധനമൂല്യങ്ങളോ ഋണമൂല്യങ്ങളോ ഉണ്ടാകാം. ചിത്രം 9.2 കാണുക. ഇടവേള $[a,b]$ യെ n ഉപ ഇടവേളകളായി $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$ എന്ന രീതിയിൽ $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-2},x_{n-1}],[x_{n-1},x_n]$ എന്നിങ്ങനെ വിഭജിക്കുക



ചിത്രം. 9.2

$[x\ ,\ x\ ]$, i=1, 2,...n, ൽ നിന്നും ഏതെങ്കിലും വാസ്തവിക സംഖ്യ $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$. തെരഞ്ഞെടുക്കുക ഇതിന്റെ തുക. $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})=f(\xi_1)(x_1-x_0)+f(\xi_2)(x_2-x_1)+\cdots+f(\xi_n)(x_n-x_{n-1})$ എന്ന് പരിഗണിക്കുക. .....(1)

(1) ലെ തുക $[a,b]$ യിൽ $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$ എന്നീ വിഭജനങ്ങളുടെ $f(x)$ **റീമൻ തുക** എന്ന് വിളിക്കുന്നു. $x_{i-1}\le\xi_i\le x_i$, എന്ന നിബന്ധനയെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന വിധത്തിൽ അനന്തമായ ധാരാളം ξ_i മൂല്യങ്ങൾ ഉള്ളതിനാൽ $[a,b]$ ൽ $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$ വിഭജനത്തിന് സമാനമായ അനേകം റീമൻ തുകകളും സാധ്യമാണ്. പരിമിതപ്പെടുത്തൽ പ്രക്രിയയിൽ $n\to\infty$ കൂടാതെ $\max\left(x_i-x_{i-1}\right)\to 0$, ആണെങ്കിൽ (1) ലെ തുക ഒരു പരിമിത മൂല്യം അതായത് A എന്ന് പറയാം, എങ്കിൽ A എന്ന മൂല്യത്തെ $[a,b]$ ൽ x നെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയ $f(x)$ ന്റെ **നിർവചനീയ സമാകലം** എന്ന് പറയുന്നു. ഇതിനെ $[a,b]$ ൽ $f(x)$ ന്റെ **റീമൻ സമാകലം** എന്നും വിളിക്കുന്നു. കൂടാതെ ഇതിനെ $\int_a^b f(x)dx$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം. ഇതിനെ a മുതൽ b വരെയുള്ള x നെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള $f(x)$ ന്റെ സമാകലനം എന്ന് വായിക്കാം $a=b$, ആണെങ്കിൽ $\int_a^a f(x)dx=0$. ആയിരിക്കും.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 92 15-02-2023 15:10:15

കുറിപ്പ്

നിലവിലെ അധ്യായത്തിൽ $[a,b]$ യിൽ തുടർച്ചയായ ഇടവേളയിലുള്ള $f(x)$ ന്റെ ഫലനങ്ങൾ മാത്രം ആണ് ഞങ്ങൾ പരിഗണിക്കുന്നത്. എങ്ങനെയായാലും $[a,b]$ യിലെ ഖണ്ഡം തിരിച്ചുള്ള തുടർച്ചയായ എല്ലാ ഫലനങ്ങൾ $f(x)$ കൾക്കും $[a,b]$ യിലെ $f(x)$ ന്റെ **റീമൻ സമാകലനം** നിലനിൽക്കുന്നതായിരിക്കും. നിർവചനീയ സമാകലത്തിനും കൂടാതെ എതിർ-അവകലജത്തിനും (അനിർവചനീയ സമാകലം) ഒരേ ചിഹ്നം $\int$ ആണ് നാം ഉപയോഗിക്കുന്നത്. സമാകലന കലനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം പ്രസ്താവിച്ചതിനു ശേഷം മാത്രമേ ഇതിന്റെ കാരണം നമുക്ക് വ്യക്തമാവുകയുള്ളൂ. x എന്ന ചരം **വ്യാജം** എന്ന അർത്ഥത്തിൽ നമ്മുടെ താല്പര്യ പ്രകാരം തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെടുന്നു അതിനാൽ നമുക്ക് $\int_a^b f(x)dx$ നെ $\int_a^b f(u)du$ എന്നെഴുതാം. അതിനാൽ $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du$ ആകുന്നു. $\max\left(x_i - x_{i-1}\right) \to 0$, ആയതിനാൽ ഓരോ ഉപ ഇടവേളകൾ $[x_{i-1}, x_i]$ ലും ഉള്ള x_{i-1}, ξ_i കൂടാതെ x_i എന്നീ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളും ഒരേ ബിന്ദുവിൽ കേന്ദ്രീകരിയ്ക്കുന്നു. $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,2,\cdots,n$. എന്ന ഉപ ഇടവേളയിൽ മൂല്യനിർണ്ണയ ബിന്ദു ξ_i തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിന് അനന്തമായ ധാരാളം വഴികളുണ്ടെന്ന് നാം നേരത്തേ സൂചിപ്പിച്ചു കഴിഞ്ഞു. $\xi_i = x_{i-1}$, $i = 1,2,\cdots,n$, എന്ന് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതുമൂലം നമുക്ക്

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty \text{ കൂടാതെ } \max(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}).$$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു ...(2)

സമീകരണം (2) എന്നത് റീമൻ സമാകലനം നിർണ്ണയിക്കുന്നതിനുള്ള **ഇടത്-അഗ്ര നിയമം** എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു.

$\xi_i = x_i$, $i = 1,2,\cdots,n$, എന്ന് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നത് മൂലം നമുക്ക്

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty \text{ കൂടാതെ } \max(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}).$$

എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. ...(3)

സമീകരണം (3) എന്നത് റീമൻ സമാകലനം നിർണ്ണയിക്കുന്നതിനുള്ള **വലത് - അഗ്ര നിയമം** എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു.

$\xi_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$, $i = 1,2,\cdots,n$, എന്ന് തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നത് മൂലം നമുക്ക്

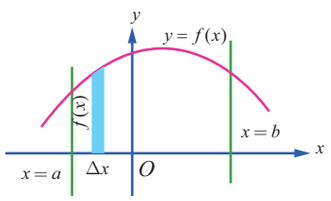
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty \text{ കൂടാതെ } \max(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}\right)(x_i - x_{i-1}).$$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. ...(4)

സമീകരണം (4), റീമൻ സമാകലനം നിർണ്ണയിക്കുന്നതിനുള്ള **മധ്യ ബിന്ദു നിയമം** എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു.

കുറിപ്പുകൾ

(1) ഓരോ $x \in [a,b]$ യ്ക്കും റീമൻ സമാകലം $\int_a^b f(x)dx$ നിലനിൽക്കുന്നുവെങ്കിൽ റീമൻ സമാകലം $\int_a^x f(u)du$ എന്നത് വ്യക്തമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ട ഒരു വാസ്തവികസംഖ്യ ആയിരിക്കും

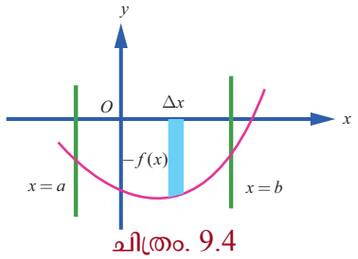
(2) എല്ലാ $x \in [a,b]$ യ്ക്കും $f(x) \geq 0$ ആണെങ്കിൽ റീമൻ സമാകലം $\int_a^b f(x)dx$ എന്നത് $y = f(x)$ ന്റെ ഗ്രാഫ്, x അക്ഷം രേഖകൾ $x = a$ കൂടാതെ $x = b$ തുടങ്ങിയവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന മേഖലയുടെ ജ്യാമിതീയ വിസ്തീർണ്ണത്തിന് തുല്യമാണ്. ചിത്രം 9.3 കാണുക.



ചിത്രം. 9.3

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 93 15-02-2023 15:10:21

(3) എല്ലാ $x \in [a,b]$ യ്ക്കും $f(x) \leq 0$ ആണെങ്കിൽ, റീമൻ സമാകലം $\int_a^b f(x)dx$ എന്നത് $y = f(x)$ ന്റെ ഗ്രാഫ് x അക്ഷം, $x = a$ കൂടാതെ $x = b$ എന്നീ രേഖകൾ, തുടങ്ങിയവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന മേഖലയുടെ ജ്യാമിതീയ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ ഋണമൂല്യമാണ്. ചിത്രം 9.4 കാണുക. ഈ ഘട്ടത്തിൽ $y = f(x)$ ന്റെ ഗ്രാഫ് x അക്ഷം, $x = a$ കൂടാതെ $x = b$ എന്നീ രേഖകൾ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന മേഖലയുടെ ജ്യാമിതീയ വിസ്തീർണ്ണം $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$ ആകുന്നു.



ചിത്രം. 9.4

(4) $[a,b]$ ൽ $f(x)$ ധനമൂല്യങ്ങൾ കൂടാതെ ഋണമൂല്യങ്ങൾ എന്നിവ സ്വീകരിയ്ക്കുകയാണെങ്കിൽ ഓരോ ഉപ ഇടവേളയിലുടനീളം $f(x)$ ന് ഒരേ ചിഹ്നം വരക്കത്തവിധം $[a,b]$ എന്ന ഇടവേളയെ $[a,c_1]$, $[c_1,c_2]$ $\cdots$, $[c_k,b]$ എന്ന ഉപഇടവേളകളായി പിരിക്കാവുന്നതാണ്. അതിനാൽ റീമൻ സമാകലം $\int_a^b f(x)dx$ എന്നത്

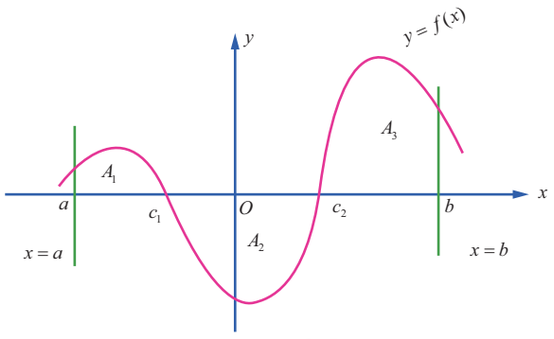
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \cdots + \int_{c_k}^b f(x)dx \text{ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.}$$

ഈ സാഹചര്യത്തിൽ $y = f(x)$ ന്റെ ഗ്രാഫ് x അക്ഷം, $x = a$ കൂടാതെ $x = b$ എന്നീ രേഖകൾ തുടങ്ങിയവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന മേഖലയുടെ ജ്യാമിതീയ വിസ്തീർണ്ണം

$$\left|\int_a^{c_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| + \cdots + \left|\int_{c_k}^b f(x)dx\right| \text{ ആകുന്നു.}$$

ഉദാഹരണത്തിന് $f(x), x \in [a,b]$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ താഴെ കാണുന്ന ഗ്രാഫ് പരിഗണിയ്ക്കാം . (ചിത്രം 9.5 കാണുക). ഇവിടെ A_1, A_2 കൂടാതെ A_3 എന്നിവ വേർതിരിക്കപ്പെട്ട ഭാഗങ്ങളുടെ ജ്യാമിതീയ വിസ്തീർണ്ണങ്ങളെ സൂചിപ്പിയ്ക്കുന്നു. അതിനാൽ നിർവചനീയ സമാകലം $\int_a^b f(x)dx$ എന്നത്

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \int_{c_2}^b f(x)dx$$
$$= A_1 - A_2 + A_3 \text{ ആകുന്നു.}$$



ചിത്രം. 9.5

$y = f(x)$ ന്റെ ഗ്രാഫ് $x-$ അക്ഷം, $x = a$, $x = b$ എന്നീ രേഖകൾ തുടങ്ങിയവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന മേഖലയുടെ ജ്യാമിതീയ വിസ്തീർണ്ണം $A_1 + A_2 + A_3$ ആകുന്നു. മുകളിൽ കാണുന്ന വാദങ്ങൾ കണക്കിലെടുക്കുമ്പോൾ, റീമൻ സമാകലം ഒരു ജ്യാമിതീയ വിസ്തീർണ്ണത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നില്ല എന്നത് വ്യക്തമാണ്.

കുറിപ്പ്

ഞങ്ങൾ വ്യക്തമായി പരാമർശിക്കുന്നില്ലെങ്കിലും, വിസ്തീർണ്ണങ്ങൾ ചതുരശ്രമാത്രകളിലും, വ്യാപ്തങ്ങൾ ഘന മാത്രകളിലുമാണ് അളക്കുന്നത് എന്നത് വ്യക്തമായ കാര്യമാണ്.

ഉദാഹരണം 9.1

5 തുല്യ അകല ഉപ ഇടവേളകളായി പിരിച്ച് (i) ഇടത്-അഗ്രനിയമം (ii) വലത്അഗ്രനിയമം (iii) മധ്യ-ബിന്ദു നിയമം എന്നിവയെ റീമൻ തുകയിൽ പ്രയോഗിച്ച് $\int_0^{0.5} x^2 dx$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 94 15-02-2023 15:10:27

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ $a = 0, b = 0.5, n = 5, f(x) = x^2$

അതിനാൽ ഓരോ ഉപഇടവേളകളുടെയും അകലം

$$h = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{0.5-0}{5} = 0.1.$$

ഇടവേളയുടെ വിഭജനം കാണിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ

$$x_0 = 0,$$

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$$

$$x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

$$x_3 = x_2 + h = 0.2 + 0.1 = 0.3$$

$$x_4 = x_3 + h = 0.3 + 0.1 = 0.4$$

$$x_5 = x_4 + h = 0.4 + 0.1 = 0.5$$

(i) തുല്യ അകല Δx ഉള്ള റീമൻ തുകയുടെ ഇടത് അഗ്രനിയമം

$$S = \left[f(x_0) + f(x_1) + \cdots + f(x_{n-1})\right]\Delta x.$$

$$\therefore S = \left[f(0) + f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + f(0.4)\right](0.1)$$

$$= \left[0.00 + 0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16\right](0.1) = 0.03$$

$\therefore \int_0^{0.5} x^2 dx$ ന്റെ മൂല്യം ഏകദേശം 0.03 ആകുന്നു.

(ii) തുല്യ അകല Δx ഉള്ള റീമൻ തുകയുടെ വലത് അഗ്രനിയമം

$$S = \left[f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\right]\Delta x.$$

$$\therefore S = \left[f(0.1) + f(0.2) + f(0.3) + f(0.4) + f(0.5)\right](0.1)$$

$$= \left[0.01 + 0.04 + 0.09 + 0.16 + 0.25\right](0.1) = 0.055.$$

$\therefore \int_0^{0.5} x^2 dx$ ന്റെ മൂല്യം ഏകദേശം 0.055 ആകുന്നു.

(iii) തുല്യ അകല Δx ഉള്ള റീമൻ തുകയുടെ മധ്യ-ബിന്ദു നിയമം

$$S = \left[f\left(\frac{x_0 + x_1}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \cdots + f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right)\right]\Delta x$$

$$\therefore S = \left[f(0.05) + f(0.15) + f(0.25) + f(0.35) + f(0.45)\right](0.1)$$

$$= \left[0.0025 + 0.0225 + 0.0625 + 0.1225 + 0.2025\right](0.1)$$

$$= 0.04125.$$

$\therefore \int_0^{0.5} x^2 dx$ ന്റെ ഏകദേശ മൂല്യം 0.04125 ആകുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 95 15-02-2023 15:10:34

അഭ്യാസം 9.1

1. $\{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$ എന്ന വിഭജനത്തിൽ ഇടത്-അഗ്രനിയമം പ്രയോഗിച്ച് $\int_1^{1.5} x\,dx$ ന്റെ ഏകദേശ മൂല്യം കാണുക.
2. $\{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$ എന്ന വിഭജനത്തിൽ വലത്-അഗ്ര നിയമം പ്രയോഗിച്ച് $\int_1^{1.5} x^2\,dx$ ന്റെ ഏകദേശ മൂല്യം കാണുക.
3. $\{1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\}$ എന്ന വിഭജനത്തിൽ മധ്യ-ബിന്ദു നിയമം പ്രയോഗിച്ച് $\int_1^{1.5} (2-x)\,dx$ ന്റെ ഏകദേശ മൂല്യം കാണുക.

9.2.2 $\int_a^b f(x)\,dx$ ന്റെ മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുന്നതിനുള്ള പരിധി സൂത്രം

$[a,b]$ എന്ന ഇടവേളയെ $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ എന്ന് വരത്തക്കവിധം $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-2}, x_{n-1}], [x_{n-1}, x_n]$ എന്ന n തുല്യ ഉപ ഇടവേളകളായി പിരിയ്ക്കുക. അതിനാൽ $x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \cdots = x_n - x_{n-1} = \dfrac{b-a}{n}$ ആകുന്നു. $h = \dfrac{b-a}{n}$ എന്നിരിയ്ക്കട്ടെ. എങ്കിൽ നമുക്ക് $x_i = a + ih, i = 1, 2, \cdots, n.$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

നിർവചനീയ സമാകലത്തിന്റെ നിർവചനത്തിൽ നിന്നും നമുക്ക്,

$$\lim_{n\to\infty \text{ കൂടാതെ } \max(x_i - x_{i-1})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \text{ (വലത്-അഗ്ര നിയമം)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right).$$

$$\therefore \quad \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(a + (b-a)\frac{r}{n}\right).$$

കുറിപ്പ്. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{b-a}{n} \sum_{r=0}^{n} f\left(a + (b-a)\dfrac{r}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \left[\dfrac{b-a}{n} f(a) + \dfrac{b-a}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(a + (b-a)\dfrac{r}{n}\right)\right]$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(a + (b-a)\frac{r}{n}\right)$$

$$= \int_a^b f(x)\,dx.$$

$$\therefore \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(a + (b-a)\frac{r}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=0}^{n} f\left(a + (b-a)\frac{r}{n}\right).$$

$a = 0$ കൂടാതെ $b = 1$, എങ്കിൽ $\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{r=0}^{n} f\left(\dfrac{r}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(\dfrac{r}{n}\right)$. ആകുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 96 15-02-2023 15:10:40

ഉദാഹരണം 9.2

ഒരു തുകയുടെ പരിധിയായി $\int_0^1 xdx$, ന്റെ മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ $f(x)=x,\ a=0$ കൂടാതെ $b=1$ അതിനാൽ നമുക്ക്

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) \Rightarrow \int_0^1 xdx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{r}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left[1+2+\cdots+n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 9.3

ഒരു തുകയുടെ പരിധിയായി $\int_0^1 x^3dx$, ന്റെ മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ $f(x)=x^3,\ a=0$ കൂടാതെ $b=1$. അതിനാൽ നമുക്ക്

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) \Rightarrow \int_0^1 x^3dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{r^3}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left[1^3+2^3+\cdots+n^3\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{4}$$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു..

ഉദാഹരണം 9.4

ഒരു തുകയുടെ പരിധിയായി $\int_1^4 \left(2x^2+3\right)dx$, ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

നമുക്ക് താഴെ കാണുന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിക്കാം

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{r=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{r}{n}\right)$$

ഇവിടെ $f(x)=2x^2+3,\ a=1$ കൂടാതെ $b=4$.

അതുകൊണ്ട് നമുക്ക്

$$f\left(a+(b-a)\frac{r}{n}\right) = f\left(1+(4-1)\frac{r}{n}\right) = f\left(1+\frac{3r}{n}\right) = 2\left(1+\frac{3r}{n}\right)^2+3 = 5+\frac{18r^2}{n^2}+\frac{12r}{n}.$$

അതിനാൽ നമുക്ക്

$$\int_1^4 (2x^2+3)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n}\sum_{r=1}^{n}\left(5+\frac{18r^2}{n^2}+\frac{12r}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{15}{n}\sum_{r=1}^{n}1+\frac{54}{n^3}\sum_{r=1}^{n}r^2+\frac{36}{n^2}\sum_{r=1}^{n}r\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{15}{n}n+\frac{54}{n^3}\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right)+\frac{36}{n^2}\left(1+2+\cdots+n\right)\right]$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 97 15-02-2023 15:10:46

$$= \lim_{n\to\infty}\left[15+\frac{54}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{36}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[15+9\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+18\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]$$

$= 15+9(1+0)(2+0)+18(1+0) = 51$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

അഭ്യാസം 9.2

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സമാകലനങ്ങളെ തുകയുടെ പരിധിയായി വിലയിരുത്തുക:

(i) $\int_0^1 (5x+4)dx$ (ii) $\int_1^2 (4x^2-1)dx$

9.3 സമാകല കലനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തങ്ങളും അവയുടെ പ്രയോഗങ്ങളും

$f(x)$ എന്നത് വളരെ ലളിതമായ ഒരു ഫലനം ആണെങ്കിൽ പോലും $\int_a^b f(x)dx$ ന്റെ മൂല്യം ഒരു തുകയുടെ പരിധിയായി നിർണ്ണയിക്കുന്നത് വളരെ ശ്രമകരമാണെന്നത് മുകളിലുള്ള ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്നും നമുക്ക് കാണാം. ന്യൂട്ടൺ കൂടാതെ ലെബ്നിറ്റ്സ് രണ്ടുപേരും മിക്കവാറും ഒരേ സമയത്തിൽ നിർവചനീയ സമാകലങ്ങളെ നിർണ്ണയിക്കുന്നതിന് ഒരു ലളിത രീതി ആവിഷ്കരിച്ചു. ഈ രീതി സമാകല കലനത്തിന്റെ **ആദ്യത്തെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം, രണ്ടാമത്തെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം** എന്നീ രണ്ട് പ്രശസ്ത സിദ്ധാന്തങ്ങളെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ളതാണ്. ഈ സിദ്ധാന്തങ്ങൾ ഒരു ഫലനത്തിനും അതിന്റെ എതിർ-അവകലജത്തിനും (നിലനിൽക്കുന്നുവെങ്കിൽ) തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെ സ്ഥാപിക്കുന്നു. വാസ്തവത്തിൽ ഈ സിദ്ധാന്തങ്ങൾ അവകലന കലനത്തിനും, സമാകല കലനത്തിനും ഇടയിൽ ഒരു ബന്ധത്തെ നിലനിർത്തുന്നു. മുകളിലുള്ള പ്രധാനപ്പെട്ട സിദ്ധാന്തങ്ങൾ തെളിവുകളില്ലാതെ ചുവടെ നാം പ്രസ്താവിക്കുന്നു..

സിദ്ധാന്തം 9.1 (സമാകല കലനത്തിന്റെ ആദ്യത്തെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം)

$f(x)$ എന്നത് $[a,b]$ എന്ന അടഞ്ഞ ഇടവേളയിൽ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ഒരു തുടർച്ചയായ ഫലനം, കൂടാതെ $F(x)=\int_a^x f(u)du,\ a<x<b$ എങ്കിൽ, $\frac{d}{dx}F(x)=f(x)$. ആകുന്നു. അതായത് $F(x)$ എന്നത് $f(x)$. ന്റെ എതിർ-അവകലജം ആകുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 9.2 (സമാകല കലനത്തിന്റെ രണ്ടാമത്തെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം)

$f(x)$ എന്നത് $[a,b]$ എന്ന അടഞ്ഞ ഇടവേളയിൽ നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള ഒരു തുടർച്ചയായ ഫലനം കൂടാതെ $F(x)$ എന്നത് $f(x)$, ന്റെ എതിർ-അവകലജം ആണെങ്കിൽ,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

കുറിപ്പ്

$F(b)-F(a)$ എന്നത് $\int_a^b f(x)dx$, എന്ന നിർവചനീയ സമാകലത്തിന്റെ (റീമൻ സമാകലം) മൂല്യം ആയതിനാൽ $F(x)$ ന്റെ എതിർ-അവകലജത്തോട് ചേർക്കപ്പെടുന്ന ഏകപക്ഷീയ സ്ഥിരാങ്കം ഒഴിവാക്കപ്പെടുന്നു. അതിനാൽ നിർവചനീയ സമാകലത്തിന്റെ മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുമ്പോൾ എതിർ-അവകലജത്തോട് ഏകപക്ഷീയ സ്ഥിരാങ്കം ചേർക്കേണ്ട ആവശ്യമില്ല. ചുരുക്കമായി $F(b)-F(a)=\left[F(x)\right]_a^b$. എന്നെഴുതാം. നിർവചനീയ സമാകലത്തിന്റെ മൂല്യം അതുല്യമാണ്.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 98 15-02-2023 15:10:51

സമാകല കലനത്തിന്റെ രണ്ടാമത്തെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്ത പ്രകാരം, നിർവചനീയ സമാകലത്തിന്റെ താഴെ പറയുന്ന സവിശേഷതകൾ നിലനിൽക്കുന്നു. അവ തെളിവില്ലാതെ ഇവിടെ പ്രസ്താവിക്കുന്നു.

സവിശേഷത 1: $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du$, $a < b$

അതായത് പരിധി മാറാതെ ഇരിക്കുമ്പോൾ, ചരത്തെ മാറ്റുന്നത് മൂല്യം തുകയുടെ മൂല്യം മാറുന്നില്ല.

സവിശേഷത 2 : $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

അതായത് പരിധികളെ പരസ്പരം മാറ്റുമ്പോൾ നിർവചനീയ സമാകലനത്തിന്റെ മൂല്യത്തിന്റെ ചിഹ്നം ഋണമാകുന്നു.

സവിശേഷത 3 : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $a < c < b$

സവിശേഷത 4 : $\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$, ഇവിടെ α , β എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ.

സവിശേഷത 5 : $x = g(u)$, എങ്കിൽ $\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(g(u))\frac{dg(u)}{du}du$ ആകുന്നു. ഇവിടെ $g(c) = a$ കൂടാതെ $g(d) = b$.

ഈ സവിശേഷത, പ്രതിനിധാനത്തിലൂടെ നിർവചനീയ സമാകലത്തിന്റെ മൂല്യനിർണ്ണയത്തിന് ഉപയോഗിക്കുന്നു. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഉദാഹരണങ്ങളിലൂടെ മുകളിൽ പറഞ്ഞ സവിശേഷതകൾ ഞങ്ങൾ വിശദീകരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 9.5

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക : $\int_0^3 (3x^2 - 4x + 5)dx$.

നിർദ്ധാരണം

$$\begin{aligned}\int_0^3 (3x^2 - 4x + 5)dx &= \int_0^3 3x^2dx - \int_0^3 4x\ dx + \int_0^3 5\,dx \\ &= 3\int_0^3 x^2dx - 4\int_0^3 x\,dx + 5\int_0^3 dx \\ &= 3\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 - 4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3 + 5[x]_0^3 \\ &= (27-0) - 2(9-0) + 5(3-0) \\ &= 27 - 18 + 15 = 24\,.\end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 9.6

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക : $\int_0^1 \frac{2x+7}{5x^2+9}dx$.

നിർദ്ധാരണം

$$\int_0^1 \frac{2x+7}{5x^2+9}dx = \int_0^1 \frac{2x}{5x^2+9} + 7\int_0^1 \frac{dx}{(5x^2)+3^2} = \frac{1}{5}\log[5x^2+9]_0^1 + \frac{7}{5}\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 99 15-02-2023 15:10:55

$$= \frac{1}{5}[\log 14 - \log 9] + \frac{7}{5} \times \frac{\sqrt{5}}{3} \left[\tan^{-1} \frac{x}{\left[\frac{3}{\sqrt{5}}\right]} \right]_0^1 = \frac{1}{5} \log \frac{14}{9} + \frac{7}{3\sqrt{5}} \tan^{-1} \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

ഉദാഹരണം 9.7

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക : $\int_0^1 [2x]\,dx$ ഇവിടെ $[\cdot]$ എന്നത് വലിയ പൂർണ്ണാങ്ക ഫലനം.

നിർദ്ധാരണം

$$\int_0^1 [2x]\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} [2x]\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 [2x]\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} 0\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^1 1\,dx = 0 + [x]_{\frac{1}{2}}^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

ഉദാഹരണം 9.8

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec x \tan x}{1+\sec^2 x}\,dx$.

നിർദ്ധാരണം

$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sec x \tan x}{1+\sec^2 x}\,dx$ എന്നിരിയ്ക്കട്ടെ $\sec x = u$ എന്നെടുക്കുക എങ്കിൽ, $\sec x \tan x\,dx = du$ ആകുന്നു.

$x = 0$, ആണെങ്കിൽ $u = \sec 0 = 1$. $x = \frac{\pi}{3}$ ആണെങ്കിൽ $u = \sec \frac{\pi}{3} = 2$.

$$\therefore I = \int_1^2 \frac{du}{1+u^2} = [\tan^{-1} u]_1^2 = \tan^{-1}(2) - \tan^{-1} 1 = \tan^{-1}(2) - \frac{\pi}{4}.$$

ഉദാഹരണം 9.9

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക : $\int_0^9 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx$.

നിർദ്ധാരണം

$\sqrt{x} = u$ എന്നെടുക്കുക. എങ്കിൽ $x = u^2$, കൂടാതെ $dx = 2u\,du$.

$x = 0$, എങ്കിൽ $u = 0$, $x = 9$, എങ്കിൽ $u = 3$.

$$\therefore \int_0^9 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = \int_0^3 \frac{1}{u^2+u}(2u)\,du = 2\int_0^3 \frac{1}{1+u}\,du = 2\Big[\log|1+u|\Big]_0^3 = 2[\log 4 - 0] = \log 16.$$

ഉദാഹരണം 9.10

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക: $\int_1^2 \frac{x}{(x+1)(x+2)}\,dx$.

നിർദ്ധാരണം

$I = \int_1^2 \frac{x}{(x+1)(x+2)}\,dx$ എന്നെടുക്കുക

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 100 15-02-2023 15:11:03

$$I = \int_1^2 \left[\frac{-1}{(x+1)} + \frac{2}{x+2}\right] dx \qquad \text{(ഭാഗിക ഭിന്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച്)}$$

$$= \left[-\log(x+1) + 2\log(x+2)\right]_1^2$$

$$= \log\left[\frac{(x+2)^2}{x+1}\right]_1^2$$

$$= \log\frac{16}{3} - \log\frac{9}{2}$$

$$= \log\frac{32}{27}.$$

ഉദാഹരണം 9.11

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)(2+\sin\theta)} d\theta$.

നിർദ്ധാരണം

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)(2+\sin\theta)} d\theta$ എന്നിരിയ്ക്കട്ടെ $u = 1+\sin\theta$ എന്നെടുക്കുക. എങ്കിൽ, $du = \cos\theta d\theta$ ആകുന്നു

$\theta = 0$, ആണെങ്കിൽ $u = 1$ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ആണെങ്കിൽ $u = 2$.

$$\therefore I = \int_1^2 \frac{du}{u(1+u)} = \int_1^2 \frac{(1+u)-u}{u(1+u)} du = \int_1^2 \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right) du = \left[\log u - \log(1+u)\right]_1^2$$

$$= (\log 2 - \log 3) - (\log 1 - \log 2) = 2\log 2 - \log 3 = \log\frac{4}{3}.$$

ഉദാഹരണം 9.12

മൂല്യനിർണ്ണയം ചെയ്യുക : $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sin^{-1} x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$.

നിർദ്ധാരണം

$I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\sin^{-1} x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$u = \sin^{-1} x$ എന്നെടുക്കുക. എങ്കിൽ, $x = \sin u$ ആകുന്നു. കൂടാതെ $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

$x = 0$, ആയാൽ $u = 0$, $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ആണെങ്കിൽ $u = \frac{\pi}{4}$ ആകുന്നു.

$$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{u}{\cos^2 u} du = \int_0^{\frac{\pi}{4}} u\sec^2 u \, du = \left[u\tan u\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan u \, du = \left[u\tan u\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[\log\cos u\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{\pi}{4} + \log\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2.$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 101 15-02-2023 15:11:10

ഉദാഹരണം 9.13

മൂല്യം കാണുക : $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx$.

നിർദ്ധാരണം

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\tan x}+\sqrt{\cot x}\right)dx \text{ എന്നിരിക്കട്ടെ}$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{\frac{\sin x}{\cos x}}+\sqrt{\frac{\cos x}{\sin x}}\right)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{\sin x\cos x}}dx = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt{2\sin x\cos x}}dx$$

$$= \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(\sin x+\cos x)dx}{\sqrt{1-(\sin x-\cos x)^2}}.$$

$u = \sin x-\cos x$ എന്നെടുക്കുക. എങ്കിൽ, $du=(\cos x+\sin x)dx$.

$x = 0$, ആയാൽ $u=-1$ $x=\frac{\pi}{2}$, ആയാൽ $u=1$ ആകുന്നു.

$$\therefore I = \sqrt{2}\int_{-1}^{1}\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \sqrt{2}[\sin^{-1}u]_{-1}^{1} = \sqrt{2}\left[\sin^{-1}(1)-\sin^{-1}(-1)\right] = \pi\sqrt{2}\ .$$

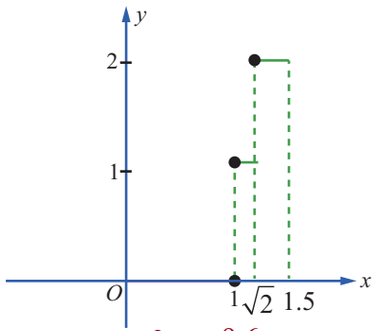
ഉദാഹരണം 9.14

മൂല്യം കാണുക : $\int_0^{1.5}\left[x^2\right]dx$, ഇവിടെ $[x]$ എന്നത് ഏറ്റവും വലിയ പൂർണ്ണാങ്ക ഫലനം.

നിർദ്ധാരണം

വലിയ പൂർണ്ണാങ്കഫലനം $[x]$ എന്നത് x നെക്കാൾ കുറവോ അല്ലെങ്കിൽ തുല്യമോ ആയ മൂല്യം നൽകുന്ന വലിയ ഫലനം ആണെന്നത് നമുക്കറിയാം. മറ്റൊരു രീതിയിൽ ഇതിനെ $n\le x<(n+1)$, n ഒരു പൂർണ്ണസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ $[x]=n$, എന്ന് നിർവചിക്കാം.

അതിനാൽ നമുക്ക് $[x^2]=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & 1\le x<\sqrt{2}\\ 2 & \sqrt{2}\le x\le 1.5\end{cases}$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 9.6

മുകളിൽ പറഞ്ഞ ഫലനം $[0,1.5]$ എന്ന ഇടവേളയിൽ തുടർച്ചയായതല്ല എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

പക്ഷേ ഇത് $[0,1)$, $[1,\sqrt{2})$ കൂടാതെ $[\sqrt{2},1.5]$; എന്നീ ഓരോ ഉപ ഇടവവേള കളിലും തുടർച്ചയായതാണ്. അതായത് $[0,1.5]$ എന്ന ഇടവേളയിൽ ഖണ്ഡം-തിരിച്ചുള്ള തുടർഫലനം ആണ്. ചിത്രം. 9.6. കാണുക. അതിനാൽ നമുക്ക്

$$\int_0^{1.5}\left[x^2\right]dx = \int_0^{1}\left[x^2\right]dx+\int_1^{\sqrt{2}}\left[x^2\right]dx+\int_{\sqrt{2}}^{1.5}\left[x^2\right]dx = \int_0^{1}0\,dx+\int_1^{\sqrt{2}}1\,dx+\int_{\sqrt{2}}^{1.5}2dx$$

$$= 0+(x)_1^{\sqrt{2}}+(2x)_{\sqrt{2}}^{1.5} = \left(\sqrt{2}-1\right)+\left(3-2\sqrt{2}\right) = 2-\sqrt{2}. \text{ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.}$$

ഉദാഹരണം 9.15

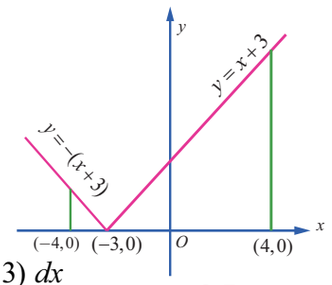
മൂല്യനിർണ്ണയം ചെയ്യുക : $\int_{-4}^{4}|x+3|\,dx$.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 102 15-02-2023 15:11:17

നിർദ്ധാരണം

നിർവചനത്തിൽ നിന്നും നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത് $|x+3| = \begin{cases} x+3 & \text{if } x \geq -3 \\ -x-3 & \text{if } x < -3 \end{cases}$

$-4 \leq x \leq 4$ ൽ $y = |x+3|$ എന്നതിന്റെ ഗ്രാഫ് ചിത്രം 9.7 ൽ കാണുക.



ചിത്രം. 9.7

$$\therefore \int_{-4}^{4} |x+3|\, dx = \int_{-4}^{-3} |x+3|\, dx + \int_{-3}^{4} |x+3|\, dx = \int_{-4}^{-3} (-x-3)\, dx + \int_{-3}^{4} (x+3)\, dx$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} - 3x\right]_{-4}^{-3} + \left[\frac{x^2}{2} + 3x\right]_{-3}^{4}$$

$$= \left(-\frac{9}{2}+9\right) - \left(-\frac{16}{2}+12\right) + \left(\frac{16}{2}+12\right) - \left(\frac{9}{2}-9\right) = \left(\frac{9}{2}\right) - 4 + 20 + \left(\frac{9}{2}\right) = 25 .$$

അടുത്ത്, സവിശേഷത 5 ന്റെ പ്രയോഗത്തെ വിശദീകരിക്കുന്ന ഉദാഹരണങ്ങൾ നമുക്ക് നോക്കാം.

ഉദാഹരണം 9.16

തെളിയിക്കുക $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+5\sin x} = \frac{1}{3}\log_e 2$.

നിർദ്ധാരണം

$$u = \tan\frac{x}{2} \text{ എങ്കിൽ, } \sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}, du = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}\,dx \Rightarrow dx = \frac{2du}{1+u^2}.$$

$x = 0$, എങ്കിൽ $u = \tan 0 = 0$ കൂടാതെ $x = \frac{\pi}{2}$, എങ്കിൽ $u = \tan\frac{\pi}{4} = 1$.

$$\therefore I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4+5\sin x} = \int_0^1 \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{4+5\left(\frac{2u}{1+u^2}\right)} = \int_0^1 \frac{du}{2u^2+5u+2} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{u^2+\frac{5}{2}u+1}$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{du}{\left(u+\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \left[\frac{1}{2}\times\frac{1}{2\times\left(\frac{3}{4}\right)}\log\left(\frac{\left(u+\frac{5}{4}\right)-\frac{3}{4}}{\left(u+\frac{5}{4}\right)+\frac{3}{4}}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\left[\log\left(\frac{u+\frac{1}{2}}{u+2}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{3}\log 2.$$

കുറിപ്പ്

$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x + c}$, എന്ന രൂപത്തിലുള്ള എതിർ അവകലജങ്ങളുടെ മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുന്നതിന് $u = \tan\frac{x}{2}$ എന്ന് ആരോപിച്ച് നാം പ്രതിസ്ഥാപനരീതി ഉപയോഗിക്കുന്നു. $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, dx = \frac{2du}{1+u^2}$ ആകുന്നു എന്നത് മനസ്സിലാക്കുക

ഉദാഹരണം 9.17

തെളിയിക്കുക $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x\, dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \frac{\pi}{4}$.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 103 15-02-2023 15:11:22

നിർദ്ധാരണം

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x\ dx}{\sin^4 x + \cos^4 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x\ dx}{\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x\ dx}{1 - \frac{1}{2}\left(2\sin x \cos x\right)^2} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin 2x\ dx}{2 - \sin^2 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin 2x\ dx}{1 + \cos^2 2x}.$$

$u = \cos 2x$, എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ, $du = -2\sin 2x\ dx$ ആകുന്നു.

$x = 0$, എങ്കിൽ $u = \cos 0 = 1$. കൂടാതെ $x = \frac{\pi}{4}$, എങ്കിൽ $u = \cos\frac{\pi}{2} = 0$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

$$\therefore I = \int_1^0 \frac{-du}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \left[\tan^{-1} u\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

ഉദാഹരണം 9.18

തെളിയിക്കുക $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right)$, ഇവിടെ $a,\ b > 0$.

നിർദ്ധാരണം

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2\sin^2 x + b^2\cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x\ dx}{a^2\tan^2 x + b^2}$$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$u = \tan x$ എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ $du = \sec^2 x\ dx$ ആകുന്നു.

$x = 0$, ആണെങ്കിൽ $u = \tan 0 = 0$. ആകുന്നു. $x = \frac{\pi}{4}$ ആണെങ്കിൽ $u = \tan\frac{\pi}{4} = 1$ ആകുന്നു.

$$\therefore I = \int_0^1 \frac{du}{a^2u^2 + b^2} = \frac{1}{a^2}\int_0^1 \frac{du}{u^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{1}{a^2}\left[\frac{a}{b}\tan^{-1}\left(\frac{au}{b}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{a}{b}\right).$$

നിർവചനീയ സമാകലങ്ങളുടെ കൂടുതൽ സവിശേഷതകൾ നമുക്കിവിടെ വ്യുൽപാദിപ്പിക്കാം..

സവിശേഷത 6

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$

തെളിവ്

$u = a + b - x$.എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ നമുക്ക് $dx = -du$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

$x = a$ എങ്കിൽ $u = a + b - a = b$. കൂടാതെ $x = b$, എങ്കിൽ $u = a + b - b = a$ ആകുന്നു.

$$\therefore \int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(a+b-u)(-du) = \int_a^b f(a+b-u)du$$

$$= \int_a^b f(a+b-x)dx\ .$$

കുറിപ്പ്

മുകളിൽ പറഞ്ഞ സവിശേഷതയിൽ a യ്ക്ക് പകരം 0 യും, കൂടാതെ b യ്ക്ക് പകരം a എന്നും പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ എന്ന സവിശേഷത നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 104 15-02-2023 15:11:32

ഉദാഹരണം 9.19

മൂല്യം കാണുക $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x+\cos x}\, dx$

നിർദ്ധാരണം

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin x+\cos x}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right)}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos x+\sin\frac{\pi}{4}\sin x\right)}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\, dx\,,\ \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec x\, dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log(\sec x+\tan x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\log(\sqrt{2}+1)-\log(1+0)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1).$$

സവിശേഷത 7

$$\int_0^{2a} f(x)\, dx = \int_0^a \left[f(x)+f(2a-x)\right]dx.$$

തെളിവ്

സവിശേഷത 3, ൽ നിന്നും നമുക്ക് $\int_0^{2a} f(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx + \int_a^{2a} f(x)\, dx$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. (1)

$x = 2a-u$ എന്ന് $\int_a^{2a} f(x)dx$. ൽ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുക. എങ്കിൽ, $dx = -du$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

$x = a$, ആണെങ്കിൽ $u = 2a-a = a$ ആകുന്നു. $x = 2a$, ആണെങ്കിൽ $u = 2a-2a = 0$ ആകുന്നു.

$$\int_a^{2a} f(x)dx = \int_a^0 f(2a-u)(-du) = \int_0^a f(2a-u)du = \int_0^a f(2a-x)dx\,. \qquad ...(2)$$

സമീകരണം (2) നെ സമീകരണം (1), ൽ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക്

$$\int_0^{2a} f(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx + \int_0^a f(2a-x)\, dx$$

$$= \int_0^a \left[f(x)+f(2a-x)\right]dx\,.$$

സവിശേഷത 8

$f(x)$ ഒരു ഇരട്ടഫലനം ആണെങ്കിൽ $\int_{-a}^a f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx$ ആകുന്നു.

(ഓർമ്മിക്കാം $f(-x) = f(x)$ എങ്കിൽ മാത്രം $f(x)$ ഒരു ഇരട്ട ഫലനം)

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 105 15-02-2023 15:11:40

തെളിവ്

സവിശേഷത 3, അനുസരിച്ച്

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$ ആകുന്നു.

$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$, എന്ന സമാകലനത്തിൽ, $x = -u$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കാം. എങ്കിൽ, $dx = -du$. ആകുന്നു

$x = -a$ ആണെങ്കിൽ $u = a$, ആകുന്നു, $x = 0$ ആണെങ്കിൽ $u = 0$ ആകുന്നു അതിനാൽ നമുക്ക്

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-u)(-du) = \int_{0}^{a} f(-u)\,du = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx \text{ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.} \quad (2)$$

സമീകരണം (2) നെ സമീകരണം (1), ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ നമുക്ക്

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. ■

സവിശേഷത 9

$f(x)$ ഒരു ഒറ്റ ഫലനം ആണെങ്കിൽ $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$. ആകുന്നു.

(ഓർമ്മിക്കാം $f(-x) = -f(x)$ എങ്കിൽ മാത്രം $f(x)$ ഒരു ഒറ്റ ഫലനം)

തെളിവ്

സവിശേഷത 3, അനുസരിച്ച്, നമുക്ക്

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \text{ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.} \quad \ldots (1)$$

$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ നെ പരിഗണിക്കുക ഈ സമാകലനത്തിൽ, $x = -u$. എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കാം എങ്കിൽ, $dx = -du$. ആകുന്നു.

$x = -a$, ആണെങ്കിൽ $u = a$; ആകുന്നു $x = 0$, ആണെങ്കിൽ $u = 0$. ആകുന്നു.

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-u)(-du) = \int_{0}^{a} f(-u)\,du = \int_{0}^{a} f(-x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx. \quad \ldots (2)$$

സമീകരണം (2) നെ സമീകരണം (1), ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ നമുക്ക് ■

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx - \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

സവിശേഷത 10

$f(2a-x) = f(x)$, ആണെങ്കിൽ $\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$. ആകുന്നു

തെളിവ്

സവിശേഷത 7 അനുസരിച്ച് നമുക്ക്

$\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(x) + f(2a-x)]\,dx$ ആകുന്നു ...(1)

$f(2a-x) = f(x)$ എന്ന നിബന്ധന സമീകരണം (1), ൽ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക്

$\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} [f(x) + f(x)]\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. ■

സവിശേഷത 11

$f(2a-x) = -f(x)$, ആണെങ്കിൽ $\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = 0$ ആകുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 106 15-02-2023 15:11:49

തെളിവ്

സവിശേഷത 7, അനുസരിച്ച്

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{a} [f(x) + f(2a-x)]\,dx. \qquad \ldots (1)$$

$f(2a-x) = -f(x)$ എന്ന നിബന്ധന സമീകരണം (1), ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ

$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{a} [f(x) - f(x)]\,dx = 0.$ എന്ന് നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു

■

സവിശേഷത 12

$f(a-x) = f(x)$ ആണെങ്കിൽ $\int_0^a x\, f(x)\,dx = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx$ ആകുന്നു.

തെളിവ്

$$I = \int_0^a x\, f(x)\,dx \quad \text{എന്നിരിക്കട്ടെ} \qquad \ldots (1)$$

$$\text{എങ്കിൽ} \quad I = \int_0^a (a-x) f(a-x)\,dx \text{, ആകുന്നു. കാരണം } \int_0^a g(x)\,dx = \int_0^a g(a-x)\,dx$$

$$= \int_0^a (a-x) f(x)\,dx, \quad \text{കാരണം } f(a-x) = f(x).$$

$$\therefore I = \int_0^a (a-x) f(x)\,dx \qquad \ldots (2)$$

(1) ഉം (2), ഉം തമ്മിൽ കൂട്ടുമ്പോൾ

$$2I = \int_0^a (x + a - x) f(x)\,dx$$

$$= a\int_0^a f(x)\,dx.$$

$$\therefore I = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx.$$

■

കുറിപ്പ്

ഇടതുവശത്തെ സമാകലൃത്തിൽ ഉള്ള x എന്ന ഘടകത്തെ ഒഴിവാക്കുന്നതിന് ഈ സവിശേഷത സഹായിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 9.20

$\int_0^{\pi} g(\sin x)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin x)dx$, എന്ന് തെളിയിക്കുക. ഇവിടെ $g(\sin x)$ എന്നത് $\sin x$ ന്റെ ഫലനം ആകുന്നു.

നിർദ്ധാരണം

നമുക്കറിയാം

$$f(2a-x) = f(x) \text{ എങ്കിൽ } \int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

$2a = \pi$ കൂടാതെ $f(x) = g(\sin x)$ എന്നെടുക്കുക.

$$\text{എങ്കിൽ, } f(2a-x) = g(\sin(\pi - x)) = g(\sin x) = f(x).$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 107 15-02-2023 15:11:55

$$\therefore \int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx .$$

$$\int_0^{\pi} g(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin x)\,dx .$$

ഫലം

$$\int_0^{\pi} g(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin x)\,dx.$$

കുറിപ്പ്

$\int_0^{\pi} g(\sin x)\,dx$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള നിർവചനീയ സമാകലങ്ങളുടെ മൂല്യനിർണ്ണയത്തിന് ഈ ഫലം ഉപയോഗപ്രദമാണ്.

ഉദാഹരണം 9.21

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക $\int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,dx$.

നിർദ്ധാരണം

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,dx \quad \text{എന്നിരിക്കട്ടെ}$$

$$= \int_0^{\pi} x\,\frac{1}{1+\sin x}\,dx$$

$f(x) = \frac{1}{1+\sin x}$ എങ്കിൽ $f(\pi - x) = \frac{1}{1+\sin(\pi - x)} = \frac{1}{1+\sin x} = f(x)$ ആകുന്നു.

$$\therefore \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin x}\,dx \text{ , } f(a-x) = f(x)) \text{ എങ്കിൽ } \left(\because \int_0^{a} x\,f(x)\,dx = \frac{a}{2}\int_0^{a} f(x)\,dx\right.$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx, \quad \left(\because \int_0^{\pi} g(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(\sin x)dx\right.$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\,dx \quad \left(\because \int_0^{a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(a-x)\,dx\right.$$

$$= \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sec^2\frac{x}{2}\,dx$$

$$= \pi\left[\tan\frac{x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\left[\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right] = \pi \ .$$

ഉദാഹരണം 9.22

തെളിയിക്കുക $\int_0^{2\pi} g(\cos x)\,dx = 2\int_0^{\pi} g(\cos x)\,dx$, ഇവിടെ $g(\cos x)$ എന്നത് $\cos x$ ൽ ഉള്ള ഒരു ഫലനം.

നിർദ്ധാരണം

കൂടാതെ $2a = 2\pi$ എന്നെടുക്കുക. എങ്കിൽ $f(x) = g(\cos x)$.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 108 15-02-2023 15:12:02

അതിനാൽ, $f(2a-x) = f(2\pi - x) = g(\cos(2\pi - x)) = g(\cos x) = f(x)$

$$\therefore \int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx .$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} g(\cos x)\,dx = 2\int_0^{\pi} g(\cos x)\,dx .$$

ഫലം

$$\int_0^{2\pi} g(\cos x)\,dx = 2\int_0^{\pi} g(\cos x)\,dx.$$

കുറിപ്പ്

മുകളിൽ പറഞ്ഞ ഫലം $\int_0^{2\pi} g(\cos x)\,dx$ എന്ന രീതിയിലുള്ള നിർവചനീയ സമാകലങ്ങളുടെ മൂല്യനിർണ്ണയത്തിന് ഉപയോഗപ്രദമാണ്.

ഉദാഹരണം 9.23

$f(x) = f(a+x)$, ആണെങ്കിൽ $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx$

നിർദ്ധാരണം

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx \quad \text{എന്നെഴുതാം} \qquad \ldots (1)$$

$\int_a^{2a} f(x)\,dx$ നെ പരിഗണിക്കുക

$x = a+u$, എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $dx = du$; ആകുന്നു $x = a$, ആണെങ്കിൽ $u = 0$ $x = 2a$, എങ്കിൽ $u = a$.

$$\therefore \int_a^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(a+u)\,du = \int_0^{a} f(u)\,du, \quad \therefore f(x) = f(a+x)$$

$$= \int_0^{a} f(x)\,dx . \qquad \ldots (2)$$

സമീകരണം (2) നെ (1), ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ

$$\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^{a} f(x)\,dx \quad \text{എന്ന് ലഭിയ്ക്കുന്നു.}$$

ഉദാഹരണം 9.24

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക : $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx.$

നിർദ്ധാരണം

$f(x) = x\cos x$ എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ $f(-x) = (-x)\cos(-x) = -x\cos x = -f(x).$

അതുകൊണ്ട് $f(x) = x\cos x$ ഒരു ഒറ്റ ഫലനം ആണ്.

അതിനാൽ ഒറ്റ ഫലനം $f(x)$, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ എന്ന സവിശേഷത പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ ,

$\therefore \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = 0.$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 9.25

മൂല്യം കാണുക : $\int_{-\log 2}^{\log 2} e^{-|x|}\,dx$.

നിർദ്ധാരണം

$f(x) = e^{-|x|}$. എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ $f(-x) = e^{-|-x|} = e^{-|x|} = f(x)$ ആകുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 109 15-02-2023 15:12:11

അതുകൊണ്ട് $f(x)$ ഒരു ഇരട്ട ഫലനം ആകുന്നു.

അതിനാൽ $\int_{-\log 2}^{\log 2} e^{-|x|}\,dx = 2\int_{0}^{\log 2} e^{-|x|}\,dx = 2\int_{0}^{\log 2} e^{-x}\,dx = 2(-e^{-x})_0^{\log 2} = 2(-e^{-\log 2}+e^{0}) = 2\left(-e^{\log\frac{1}{2}}+1\right)$

$= 2\left(-\frac{1}{2}+1\right) = 1.$

ഉദാഹരണം 9.26

മൂല്യം കാണുക : $\int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx.$

നിർദ്ധാരണം

$I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ ... (1)

സമീകരണം 1 ൽ $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$ എന്ന സൂത്രം പ്രയോഗിച്ചാൽ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്

$I = \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(a-x)+f(a-(a-x))}\,dx$

$= \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx.$ ... (2)

സമീകരണങ്ങൾ (1) കൂടാതെ (2), എന്നിവ കൂട്ടിയാൽ

$2I = \int_0^a \frac{f(x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx + \int_0^a \frac{f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

$= \int_0^a \frac{f(x)+f(a-x)}{f(x)+f(a-x)}\,dx$

$= \int_0^a dx = a.$

അതിനാൽ $I = \frac{a}{2}$ എന്ന് ലഭിച്ചു.

ഉദാഹരണം 9.27

തെളിയിക്കുക $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)dx = \frac{\pi}{8}\log 2.$

നിർദ്ധാരണം

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x)dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ ... (1)

സമീകരണം 1 ൽ $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ എന്ന സവിശേഷത പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക്,

$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\frac{\tan\frac{\pi}{4}-\tan x}{1+\tan\frac{\pi}{4}\tan x}\right]dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[1+\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right]dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[\frac{1+\tan x+1-\tan x}{1+\tan x}\right]dx$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 110 15-02-2023 15:12:17

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log\left[\frac{2}{1+\tan x}\right] dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\log 2 - \log(1+\tan x)\right] dx$$

$$= \log 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1+\tan x) dx$$

$= \frac{\pi}{4}\log 2 - I$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ട് $2I = \frac{\pi}{4}\log 2$ ആകുന്നു. ഇതിൽ നിന്നും നമുക്ക് $I = \frac{\pi}{8}\log 2.$ എന്ന് ലഭിച്ചു.

ഉദാഹരണം 9.28

$\int_0^1 \left(\tan^{-1} x + \tan^{-1}(1-x)\right) dx = \frac{\pi}{2} - \log_e 2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

നിർദ്ധാരണം

$$I = \int_0^1 \left(\tan^{-1} x + \tan^{-1}(1-x)\right) dx$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1} x \, dx + \int_0^1 \tan^{-1}(1-x) \, dx$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1} x \, dx + \int_0^1 \tan^{-1}(1-(1-x)) \, dx \text{ ,കാരണം } \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$$

$$= \int_0^1 \tan^{-1} x \, dx + \int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$$

$$= 2\int_0^1 \tan^{-1} x \, dx$$

$= \left[2\int u dv\right]_0^1$, ഇവിടെ $u = \tan^{-1} x$, $dv = dx$

$= 2\left[uv - \int v du\right]_0^1$, ഭാഗിക സമാകലനം പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ

$$= 2\left(x\tan^{-1} x - \int x \frac{dx}{1+x^2}\right)_0^1 = 2\left(x\tan^{-1} x - \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)\right)_0^1 = \frac{\pi}{2} - \log 2$$

ഉദാഹരണം 9.29

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക $\int_2^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}} dx.$

നിർദ്ധാരണം

$$I = \int_2^3 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{5-x}+\sqrt{x}} dx \text{ എന്നിരിക്കട്ടെ} \quad \ldots (1)$$

സൂത്രം $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$, പ്രയോഗിച്ചാൽ.

$$I = \int_2^3 \frac{\sqrt{(2+3-x)}}{\sqrt{5-(2+3-x)}+\sqrt{(2+3-x)}} dx = \int_2^3 \frac{\sqrt{5-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}} dx \text{ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു} \quad \ldots (2)$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 111 15-02-2023 15:12:24

(1) കൂടാതെ (2), എന്നിവ കൂട്ടിയാൽ

$$2I = \int_2^3 \frac{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}}{\sqrt{x}+\sqrt{5-x}}\,dx = \int_2^3 dx = [x]_2^3 = 3-2 = 1.$$

അതിനാൽ നമുക്ക് $I = \frac{1}{2}$ എന്ന് ലഭിച്ചു

ഉദാഹരണം 9.30

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+a^x}\,dx$

നിർദ്ധാരണം

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{1+a^x}\,dx \quad \text{എന്നിരിക്കട്ടെ} \qquad \ldots (1)$$

$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ,

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2(\pi-\pi-x)}{1+a^{\pi-\pi-x}}\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2(-x)}{1+a^{-x}}\,dx$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} a^x \left(\frac{\cos^2 x}{a^x+1}\right) dx \quad \text{എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.} \qquad \ldots (2)$$

(1) കൂടാതെ (2) എന്നിവ കൂട്ടിയാൽ നമുക്ക്

$$2I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 x}{a^x+1}(a^x+1)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 x\,dx \quad \text{എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.}$$

$$= 2\int_0^{\pi} \cos^2 x\,dx \quad (\text{കാരണം } \cos^2 x \text{ ഒരു ഇരട്ട ഫലനം ആണ്.})$$

അതിനാൽ $I = \int_0^{\pi} \frac{(1+\cos 2x)}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x+\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}[\pi] = \frac{\pi}{2}$.

അഭ്യാസം 9.3

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള നിർവചനീയ സമാകലനങ്ങളുടെ മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക :

(i) $\int_3^4 \frac{dx}{x^2-4}$ (ii) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2+2x+5}$ (iii) $\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$

(iv) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \left(\frac{1+\sin x}{1+\cos x}\right) dx$ (v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos\theta}\,\sin^3\theta\,d\theta$ (vi) $\int_0^1 \frac{1-x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\,dx$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 112 15-02-2023 15:12:31

2. സമാകലനത്തിന്റെ സവിശേഷതകൾ ഉപയോഗിച്ച് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സമാകലനങ്ങളുടെ മൂല്യം കാണുക:

(i) $\int_{-5}^{5} x\cos\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)dx$

(ii) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^5 + x\cos x + \tan^3 x + 1)\,dx$

(iii) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x\ dx$

(iv) $\int_{0}^{2\pi} x\log\left(\frac{3+\cos x}{3-\cos x}\right)dx$

(v) $\int_{0}^{2\pi} \sin^4 x\cos^3 x\,dx$

(vi) $\int_{0}^{1} |5x-3|\ dx$

(vii) $\int_{0}^{\sin^2 x} \sin^{-1}\sqrt{t}\ dt + \int_{0}^{\cos^2 x} \cos^{-1}\sqrt{t}\ dt \quad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

(viii) $\int_{0}^{1} \frac{\log(1+x)}{1+x^2}\ dx$

(ix) $\int_{0}^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\sin x}dx$

(x) $\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{3\pi}{8}} \frac{1}{1+\sqrt{\tan x}}dx$

(xi) $\int_{0}^{\pi} x\left[\sin^2(\sin x) + \cos^2(\cos x)\right]dx$

9.4 ബെർണോളി സൂത്രം

$u(x)$ എന്നത് ഒരു ബഹുപദവ്യംഞ്ജക ഫലനവും (അതായത് $u(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n$) കൂടാതെ $v(x)$ എന്നത് എളുപ്പത്തിൽ സമാകലനം ചെയ്യാൻ സാധിക്കുന്ന ഒരു ഫലനവും ആണെങ്കിൽ $\int u(x)v(x)dx$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള അനിർവചനീയ സമാകലങ്ങളുടെ മൂല്യം വളരെ ലളിതമായ രീതിയിൽ കണ്ടുപിടിക്കാം. **ബെർണോളിയുടെ സൂത്രം** എന്ന സൂത്രവാക്യത്തിലൂടെയാണ് ഇത് സാധ്യമാകുന്നത്. ഈ സൂത്രവാക്യം യഥാർത്ഥത്തിൽ ഭാഗങ്ങളാക്കിയുള്ള സമാകലന സൂത്രവാക്യത്തിന്റെ വിപുലീകരണമാണ്. സൂത്രവാക്യം വ്യുൽപാദിപ്പിക്കുന്നതിന് താഴെ കാണുന്ന പ്രതീകങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കാം.:

$$u^{(1)} = \frac{du}{dx},\quad u^{(2)} = \frac{du^{(1)}}{dx},\quad u^{(3)} = \frac{du^{(2)}}{dx}, \ldots\ldots$$

$$v_{(1)} = \int v dx,\ v_{(2)} = \int v_{(1)}dx,\ v_{(3)} = \int v_{(2)}dx, \ldots\ldots$$

അതിനാൽ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്,

$$dv_{(1)} = vdx,\ dv_{(2)} = v_{(1)}dx,\ dv_{(3)} = v_{(2)}dx, \ldots\ldots$$

ഇപ്പോൾ, ഭാഗങ്ങളായുള്ള സമാകലനം വഴി നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്

$$\begin{aligned}\int uvdx &= \int udv_{(1)} = uv_{(1)} - \int v_{(1)}du = uv_{(1)} - \int v_{(1)}\frac{du}{dx}dx \\ &= uv_{(1)} - \int u^{(1)}dv_{(2)} \\ &= uv_{(1)} - \left(u^{(1)}v_{(2)} - \int v_{(2)}du^{(1)}\right) \\ &= uv_{(1)} - u^{(1)}v_{(2)} + \int v_{(2)}\frac{du^{(1)}}{dx}dx\end{aligned}$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 113 15-02-2023 15:12:44

$$= uv_{(1)} - u^{(1)}v_{(2)} + \int u^{(2)}dv_{(3)}$$

$$= uv_{(1)} - u^{(1)}v_{(2)} + \left(u^{(2)}v_{(3)} - \int v_{(3)}du^{(2)}\right)$$

$$= uv_{(1)} - u^{(1)}v_{(2)} + u^{(2)}v_{(3)} - \int v_{(3)}du^{(2)} \ .$$

ഈ രീതിയിൽ മുന്നോട്ട് പോയാൽ നമുക്ക്

$$\int uvdx = uv_{(1)} - u^{(1)}v_{(2)} + u^{(2)}v_{(3)} - u^{(3)}v_{(4)} + \cdots$$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

മുകളിലത്തെ **ഫലത്തെ രണ്ട് ഫലനങ്ങളുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ സമാകലനത്തിനുള്ള ബെർണോളി സൂത്രം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.**

കുറിപ്പ്

u എന്നത് x ന്റെ ഒരു ബഹുപദവ്യംഞ്ജക ഫലനം ആയതിനാൽ തുടർച്ചയായുള്ള അവകലജം $u^{(m)}$ എന്നത് m ന്റെ ചില ധന പൂർണ്ണാങ്കത്തിന് പൂജ്യം ആയിരിക്കും. അതിനാൽ ശേഷമുള്ള എല്ലാ അവകലജങ്ങളും പൂജ്യം മാത്രമായിരിക്കും. അതിനാൽ മുകളിൽ പറഞ്ഞ സൂത്രവാക്യത്തിന്റെ വലതുവശഭാഗത്ത് പരിമിതമായ എണ്ണം പദങ്ങൾ മാത്രം അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 9.31

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക $\int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx$, ഇവിടെ n ഒരു ധനപൂർണ്ണാങ്കം.

നിർദ്ധാരണം

$u = x^2$ കൂടാതെ $v = \cos nx$, എന്നെടുത്ത് ബെർണോളി സൂത്രം പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക്,

$$I = \int_0^{\pi} x^2 \cos nx\, dx = \left[\left(x^2\right)\left(\frac{\sin nx}{n}\right) - \left(2x\right)\left(-\frac{\cos nx}{n^2}\right) + (2)\left(-\frac{\sin nx}{n^3}\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{2\pi(-1)^n}{n^2}$$, കാരണം $\cos n\pi = (-1)^n$ കൂടാതെ $\sin n\pi = 0$.

ഉദാഹരണം 9.32

മൂല്യം കാണുക : $\int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}(1 + x - 2x^3)\, dx$.

നിർദ്ധാരണം

$u = 1 + x - 2x^3$ കൂടാതെ $v = \mathrm{e}^{-2x}$, എന്നെടുക്കുക. ബെർണോളിയുടെ സൂത്രം പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക്

$$I = \int_0^1 \mathrm{e}^{-2x}(1+x-2x^3)\, dx$$

$$= \left[(1+x-2x^3)\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right) - \left(1-6x^2\right)\left(\frac{e^{-2x}}{4}\right) + (-12x)\left(\frac{e^{-2x}}{-8}\right) - (-12)\left(\frac{e^{-2x}}{16}\right)\right]_0^1$$

$$= \left[\frac{e^{-2x}}{16}\left(16x^3 + 24x^2 + 16x\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{7}{2e^2}$$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 114 15-02-2023 15:12:51

ഉദാഹരണം 9.33

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക : $\int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\, dx$, ഇവിടെ n ഒരു ധന പൂർണ്ണാങ്കം.

നിർദ്ധാരണം

$u = x^2$ കൂടാതെ $v = \sin nx$, എന്നെടുത്ത് ബെർണോളി സൂത്രം പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക്

$$I = \int_0^{2\pi} x^2 \sin nx\, dx = \left[\left(x^2\right)\left(-\frac{\cos nx}{n}\right) - \left(2x\right)\left(-\frac{\sin nx}{n^2}\right) + (2)\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right) \right]_0^{2\pi}$$

$$= \left[\left(4\pi^2\right)\left(-\frac{1}{n}\right) - 0 + (2)\left(\frac{1}{n^3}\right) \right] - \left[0 - 0 + (2)\left(\frac{1}{n^3}\right) \right], \text{ (കാരണം } \cos 2n\pi = 1 \text{ കൂടാതെ } \sin 2n\pi = 0 \text{)}$$

$$= -\frac{4\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} - \frac{2}{n^3} = -\frac{4\pi^2}{n}.$$

ഉദാഹരണം 9.34

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക : $\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\lambda x}(1-x^2)\, dx$.

നിർദ്ധാരണം

$u = 1 - x^2$ കൂടാതെ $v = \mathrm{e}^{-\lambda x}$, എന്നെടുത്ത് ബെർണോളി സൂത്രം പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ

$$I = \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\lambda x}(1-x^2)\, dx = \left[(1-x^2)\left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda}\right) - \left(-2x\right)\left(\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2}\right) + (-2)\left(\frac{e^{-\lambda x}}{-\lambda^3}\right) \right]_{-1}^{1}$$

$$= 2\left(\frac{e^{-\lambda}}{\lambda^2}\right) + 2\left(\frac{e^{-\lambda}}{\lambda^3}\right) + 2\left(\frac{e^{\lambda}}{\lambda^2}\right) - 2\left(\frac{e^{\lambda}}{\lambda^3}\right)$$

$$= \frac{2}{\lambda^2}\left(e^{\lambda} + e^{-\lambda}\right) - \frac{2}{\lambda^3}\left(e^{\lambda} - e^{-\lambda}\right).$$

അഭ്യാസം 9.4

താഴെ കാണുന്നവയുടെ മൂല്യം കാണുക:

1. $\int_0^1 x^3 e^{-2x}\, dx$
2. $\int_0^1 \frac{\sin(3\tan^{-1}x)\tan^{-1}x}{1+x^2}\, dx$
3. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{e^{\sin^{-1}x}\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$
4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x\, dx$

9.5 അനുചിത സമാകലങ്ങൾ

റീമൻ സമാകലം $\int_a^b f(x)dx$, നെ നിർവചിക്കുമ്പോൾ $[a,b]$ എന്ന ഇടവേളയിൽ സമാകലനത്തിന്റെ മൂല്യം പരിമിതമായിരിക്കും. കൂടതെ $[a,b]$ യുടെ ഓരോ ബിന്ദുവിലും $f(x)$ പരിമിതമായിരിക്കും. ധാരാളം ഭൗതിക പ്രയോഗങ്ങളിൽ താഴെപറയുന്ന സമാകലങ്ങൾ കണ്ടു വരുന്നുണ്ട്.:

$$\int_a^{\infty} f(x)\, dx\,,\ \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx\,,\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx\,,$$

ഇവിടെ a ഒരു വാസ്തവികസംഖ്യ. കൂടാതെ $f(x)$ എന്നത് സമാകലനത്തിന്റെ ഇടവേളയിൽ ഒരു തുടർഫലനം ആണ്. ഇവയെ റീമൻ സമാകലങ്ങളുടെ പരിധിയായി താഴെ കാണുന്നവിധം നിർവചിക്കാം.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 115 15-02-2023 15:12:59

(i) $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$

(ii) $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty} \int_t^a f(x)\,dx$

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_{-t}^t f(x)\,dx$

ഇവയെ അനുചിത സമാകലങ്ങളുടെ ആദ്യതരം എന്നു വിളിക്കാം. പരിധികൾ നിലനിൽക്കുന്നുവെങ്കിൽ അനുചിത സമാകലങ്ങൾ സംയോജനത്തിലാണെന്ന് പറയാം.

കുറിപ്പ്

സമാകല കലനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച് $F(t)$ എന്ന ഫലനം താഴെ കാണുന്നവിധം നിലനിൽക്കുന്നു

$$\int_a^t f(x)\,dx = F(t) - F(a)$$

$$\therefore \int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}[F(t)-F(a)] = \left[\int f(x)\,dx\right]_a^{\infty}.$$

ഉദാഹരണം 9.35

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക $\int_b^{\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$, $a>0, b\in\mathbb{R}$.

നിർദ്ധാരണം

നമുക്കറിയാം $\int_b^{\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}\right]_b^{\infty} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\infty - \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{b}{a} = \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}\frac{b}{a}\right]$.

കുറിപ്പ്

മുകളിലത്തെ ഉദാഹരണങ്ങളിൽ നിന്നും നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്,

(i) $\int_0^{\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}0\right] = \frac{\pi}{2a}$.

(ii) $\int_a^{\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2} - \tan^{-1}1\right] = \frac{1}{a}\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right] = \frac{\pi}{4a}$.

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_{-t}^{t} \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \lim_{t\to\infty} 2\int_0^t \frac{1}{a^2+x^2}\,dx$, കാരണം $\frac{1}{a^2+x^2}$ ഒരു ഇരട്ട ഫലനം

$$= 2\int_0^{\infty} \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = 2\left(\frac{\pi}{2a}\right) = \frac{\pi}{a}.$$

ഉദാഹരണം 9.36

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4\sin^2 x + 5\cos^2 x}$.

നിർദ്ധാരണം

$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{4\sin^2 x + 5\cos^2 x}$ എന്നിരിക്കട്ടെ

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 116 15-02-2023 15:13:07

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2 x}{4\tan^2 x + 5}\, dx$$ { അംശത്തെയും, ഛേദത്തെയും $\cos^2 x$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നു

$u = \tan x$ എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ $du = \sec^2 x\, dx$

$x = 0$ ആണെങ്കിൽ $u = \tan 0 = 0$

$x = \frac{\pi}{2}$, ആണെങ്കിൽ $u = \tan\frac{\pi}{2} = \infty$

$$\therefore I = \int_0^{\infty} \frac{du}{4u^2 + 5} \text{ (അനുചിത സമാകലം)}$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^{\infty} \frac{du}{\left[u^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right]} = \frac{1}{4} \times \frac{2}{\sqrt{5}} \left[\tan^{-1}\left(\frac{u}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\right)\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2\sqrt{5}}(\tan^{-1}\infty - \tan^{-1} 0) = \frac{1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{5}}.$$

അഭ്യാസം 9.5

1. മൂല്യം കാണുക:

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + 5\cos^2 x}$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 4\sin^2 x}$

9.6 ലഘൂകരണ സൂത്രങ്ങൾ

ചില നിർവചനീയ സമാകലങ്ങളുടെ മൂല്യം സൂചക-ലഘൂകരണ രീതി ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കാം. താഴെ കാണുന്ന നിർവചനീയ സമാകലങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു+:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx,\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx,\ \int_0^1 x^m (1-x)^n\, dx.$$

കൂടാതെ $\int_0^{\infty} e^{-x} x^n\, dx$ എന്ന അനിർവചനീയ സമാകലത്തിന്റെ മൂല്യവും നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു..

ലഘൂകരണ സൂത്രം കാണുന്ന രീതി താഴെ പറയുന്ന ഘട്ടങ്ങളിൽ തന്നിട്ടുണ്ട്:

ഘട്ടം 1 : സമാകലത്തിലെ സൂചകം (ധന പൂർണ്ണാങ്കം) n നെ തിരിച്ചറിയുക.

ഘട്ടം 2 : സമാകലം I_n എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഘട്ടം 3 : ഭാഗിക സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച് I_n ന്റെ സമീകരണം I_{n-1} അല്ലെങ്കിൽ I_{n-2} എന്നീ പദങ്ങളിൽ കാണുക.

അവസാനം ലഭിക്കുന്ന സമീകരണം I_n ന്റെ ലഘൂകരണ സൂത്രം എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

നാം ചില ലഘൂകരണ സൂത്രങ്ങൾ തെളിവില്ലാതെ ഇവിടെ നൽകിയിട്ടുണ്ട്.:

ലഘൂകരണ സൂത്രം I : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$, ആണെങ്കിൽ $I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}, n \geq 2$.

ലഘൂകരണ സൂത്രം II : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx$, ആണെങ്കിൽ $I_n = \frac{(n-1)}{n} I_{n-2}\ n \geq 2$.

ലഘൂകരണ സൂത്രം III : $I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx$, ആണെങ്കിൽ $I_{m,n} = \frac{(n-1)}{m+n} I_{m,n-2}, n \geq 2$.

ലഘൂകരണ സൂത്രം IV : $I_{m,n} = \int_0^1 x^m\ (1-x)^n dx$, ആണെങ്കിൽ $I_{m,n} = \frac{n}{m+n+1} I_{m,n-1}, n \geq 1$.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 117 15-02-2023 15:13:17

ലഘൂകരണ സൂത്രങ്ങൾ I, II, ഉപയോഗിച്ച് നാം കരസ്ഥമാക്കിയ ഫലം (തെളിവില്ലാതെ നൽകിയിട്ടുണ്ട്):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx = \begin{cases} \frac{(n-1)}{n} \times \frac{(n-3)}{(n-2)} \times \cdots \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}, & n = 2,4,6,\cdots \\ \frac{(n-1)}{n} \times \frac{(n-3)}{(n-2)} \times \cdots \times \frac{2}{3}, & n = 3,5,7,\cdots \end{cases}$$

കുറിപ്പ്

ഉദാഹരണമായി

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\, dx = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \times 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 x\, dx = \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}$$

ഉദാഹരണം 9.37

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x + \cos^4 x\right) dx$

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത് $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2 x + \cos^4 x\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\, dx = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{7\pi}{16}$.

ഉദാഹരണം 9.38

മൂല്യം കാണുക $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{vmatrix} \cos^4 x & 7 \\ \sin^5 x & 3 \end{vmatrix} dx$.

നിർദ്ധാരണം

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(3\cos^4 x - 7\sin^5 x\right) dx = 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\, dx - 7\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\, dx$$

$$= 3 \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} - 7 \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{9\pi}{16} - \frac{56}{15}.$$

ലഘൂകരണസൂത്രം III ആവർത്തിച്ച് ഉപയോഗിച്ചാൽ, താഴെ കാണുന്ന ഫലങ്ങൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നു. (തെളിവില്ലാതെ നൽകിയിട്ടുണ്ട്):

(i) n ഇരട്ടസംഖ്യയും കൂടാതെ m ഇരട്ടസംഖ്യയും ആയാൽ,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{(n-1)}{(m+n)} \frac{(n-3)}{(m+n-2)} \frac{(n-5)}{(m+n-4)} \cdots \frac{1}{(m+2)} \frac{(m-1)}{m} \frac{(m-3)}{(m-2)} \frac{(m-5)}{(m-4)} \cdots \frac{1}{2} \frac{\pi}{2}$$

(ii) n ഒറ്റസംഖ്യയും കൂടാതെ m ഒരു ധന പൂർണ്ണാങ്കവും (ഇരട്ട അല്ലെങ്കിൽ ഒറ്റ) ആയാൽ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx = \frac{(n-1)}{(m+n)} \frac{(n-3)}{(m+n-2)} \frac{(n-5)}{(m+n-4)} \cdots \frac{2}{(m+3)} \frac{1}{(m+1)}.$$

കുറിപ്പ്

m കൂടാതെ n ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് ഒറ്റസംഖ്യ ആയാൽ $\cos x$ ഫലനത്തിന്റെ ഘാതത്തെ ഒറ്റസംഖ്യ ആയി മാറ്റുന്നത് സൗകര്യപ്രദമായിരിക്കും. ഉദാഹരണത്തിന് m ഒറ്റസംഖ്യയും n ഇരട്ടയും ആണെങ്കിൽ

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \cos^m x\, dx = \frac{(m-1)}{(n+m)} \frac{(m-3)}{(n+m-2)} \frac{(m-5)}{(n+m-4)} \cdots \frac{2}{(n+3)} \frac{1}{(n+1)}.$$

ഉദാഹരണം 9.39

താഴെ തന്നവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക:

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^6 x\, dx$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^4 x\, dx$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 118 15-02-2023 15:13:28

നിർദ്ധാരണം

(i) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^6 x\, dx = \frac{(6-1)}{(6+4)} \cdot \frac{(6-3)}{(6+4-2)} \cdot \frac{(6-5)}{(6+4-4)} \cdot \frac{(4-1)}{(4)} \cdot \frac{(4-3)}{(4-2)} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{(5)}{(10)} \frac{(3)}{(8)} \frac{(1)}{(6)} \frac{(3)}{(4)} \frac{(1)}{(2)} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{512}$$

കൂടാതെ, $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^6 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \cos^4 x\, dx = \frac{(3)}{(10)} \frac{(1)}{(8)} \frac{(5)}{(6)} \frac{(3)}{(4)} \frac{(1)}{(2)} \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{512}$$

(ii) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^4 x\, dx = \frac{(3)}{(9)} \frac{(1)}{(7)} \frac{(4)}{(5)} \frac{(2)}{(3)} = \frac{(4)}{(9)} \frac{(2)}{(7)} \frac{(1)}{(5)} = \frac{8}{315}$$

കൂടാതെ, $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x \cos^4 x\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos^5 x\, dx = \frac{(4)}{(9)} \frac{(2)}{(7)} \frac{(1)}{(5)} = \frac{8}{315}$$

ഉദാഹരണം 9.40

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക $\int_0^{2a} x^2 \sqrt{2ax - x^2}\, dx$.

നിർദ്ധാരണം

$x = 2a\cos^2\theta$. എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ, $dx = -4a\cos\theta\sin\theta d\theta$.

$x = 0$, ആയാൽ $2a\cos^2\theta = 0$ അതിനാൽ $\theta = \frac{\pi}{2}$. കൂടാതെ $x = 2a$, ആയാൽ $2a\cos^2\theta = 2a$ അതിനാൽ $\theta = 0$.

അതിനാൽ നമുക്ക്,

$$I = \int_0^{2a} x^2 \sqrt{2ax - x^2}\, dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 4a^2 \cos^4\theta \sqrt{4a^2\cos^2\theta - 4a^2\cos^4\theta}(-4a\cos\theta\sin\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4a^2 \cos^4\theta 2a\cos\theta\sin\theta(4a\cos\theta\sin\theta) d\theta$$

$$= 32a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6\theta \sin^2\theta\, d\theta$$

$$= 32a^4 \times \frac{1}{8} \times \frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi a^4}{8}.$$

ഉദാഹരണം 9.41

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക $\int_0^1 x^5 \left(1 - x^2\right)^5 dx$.

നിർദ്ധാരണം

$x = \sin\theta$.എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ, $dx = \cos\theta d\theta$.

$x = 0$, ആയാൽ $\sin\theta = 0$ കൂടാതെ $\theta = 0$. $x = 1$, ആയാൽ $\sin\theta = 1$ അതിനാൽ $\theta = \frac{\pi}{2}$.

അതിനാൽ നമുക്ക്,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta \left(1 - \sin^2\theta\right)^5 \cos\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5\theta \cos^{11}\theta\, d\theta = \frac{10}{16} \times \frac{8}{14} \times \frac{6}{12} \times \frac{4}{10} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{336}.$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 119 15-02-2023 15:13:38

ലഘൂകരണ സൂത്രം III നെ ആവർത്തിച്ച് ഉപയോഗിച്ചാൽ നമുക്ക് താഴെ പറയുന്ന ഫലങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു. (തെളിവില്ലാതെ നൽകിയിട്ടുണ്ട്.):

$\int_0^1 x^m\ (1-x)^n dx\ =\ \dfrac{m!\times n!}{(m+n+1)!}$, ഇവിടെ m കൂടാതെ n എന്നിവ ധന പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ.

ഉദാഹരണം 9.42

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക $\int_0^1 x^3(1-x)^4 dx$.

നിർദ്ധാരണം

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx\ =\ \frac{m!\times n!}{(m+n+1)!}.$$

$$\therefore \int_0^1 x^3(1-x)^4 dx\ =\ \frac{3!\times 4!}{(3+4+1)!}=\frac{3!\times 4!}{8!}=\frac{3\times 2\times 1\times 4\times 3\times 2\times 1}{8\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}=\frac{1}{280}.$$

അഭ്യാസം 9.6

1. താഴെ കാണുന്നവയുടെ മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക:

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{10} x\ dx$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^7 x\ dx$ (iii) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^6 2x\ dx$ (iv) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^5 3x\ dx$

(v) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^4 x\ dx$ (vi) $\int_0^{2\pi} \sin^7 \frac{x}{4}\ dx$ (vii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\cos^5\theta\, d\theta$ (viii) $\int_0^1 x^2(1-x)^3\ dx$

9.7 ഗാമാ സമാകലം

ഈ ഭാഗത്തിൽ നാം $\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$, n ഒരു ധനപൂർണ്ണാങ്കം എന്ന പ്രത്യേക തരം അനുചിത സമാകലത്തെ കുറിച്ച് പഠിക്കും.

$e^\infty\ =\ \lim_{x\to\infty} e^x=\infty$ and $e^{-\infty}=\lim_{x\to\infty} e^{-x}=\dfrac{1}{\lim_{x\to\infty} e^x}=\dfrac{1}{\infty}=0$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

L'ഹോപിറ്റൽ നിയമം അനുസരിച്ച്, ഓരോ ധനപൂർണ്ണാങ്കം m നും, നമുക്ക് താഴെ തന്നവിധം ലഭിക്കുന്നു,

$$\lim_{x\to\infty} x^m e^{-x}\ =\ \lim_{x\to\infty}\frac{x^m}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{m!}{e^x}=0.$$

ഉദാഹരണം 9.43

തെളിയിക്കുക $\int_0^\infty e^{-x}x^n dx = n!$, ഇവിടെ n ഒരു ധനപൂർണ്ണാങ്കം.

നിർദ്ധാരണം

ഭാഗിക സമകലനം പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്

$$\int_0^\infty e^{-x}x^n dx=\left[x^n\left(-e^{-x}\right)\right]_0^\infty-\int_0^\infty\left(-e^{-x}\right)\left(nx^{n-1}\right)dx=n\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx.$$

$I_n\ =\ \int_0^\infty e^{-x}x^n dx$.എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ, $I_n = nI_{n-1}$

എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. കൂടാതെ $I_n = n(n-1)I_{n-2}$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ഈ രീതിയിൽ മുന്നോട്ട് പോയാൽ അവസാനം നമുക്ക്,

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 120 15-02-2023 15:13:47

$I_n = n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1)I_0$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

പക്ഷേ, $I_0 = \int_0^\infty e^{-x}x^0dx = \left(-e^{-x}\right)_0^\infty = 0+1=1$. അതിനാൽ നമുക്ക് $I_n = n(n-1)(n-2)\cdots(2)(1) = n!$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ഫലം

$\int_0^\infty e^{-x}x^n dx = n!$, ഇവിടെ n ഒരു ധന പൂർണ്ണാങ്കം.

കുറിപ്പ്

$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$ എന്ന സമാകലം ഒരേയൊരു ധനപൂർണ്ണാങ്കം $n \geq 1$ ന് നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ട്.

നിർവ്വചനം 9.1

$\int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx$ നെ **ഗാമാ സമാകലം** എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഇതിനെ $\Gamma(n)$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. കൂടാതെ ഇതിനെ n ” ന്റെ ഗാമാ എന്ന് വിളിക്കാവുന്നതാണ്.

കുറിപ്പ്

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n).$$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}x^0dx = \left(-e^{-x}\right)_0^\infty = 0+1=1,$$

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx.$$

$$= (n-1)!,\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

ഉദാഹരണം 9.44

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക $\int_0^\infty e^{-ax}x^n dx$,ഇവിടെ $a>0$.

നിർദ്ധാരണം

$t = ax$, എന്നെടുക്കുക $dt = adx$, $x = 0 \Rightarrow t = 0$ കൂടാതെ $x = \infty \Rightarrow t = \infty$

അതിനാൽ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^n dx = \int_0^\infty e^{-t}\left(\frac{t}{a}\right)^n\frac{dt}{a} = \frac{1}{a^{n+1}}\int_0^\infty e^{-t}t^n dt$$

$$= \frac{1}{a^{n+1}}\int_0^\infty e^{-x}x^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}}.$$

അതായത്

$$\int_0^\infty e^{-ax}x^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

ഉദാഹരണം 9.45

തെളിയിക്കുക $\Gamma(n) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n-1}dx.$

നിർദ്ധാരണം

$x = \sqrt{u}$, എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $dx = \frac{1}{2\sqrt{u}}du$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

$x = 0$ ആണെങ്കിൽ $u = 0$ $x = \infty$, ആയാൽ $u = \infty$.

$$\therefore 2\int_0^\infty e^{-x^2}x^{2n-1}dx = 2\int_0^\infty e^{-u}\left(\sqrt{u}\right)^{2n-1}\frac{1}{2\sqrt{u}}du = \int_0^\infty e^{-u}u^{n-1}du = \Gamma(n).$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 121 15-02-2023 15:13:57

ഉദാഹരണം 9.46

മൂല്യം കാണുക $\int_0^{\infty} \frac{x^n}{n^x} dx$, ഇവിടെ n ഒരു ധനപൂർണ്ണാങ്കം ≥ 2.

നിർദ്ധാരണം

സൂത്രം $n = e^{\log_e n}$, ഉപയോഗിച്ചാൽ നമുക്ക്

$$I = \int_0^{\infty} \frac{x^n}{n^x} dx = \int_0^{\infty} n^{-x} x^n dx = \int_0^{\infty} \left(e^{\log n}\right)^{-x} x^n dx = \int_0^{\infty} e^{-x \log n} x^n dx .$$

$u = x \log n$, എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $dx = \frac{du}{\log n}$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

$x = 0$, ആയാൽ $u = 0$.ആകുന്നു $x = \infty$, ആയാൽ $u = \infty$ ആകുന്നു.

$$\therefore I = \int_0^{\infty} e^{-u} \left(\frac{u}{\log n}\right)^n \frac{du}{\log n}$$

$$= \frac{1}{(\log n)^{n+1}} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{(n+1)-1} du = \frac{\Gamma(n+1)}{(\log n)^{n+1}} = \frac{n!}{(\log n)^{n+1}} .$$

അഭ്യാസം 9.7

താഴെ തന്നവയുടെ മൂല്യം കാണുക

1. (i) $\int_0^{\infty} x^5 e^{-3x} dx$ (ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-\tan x}}{\cos^6 x} dx$

2. $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^3 dx = 32, \ \alpha > 0,$ ആണെങ്കിൽ α കാണുക

GM1S3

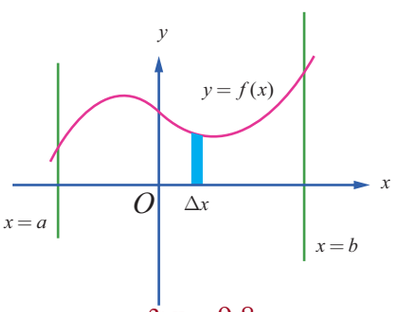
9.8 സമാകലനത്തിലൂടെ ഒരു അതിർത്തിയിൽ ഉൾപ്പെട്ട പ്രദേശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം നിർണ്ണയിക്കൽ

ഈ അധ്യായത്തിന്റെ തുടക്കത്തിൽ, ഞങ്ങൾ ഇതിനകം തന്നെ ഒരു ജ്യാമിതീയ സമീപനത്തിലൂടെ നിർവചനീയ സമാകലങ്ങൾ അവതരിപ്പിച്ചു. ഈ ഒരു സമീപനത്തിൽ, ഒരു നിർവചനീയ സമാകലത്തിന്റെ സമാകല്യം ഋണമല്ലെങ്കിൽ നിർവചനീയ സമാകലം ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് ജ്യാമിതീയ വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കാം. നിലവിലെ വിഭാഗത്തിൽ വക്രതലങ്ങളാൽ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന പ്രദേശങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുന്നതിന് മുകളിലത്തെ സമീപനം ഉപയോഗിക്കാം.

9.8.1 രേഖകൾ $x = a$ കൂടാതെ $x = b$, x - അക്ഷം എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന പ്രദേശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം.

നില (i)

$x = a$ കൂടാതെ $x = b$ എന്നീ രേഖകൾക്കിടയിൽ x അക്ഷത്തിന് മുകളിലായി സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന (അതായത് ആദ്യത്തെ അല്ലെങ്കിൽ രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന ഭാഗം) തുടർച്ചയായ വക്രഭാഗത്തിന്റെ സമീകരണം $y = f(x), \ a \leq x \leq b$ ആകുന്നു. (ചിത്രം 9.8 കാണുക). അതിനാൽ വക്രഭാഗത്തിലെ ഓരോ ബിന്ദുവിലും $y \geq 0$ ആയിരിക്കും. രേഖകൾ $x = a$ കൂടാതെ $x = b$, x- അക്ഷം കൂടാതെ വക്രം എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന മേഖല പരിഗണിക്കുക. ഈ ഭാഗത്ത് y ന്റെ ചിഹ്നം മാറുന്നില്ല എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. എങ്കിൽ ആ ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം A താഴെ പറയുന്നവിധം കണ്ടുപിടിക്കാം:



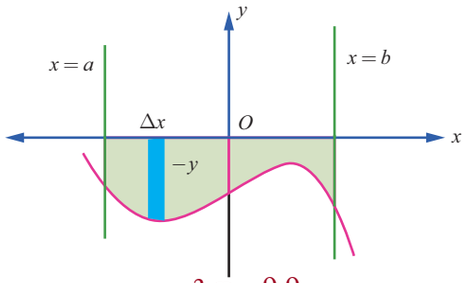
ചിത്രം. 9.8

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 122 15-02-2023 15:14:04

y അക്ഷത്തിന്റെ ധനദിശയിൽ നോക്കിയാൽ, ഈ ഭാഗത്തെ ഉയരം y ഉം, അകലം Δx ഉം ഉള്ള ലഘുവായ ലംബ ദീർഘചതുരം (നേർത്ത ദീർഘചതുരം) ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നത് കാണാം. അതിനാൽ A എന്നത് ലംബ ദീർഘചതുരങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ തുകയുടെ പരിധി ആകുന്നു. അതിനാൽ നമുക്ക് $A = \lim_{a\le x\le b} \sum -y\Delta x = -\int_a^b y\,dx = \left|\int_a^b y\,dx\right|$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

നില (ii)

$y = f(x),\ a \le x \le b$ എന്നത് $x-$ അക്ഷത്തിന് താഴെ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന തുടർച്ചയായ വക്രഭാഗത്തിന്റെ സമീകരണം എന്നിരിക്കട്ടെ. (അതായത് മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശം അല്ലെങ്കിൽ നാലാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന ഭാഗം) എങ്കിൽ വക്രഭാഗത്തിന്റെ ഓരോ ബിന്ദുവിലും $y \le 0$ ആകുന്നു. പ്രദേശത്തിൽ y യുടെ ചിഹ്നം മാറുന്നില്ല എന്നത് പ്രധാനമായും ശ്രദ്ധിക്കേണ്ട കാര്യമാണ്. വക്രം, $x-$ അക്ഷം, $x = a$ കൂടാതെ $x = b$ എന്നീ കോടിരേഖകൾ പരിമിത പ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന ഭാഗം പരിഗണിയ്ക്കുക. ചിത്രം 9.9 കാണുക. എങ്കിൽ A ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം താഴെ കാണുന്ന വിധം കണ്ടുപിടിക്കാം:

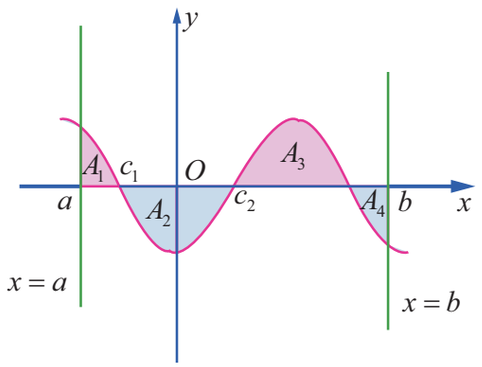


ചിത്രം. 9.9

$y-$ അക്ഷത്തിന്റെ ഋണദിശയിൽ നോക്കുമ്പോൾ, ഈ ഭാഗത്തെ ഉയരം $|y| = -y$ ഉം അകലം Δx ഉം ഉള്ള ലഘുവായ ലംബദീർഘചതുരം (നേർത്ത ദീർഘചതുരം) ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നത് കാണാം. അതിനാൽ A എന്നത് ലംബദീർഘചതുരങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ തുകയുടെ പരിധി ആകുന്നു. അതിനാൽ നമുക്ക് $A = \lim_{a\le x\le b} \sum -y\Delta x = -\int_a^b y\,dx = \left|\int_a^b y\,dx\right|$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

നില (iii)

$y = f(x),\ a \le x \le b$ എന്നത് $x-$ അക്ഷത്തിന് മുകളിലും താഴെയും ആയി സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന തുടർച്ചയായ വക്രഭാഗത്തിന്റെ സമീകരണം (അതായത് ഭാഗം എല്ലാ ചതുർത്ഥാംശങ്ങളിലും സ്ഥിതി ചെയ്യാം) എന്നിരിക്കട്ടെ. $y = f(x)$ ന്റെ ഗ്രാഫ് $XY-$ തലത്തിൽ വരയ്ക്കുക. $x-$ അക്ഷത്തിന് മുകളിലും താഴെയും ആയി മാറി മാറി രൂപപ്പെടുന്ന ഗ്രാഫ് $x = a$, $x = b$ എന്നീ കോടി രേഖകൾക്കിടയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. $[a,b]$ എന്ന ഇടവേളയെ ഓരോ ഉപഇടവേള കളിലും $f(x)$ ന് ഒരേ ചിഹ്നം വരത്തക്കവിധം $[a,c_1]$ $[c_1,c_2],\cdots,$ $[c_k,b]$ എന്ന ഉപഇടവേളകളായി വിഭജിക്കുന്നു. നില (i), (ii) എന്നിവ പ്രയോഗിച്ച് ഉപ ഇടവേളകൾക്ക് യോജിച്ച ഭാഗത്തിന്റെ ജ്യാമിതീയ വിസ്തീർണ്ണം നമുക്ക് പ്രത്യേകം പ്രത്യേകമായി കണ്ടുപിടിക്കാം.



ചിത്രം. 9.10

അതിനാൽ $y = f(x)$ ന്റെ ഗ്രാഫ് x- അക്ഷം, $x = a$ കൂടാതെ $x = b$ എന്നീ രേഖകൾ എന്നിവ പരിമിത പ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ ജ്യാമിതീയ വിസ്തീർണ്ണം $\left|\int_a^{c_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| + \cdots + \left|\int_{c_k}^{b} f(x)dx\right|$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, ചിത്രം 9.10 ലെ നിഴലിട്ട ഭാഗം പരിഗണിയ്ക്കുക. ഇവിടെ A_1, A_2, A_3 കൂടാതെ A_4 എന്നിവ പ്രത്യേക ഭാഗങ്ങളുടെ ജ്യാമിതീയ വിസ്തീർണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. എങ്കിൽ ആകെ വിസ്തീർണ്ണം

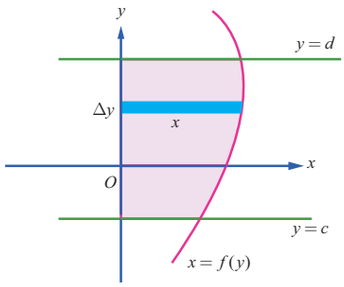
$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \int_a^{c_1} f(x)dx + \left|\int_{c_1}^{c_2} f(x)dx\right| + \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx + \left|\int_{c_3}^{b} f(x)dx\right| \text{ ആകുന്നു.}$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 123 15-02-2023 15:14:10

9.8.2 ഒരു വക്രം, y–അക്ഷം, $y = c$ കൂടാതെ $y = d$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന പ്രദേശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം.

നില (iv)

$x = f(y),\ c \le y \le d$ എന്നത് $y-$ അക്ഷത്തിന്റെ വലതു ഭാഗത്ത് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന തുടർച്ചയായ വക്രഭാഗത്തിന്റെ സമീകരണം (അതായത് ഭാഗം ആദ്യത്തെ ചതുർത്ഥാംശം അല്ലെങ്കിൽ നാലാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു) എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ വക്രഭാഗത്തിലെ ഓരോ ബിന്ദുവിലും $x \ge 0$ ആയിരിക്കും. ഈ പ്രദേശത്ത് x ന്റെ ചിഹ്നം മാറുന്നില്ല എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.



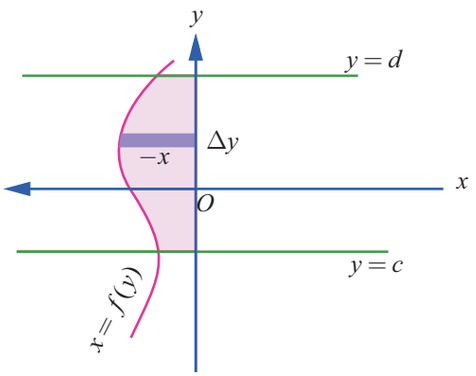
ചിത്രം. 9.11

വക്രം, $y-$ അക്ഷം, $y = c$ കൂടാതെ $y = d$ എന്നീ രേഖകൾ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന ഭാഗം പരിഗണിക്കുക. ചിത്രം 9.11 ൽ നിഴലിട്ട ഭാഗം കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. എങ്കിൽ ആ പ്രദേശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം A താഴെ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന വിധം കണ്ടുപിടിക്കാവുന്നതാണ്:

$x-$ അക്ഷത്തിന്റെ ധനദിശയിൽ നോക്കിയാൽ, ഭാഗത്തെ നീളം x ഉം അകലം Δy ഉം ഉള്ള ലഘു തിരശ്ചീന ദീർഘചതുരങ്ങളായി (നേർത്ത ദീർഘചതുരം) വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നത് കാണാം. എങ്കിൽ തിരശ്ചീന ദീർഘചതുരങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ തുകയുടെ പരിധി A ആകുന്നു. അതിനാൽ നമുക്ക് $A = \lim_{c \le y \le d} \sum x\Delta y = \int_c^d x\,dy$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

നില (v)

$x = f(y),\ c \le y \le d$ എന്നത് $y-$ അക്ഷത്തിന് ഇടത് ഭാഗത്ത് സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന തുടർച്ചയായ വക്രഭാഗത്തിന്റെ (ഭാഗം രണ്ടാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശം അല്ലെങ്കിൽ മൂന്നാമത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.) സമീകരണം എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ വക്രഭാഗത്തിലെ ഓരോ ബിന്ദുവിലും, $x \le 0$ ആകുന്നു. ഈ പ്രദേശത്ത് x ന്റെ ചിഹ്നം മാറുന്നില്ല എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. വക്രം, $y-$ അക്ഷം, $y = c$ കൂടാതെ $y = d$ എന്നീ രേഖകൾ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന മേഖല പരിഗണിക്കുക. നിഴലിട്ട ഭാഗം ചിത്രം 9.12 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. എങ്കിൽ വിസ്തീർണ്ണം A താഴെ കാണുന്നവിധം കണ്ടുപിടിക്കാം:



ചിത്രം. 9.12

$x-$ അക്ഷത്തിന്റെ ധന ദിശയിൽ നോക്കിയാൽ പ്രദേശത്തെ നീളം $|x| = -x$ ഉം വീതി Δy ഉം ഉള്ള ലഘു തിരശ്ചീന ദീർഘചതുരങ്ങളായി (നേർത്ത ദീർഘചതുരങ്ങൾ) വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നത് കാണാം. എങ്കിൽ തിരശ്ചീന ദീർഘചതുരങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണങ്ങളുടെ തുകയുടെ പരിധി A ആകുന്നു.

അതിനാൽ നമുക്ക് $A = \lim_{c \le y \le d} \sum (-x)\Delta y = -\int_c^d x\,dy = \left|\int_c^d x\,dy\right|$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

നില (vi)

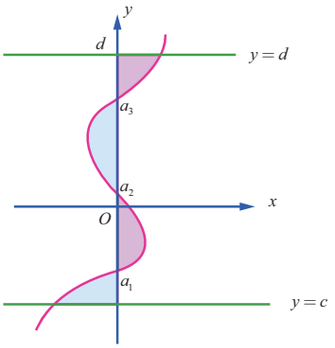
$x = f(y),\ c \le y \le d$ എന്നത് $y-$ അക്ഷത്തിന്റെ വലത് കൂടാതെ ഇടത് വശങ്ങളിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന തുടർച്ചയായ വക്രഭാഗത്തിന്റെ (അതായത് പ്രദേശം എല്ലാ ചതുർത്ഥാംശങ്ങളിലും സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു) സമീകരണം ആകുന്നു. $x = f(y)$ ന്റെ ഗ്രാഫ് $XY-$ തലത്തിൽ വരയ്ക്കുക. ഗ്രാഫ് $y-$ അക്ഷത്തിന്റെ വലത് കൂടാതെ ഇടത് വശങ്ങളിൽ മാറി മാറി രൂപപ്പെടുന്നത് കാണാം. കൂടാതെ ഇത് $y = c$, $y = d$ എന്നീ രേഖകൾക്കിടയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. $[c, d]$ എന്ന ഇടവേളയെ ഓരോ ഉപഇടവേളകളിലും $f(y)$ ഒരേ ചിഹ്നം ആയി വരത്തക്കവിധം $[c, a_1]$, $[a_1, a_2], \cdots, [a_k, d]$ എന്ന ഉപിടവേളകളായി വിഭജിക്കുക. (iii), (iv) എന്നീ നിലകൾ ഉപയോഗിച്ചാൽ

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 124 15-02-2023 15:14:16

ഉപ ഇടവേളകൾക്ക് യോജിച്ച മേഖലയുടെ ജ്യാമിതീയ വിസ്തീർണ്ണം നമുക്ക് ലഭിക്കും.

അതിനാൽ $x = f(y)$, ന്റെ ഗ്രാഫ്, y-അക്ഷം, $y = c$ കൂടാതെ $y = d$ എന്നീ രേഖകൾ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന പ്രദേശത്തിന്റെ ജ്യാമിതീയ വിസ്തീർണ്ണം

$$A = \left|\int_{c}^{a_1} f(y)dy\right| + \left|\int_{a_1}^{a_2} f(y)dy\right| + \cdots + \left|\int_{a_k}^{d} f(y)dy\right| \text{ ആകുന്നു.}$$



ചിത്രം. 9.13

ഉദാഹരണമായി, ചിത്രം 9.13 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന നിഴലിട്ട ഭാഗം പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ B_1, B_2, B_3 കൂടാതെ B_4 എന്നിവ പ്രത്യേക ഭാഗങ്ങളുടെ ജ്യാമിതീയ വിസ്തീർണ്ണങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. എങ്കിൽ വക്രം $x = f(y)$, $y-$അക്ഷം, $y = c$ കൂടാതെ $y = d$ എന്നീ രേഖകൾ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന പ്രദേശത്തിന്റെ ആകെ വിസ്തീർണ്ണം

$$\begin{aligned} B &= B_1 + B_2 + B_3 + B_4 \\ &= \left|\int_{c}^{a_1} f(y)dy\right| + \int_{a_1}^{a_2} f(y)dy + \left|\int_{a_2}^{a_3} f(y)dy\right| + \int_{a_3}^{d} f(y)dy \text{ ആകുന്നു.} \end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 9.47

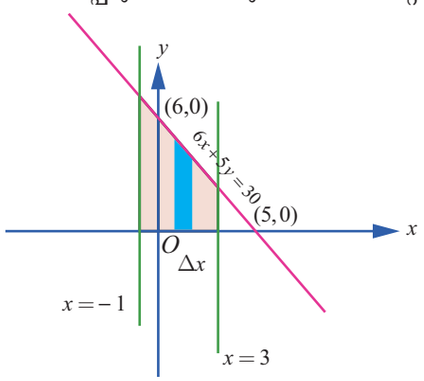
രേഖ $6x + 5y = 30$, $x-$ അക്ഷം, $x = -1$ കൂടാതെ $x = 3$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

നിഴലിട്ട ഭാഗം ചിത്രം 9.14 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇത് $x-$ അക്ഷത്തിന് മുകളിലാണ് സ്ഥിതിചെയ്യുന്നത്. അതിനാൽ ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം

$$A = \int_{-1}^{3} y\,dx = \int_{-1}^{3}\left(\frac{30-6x}{5}\right)dx = \left(\frac{30x-3x^2}{5}\right)_{-1}^{3}$$

$$= \left(\frac{90-27}{5}\right) - \left(\frac{-30-3}{5}\right) = \frac{96}{5} \text{ ആകുന്നു.}$$



ചിത്രം. 9.14

ഉദാഹരണം 9.48

രേഖ $7x - 5y = 35$, $x-$ അക്ഷം കൂടാതെ രേഖകൾ $x = -2$, $x = 3$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന പ്രദേശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

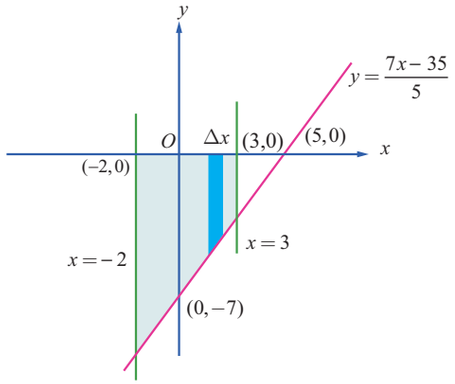
നിർദ്ധാരണം

ആവശ്യപ്പെട്ട ഭാഗം ചിത്രം 9.15 ൽ നിഴലിട്ടിരിക്കുന്നു. ഇത് $x-$ അക്ഷത്തിന് താഴെ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. അതിനാൽ ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം

$$A = \left|\int_{-2}^{3} y\,dx\right| = \left|\int_{-2}^{3}\left(\frac{7x-35}{5}\right)dx\right|$$

$$= \frac{1}{5}\left|\left(7\left(\frac{x^2}{2}\right) - 35x\right)_{-2}^{3}\right|$$

$$= \frac{1}{5}\left|\left(\left(\frac{63}{2}\right) - 105\right) - (84)\right| = \frac{63}{2} \text{ ആകുന്നു.}$$



ചിത്രം. 9.15

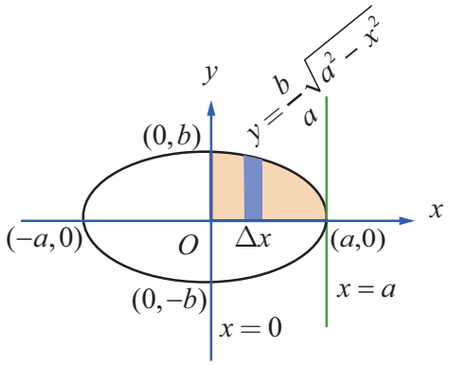
12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 125 15-02-2023 15:14:24

ഉദാഹരണം 9.49

ദീർഘവൃത്തം $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ഉൾപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ദീർഘവൃത്തം എന്നത് ദീർഘാക്ഷം, ഹ്രസ്വാക്ഷം എന്നിവയ്ക്ക് അനുസരിച്ച് സദൃശ്യമാണ്. ഇത് ചിത്രം 9.16-ൽ നിഴലിട്ട് കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. y - അക്ഷത്തിന്റെ ധനദിശയിൽ നോക്കിയാൽ ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം A എന്നത് ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ ആദ്യ ചതുർത്ഥാംശഭാഗം $\left(y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, 0<x<a\right)$, x -അക്ഷം, $x=0$ കൂടാതെ $x=a$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ നാല് മടങ്ങ് ആകുന്നു. അതിനാൽ ലംബ ദീർഘ ഖണ്ഡങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് വിസ്തീർണ്ണം കാണുമ്പോൾ നമുക്ക്



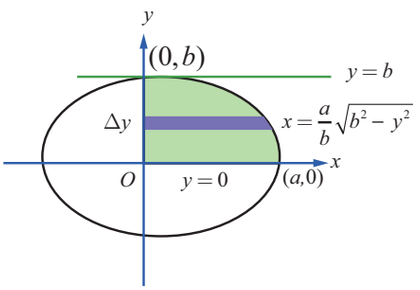
ചിത്രം. 9.16

$$A = 4\int_0^a y\,dx = 4\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx$$

$$= \frac{4b}{a}\left[\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a = \frac{4b}{a}\times\frac{\pi a^2}{4} = \pi ab$$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

കുറിപ്പ്

x - അക്ഷത്തിന്റെ ധന ദിശയിൽ നോക്കുമ്പോൾ, ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം A എന്നത്, ദീർഘവൃത്തത്തിന്റെ ആദ്യ ചതുർത്ഥാംശഭാഗം $\left(x=\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}, 0<y<b\right)$ y-അക്ഷം, $y=0$ കൂടാതെ $y=b$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന സ്ഥലത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ 4 മടങ്ങാകുന്നു. അതിനാൽ തിരശ്ചീന ദീർഘഖണ്ഡങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് വിസ്തീർണ്ണം കാണുമ്പോൾ (ചിത്രം 9.17 നോക്കുക) നമുക്ക്



ചിത്രം. 9.17

$$A = \int_0^a x\,dy = 4\int_0^b \frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}\,dy$$

$$= \frac{4a}{b}\left[\frac{y\sqrt{b^2-y^2}}{2}+\frac{b^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{y}{b}\right)\right]_0^b = \frac{4a}{b}\times\frac{\pi b^2}{4} = \pi ab$$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

കുറിപ്പ്

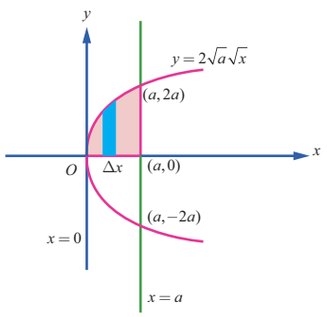
മുകളിലത്തെ ഫലത്തിൽ $b=a$ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ $x^2+y^2=a^2$ എന്ന വൃത്തം പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന പ്രദേശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം πa^2 എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 9.50

$y^2=4ax$ എന്ന സമവക്രം കൂടാതെ അതിന്റെ ലാറ്റസ് റെക്ടം എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന പ്രദേശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിന്റെ സമീകരണം $x=a$ ആകുന്നു. ഇത് സമവക്രത്തെ $L(a,2a)$ കൂടാതെ $L_1(a,-2a)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ പ്രതിഛേദിക്കുന്നു. ആവശ്യപ്പെട്ട ഭാഗം ചിത്രം 9.18 ൽ നിഴലിട്ടിരിക്കുന്നു. സദൃശ്യതപ്രകാരം ആവശ്യപ്പെട്ട സമീകരണം A എന്നത് $y=2\sqrt{a}\sqrt{x}$, എന്ന സമവക്രഭാഗം, x- അക്ഷം $x=0$ കൂടാതെ $x=a$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങാകുന്നു



ചിത്രം. 9.18

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 126 15-02-2023 15:14:30

ലംബ ദീർഘ ഖണ്ഡങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് വിസ്തീർണ്ണം കാണുമ്പോൾ നമുക്ക്

$$A = 2\int_0^a y\,dx = 2\int_0^a 2\sqrt{a}\sqrt{x}\,dx = 4\sqrt{a}\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

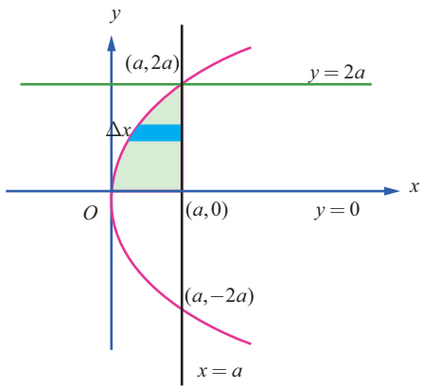
$$= 4\sqrt{a}\times\frac{2}{3}a^{\frac{3}{2}} = \frac{8a^2}{3}$$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

കുറിപ്പ്

x-അക്ഷത്തിന്റെ ധനദിശയിൽ, തിരശ്ചീന ദീർഘഖണ്ഡങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് വിസ്തീർണ്ണം കാണുമ്പോൾ (ചിത്രം 9.19) നമുക്ക്

$$A = 2\int_0^{2a}(a-x)dy = 2\int_0^{2a}\left(a-\frac{y^2}{4a}\right)dy$$

$$= 2\left(ay-\frac{y^3}{12a}\right)_0^{2a} = 2\left(2a^2-\frac{8a^3}{12a}\right) = \frac{8a^2}{3}$$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 9.19

കുറിപ്പ്

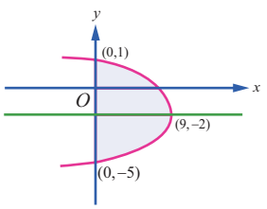
മുകളിൽ പറഞ്ഞ വിസ്തീർണ്ണം, സമവക്രത്തിന്റെ ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിനെ ആധാരമായും, കൂടാതെ മധ്യസ്ഥാനത്തിനും ശീർഷത്തിനും ഇടയിലുള്ള ദൂരത്തെ ഉയരമായും ഉള്ള വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ മൂന്നിൽ രണ്ട് ഭാഗമാണ്. ഇത് സമവക്രത്തിന്റെ അടിഭാഗവിസ്തീർണ്ണം, വക്രത്തിന്റെ അടിവശത്തെ ആധാരമാക്കിയും, വക്രത്തിന്റെ ഉയരത്തെ നീളമാക്കിയും ഉള്ള ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ മൂന്നിൽ രണ്ട് മടങ്ങാണ് എന്ന ആർക്കിമിഡീസ് സൂത്രത്തെ തെളിയിക്കുന്നതാണ്. ഇത് ലാറ്റസ്-റെക്ടത്തെ ആധാരമാക്കിയും മധ്യസ്ഥാനത്തിനും ശീർഷത്തിനും ഇടയിലുള്ള ദൂരത്തെ ഉയരമാക്കിയും ഉള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ മൂന്നിൽ നാല് ഭാഗത്തിന് തുല്യമാണ്.

ഉദാഹരണം 9.51

y-അക്ഷം കൂടാതെ സമവക്രം $x = 5-4y-y^2$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

സമവക്രത്തിന്റെ സമീകരണം $(y+2)^2 = -(x-9)$ ആകുന്നു. സമവക്രം y-അക്ഷത്തിലെ $(0,-5)$ കൂടാതെ $(0,1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ വഴി കടന്നു ചെല്ലുന്നു. ഇതിന്റെ ശീർഷം $(9,-2)$ ഉം സമവക്രത്തിന്റെ അക്ഷം $y=-2$ ഉം ആകുന്നു. ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം ചിത്രം 9.20 ൽ നിഴലിട്ടിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 9.20

$x-$ അക്ഷത്തിന്റെ ധനദിശയിൽ നോക്കി, തിരശ്ചീന ദീർഘഖണ്ഡങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ, ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം A

$$A = \int_{-5}^{1} x\,dy = \int_{-5}^{1}(5-4y-y^2)dy = \left[5y-2y^2-\frac{y^3}{3}\right]_{-5}^{1} = \frac{8}{3}-\left(-\frac{100}{3}\right) = 36$$ ആകുന്നു.

കുറിപ്പ്

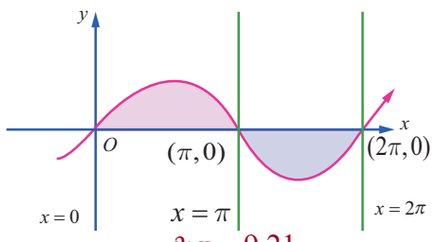
മുകളിലത്തെ പ്രശ്നത്തിൽ കണ്ടതുപോലെ സമവക്രചാപത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം, ആധാരമടങ്ങ് ഉയരത്തിന്റെ മൂന്നിൽ രണ്ടുഭാഗമാണെന്ന ആർക്കിമിഡീസ് സൂത്രം നാം വീണ്ടും തെളിയിച്ചു.

ഉദാഹരണം 9.52

$x-$ അക്ഷം, വക്രം $y = \sin x$, $x = 0$ കൂടാതെ $x = 2\pi$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന പ്രദേശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം ചിത്രം 9.21 ൽ നിഴലിട്ടിരിക്കുന്നു. പ്രദേശത്തിന്റെ ഒരു ഭാഗം $x-$ അക്ഷത്തിന് മുകളിലും $x=0$ കൂടാതെ $x=\pi$ എന്നിവയ്ക്കിടയിലുമാണ്. മറ്റേ ഭാഗം x അക്ഷത്തിന് താഴെയും $x=\pi$ കൂടാതെ $x=2\pi$ എന്നിവയ്ക്കിടയിലുമാണ്. അതിനാൽ ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം



ചിത്രം. 9.21

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 127 15-02-2023 15:14:37

$$A = \int_0^{\pi} y\,dx + \left|\int_{\pi}^{2\pi} y\,dx\right| = \int_0^{\pi} \sin x\,dx + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x\,dx\right| = \left[-\cos x\right]_0^{\pi} + \left|\left[-\cos x\right]_{\pi}^{2\pi}\right|$$

$= \left[-\cos\pi + \cos 0\right] + \left|\left[-\cos 2\pi + \cos\pi\right]\right| = 2 + \left|-2\right| = 4$ ആകുന്നു.

കുറിപ്പ്

നിർവചനീയ സമാകലം $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$, ന്റെ മൂല്യം കാണുകയാണെങ്കിൽ

$\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = \left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = \left[-\cos 2\pi\right] - \left[-\cos 0\right] = 0$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

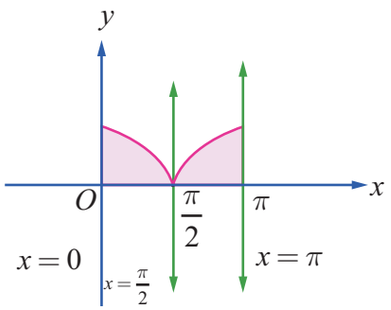
അതിനാൽ $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ എന്നത് വക്രം $y = \sin x$, $x-$ അക്ഷം, $x = 0$ കൂടാതെ $x = 2\pi$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന പ്രദേശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നില്ല.

ഉദാഹരണം 9.53

$x-$ അക്ഷം, വക്രം $y = |\cos x|$, $x = 0$ കൂടാതെ $x = \pi$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന പ്രദേശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള വക്രം $y = \begin{cases} \cos x, 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ -\cos x, \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases}$ ആകുന്നു.



ചിത്രം. 9.22

ഇത് $x-$ അക്ഷത്തിന് മുകളിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം ചിത്രം 9.22-ൽ നിഴലിട്ടിരിക്കുന്നു. അതിനാൽ ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം

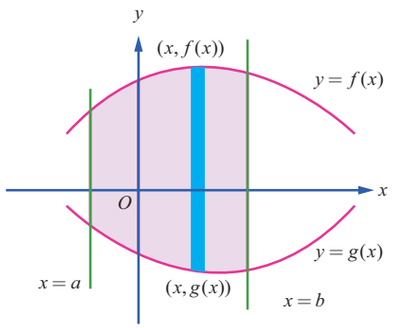
$$A = \int_0^{\pi} y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\cos x)\,dx = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left[\sin x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$= \left[1-0\right] - \left[0-1\right] = 2$ ആകുന്നു.

9.8.3 രണ്ട് വക്രങ്ങൾക്കിടയിൽ പരിമിതപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം

നില (i)

$y = f(x)$ കൂടാതെ $y = g(x)$ എന്നിവ $XOY-$ തലത്തിലെ രണ്ട് വക്രങ്ങളുടെ സമീകരണങ്ങൾ മാത്രമല്ല എല്ലാ $x \in [a,b]$ യ്ക്കും $f(x) \ge g(x)$ ആകുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ. നാം കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത് രണ്ടുവക്രങ്ങൾക്കിടയിൽ, രേഖകൾ $x = a$, $x = b$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം A ആണ്.



ചിത്രം. 9.23

ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം ചിത്രം 9.23-ൽ നിഴലിട്ട് കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. വിസ്തീർണ്ണം A കാണുന്നതിന് പ്രദേശത്തെ വീതി Δx ഉം ഉയരം $f(x) - g(x)$ ഉം ഉള്ള ലംബ ദീർഘചതുരങ്ങളായി വിഭജിക്കുക. എല്ലാ $f(x) - g(x) \ge 0$ യ്ക്കും $x \in [a,b]$ ആണ് എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. മുൻപ് പറഞ്ഞതുപോലെ ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം എന്നത് ലംബദീർഘചതുരങ്ങളുടെ തുകയുടെ പരിധി ആകുന്നു. അതിനാൽ നമുക്ക് $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

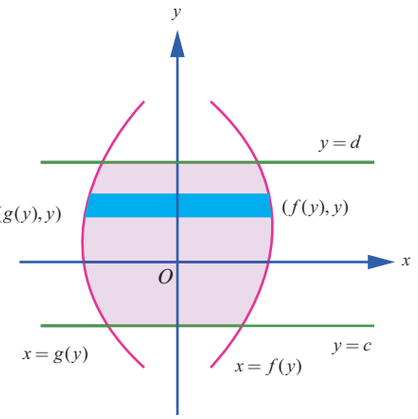
12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 128 15-02-2023 15:14:50

കുറിപ്പ്

$y-$ അക്ഷത്തിന്റെ ധനദിശയിൽ നോക്കിയാൽ $y=f(x)$ എന്ന വക്രത്തെ മേൽവക്രം (U) എന്നും $y=g(x)$ എന്ന വക്രത്തെ കീഴ്വക്രം (L) എന്നും വിളിക്കുന്നു. അതിനാൽ നമുക്ക് $A=\int_a^b [y_U - y_L]dx$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

നില (ii)

$x=f(y)$ കൂടാതെ $x=g(y)$ എന്നിവ $XOY-$ തലത്തിലെ രണ്ട് വക്രങ്ങൾ മാത്രമല്ല എല്ലാ $y\in[c,d]$ ക്കും $f(y)\geq g(y)$ ആകുന്നു. നാം കണ്ടുപിടിക്കേണ്ടത്, രണ്ടു വക്രങ്ങൾക്കും $y=c$ കൂടാതെ $y=d$ എന്നീ രേഖകൾക്കും ഇടയിൽ നിലകൊള്ളുന്ന പ്രദേശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം A ആണ്. ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം ചിത്രം 9.24 ൽ നിഴലിട്ട് കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. A കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന്, $x-$ അക്ഷത്തിന്റെ ധനദിശയിൽ നോക്കി, ഭാഗത്തെ അകലം Δy ഉം ഉയരം $f(y)-g(y)$ ഉള്ള ലഘു തിരശ്ചീന ദീർഘചതുരങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നു. എല്ലാ $y\in[c,d]$ ക്കും $f(y)-g(y)\geq 0$ എന്നത് പ്രധാനമായും ശ്രദ്ധിക്കുക. മുൻപ് പറഞ്ഞതുപോലെ ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം എന്നത് തിരശ്ചീന ദീർഘചതുരങ്ങളുടെ തുകയുടെ പരിധിയാകുന്നു. അതിനാൽ നമുക്ക് $A=\int_c^d [f(y)-g(y)]dy$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 9.24

കുറിപ്പ്

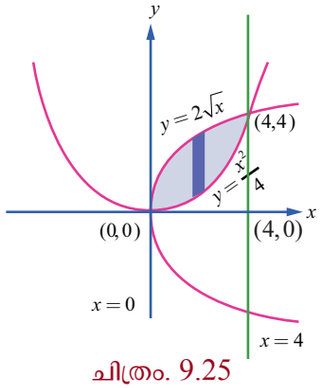
$x-$ അക്ഷത്തിന്റെ ധനദിശയിൽ നോക്കുമ്പോൾ, $x=f(y)$ എന്ന വക്രത്തെ വലതു വക്രം (R) എന്നും $x=f(y)$ എന്ന വക്രത്തെ ഇടതു വക്രം (L) എന്നും കുറിയ്ക്കുന്നു. അതായത് നമുക്ക് $A=\int_a^b [x_R - x_L]dy$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 9.54

സമവക്രങ്ങൾ $y^2=4x$, $x^2=4y$ എന്നിവയ്ക്കിടയിൽ നിലകൊള്ളുന്ന മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ആദ്യം നമുക്ക് സമവക്രങ്ങളുടെ പ്രതിഛേദ ബിന്ദുക്കളെ കണ്ടുപിടിക്കാം. അതിനായി $y^2=4x$ കൂടാതെ $x^2=4y$ എന്നീ സമീകരണങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം കണ്ടുപിടിക്കണം. രണ്ട് സമീകരണങ്ങളിൽ നിന്നും y നെ ഒഴിവാക്കിയാൽ $x^4=64x$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. അതിനാൽ $x=0$ കൂടാതെ $x=4$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. അതിനാൽ പ്രതിച്ഛേദബിന്ദുക്കൾ $(0,0)$ കൂടാതെ $(4,4)$ എന്നിവയാകുന്നു. ആവശ്യപ്പെട്ട ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം ചിത്രം 9.25-ൽ നിഴലിട്ടിരിക്കുന്നു.



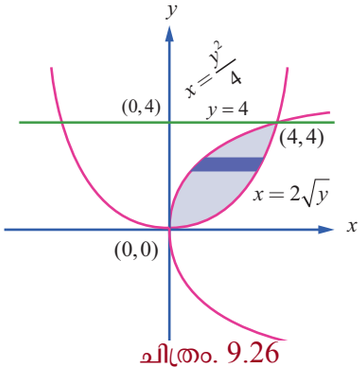
ചിത്രം. 9.25

y - അക്ഷത്തിന്റെ ദിശയിൽ നോക്കിയാൽ, മേൽ അതിർത്തിയുടെ സമീകരണം $y=2\sqrt{x}$, $0\leq x\leq 4$ ഉം കീഴ് അതിർത്തിയുടെ സമീകരണം $y=\frac{x^2}{4}$, $0\leq x\leq 4$ ആകുന്നു. അതിനാൽ ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം

$$A=\int_0^4 (y_U - Y_L)\,dx=\int_0^4\left(2\sqrt{x}-\frac{x^2}{4}\right)dx=\left[2\left(\frac{2x^{3/2}}{3}\right)-\frac{x^3}{12}\right]_0^4=\left[2\left(\frac{2\times 8}{3}\right)-\frac{64}{12}\right]-0=\frac{16}{3}$$ ആകുന്നു. ■

കുറിപ്പ്

x -അക്ഷത്തിന്റെ ധനദിശയിൽ നോക്കിയാൽ, വലത് അതിർത്തി വക്രം $x^2=4y$ ഉം ഇടത് അതിർത്തി വക്രം $y^2=4x$ ഉം ആകുന്നു. ചിത്രം 9.26 കാണുക. വലത്തേ അതിർത്തിയുടെ സമീകരണം $x=2\sqrt{y}$, $0\leq y\leq 4$ ഉം ഇടത്തേ അതിർത്തിയുടെ സമീകരണം $x=\frac{y^2}{4}$, $0\leq y\leq 4$ ഉം ആകുന്നു. അതിനാൽ ആവശ്യപ്പെട്ട സമീകരണം A എന്നത്.



ചിത്രം. 9.26

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 129 15-02-2023 15:15:10

$$A=\int_0^4 (x_R-x_L)\,dx=\int_0^4\left(2\sqrt{y}-\frac{y^2}{4}\right)dy=\left[2\left(\frac{2y^{3/2}}{3}\right)-\frac{y^3}{12}\right]_0^4=\left[2\left(\frac{2\times 8}{3}\right)-\frac{64}{12}\right]-0=\frac{16}{3}$$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 9.55

$x^2=y$ എന്ന സമവക്രത്തിനും $y=|x|$ എന്ന വക്രത്തിനും ഇടയിൽ നിലകൊള്ളുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

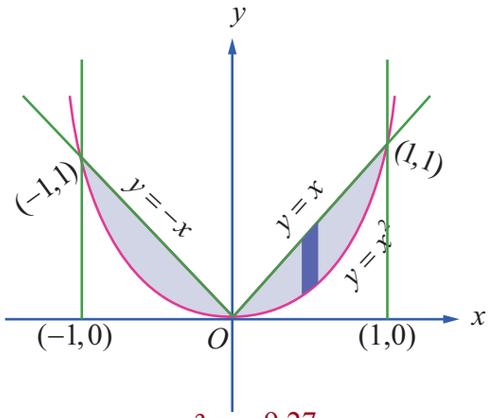
നിർദ്ധാരണം

രണ്ടു വക്രങ്ങളും y -അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് സദൃശ്യമാണ്.

വക്രം $y=|x|$ എന്നത് $y=\begin{cases}x & \text{if } x\geq 0\\ -x & \text{if } x\leq 0\end{cases}$ ആകുന്നു.

ഇത് സമവക്രം $x^2=y$ നെ $(1,1)$ കൂടാതെ $(-1,1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ പ്രതിഛേദിക്കുന്നു.

വക്രങ്ങൾ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന ഭാഗം ചിത്രം 9.27 ൽ നിഴലിട്ടിരിക്കുന്നു. ഇത് ആദ്യത്തെയും രണ്ടാമത്തെയും ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. പ്രതിസാമ്യതപ്രകാരം ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം ആദ്യത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ രണ്ട് മടങ്ങാകുന്നു.



ചിത്രം. 9.27

ആദ്യത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ, മേൽവക്രം $y=x, 0\leq x\leq 1$ ഉം കീഴ്വക്രം $y=x^2, 0\leq x\leq 1$ ഉം ആകുന്നു. അതിനാൽ ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം

$$A = 2\int_0^1 [y_U-y_L]\,dx=2\int_0^1[x-x^2]\,dx$$

$$=2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 9.56

സമവക്രങ്ങൾ $y=\cos x, y=\sin x$, രേഖകൾ $x=\frac{\pi}{4}$, $x=\frac{5\pi}{4}$ എന്നിവയ്ക്കിടയിൽ നിലകൊള്ളുന്ന മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

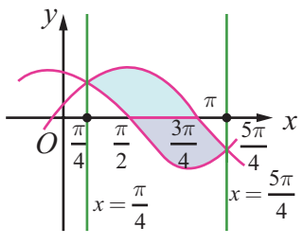
ആവശ്യപ്പെട്ട പ്രദേശം ചിത്രം 9.28 ൽ നിഴലിട്ട് കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. മേഖലയുടെ മേൽ അതിർത്തി $y=\sin x$, $\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{5\pi}{4}$ ഉം മേഖലയുടെ കീഴ് അതിർത്തി $y=\cos x$, $\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{5\pi}{4}$ ഉം ആകുന്നു. അതിനാൽ ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം A എന്നത്

$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}\left(y_U-y_L\right)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)dx=\left[-\cos x-\sin x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}$$

$$=\left(-\sin\frac{5\pi}{4}-\cos\frac{5\pi}{4}\right)-\left(-\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\left(-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)-\left(-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$ ആകുന്നു.



ചിത്രം. 9.28

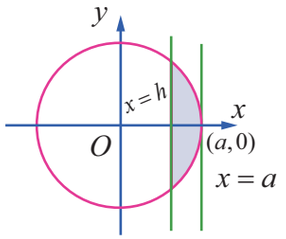
12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 130 15-02-2023 15:15:26

ഉദാഹരണം 9.57

$x^2 + y^2 = a^2$ എന്ന വൃത്തം പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന പ്രദേശത്തെ $x = h$ എന്ന രേഖ രണ്ട് ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്നുവെങ്കിൽ ചെറിയ ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ചെറിയ ഭാഗം ചിത്രം 9.29 ൽ നിഴലിട്ടിരിക്കുന്നു. ഇവിടെ $0 < h < a$ ആകുന്നു. x-അക്ഷത്തിന്റെ പ്രതിസാമ്യതപ്രകാരം, ചെറിയ വൃത്താംശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം



ചിത്രം. 9.29

$$A = 2\int_h^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 2\left[\frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_h^a$$

$$= 2\left[0 + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}(1)\right] - 2\left[\frac{h\sqrt{a^2 - h^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)\right]$$

$$= a^2\left(\frac{\pi}{2}\right) - h\sqrt{a^2 - h^2} - a^2\sin^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)$$

$$= a^2\left[\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\frac{h}{a}\right)\right] - h\sqrt{a^2 - h^2}$$

$$= a^2\cos^{-1}\left(\frac{h}{a}\right) - h\sqrt{a^2 - h^2} \text{ ആകുന്നു.}$$

ഉദാഹരണം 9.58

ആദ്യത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ സമവക്രം $y^2 = 4x$ രേഖ, $x + y = 3$ കൂടാതെ y-അക്ഷം എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

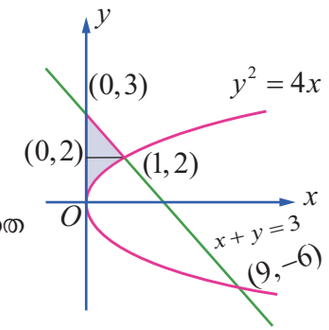
ആദ്യം നമുക്ക് $x + y = 3$ കൂടാതെ $y^2 - 4x$ എന്നിവയുടെ പ്രതിച്ഛേദ ബിന്ദുക്കൾ കണ്ടുപിടിക്കാം:

$x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x$.

$\therefore y^2 = 4x \Rightarrow (3 - x)^2 = 4x$

$\Rightarrow x^2 - 10x + 9 = 0$

$\Rightarrow x = 1, x = 9$.



ചിത്രം. 9.30

$\therefore x = 1$ നെ $x + y = 3$ ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ, $y = 2$ ആകുന്നു. കൂടാതെ $x = 9$ നെ $x + y = 3$ ൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $y = -6$ ആകുന്നു.

$\therefore$ പ്രതിച്ഛേദ ബിന്ദുക്കൾ $(1, 2)$ കൂടാതെ $(9, -6)$ എന്നിവയാകുന്നു.

$x + y = 3$ എന്ന രേഖ y-അക്ഷത്തെ $(0, 3)$ ൽ പ്രതിച്ഛേദിക്കുന്നു.

ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം ചിത്രം 9.30 ൽ നിഴലിട്ടിരിക്കുന്നു.

y-അക്ഷത്തിന്റെ ദിശയിൽ നോക്കിയാൽ, വലത്തേ അതിർത്തി വക്രം

$$x = \begin{cases} \frac{y^2}{4}, & 0 \le y \le 2 \\ 3 - y, & 2 \le y \le 3 \end{cases}$$

$$\therefore A = \int_0^2 x\, dy + \int_2^3 x\, dy = \int_0^2 \frac{y^2}{4}\, dy + \int_2^3 (3 - y)\, dy$$

$$= \left(\frac{y^3}{12}\right)_0^2 + \left(3y - \frac{y^2}{2}\right)_2^3 = \left(\frac{8}{12} - 0\right) + \left(9 - \frac{9}{2}\right) - \left(6 - \frac{4}{2}\right) = \frac{7}{6} \text{ ആകുന്നു.}$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 131 15-02-2023 15:15:44

ഉദാഹരണം 9.59

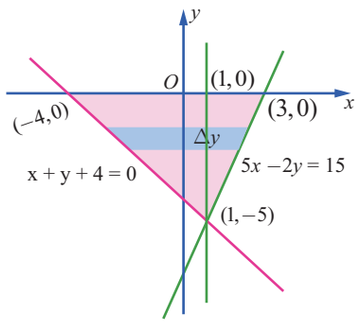
സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച് $5x-2y=15,\ x+y+4=0$ എന്നീ രേഖകൾ കൂടാതെ x-അക്ഷം എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$5x-2y=15,$ കൂടാതെ $x+y+4=0$ എന്നിവ $(1,-5)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ പ്രതിച്ഛേദിക്കുന്നു. രേഖ $5x-2y=15$, x-അക്ഷത്തെ $(3,0)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഛേദിക്കുന്നു. രേഖ $x+y+4=0$ x-അക്ഷത്തെ $(-4,0)$. എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഛേദിക്കുന്നു. ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം ചിത്രം 9.31 ൽ നിഴലിട്ടിരിക്കുന്നു. ഇത് x- അക്ഷത്തിന് താഴെ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. ഈ വിസ്തീർണ്ണത്തെ ലംബ ദീർഘചതുരങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ തിരശ്ചീന ദീർഘചതുരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്.

ലംബ ദീർഘചതുരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് വിസ്തീർണ്ണം കാണുന്നതിന് മേഖലയെ $x=1$ വഴി രണ്ട് ഉപഭാഗങ്ങളായി പിരിക്കണം. അതിനാൽ നമുക്ക്

$$
\begin{aligned}
A &= \left|\int_{-4}^{1} y\,dx\right| + \left|\int_{1}^{3} y\,dx\right| \\
&= \left|\int_{-4}^{1} (-4-x)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{3} \left(\frac{5x-15}{2}\right) dx\right| \\
&= \left|\left(-4x-\frac{x^2}{2}\right)_{-4}^{1}\right| + \left|\left(\frac{5x^2}{4}-\frac{15x}{2}\right)_{1}^{3}\right| \\
&= \left|\left(-\frac{9}{2}\right)-(8)\right| + \left|\left(-\frac{45}{4}\right)-\left(-\frac{25}{4}\right)\right| \\
&= \frac{25}{2}+5 \\
&= \frac{35}{2} \text{ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.}
\end{aligned}
$$



ചിത്രം. 9.31

തിരശ്ചീന ദീർഘചതുരങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ മേഖലയെ വിഭജിക്കേണ്ട ആവശ്യം ഇല്ല. ഈ നിലയിൽ വിസ്തീർണ്ണം വലത് $5x-2y=15$ എന്ന രേഖയ്ക്കും ഇടത് $x+y+4=0$ എന്ന രേഖയ്ക്കും ഇടയിൽ പരിമിതപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. അതിനാൽ നമുക്ക്

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{-5}^{0} [x_R - x_L]\,dy = \int_{-5}^{0} \left[\frac{15+2y}{5} - (-4-y)\right] dy \\
&= \int_{-5}^{0} \left[7+\frac{7y}{5}\right] dy = \left[7y+\frac{7y^2}{10}\right]_{-5}^{0} \\
&= 0-\left[-35+\frac{35}{2}\right] = \frac{35}{2} \text{ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.}
\end{aligned}
$$

■

കുറിപ്പ്

ത്രികോണ രൂപത്തിലുള്ള മേഖലയുടെ ആധാരം 7 മാത്രകളും ഉയരം 5 മാത്രകളും ആണ്. അതിനാൽ സമാകലനം ഉപയോഗിക്കാതെ നമുക്ക് വിസ്തീർണ്ണം $\frac{35}{2}$ എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം 9.60

$(-1,1),\ (3,2),\ (0,5)$ എന്നിവ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ A, B, കൂടാതെ C എങ്കിൽ ത്രികോണം ABC, പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച് കാണുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 132 15-02-2023 15:16:00

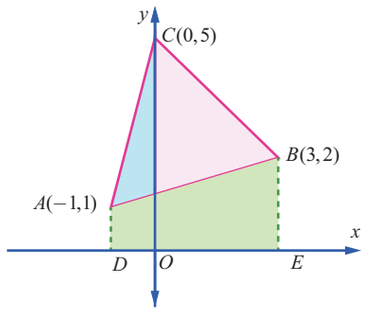
നിർദ്ധാരണം

ചിത്രം 9.32 കാണുക.

AB യുടെ സമീകരണം $\frac{y-1}{2-1}=\frac{x+1}{3+1}$ അല്ലെങ്കിൽ $y=\frac{1}{4}(x+5)$

BC യുടെ സമീകരണം $\frac{y-5}{2-5}=\frac{x-0}{3-0}$ അല്ലെങ്കിൽ $y=-x+5$

AC യുടെ സമീകരണം $\frac{y-1}{5-1}=\frac{x+1}{0+1}$ അല്ലെങ്കിൽ $y=4x+5$



ചിത്രം. 9.32

$\therefore$ ΔABC യുടെ സമീകരണം = $DACO$ യുടെ സമീകരണം + $OCBE$ യുടെ സമീകരണം − $DABE$ യുടെ സമീകരണം

$$= \int_{-1}^{0}(4x+5)\,dx+\int_{0}^{3}(-x+5)\,dx-\frac{1}{4}\int_{-1}^{3}(x+5)\,dx$$

$$= \left[\frac{4x^2}{2}+5x\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^2}{2}+5x\right]_{0}^{3}-\frac{1}{4}\left[\frac{x^2}{2}+5x\right]_{-1}^{3}$$

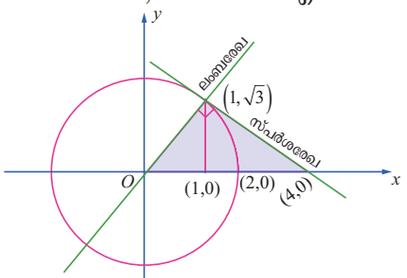
$$= 0-(+2-5)+\left(-\frac{9}{2}+15\right)-0-\frac{1}{4}\left[\frac{9}{2}+15\right]+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}-5\right]=\frac{15}{2}$$

ഉദാഹരണം 9.61

$x^2+y^2=4$ എന്ന വൃത്തത്തിൽ $\left(1,\sqrt{3}\right)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ x-അക്ഷം, സ്പർശരേഖ, ലംബരേഖ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$x^2+y^2=a^2$ എന്ന വൃത്തത്തിന് (x_1,y_1) എന്ന ബിന്ദുവൽ സ്പർശരേഖയുടെ സമീകരണം $xx_1+yy_1=a^2$ ആണെന്നത് നമുക്ക് ഓർമ്മിയ്ക്കാം. അതിനാൽ $x^2+y^2=4$ എന്ന വൃത്തത്തിൽ $\left(1,\sqrt{3}\right)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്ന സ്പർശരേഖയുടെ സമീകരണം $x+y\sqrt{3}=4$ ആകുന്നു. അതായത് $y=-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)$ സ്പർശരേഖ x-അക്ഷത്തെ $(4,0)$ ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്നു. സ്പർശരേഖയുടെ ചായ്‌വ് $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ ആകുന്നു. ലംബരേഖയുടെ ചായ്‌വ് $\sqrt{3}$ ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് ലംബരേഖയുടെ സമീകരണം $y-\sqrt{3}=\sqrt{3}(x-1)$ ആകുന്നു. അതായത് $y=\sqrt{3}x$ മൂലബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്നു. വിസ്തീർണ്ണം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനുള്ള ഭാഗം അടുത്ത് കാണുന്ന ചിത്രത്തിൽ നിഴലിട്ടിരിക്കുന്നു. ഇത് നമുക്ക് രണ്ട് രീതിയിൽ കണ്ടുപിടിക്കാം.



ചിത്രം. 9.33

രീതി 1

y-അക്ഷത്തിന്റെ ധനദിശയിൽ നോക്കിയാൽ, ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം x-അക്ഷം $y=\sqrt{3}x$ കൂടാതെ $x+y\sqrt{3}=4$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തുന്ന മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം ആകുന്നു. ഇത് $\int_a^b y\,dx$ എന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാം. ഇതിനായി നാം ആ മേഖലയെ രണ്ട് ഉപ ഭാഗങ്ങളായി, ഒന്ന് x-അക്ഷം, ലംബരേഖ $x=1$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയ ഭാഗം, മറ്റൊന്ന് x-അക്ഷം $x+y\sqrt{3}=4$ കൂടാതെ രേഖ $x=1$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയ ഭാഗം എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് ഉപഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കാം $y=\sqrt{3}x$.

$$\therefore \text{ ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം } = \int_0^1 y\,dx+\int_1^4 y\,dx=\int_0^1 \sqrt{3}x\,dx+\int_1^4\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}(x-4)\right]dx$$

$$=\left[\sqrt{3}\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[-\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{2}-4x\right)\right]_1^4=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{8}{\sqrt{3}}-\frac{7}{2\sqrt{3}}=2\sqrt{3} \text{ ആകുന്നു.}$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 133 15-02-2023 15:16:18

രീതി 2

x-അക്ഷത്തിന്റെ ദിശയിൽ നോക്കിയാൽ ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം, $y=\sqrt{3}x$, $x+y\sqrt{3}=4$, $y=0$ കൂടാതെ $y=\sqrt{3}$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയ പ്രദേശത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം ആകുന്നു. ഇതിനെ നമുക്ക്

$\int_c^d (x_R - x_L)\,dy$ എന്ന സൂത്രം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാം

ഇവിടെ, $c=0$, $d=\sqrt{3}$, x_R എന്നത് സ്പർശരേഖ $x+y\sqrt{3}=4$ ന്റെ x-മൂല്യവും കൂടാതെ x_L എന്നത് ലംബരേഖ $y=\sqrt{3}x$ ന്റെ x-മൂല്യവും ആകുന്നു.

$$\therefore \text{ ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം } = \int_c^d (x_R - x_L)\,dy = \int_0^{\sqrt{3}} \left(\left(4 - y\sqrt{3}\right) - \frac{y}{\sqrt{3}} \right) dy$$

$$= \left[\left(4y - \frac{y^2}{2}\sqrt{3} \right) - \frac{y^2}{2\sqrt{3}} \right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 4\sqrt{3} - \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \text{ ആകുന്നു.}$$

$y=f_1(x), y=f_2(x)$, കൂടാതെ രേഖകൾ $x=a$, $x=b$, ഇവിടെ $a<b$ എന്നിവയാൽ പരിമിതപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുന്നിനുള്ള പ്രവർത്തന നിയമം :

y-അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായി ഭാഗത്തിന്റെ തലത്തെ ഛേദിക്കുന്ന രീതിയിൽ ഒരു ഏകപക്ഷീയ രേഖ വരയ്ക്കുക. ആദ്യം മേഖലയ്ക്കുള്ളിൽ പ്രവേശിക്കുന്ന രേഖയുടെ y-നിർദ്ദേശാങ്കം കാണുക. ഇതിനെ y_{ENTRY} എന്ന് വിളിക്കാം. ശേഷം മേഖലയുടെ വെളിയിലേക്ക് പോകുന്ന രേഖയുടെ y-നിർദ്ദേശാങ്കം കാണുക. ഇതിനെ y_{EXIT} എന്ന് വിളിക്കാം. അതിർത്തി വക്രങ്ങളുടെ സമീകരണങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് y_{ENTRY} കൂടാതെ y_{EXIT} കാണാൻ സാധിക്കും. അതിനാൽ ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം $\int_a^b [y_{EXIT} - y_{ENTRY}]\,dx$ ആകുന്നു.

$x=g_1(y), x=g_2(y)$, രേഖകൾ $y=c$ കൂടാതെ $y=d$, ഇവിടെ $c<d$ എന്നിവയാൽ പരിമിതപ്പെടുത്തപ്പെട്ട ഭാഗത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുന്നതിനുള്ള പ്രവർത്തന നിയമം:

ഭാഗത്തിന്റെ തലത്തെ ഛേദിക്കുന്ന രീതിയിൽ x-അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായി ഒരു ഏകപക്ഷീയ രേഖ വരയ്ക്കുക. ആദ്യം, രേഖ മേഖലയ്ക്കുള്ളിലേക്ക് പ്രവേശിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ x-നിർദ്ദേശാങ്കം കാണുക. ഇതിനെ x_{ENTRY} എന്ന് വിളിക്കാം.

ശേഷം രേഖ മേഖലയ്ക്ക് വെളിയിലേക്ക് പ്രവേശിക്കുന്ന ബിന്ദുവിന്റെ x-നിർദ്ദേശാങ്കം കാണുക. ഇതിനെ x_{EXIT} എന്ന് വിളിക്കാം. അതിനാൽ ആവശ്യപ്പെട്ട വിസ്തീർണ്ണം $\int_c^d [x_{EXIT} - x_{ENTRY}]\,dy$ ആകുന്നു.

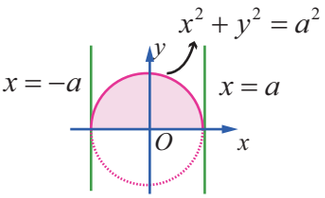
അഭ്യാസം 9.8

1. $3x-2y+6=0$, $x=-3$, $x=1$ കൂടാതെ x-അക്ഷം എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തുന്ന മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.
2. $2x-y+1=0$, $y=-1$, $y=3$ കൂടാതെ y-അക്ഷം എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയ മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.
3. വക്രം $2+x-x^2+y=0$, x-അക്ഷം, $x=-3$ കൂടാതെ $x=3$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയ മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.
4. രേഖ $y=2x+5$ കൂടാതെ സമവക്രം $y=x^2-2x$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയ മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.
5. $y=\sin x$ കൂടാതെ $y=\cos x$ എന്നീ വക്രങ്ങൾ കൂടാതെ $x=0$, $x=\pi$ എന്നീ രേഖകൾ എന്നിവയ്ക്കിടയിൽ നിലകൊള്ളുന്ന മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.
6. $y=\tan x$, $y=\cot x$ കൂടാതെ രേഖകൾ $x=0$, $x=\frac{\pi}{2}$, $y=0$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയ മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.
7. സമവക്രം $y^2=x$ കൂടാതെ രേഖ $y=x-2$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയ മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 134 15-02-2023 15:16:37

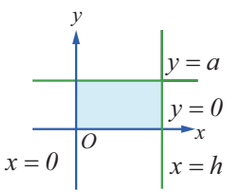
8. ഒരു കുടുംബനാഥൻ $x=0$, $x=4$, $y=4$ കൂടാതെ $y=0$ എന്നിവയാൽ പരിമിതപ്പെടുത്തപ്പെട്ട തന്റെ ചതുര നിലത്തെ $y^2=4x$ കൂടാതെ $x^2=4y$ എന്നീ വക്രങ്ങൾ വഴി തന്റെ ഭാര്യ, മകൾ, മകൻ എന്നിവർക്ക് മൂന്ന് തുല്യ ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിച്ച് നൽകാൻ ആഗ്രഹിച്ചു. ഇങ്ങനെ വിഭജിക്കാൻ സാധിക്കുമോ? സാധിക്കുമെങ്കിൽ ഓരോരുത്തർക്കും ലഭിക്കുന്ന നിലത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.
9. $y=(x-2)^2+1$ എന്ന വക്രത്തിലെ ഒരു കുറഞ്ഞ ബിന്ദു ആണ്. PQ വിന്റെ ചായ്‌വ് 2 വരത്തക്കവിധം വക്രത്തിലുള്ള ഒരു ബിന്ദു ആണ് Q എങ്കിൽ വക്രവും ഞാൺ PQ വും പരിമിതപ്പെടുത്തിയ മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.
10. $x^2+y^2=16$ എന്ന വൃത്തത്തിനും $y^2=6x$ എന്ന സമവക്രത്തിനും പൊതുവായ മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

9.9 ഒരു അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് വിസ്തീർണ്ണത്തെ ചുഴറ്റുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക



ചിത്രം. 9.34

ഒരു നിശ്ചിത അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുഴറ്റുമ്പോൾ രൂപപ്പെടുന്ന ഘനരൂപങ്ങളുടെ വ്യാപ്തം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് നിർവചനീയ സമാകലങ്ങളുടെ പ്രയോഗങ്ങൾ ഉപയോഗപ്രദമാണ്. ഒരു നിശ്ചിത അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുഴറ്റുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഘനരൂപം എന്നത് തന്നിട്ടുള്ള തലത്തിൽ ഉള്ള പ്രതലത്തെ ഒരു നിശ്ചിത അക്ഷത്തിനനുസരിച്ച് തലത്തിൽ പൂർണ്ണമായി ചുഴറ്റുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഘനരൂപം എന്നാണ് ഞങ്ങൾ അർത്ഥമാക്കുന്നത്. ഉദാഹരണമായി x-അക്ഷത്തിന് മുകളിൽ $x^2+y^2=a^2$ എന്ന വൃത്തത്തിനുള്ളിൽ രൂപപ്പെടുന്ന അർദ്ധവൃത്ത പ്രതല ഭാഗത്തെ പരിഗണിയ്ക്കാം. ചിത്രം 9.34 കാണുക.



ചിത്രം. 9.35

x-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ഈ ഭാഗത്തെ ഒരു പൂർണ്ണ ചുഴറ്റലിന് വിധേയമാക്കിയാൽ ($360°$ ക്കുള്ള ചുഴറ്റൽ 2π റേഡിയൻസ് ആകുന്നു) രൂപപ്പെടുന്ന ഘനരൂപം ഗോളം ആകുന്നു.

അതുപോലെ ആരം a യും ഉയരം h ഉം ഉള്ള ഒരു സമവൃത്താകാര സിലിണ്ടർ രൂപീകരിക്കുന്നതിന് xy-തലത്തിൽ നേർരേഖകൾ $y=0$, $y=a$, $x=0$ കൂടാതെ $x=h$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയ ദീർഘചതുര മേഖല പരിഗണിക്കാം. ചിത്രം 9.35 കാണുക. ഈ ഭാഗത്തെ x-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ഒരു പൂർണ്ണ ചുഴറ്റലിന് വിധേയമാക്കിയാൽ $360°$ യ്ക്കുള്ള ചുഴറ്റൽ 2π റേഡിയൻസ് ആകുന്നു) സിലിണ്ടർ എന്ന ഘനരൂപം രൂപപ്പെടുന്നു.

ചുഴറ്റലിന്റെ ഭാഗമായി ലഭിക്കുന്ന ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം x-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് അല്ലെങ്കിൽ y-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് മാത്രം ഈ പാഠഭാഗത്തിൽ കണ്ടറിയുന്നു. x-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുഴറ്റുമ്പോൾ രൂപപ്പെടുന്ന ഘനരൂപത്തെ പരിഗണിക്കുമ്പോഴെല്ലാം x-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് കറങ്ങുന്ന പ്രതലഭാഗം x-അക്ഷത്തിന് മുകളിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. അതിനാൽ ഈ ഭാഗത്ത് $y\geq 0$ ആകുന്നു. y-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുഴറ്റുമ്പോൾ രൂപപ്പെടുന്ന ഘനരൂപത്തെ പരിഗണിക്കുമ്പോഴെല്ലാം y- അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് കറങ്ങുന്ന പ്രതലഭാഗം y-അക്ഷത്തിന്റെ വലത് വശത്ത് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. അതിനാൽ ഈ ഭാഗത്ത് $x\geq 0$ ആകുന്നു. വക്രം $y=f(x)$, x-അക്ഷം, രേഖകൾ $x=a$ കൂടാതെ $x=b>a$ എന്നിവയാൽ പരിമിതപ്പെടുത്തപ്പെട്ട് x-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുഴറ്റുമ്പോൾ ആദ്യത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ ഏർപ്പെടുന്ന ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുന്ന സൂത്രം നമുക്ക് കണ്ടുപിടിക്കാം.

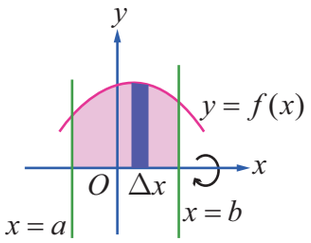
ആരം r ഉം ഉയരം h ഉം ഉള്ള ഒരു സിലിണ്ടറിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള വ്യാപ്തസൂത്രം $\pi r^2 h$ ആകുന്നു.

$x=a$ കൂടാതെ $x=b>a$ എന്നീ രണ്ട് രേഖകൾക്കിടയിൽ y-അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായ ഓരോ രേഖയും $y=f(x)$ എന്ന വക്രത്തെ ആദ്യത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ ഒരേ ഒരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രം ഛേദിക്കുന്നു എന്ന് പരിഗണിക്കുക. $[a,b]$ എന്ന ഇടവേളയെ $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$, $x_i-x_{i-1}=\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$, $i=1,2,\ldots,n$ എന്ന് വരത്തക്കവിധം n ഖണ്ഡങ്ങളായി $x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}$ എന്നിങ്ങനെ വിഭജിക്കാം.

ഓരോ $i=0,1,2,\ldots,n-1$ നും, x-അക്ഷത്തിനും $y=f(x)$ എന്ന വക്രത്തിനും ഇടയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്ന x_i, $x_i+\Delta x$ എന്നീ നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള xy-പ്രതലഭാഗം **ഏകദേശമായി** വിസ്തീർണ്ണം $y_i\Delta x$, ഇവിടെ $y_i=f(x_i)$ ഉള്ള അനന്തമായ ദീർഘചതുരങ്ങൾ കൊണ്ട് കണ്ടുപിടിക്കാം. $y=f(x)$, x-അക്ഷം $x=a$ കൂടാതെ

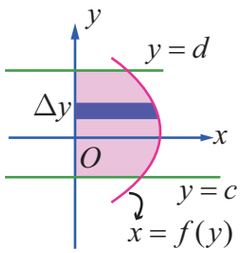
12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 135 15-02-2023 15:16:53

$x=b$ എന്നീ രേഖകൾ തുടങ്ങിയവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന പ്രതലഭാഗത്തെ x-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് $360°$ യിൽ ചുഴറ്റുമ്പോൾ $x=x_i$ യിൽ ഉള്ള അനന്തമായ ദീർഘചതുരങ്ങളും അതിനൊപ്പം ചുഴറ്റപ്പെട്ട് **ഏകദേശം** y_i ആരവും Δx ഉയരവും ഉള്ള നേർത്ത സിലിണ്ടറാകൃതിയിലുള്ള ഡിസ്ക് രൂപത്തിലുള്ള ഘന രൂപങ്ങൾ രൂപപ്പെടുന്നു. ചിത്രം 9.36 കാണുക. $x=x_i$ ൽ ഡിസ്കിന്റെ വ്യാപ്തം $\pi y_i^2\Delta x$, $i=0,1,2,...,n-1$ ആകുന്നു. എല്ലാ ലഘു വ്യാപ്തങ്ങളെയും കൂട്ടുമ്പോൾ നമുക്ക് ചുഴറ്റലിൽ ലഭിക്കുന്ന ഘനരൂപത്തിന്റെ ഏകദേശ വ്യാപ്തം $\sum_{i=0}^{n-1}\pi y_i^2\Delta x$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു. Δx ചെറുതാകുംതോറും $(\Delta x\to 0)$ n വലുതായി മാറുന്നു $(n\to\infty)$ ഇനി $\sum_{i=0}^{n-1}\pi y_i^2\Delta x$ എന്നത് ചുഴറ്റലിൽ ലഭിക്കുന്ന ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തത്തിലേയ്ക്ക് നീങ്ങുന്നു. അതിനാൽ ചുഴറ്റലിൽ ലഭിക്കുന്ന ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $\pi\int_a^b y^2dx$ ആകുന്നു n.



ചിത്രം. 9.36

അതുപോലെ നമുക്ക് വക്രം $x=f(y)$, y-അക്ഷം, $y=c$, $y=d$ എന്നീ രേഖകൾ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയ മേഖലയെ y-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുഴറ്റുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുന്നതിനുള്ള സൂത്രം കണ്ടുപിടിക്കാം. $y=c$ കൂടാതെ $y=d>c$ എന്നീ രേഖകൾക്കിടയിൽ വക്രം $x=f(y)$ y-അക്ഷത്തിന് വലത് വശത്ത് സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. $y=c$, $y=d>c$ എന്നീ രേഖകൾക്കിടയിൽ x-അക്ഷത്തിന് സമാന്തരമായിരിക്കുന്ന ഓരോ രേഖയും $x=f(y)$ എന്ന വക്രത്തെ ആദ്യത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ ഒരേയൊരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രം ഛേദിക്കുന്നു. ചിത്രം 9.37 കാണുക. അതിനാൽ ചുഴറ്റലിൽ ലഭിക്കുന്ന ഘന രൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $\pi\int_c^d x^2dy$ ആകുന്നു.



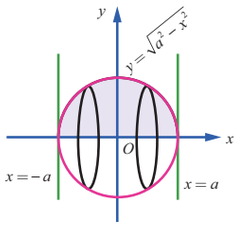
ചിത്രം. 9.37

ഉദാഹരണം 9.62

ആരം a ഉള്ള ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

വൃത്തം $x^2+y^2=a^2$ നും x-അക്ഷത്തിനും ഇടയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന മേൽ അർദ്ധവൃത്താകാര മേഖലയെ ചുഴറ്റുമ്പോൾ നമുക്ക് ആരം a ഉള്ള ഒരു ഗോളം ലഭിക്കുന്നു. ചിത്രം 9.38 കാണുക.



ചിത്രം. 9.38

മേഖലയുടെ അതിർത്തികൾ $y=\sqrt{a^2-x^2}$, x-അക്ഷം, $x=-a$, $x=a$. എന്നീ രേഖകൾ എന്നിവയാകുന്നു. അതിനാൽ ഗോളത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $V=\pi\int_{-a}^{a}y^2dx=\pi\int_{-a}^{a}\left(a^2-x^2\right)dx$

$=2\pi\int_0^a\left(a^2-x^2\right)dx$, സമാകല്യം $\left(a^2-x^2\right)$ ഒരു ഇരട്ടഫലനം ആയതിനാൽ.

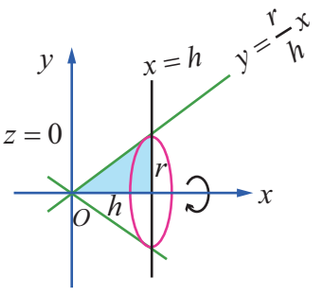
$=2\pi\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)_0^a=2\pi\left(a^3-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{4}{3}\pi a^3$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 9.63

ആധാരവ്യാസാർദ്ധം r ഉം ഉയരം h ഉം ഉള്ള ഒരു സമവൃത്താകാര വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ആദ്യത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിലെ രേഖ $y=\frac{r}{h}x$, x-അക്ഷം, രേഖകൾ $x=0$, $x=h$. എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന ത്രികോണ ഭാഗത്തെ പരിഗണിക്കുക. ചിത്രം 9.39 കാണുക. ഈ ഭാഗത്തെ x-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുറ്റുമ്പോൾ നമുക്ക് ആധാര വ്യാസാർദ്ധം r ഉം ഉയരം h ഉം ഉള്ള ഒരു വൃത്തസ്തൂപിക ലഭിക്കുന്നു. അതിനാൽ വൃത്തസ്തൂപികയുടെ വ്യാപ്തം



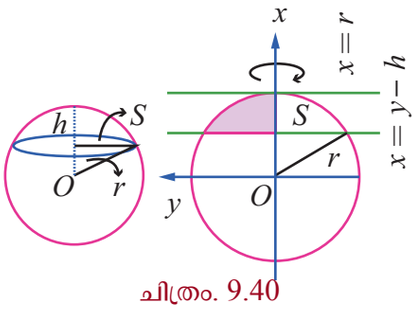
ചിത്രം. 9.39

$$V=\pi\int_0^h y^2dx=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx=\pi\left(\frac{r}{h}\right)^2\int_0^h x^2dx=\pi\left(\frac{r}{h}\right)^2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^h=\frac{\pi r^2h}{3}$$ ആകുന്നു

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 136 15-02-2023 15:17:09

ഉദാഹരണം 9.64

ആരം r ഉള്ള ഒരു ഗോളത്തിൽ നിന്നും വെട്ടിയെടുത്ത ഉയരം h ഉള്ള ഒരു ഗോളീയ മകുടത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.



ചിത്രം. 9.40

നിർദ്ധാരണം

ആദ്യത്തെ ചതുർത്ഥാംശത്തിൽ ഉള്ള വൃത്തം $x^2+y^2=r^2$, x-അക്ഷം, $x=r-h$, $x=r$ എന്നീ രേഖകൾ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയ പ്രതലത്തെ x-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുഴറ്റുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഘന രൂപം ആരം r ഉള്ള ഗോളത്തിൽ നിന്ന് വെട്ടിയെടുക്കപ്പെട്ട ഉയരം h ഉള്ള ഗോളീയ മകുടം ആകുന്നു. ചിത്രം 9.40 കാണുക.

$$V = \pi\int_{r-h}^{r} y^2dx = \pi\int_{r-h}^{r}\left(r^2-x^2\right)dx = \pi\left(r^2x-\frac{x^3}{3}\right)_{r-h}^{r}$$

$$= \pi\left(r^2\left(r-\left(r-h\right)\right)-\frac{\left(r^3-\left(r-h\right)^3\right)}{3}\right) = \pi\left(r^2h-\frac{\left(r^3-\left(r^3-3r^2h+3rh^2-h^3\right)\right)}{3}\right)$$

$$= \pi\left(\frac{3rh^2-h^3}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi h^2\left(3r-h\right) \text{ ആകുന്നു.}$$

കുറിപ്പ്

മുകളിലത്തെ വ്യാപ്തത്തെ മകുടത്തിന്റെ വ്യാസാർദ്ധം ഉപയോഗിച്ചും എഴുതാം.

മകുടത്തിന്റെ ആരം ρ ആണെങ്കിൽ $\rho^2+\left(r-h\right)^2=r^2$ ആകുന്നു.

അതിനാൽ $r=\dfrac{\rho^2+h^2}{2h}$ ആകുന്നു. r നെ ഒഴിവാക്കിയാൽ നമുക്ക്

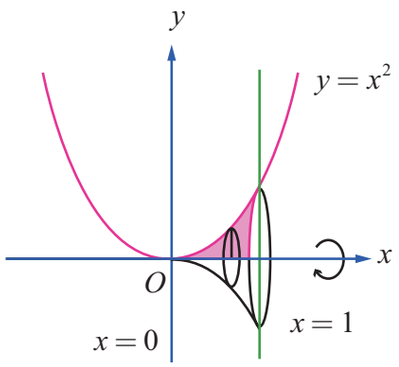
$V=\dfrac{1}{3}\pi h^2\left[3\left(\dfrac{\rho^2+h^2}{2h}\right)-h\right]=\dfrac{1}{3}\pi h\left[\left(\dfrac{3\rho^2+h^2}{2}\right)\right]=\dfrac{1}{6}\pi h\left(3\rho^2+h^2\right)$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 9.65

സമവക്രം $y=x^2$, x-അക്ഷം, നിർദ്ദേശാങ്കങ്ങൾ $x=0$ കൂടാതെ $x=1$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയ മേഖലയെ x-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുഴറ്റുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

x-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുഴറ്റപ്പെടുന്ന മേഖല ചിത്രം 9.41 ൽ നിഴലിട്ടിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 9.41

$$V = \pi\int_0^1 y^2dx$$

$$= \pi\int_0^1\left(x^2\right)^2dx$$

$$= \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$= \pi\left[\frac{1}{5}-0\right]=\frac{\pi}{5} \text{ ആകുന്നു.}$$

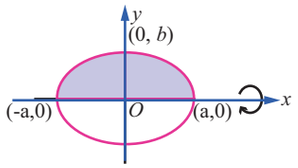
ഉദാഹരണം 9.66

ദീർഘവൃത്തം $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1, a>b$ നെ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന പ്രദേശത്തെ ദീർഘ അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുഴറ്റുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 137 15-02-2023 15:17:21

നിർദ്ധാരണം

ദീർഘവൃത്തം രണ്ട് അക്ഷങ്ങൾക്കും അനുസരിച്ച് പ്രതിസാമ്യമാണ്. ദീർഘാക്ഷം x-അക്ഷത്തിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു. ചുഴറ്റേണ്ട ഭാഗം ചിത്രം 9.42 ൽ നിഴലിട്ടിരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 9.42

അതിനാൽ ആവശ്യപ്പെട്ട വ്യാപ്തം

$$V = \pi\int_{-a}^{a} y^2\,dx = \pi\int_{-a}^{a} \frac{b^2}{a^2}\left(a^2 - x^2\right)dx$$

$$= \frac{2\pi b^2}{a^2}\int_0^a \left(a^2 - x^2\right)dx \text{ , സമാകല്യം ഇരട്ടഫലനം ആയതിനാൽ.}$$

$$= \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)_0^a = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{2\pi b^2}{a^2}\left(\frac{2a^3}{3}\right) = \frac{4\pi ab^2}{3}$$

കുറിപ്പ്

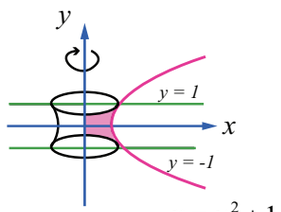
ദീർഘവൃത്തം $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന മേഖല y-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുഴറ്റിയാൽ ലഭിക്കുന്ന ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $\frac{4\pi a^2 b}{3}$. ആകുന്നു. ഈ ഘന രൂപത്തെ ദീർഘവൃത്താകാരം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 9.67

സമവാക്യം $x = y^2 + 1$, y-അക്ഷം രേഖകൾ $y = 1$ കൂടാതെ $y = -1$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയ മേഖലയെ y-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുഴറ്റുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

സമവക്രം $x = y^2 + 1$ എന്നത് $y^2 = x - 1$ ആകുന്നു. ഇത് x-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് പ്രതിസാമ്യവും ഇതിന്റെ ശീർഷം $(1,0)$ യും മധ്യസ്ഥാനം $\left(\frac{5}{4},0\right)$ ഉം ആണ്. ചുഴറ്റേണ്ട ഭാഗം ചിത്രം 9.43 ൽ നിഴലിട്ടിരിക്കുന്നു. അതിനാൽ ആവശ്യപ്പെട്ട വ്യാപ്തം



ചിത്രം. 9.43

$$V = \pi\int_{-1}^{1} x^2\,dy$$

$$= \pi\int_{-1}^{1} \left(y^2+1\right)^2\,dy$$

$$= 2\pi\int_0^1 \left(y^4 + 2y^2 + 1\right)dy \text{ , കാരണം സമാകല്യം ഒരു ഇരട്ട ഫലനമാണ്.}$$

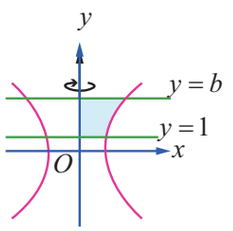
$$= 2\pi\left(\frac{y^5}{5} + 2\frac{y^3}{3} + y\right)_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{56}{15}\pi \text{ .}$$

ഉദാഹരണം 9.68

വക്രം $y = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16}$, $x \geq 4$, y-അക്ഷം, രേഖകൾ $y = 1$ കൂടാതെ $y = 6$ എന്നിവയ്ക്ക് ഇടയിൽ നില കൊള്ളുന്ന മേഖലയെ y-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുഴറ്റുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച് കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ശ്രദ്ധിക്കുക $y = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16} \Rightarrow \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. അതിനാൽ തന്നിട്ടുള്ള വക്രം $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ എന്ന അധിവക്രത്തിന്റെ ഒരു ഭാഗവും രേഖകൾ $y = 1$, $y = 6$ എന്നിവയ്ക്കിടയിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നതുമായ ഒരു മേഖലയാണ്. ഇത് x-അക്ഷത്തിന് മുകളിൽ സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നു.



ചിത്രം. 9.44

ചുഴറ്റേണ്ട ഭാഗം ചിത്രം 9.44 ൽ നിഴലിട്ടിരിക്കുന്നു.

ചുഴറ്റൽ y-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ആയതിനാൽ അധിവക്രത്തിന്റെ

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 138 15-02-2023 15:17:35

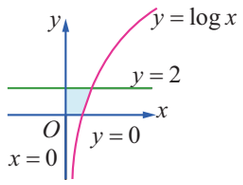
സമീകരണത്തെ നമുക്ക് $x=\frac{4}{3}\sqrt{9+y^2}$ എന്നെഴുതാം. അതിനാൽ ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$V = \pi\int_1^6 x^2dy = \pi\int_1^6\left(\frac{4}{3}\sqrt{9+y^2}\right)^2 dy = \pi\left(\frac{16}{9}\right)\int_1^6\left(9+y^2\right)dy \text{ ആകുന്നു.}$$

$$= \pi\left(\frac{16}{9}\right)\left(9y+\frac{y^3}{3}\right)_1^6 = \pi\left(\frac{16}{9}\right)\left[(54+72)-(9+\frac{1}{3})\right] = \frac{5600}{27}\pi$$

ഉദാഹരണം 9.69

വക്രം $y=\log x$, $y=0$, $x=0$ കൂടാതെ $y=2$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയ പ്രദേശത്തെ y-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുഴറ്റുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച് കാണുക.



ചിത്രം. 9.45

നിർദ്ധാരണം

ചുഴറ്റേണ്ട ഭാഗം ചിത്രം 9.45 ൽ നിഴലിട്ടിരിക്കുന്നു.

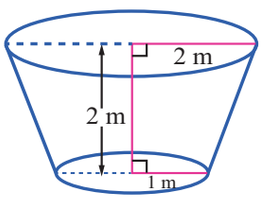
y-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുഴറ്റുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

$$V = \pi\int_0^2 x^2dy = \pi\int_0^2\left(e^y\right)^2 dy = \pi\int_0^2 e^{2y}dy$$

$$= \pi\left[\frac{e^{2y}}{2}\right]_0^2 = \frac{\pi}{2}\left(e^4-1\right) \text{ ആകുന്നു.}$$

അഭ്യാസം 9.9

1. $y=2x^2$, $y=0$ കൂടാതെ $x=1$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയ മേഖലയെ x-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുഴറ്റുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച് കാണുക.
2. സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച് $y=e^{-2x}$ $y=0$, $x=0$ കൂടാതെ $x=1$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയ പ്രദേശത്തെ x-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുഴറ്റുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക
3. സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച്, $x^2=1+y$ കൂടാതെ $y=3$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയ മേഖലയെ y-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുഴറ്റുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.
4. $y=x$ കൂടാതെ $y=x^2$ എന്നീ ഗ്രാഫുകൾ പരിമിതപ്പെടുത്തിയ മേഖല R എന്നിരിക്കട്ടെ, R നെ 360° യിൽ x-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുഴറ്റുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഘന രൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക.
5. സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച് ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന സമവൃത്താകാര വൃത്ത സ്തൂപീകാ പീഠത്തിന്റെ ആകൃതിയിലുള്ള പാത്രത്തിന്റെ വ്യാപ്തം കാണുക ചിത്രം. 9.46.



ചിത്രം. 9.46

6. ഒരു തണ്ണിമത്തൻ ദീർഘവൃത്താകാര രൂപത്തിൽ ആണ് ഉള്ളത്. ഇത് ദീർഘാക്ഷം 20 സെ.മീറ്ററും, ഹ്രസ്വാക്ഷം 10 സെ.മീ. ഉം ഉള്ള ഒരു ദീർഘവൃത്തത്തെ അതിന്റെ ദീർഘാക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുഴറ്റിയപ്പോൾ ആണ് ലഭിച്ചത്. എങ്കിൽ ഇതിന്റെ വ്യാപ്തം സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച് കാണുക.

അഭ്യാസം 9.10

തന്നിട്ടുള്ള നാല് ഉത്തരങ്ങളിൽ നിന്നും ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക:

1. $\int_0^{\frac{2}{3}}\frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$ ന്റെ മൂല്യം

(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\pi}{2}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) π

OZX86

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 139 15-02-2023 15:17:47

2. $\int_{-1}^{2}|x|\,dx$ ന്റെ മൂല്യം

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{5}{2}$ (4) $\frac{7}{2}$

3. ഓരോ $n\in\mathbb{Z}$, നും $\int_{0}^{\pi} e^{\cos^2 x}\cos^3\left[(2n+1)x\right]dx$ ന്റെ മൂല്യം

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) π (3) 0 (4) 2

4. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\cos x\,dx$ ന്റെ മൂല്യം

(1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) 0 (4) $\frac{2}{3}$

5. $\int_{-4}^{4}\left[\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{x^4+1}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x^4+1}{x^2}\right)\right]dx$ ന്റെ മൂല്യം

(1) π (2) 2π (3) 3π (4) 4π

6. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{2x^7-3x^5+7x^3-x+1}{\cos^2 x}\right)dx$ ന്റെ മൂല്യം

(1) 4 (2) 3 (3) 2 (4) 0

7. $f(x)=\int_{0}^{x} t\cos t\,dt$, എങ്കിൽ $\frac{df}{dx}=$

(1) $\cos x - x\sin x$ (2) $\sin x + x\cos x$ (3) $x\cos x$ (4) $x\sin x$

8. $y^2=4x$ നും അതിന്റെ ലാറ്റസ് റെക്ടത്തിനും ഇടയിലുള്ള വിസ്തീർണ്ണം

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{4}{3}$ (3) $\frac{8}{3}$ (4) $\frac{5}{3}$

9. $\int_{0}^{1} x(1-x)^{99}\,dx$ ന്റെ മൂല്യം

(1) $\frac{1}{11000}$ (2) $\frac{1}{10100}$ (3) $\frac{1}{10010}$ (4) $\frac{1}{10001}$

10. $\int_{0}^{\pi}\frac{dx}{1+5^{\cos x}}$ ന്റെ മൂല്യം

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) π (3) $\frac{3\pi}{2}$ (4) 2π

11. $\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n)}=90$ എങ്കിൽ n ന്റെ മൂല്യം

(1) 10 (2) 5 (3) 8 (4) 9

12. $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}\cos^3 3x\,dx$ ന്റെ മൂല്യം

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{2}{9}$ (3) $\frac{1}{9}$ (4) $\frac{1}{3}$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 140 15-02-2023 15:18:04

13. $\int_0^{\pi} \sin^4 x\, dx$ ന്റെ മൂല്യം

(1) $\frac{3\pi}{10}$ (2) $\frac{3\pi}{8}$ (3) $\frac{3\pi}{4}$ (4) $\frac{3\pi}{2}$

14. $\int_0^{\infty} e^{-3x} x^2 dx$ ന്റെ മൂല്യം

(1) $\frac{7}{27}$ (2) $\frac{5}{27}$ (3) $\frac{4}{27}$ (4) $\frac{2}{27}$

15. $\int_0^{a} \frac{1}{4+x^2}\, dx = \frac{\pi}{8}$ എങ്കിൽ a യുടെ മൂല്യം

(1) 4 (2) 1 (3) 3 (4) 2

16. $y^2 = x(a-x)$ പരിമിതപ്പെടുത്തിയ മേഖലയെ x-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുഴറ്റുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഘന രൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

(1) πa^3 (2) $\frac{\pi a^3}{4}$ (3) $\frac{\pi a^3}{5}$ (4) $\frac{\pi a^3}{6}$

17. $f(x) = \int_1^{x} \frac{e^{\sin u}}{u}\, du, x > 1$ കൂടാതെ

$\int_1^{3} \frac{e^{\sin x^2}}{x}\, dx = \frac{1}{2}[f(a) - f(1)]$, എങ്കിൽ a യുടെ സാധ്യമായ ഒരു മൂല്യം

(1) 3 (2) 6 (3) 9 (5)

18. $\int_0^{1} \left(\sin^{-1} x\right)^2\, dx$ ന്റെ മൂല്യം

(1) $\frac{\pi^2}{4} - 1$ (2) $\frac{\pi^2}{4} + 2$ (3) $\frac{\pi^2}{4} + 1$ (4) $\frac{\pi^2}{4} - 2$

19. $\int_0^{a} \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^3 dx$ ന്റെ മൂല്യം

(1) $\frac{\pi a^3}{16}$ (2) $\frac{3\pi a^4}{16}$ (3) $\frac{3\pi a^2}{8}$ (4) $\frac{3\pi a^4}{8}$

20. If $\int_0^{x} f(t)\, dt = x + \int_x^{1} t f(t)\, dt$, എങ്കിൽ $f(1)$ ന്റെ മൂല്യം

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 2 (3) 1 (4) $\frac{3}{4}$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 141 15-02-2023 15:18:18

സംഗ്രഹം

(1) നിർവചനീയ സമാകലനത്തെ ഒരു തുകയുടെ പരിധിയായി

(i) $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{r}{n}\right)$

(ii) $\int_0^1 f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{r=1}^{n} f\left(\frac{r}{n}\right).$

(2) നിർവചനീയ സമാകലനങ്ങളുടെ സവിശേഷതകൾ

(i) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du$

(ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(iii) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

(iv) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$

(v) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx$

(vi) $\int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a \left[f(x)+f(2a-x)\right]dx.$

(vii) $f(x)$ ഒരു ഇരട്ടഫലനം ആണെങ്കിൽ $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$ ആകുന്നു.

(ix) $f(x)$ ഒരു ഒറ്റ ഫലനം ആണെങ്കിൽ $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0.$ ആകുന്നു.

(x) $f(2a-x) = f(x),$ എങ്കിൽ $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$

(xi) $f(2a-x) = -f(x),$ എങ്കിൽ $\int_0^{2a} f(x)\,dx = 0$

(xii) $\int_0^a x\,f(x)\,dx = \frac{a}{2}\int_0^a f(x)\,dx$ എങ്കിൽ $f(a-x) = f(x)$

(3) ബെർണോളി സൂത്രം

$$\int uvdx = uv_{(1)} - u^{(1)}v_{(2)} + u^{(2)}v_{(3)} - u^{(3)}v_{(4)} + \cdots.$$

(4) ലഘൂകരണ സൂത്രങ്ങൾ

(i) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,dx = \begin{cases} \frac{(n-1)}{n}\times\frac{(n-3)}{(n-2)}\times\cdots\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}, & n=2,4,6,\cdots \\ \frac{(n-1)}{n}\times\frac{(n-3)}{(n-2)}\times\cdots\times\frac{2}{3}, & n=3,5,7,\cdots \end{cases}$

(ii) n ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യ കൂടാതെ m ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യ എങ്കിൽ,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,\cos^n x\,dx = \frac{(n-1)}{(m+n)}\frac{(n-3)}{(m+n-2)}\frac{(n-5)}{(m+n-4)}\cdots\frac{1}{(m+2)}\frac{(m-1)}{m}\frac{(m-3)}{(m-2)}\frac{(m-5)}{(m-4)}\cdots\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}$$

(iii) n ഒരു ഒറ്റ സംഖ്യ കൂടാതെ m ഒരു ധന പൂർണ്ണാങ്കം (ഒറ്റ അല്ലെങ്കിൽ ഇരട്ട) എങ്കിൽ,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\,\cos^n x\,dx = \frac{(n-1)}{(m+n)}\frac{(n-3)}{(m+n-2)}\frac{(n-5)}{(m+n-4)}\cdots\frac{2}{(m+3)}\frac{1}{(m+1)}.$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 142 15-02-2023 15:18:23

(5) ഗാമാ സൂത്രങ്ങൾ

(i) $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x}x^{n-1}dx = (n-1)!$ (ii) $\int_0^\infty e^{-ax}x^n dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$

(6) ഒരു വക്രവും കൂടാതെ രേഖകളും പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം

(i) ഒരു വക്രം, x-അക്ഷത്തിന് മുകളിൽ, രേഖകൾ $x=a$, $x=b$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയ മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം $A = \int_a^b ydx$ ആകുന്നു.

(ii) വക്രം, x-അക്ഷത്തിന് കീഴ്, രേഖകൾ $x=a$, $x=b$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടത്തിയ മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം $A = -\int_a^b ydx = \left|\int_a^b ydx\right|$ ആകുന്നു.

(iii) y-അക്ഷത്തിന്, വലതുവശത്തുള്ള വക്രം, രേഖകൾ $y=c$, $y=d$ എന്നിവയ്ക്കിടയിൽ നിലകൊള്ളുന്ന മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം $A = \int_c^d xdy$ ആകുന്നു.

(iv) y-അക്ഷത്തിന് ഇടത് ഭാഗത്തുള്ള വക്രം, രേഖകൾ $y=c$ കൂടാതെ $y=d$ എന്നിവ പരിമിതപ്പെടുത്തിയ മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം $A = -\int_c^d xdy = \left|\int_c^d xdy\right|$ ആകുന്നു.

(v) If $f(x) \geq g(x)$, എങ്കിൽ, വക്രങ്ങളും $x=a,\ x=b$ എന്നീ രേഖകളും പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം $A = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx = \int_a^b (y_U - y_L)\,dx$

(vi) $f(y) \geq g(y)$, എങ്കിൽ വക്രങ്ങളും $y=c,\ y=d$ എന്നീ രേഖകളും പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന മേഖലയുടെ വിസ്തീർണ്ണം $A = \int_c^d [f(y)-g(y)]dy = \int_c^d (x_R - x_L)\,dy$

(7) ചുഴറ്റലിൽ ലഭിക്കുന്ന ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം

(i) x-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുഴറ്റുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $V = \pi\int_a^b y^2dx$ ആകുന്നു.

(ii) y-അക്ഷത്തിന് അനുസരിച്ച് ചുഴറ്റുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ഘനരൂപത്തിന്റെ വ്യാപ്തം $V = \pi\int_c^d x^2dy$ ആകുന്നു.

ICT കോർണർ

https://ggbm.at/dy9kwgbt അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക

ബ്രൗസർ തുറക്കുക. തന്നിട്ടുള്ള URL ലിങ്ക് ടൈപ്പ് ചെയ്യുക അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക. "**12-ാം തരം ഗണിതം - വാല്യം-2**" എന്ന ജിയോജിബ്രയുടെ വർക്ക് ബുക്ക് ഓപ്പൺ ആകും. വർക്ക് ബുക്കിന്റെ ഇടത് വശത്ത് നിങ്ങളുടെ പുസ്തകത്തിലെ അധ്യായങ്ങൾ കാണാം. സമാകലനത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ "**ആപ്ലിക്കേഷൻസ് ഓഫ് ഇന്റഗ്രേഷൻ**" ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. ഇപ്പോൾ അധ്യായവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട നിരവധി വർക്ക് ബുക്ക് ഷീറ്റ് കാണാൻ സാധിക്കും. എല്ലാ വർക്ക് ഷീറ്റും ചെയ്ത് നോക്കുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 09 Malayalam.indd 143 15-02-2023 15:18:30

അധ്യായം
10
സാധാരണ അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ

"ഗണിതശാസ്ത്രമാണ് മനുഷ്യചൈതന്യത്തിന്റെ
ഏറ്റവും മനോഹരവും ശക്തവുമായ സൃഷ്ടി"

- സ്റ്റെഫാൻ ബനാച്ച്

10.1 ആമുഖം

പ്രചോദനവും ആദ്യകാല സംഭവ വികാസങ്ങളും

ചില യഥാർത്ഥ ജീവിത സാഹചര്യങ്ങൾ പരിശോധിച്ചാൽ

- പ്രൊജക്റ്റൈൽ ചലനം, റോക്കറ്റ്, ഉപഗ്രഹം, ഗ്രഹങ്ങൾ
- ഇലക്ട്രിക് സർക്യൂട്ടിലെ വൈദ്യുതധാര
- ഒരു വടിയിലോ സ്ലാബിലോ താപത്തിന്റെ ചാലകം
- ഒരു വയർ അല്ലെങ്കിൽ തുക്കിലുണ്ടാകുന്ന വൈബ്രേഷനുകൾ ഇവയിലെല്ലാം ഗണിതം നിർണ്ണയിക്കാം

അത്തരം പ്രശ്നങ്ങളുടെ ഗണിതശാസ്ത്ര സൂത്രവാക്യങ്ങൾ ചില ശാസ്ത്ര നിയമങ്ങൾക്ക് കീഴിലുള്ള ഡിഫറൻഷ്യൽ സമവാക്യമായിഉയർന്നുവരുന്നു.ഈ നിയമങ്ങളിൽമറ്റ്അളവുകളുമായിബന്ധപ്പെട്ട്ഒന്നോ അതിലധികമോ അളവുകളുടെ വിവിധ വ്യതിയാനങ്ങൾ (ഡെറിവേറ്റീവുകൾ) ഉൾപ്പെടുന്നു. അങ്ങനെ ശാസ്ത്രീയ നിയമങ്ങൾ, ഡെറിവേറ്റീവുകൾ ഉൾപ്പെടുന്ന ഗണിതസമവാക്യങ്ങളായി പ്രകടമാകുന്നു. അതായത് അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ.

ജ്യാമിതി, മെക്കാനിക്സ്, ഭൗതികശാസ്ത്രം, രസതന്ത്രം എഞ്ചിനീയറിംഗ് പഠനങ്ങൾ എന്നിവയിലെ പ്രശ്നങ്ങളിൽ നിന്ന് വ്യത്യസ്ത സമവാക്യങ്ങൾ രൂപപ്പെടുന്നു. ഞങ്ങളുടെ ആദ്യകാല ക്ലാസ്സുകളിൽ നിരക്കുകൾ സംബന്ധിച്ച് ഞങ്ങൾ പഠിച്ചു. ഇത് ഒരു തൽക്ഷണമാറ്റ നിരക്ക് എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. അതിനെ $\frac{dy}{dx}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

യഥാർത്ഥ ജീവിത സാഹചര്യങ്ങളിൽ സംഭവിക്കുന്ന മാറ്റത്തിന്റെ തോതും അജ്ഞാതമായ പ്രവർത്തനങ്ങളും തമ്മിലുള്ള ചില ബന്ധങ്ങൾ ഞങ്ങൾ ചുവടെ നൽകുന്നു.

(a) x നെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം y യുടെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് y യ്ക്ക് നേരിട്ട് ആനുപാതികമാണ്:

$$\frac{dy}{dx} = ky .$$

(b) x നെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം y യുടെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് y^2, x ന്റെ ഗുണനഫലത്തിന് നേരിട്ട് ആനുപാതികമാണ് :

$$\frac{dy}{dx} = ky^2x .$$

(c) x നെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം y യുടെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് y യ്ക്ക് വിപരീത അനുപാതത്തിലാണ്:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k}{y} .$$

(d) x നെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം y യുടെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് y^2 ന് നേരിട്ട് ആനുപാതികവും $\sqrt{x}$ ന് വിപരീത അനുപാതവുമായാൽ:

$$\frac{dy}{dx} = k\frac{y^2}{\sqrt{x}} .$$

ഒരു അവകലനസമവാക്യം അറിയപ്പെടാത്ത ഫലനത്തിന്റെ ചില അവകലജങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന ഒരു സമവാക്യമാണ്. പല സന്ദർഭങ്ങളിലും സ്വതന്ത്രമല്ലാത്ത ചരങ്ങൾ സമയോചിതമായിരിക്കും.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 144 15-02-2023 15:21:55

ഒരു യഥാർത്ഥ ജീവിത പ്രശ്നത്തിലേയ്ക്ക് ഗണിതശാസ്ത്ര രീതികൾ പ്രയോഗിക്കുന്നതിന്, നമ്മൾ ഗണിത ശാസ്ത്രപരമായ രീതിയിൽ പ്രശ്നങ്ങൾ രൂപപ്പെടുത്തണം. അതായത് പ്രശ്നത്തിന് ഒരു ഗണിതശാസ്ത്ര മാതൃക ഞങ്ങൾ നിർമ്മിക്കണം. പല ശാരീരിക പ്രശ്നങ്ങളും മാറുന്ന അളവുകൾ തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെ ബാധിക്കുന്നു. കാരണം മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് ഗണിത ശാസ്ത്രപരമായി അവകലജങ്ങളാൽ പ്രതിനിധീകരിക്കപ്പെടുന്നതിനാൽ ഗണിതശാസ്ത്ര മോഡലുകൾ പലപ്പോഴും ഒരു അജ്ഞാത പ്രവർത്തനവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട സമവാക്യങ്ങളും അതിന്റെ ഒന്നോ അതിലധികമോ അവകലജങ്ങളും ഉൾകൊള്ളുന്നു. അത്തരം സമവാക്യങ്ങൾ ഡിഫറൻഷ്യൽ സമവാക്യങ്ങളാണ്. അവ ശാസ്ത്രത്തിലും എഞ്ചിനീയറിംഗിലും അടിസ്ഥാന പ്രാധാന്യമുള്ളവയാണ് കാരണം പല ഭൗതിക നിയമങ്ങളും ബന്ധങ്ങളും അവകലന സമവാക്യങ്ങളുടെ രൂപത്തിലാണ്. അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ വളരെയധികം ഉപയോഗപ്രദമാണ്. ജനസംഖ്യാ വളർച്ചയോ റേഡിയോ ആക്റ്റീവ് ക്ഷയമോ ഉൾപ്പെടുന്ന ഗണിത ശാസ്ത്ര മോഡലുകൾ വിവരിക്കുന്നതിന്. അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ വളരെയധികം ഉപയോഗപ്രദമാണ്. ബയോളജിക്കൽ സയൻസുകളുടെയും സാമ്പത്തിക ശാസ്ത്രത്തിന്റെയും പഠനം അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ പ്രയോഗിക്കാതെ അപൂർണ്ണമാണ്.

ജോഹാൽ ബർനൌളി
(1667-1748)

ജ്യാമിതിയിലും ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിലുമുള്ള പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നതിനായി ന്യൂട്ടനും ലെബ്നിസും കാൽക്കുലസിനൊപ്പം അവകലന സമവാക്യങ്ങളുടെ വിഷയം കണ്ടുപിടിച്ചു. ന്യൂട്ടോണിയൻ ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിന്റെ വികാസത്തിൽ ബെർണൂലി കുടുംബവും യൂലറും, മറ്റുള്ളവരും നിർണ്ണായക പങ്ക് വഹിച്ചു. നമ്മുടെ ദൈനംദിന ജീവിതത്തിലെ അവകലന സമവാക്യങ്ങളുടെ ചില ആപ്ലിക്കേഷനുകൾ മൊബൈൽ ഫോണുകൾ, മോട്ടോർ കാറുകൾ, എയർ ഫൈറ്റുകൾ, കാലാവസ്ഥാ പ്രവചനം, ഇന്റർനെറ്റ്, ആരോഗ്യ പരിരക്ഷ അല്ലെങ്കിൽ മറ്റ് ദൈനംദിന പ്രവർത്തനങ്ങളിൽ കാണപ്പെടുന്നു.

പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

ഈ അധ്യായം പൂർത്തിയാകുമ്പോൾ വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക്

- അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ തരം തിരിക്കാനും
- അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ രൂപപ്പെടുത്തുന്നതിനും
- അവകലന സമവാക്യങ്ങളുടെ ക്രമവും, ഘാതവും കണ്ടെത്തുന്നതിനും
- ചരം വേർതിരിക്കൽ രീതി, ആരോപണ രീതി സമാകലന ഘടകം എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് അവകലന സമവാക്യങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുന്നതിനും
- യഥാർത്ഥ ജീവിത പ്രശ്നങ്ങളിൽ അവകലന സമവാക്യങ്ങളെ ഉപയോഗിക്കുന്നതിനും കഴിയും

10.2 അവകലനസമവാക്യം, ക്രമവും, ഘാതവും

നിർവ്വചനം 10.1

അവകലന സമവാക്യമെന്നത് അതിൽ ഒരു അജ്ഞാത ഫലനത്തിന്റെ ഒരു ഡെറിവേറ്റീവെങ്കിലും അടങ്ങിയിരിക്കുകയും സാധാരണ ഡെറിവേറ്റീവ് അല്ലെങ്കിൽ ഭാഗിക ഡെറിവേറ്റീവ് ആയിരിക്കുകയും ചെയ്യുന്ന ഒരു സമവാക്യമാണ്.

ഉദാഹരണത്തിന് $y = f(x)$ ആകുകയും y ഒരു ആശ്രിതചരവും (f ഒരു അജ്ഞാതഫലനം) x ഒരു സ്വതന്ത്രചരവും ആയിരിക്കും.

(1) സമവാക്യം $\frac{dy}{dx} = 0$ എന്നത് ഒരു അവകലന സമവാക്യം.

(2) സമവാക്യം $\frac{dy}{dx} = \sin x$ എന്നത് ഒരു അവകലന സമവാക്യം.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 145 15-02-2023 15:21:56

(3) സമവാക്യം $\frac{dy}{dx} + y = 7x + 5$ എന്നത് ഒരു അവകലന സമവാക്യം.

(4) സമവാക്യം $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = \sin x$ എന്നത് ഒരു അവകല സമവാക്യം.

(5) സമവാക്യം $e^{\frac{dy}{dx}} = \ln x, x > 0$ എന്നത് ഒരു അവകലന സമവാക്യം.

(6) സമവാക്യം $\tan^{-1}\left(\frac{d^2y}{dx^2} + y^2 + 2x\right) = \frac{dy}{dx}$ എന്നത് ഒരു അവകലന സമവാക്യം.

നിർവ്വചനം 10.2 (അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമം)

ഒരു അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ **ക്രമം** എന്നത് ആ അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ ഏറ്റവും ഉയർന്ന അവകലജങ്ങളാണ് (ഡെറിവേറ്റീവാണ്).

അതിനാൽ സമവാക്യത്തിലെ അജ്ഞാത ഫലനത്തിന്റെ ഏറ്റവും ഉയർന്ന അവകലനത്തിന്റെ ക്രമം k ഡെറിവേറ്റീവ് ആണെങ്കിൽ അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമം k ആണ് k എന്നത് ഒരു പോസിറ്റീവ് സംഖ്യയായിരിക്കണം.

ഉദാഹരണമായി, $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{\frac{2}{3}} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 4 = 0$ എന്നത് ക്രമം മൂന്ന് ആയ അവകലന സമവാക്യമാണ്.

നിർവ്വചനം 10.3 (അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ ഘാതം)

ഒരു അവകലന സമവാക്യം ഒരു പോളിനോമിയൽ രൂപത്തിൽ പ്രകടമാകുമെങ്കിൽ, അതിലെ പൂർണ്ണാങ്കമായ ഏറ്റവും ഉയർന്ന ഘാതത്തെ ആ സമവാക്യത്തിന്റെ **ഘാതം** എന്നു പറയാം.

(പോളിനോമിയൽ രൂപത്തിൽ പ്രകടിപ്പിച്ചതിനുശേഷം) ഇനിപ്പറയുന്ന വ്യവസ്ഥകൾ തൃപ്തിപ്പെടുന്ന തരത്തിലായിരിക്കണം :

(i) സമവാക്യത്തിലെ എല്ലാ അവകലജങ്ങളും ഭിന്നസംഖ്യകളുടെ ഘാതം ആകരുത്.

(ii) ഏറ്റവുംഉയർന്നഓർഡർഡെറിവേറ്റീവ്ഒരുട്രാൻസെൻഡെന്റിൽഫംഗ്ഷൻ,ത്രികോണമിതിഅല്ലെങ്കിൽ എക്സ്പൊണൻഷ്യൽ മുതലായവയുടെ വാദമായിരിക്കരുത്. ഏറ്റവും ഉയർന്ന ഓർഡർ ഡെറിവേറ്റീവ് അടങ്ങിയിരിക്കുന്ന ഏതൊരുപദത്തിന്റെയും ഗുണകം വെറും x, y, അല്ലെങ്കിൽ ചില ലോവർ ഓർഡർ ഡെറിവേറ്റീവ് ആയിരിക്കണം. പക്ഷെ ഡെറിവേറ്റീവുകളുടെ അതിന്ദ്രീയത്രികോണമിതി, എക്സ് പൊണൻഷ്യൽ ലോഗരിഥമിക് ഫംഗ്ഷൻ ആയിരിക്കരുത്.

മേൽപ്പറഞ്ഞ ഒന്നും രണ്ടും വ്യവസ്ഥകൾ അവകലനസമവാക്യത്തിൽ ശരിയാകണമെന്നില്ല. ഇതിനെ ആദ്യം പോളിനോമിയൽ രൂപത്തിൽ ചുരുക്കിയാൽ മുകളിൽപ്പറഞ്ഞ വ്യവസ്ഥകൾ തൃപ്തിപ്പെടുന്നതായിരിക്കും.

ഉയർന്ന ക്രമമുള്ള അവകലജം പോളിനോമിയൽ രൂപത്തിലുള്ള സമവാക്യത്തിന് യോജിക്കുന്നതല്ല ഇപ്രകാരം ഉയർന്ന ക്രമമുള്ള അവകലജം മുൻനിരപദമായാൽ അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ ഘാതം നിർവചിക്കപ്പെടുകയില്ല.

ഒരു പ്രത്യേക അവകലനസമവാക്യത്തിന്റെ ഘാതം നിർണ്ണയിക്കുന്നത് വളരെ സൂത്രമായുള്ള നിബന്ധനകൾ വ്യക്തമല്ല എന്ന് അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ അളവ് നിർവചിക്കപ്പെടുന്നു. അതിനാൽ ഈ ഉദാഹരണങ്ങൾ ശ്രദ്ധാപൂർവ്വം പരിശോധിച്ച് പൂർണ്ണമായ പരിശോധനയിലൂടെ അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ ഘാതം കണക്കാക്കുന്നതിനുള്ള സാങ്കേതികത പഠിക്കുക!

ഘാതം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനുള്ള ഉദാഹരണങ്ങൾ:

(1) $3y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - \frac{d^2y}{dx^2} = \sin x^2$ എന്ന അവകലന സമവാക്യം പരിഗണിക്കുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 146 15-02-2023 15:21:58

ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ ഏറ്റവും ഉയർന്ന ക്രമം 2 ആണ്. കൂടാതെ ഘാതം 1 ആണ്. അതായത് ഈ അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമം 2 ഉം ഘാതം 1 ഉം ആകുന്നു.

(2) അവകലന സമവാക്യം പരിഗണിക്കുക $\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = y\frac{d^3y}{dx^3}$.

ഈ സമവാക്യത്തിൽ ഭിന്നസംഖ്യകൾ ഉൾപ്പെട്ടിരിക്കുന്നതിനാൽ നമ്മൾ ആദ്യം അവയെ അതിൽ നിന്നും ഒഴിവാക്കണം. അതിനായി ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ വർഗ്ഗം കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്. അപ്പോൾ

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = y^2\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 .$$

അപ്പോൾ ഈ അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമം 3 എന്ന് വളരെ വ്യക്തമായി കിട്ടുന്നതാണ്. അതിനാൽ അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമം 3 ഉം അതിന്റെ ഘാതം 2 ഉം ആകുന്നു. ഡിഗ്രിയും 2 ആകുന്നു.

(3) അവകലന സമവാക്യം പരിഗണിക്കുക $\sin\left(\frac{dy}{dx}\right)+\frac{d^2y}{dx^2}+3x=0$.

ഇവിടെ അവകലജത്തിന്റെ ഉയർന്ന ക്രമം 2 ആകുന്നു. അത് അവകലജങ്ങളിലെ പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിലല്ല. അതിനാൽ ഘാതം നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല.

(4) $e^{\frac{d^2y}{dx^2}}+\sin(x)\frac{dy}{dx}=2$ സമവാക്യം പരിഗണിച്ചാൽ

ഇവിടെ ക്രമം 2 ആകുന്നു. ഇതിന്റെ $\frac{d^2y}{dx^2}$ പോളിനോമിയൽ സമവാക്യത്തിന്റെ മുൻനിരപദമായി കണക്കാക്കാനാവില്ല. അതിനാൽ ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമം 2 ആകുന്നു.

(5) കൂടാതെ ഇനിപ്പറയുന്ന അവകലന സമവാക്യങ്ങൾക്ക് ഡിഗ്രി ഇല്ല.

(i) $e^{\frac{dy}{dx}}+\frac{dy}{dx}=0$ (ii) $\log\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+\frac{dy}{dx}=0$ കൂടാതെ (iii) $\cos\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)+2\frac{d^2y}{dx^2}=0$.

(6) അവകലന സമവാക്യം $10(y''')^4+7(y'')^5+\sin(y')+5=0$ ന് ക്രമം 3 ആണെങ്കിലും ഘാതം നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല.

(7) അവകലന സമവാക്യം $\cos(y')y'''+5y''+7y'=\sin x$ ന് ക്രമം 3 ആണെങ്കിലും ഘാതം നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല.

കുറിപ്പ്

ഒരു അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ അളവ് ഒരു പോസിറ്റീവ് സംഖ്യയാണെന്ന് നിരീക്ഷിക്കുക.

ഉദാഹരണം 10.1

ഇനിപ്പറയുന്ന അവകലന സമവാക്യങ്ങളുടെ ക്രമവും ഘാതവും നിർണ്ണയിക്കുക:

(i) $\frac{dy}{dx}=x+y+5$ (ii) $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^3+4\left(\frac{dy}{dx}\right)^7+6y=5\cos 3x$

(iii) $\frac{d^2y}{dx^2}+3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=x^2\log\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ (iv) $3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\left[4+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$

(v) $dy+(xy-\cos x)dx=0$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 147 15-02-2023 15:22:01

ഉത്തരങ്ങൾ

(i) ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ ഏറ്റവും ഉയർന്ന ഡെറിവേറ്റീവ് ക്രമം $\frac{dy}{dx}$ ആയതിനാൽ ഇതിന്റെ പവർ 1 ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് ഈ അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമം 1 ഉം ഘാതം 1 ഉം ആകുന്നു.

(ii) ഇവിടെ ഏറ്റവും ഉയർന്ന ഡെറിവേറ്റീവ് ക്രമം $\frac{d^4y}{dx^4}$ ആണ് കൂടാതെ ഘാതം 3 ആകുന്നു.

അതുകൊണ്ട് ഈ അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമം 4 ഉം ഘാതം 3 ഉം ആകുന്നു.

(iii) ഈ അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ ഉയർന്ന ഡെറിവേറ്റീവ് ക്രമം $\frac{d^2y}{dx^2}$ ആകുന്നു. ഇതിന്റെ ഘാതം 1 ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് ഈ അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമം 2 ആകുന്നു.

തന്നിരിക്കുന്ന ഡിഫറൻഷ്യൽ സമവാക്യം അതിന്റെ ഡെറിവേറ്റീവുകളിലെ പോളിനോമിയൽ സമവാക്യമല്ല. അതിനാൽ ഘാതം നിർവചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല.

(iv) അവകലന സമവാക്യം $3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=\left[4+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$

രണ്ടു വശങ്ങളുടെയും വർഗ്ഗം എടുത്താൽ $9\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2=\left[4+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3$.

ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ ഏറ്റവും ഉയർന്ന ഡെറിവേറ്റീവ് ക്രമം $\frac{d^2y}{dx^2}$ ആകുകയും ഇതിന്റെ ഘാതം 2 ഉം ആണ്. അതുകൊണ്ട് ഈ അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമം 2 ഉം ഘാതം 2 ഉം ആകുന്നു.

(v) $dy+(xy-\cos x)dx=0$ എന്നത് ഡിഗ്രി 1, ഉം ആയ അവകലന സമവാക്യമാകുന്നു. അതിനാൽ ഈ സമവാക്യത്തെ ഇപ്രകാരം $\frac{dy}{dx}+xy-\cos x=0$ എന്നെഴുതാവുന്നതാകുന്നു.

അഭ്യാസം 10.1

1. ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഒരോ അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെയും, ക്രമം, ഘാതം എന്നിവ കാണുക (നിലവിലുണ്ടെങ്കിൽ)

(i) $\frac{dy}{dx}+xy=\cot x$

(ii) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^{\frac{2}{3}}-3\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+4=0$

(iii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=x\sin\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$

(iv) $\sqrt{\frac{dy}{dx}}-4\frac{dy}{dx}-7x=0$

(v) $y\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{x}{\left(\frac{dy}{dx}\right)+\left(\frac{dy}{dx}\right)^3}$

(vi) $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}=0$

(vii) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)}$

(viii) $\frac{d^2y}{dx^2}=xy+\cos\left(\frac{dy}{dx}\right)$

(ix) $\frac{d^2y}{dx^2}+5\frac{dy}{dx}+\int ydx=x^3$

(x) $x=e^{xy\left(\frac{dy}{dx}\right)}$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 148 15-02-2023 15:22:04

10.3 അവകലന സമവാക്യങ്ങളുടെ വർഗ്ഗീകരണം

നിർവ്വചനം 10.4: (സാധാരണ അവകലന സമവാക്യം)

ഒരൊറ്റ സ്വതന്ത്ര ചരത്തെ സംബന്ധിച്ച് ഒന്നോ അതിലധികമോ ഫലനങ്ങളുടെ സാധാരണ ഡെറിവേറ്റീവുകൾ മാത്രമേ ഈ അവകലന സമവാക്യത്തിൽ അടങ്ങിയിട്ടുള്ളുവെങ്കിൽ, അത് ഒരു **സാധാരണ അവകലന സമവാക്യം (ODE)** ആണെന്ന് പറയപ്പെടുന്നു.

നിർവ്വചനം 10.5: (ഭാഗിക ഡിഫറൻഷ്യൽ സമവാക്യം)

രണ്ടോ അതിലധികമോ സ്വതന്ത്ര ചരങ്ങളുടെ ഒന്നോ അതിലധികമോ ഫലനങ്ങളുടെ ഭാഗിക ഡെറിവേറ്റീവുകൾ മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്ന ഒരു സമവാക്യത്തെ **ഭാഗിക അവകലന സമവാക്യം (PDE)** എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണത്തിന് y അജ്ഞാത ഫലനത്തെ സൂചിപ്പിക്കുകയും x സ്വതന്ത്ര ചരം ആകുകയും ചെയ്യുന്നു അപ്പോൾ

$\frac{dy}{dx}+2y=e^{-x}$, $\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{dy}{dx}-5y=0$, $\frac{dx}{dt}+\frac{dy}{dt}=3x-4y$ എന്നത് സാധാരണ അവകലന സമവാക്യങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

ഉദാഹരണത്തിന്, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-2\frac{\partial u}{\partial t}$ എന്നിവ ഭാഗിക അവകലന സമവാക്യങ്ങൾക്ക് ഉദാഹരണമാണ്.

ഈ അധ്യായത്തിൽ സാധാരണ അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ മാത്രമാണ് ഞങ്ങൾ ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്. സാധാരണ അവകലന സമവാക്യങ്ങളെ ലീനിയർ **രേഖീയ** അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ, **നോൺലീനിയർ** സാധാരണ അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത വിഭാഗങ്ങളായി തിരിച്ചിരിക്കുന്നു.

നിർവ്വചനം 10.6

ക്രമം n ആയിട്ടുള്ള ഒരു പൊതു രേഖീയ സാധാരണ അവകലന സമവാക്യം ഇനിപ്പറയുന്ന രൂപത്തിൽ എഴുതാൻ കഴിയുന്ന ഏതെങ്കിലും അവകലന സമവാക്യമാണ്.

$$a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0y=g(x) \quad \ldots (1)$$

$a_n(x)\neq 0, a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x)$, $g(x)$ എന്നിവയുടെ ഗുണോത്തരമെന്നത് സ്വതന്ത്ര ചരം x ന്റെ ഒരു ഫലനമാകുന്നു. (0 ഫലനം ഉൾപ്പെടെ)

കുറിപ്പ്

(1) രേഖീയ അവകലന സമവാക്യങ്ങളെക്കുറിച്ച് ശ്രദ്ധിക്കേണ്ട പ്രധാന കാര്യം ഫലനം, $y(x)$, അതിന്റെ ഡെറിവേറ്റീവുകൾ, എന്നിവയുടെ ഗുണനഫലങ്ങളല്ല എന്നുള്ളതാണ്. കൂടാതെ ഫലനമോ അതിന്റെ ഡെറിവേറ്റീവുകളോ ആദ്യത്തെ പവർ അല്ലാതെ മറ്റൊരു പവറുമല്ല.

(2) അവ്യക്തമായ ഫലനങ്ങൾ (ത്രികോണമിതി അല്ലെങ്കിൽ ലോഗതിരമിക് ഉദാഹരണങ്ങൾ) y അല്ലെങ്കിൽ അവകലന സമവാക്യത്തെ ആശ്രയിച്ചുള്ള ഒരു അവകലജമാകാം.

(3) വേറൊരു ഫലനത്തിന്റെ അല്ലെങ്കിൽ അവകലനജത്തിന്റെ ഉള്ളിൽ തന്നെയുള്ള ഫലനങ്ങൾ ശ്രദ്ധിക്കപ്പെടുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് $\sqrt{y'}$ അല്ലെങ്കിൽ $e^{y'}$.

(4) $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_{n-1}(x)$, $g(x)$ എന്നിവയുടെ ഗുണോത്തരങ്ങൾ പൂജ്യമോ അല്ലെങ്കിൽ പൂജ്യം അല്ലാത്തതോ, സ്ഥിരാങ്കമോ അല്ലെങ്കിൽ സ്ഥിരാങ്കമല്ലാത്ത ഫലനമോ, രേഖീയമോ അല്ലെങ്കിൽ രേഖീയമല്ലാത്തതോ ആയ ഫലനങ്ങളാകാം. $y(x)$, അവയുടെ അവകലജങ്ങൾ, എന്നിവയുടെ ഫലനങ്ങൾ, എന്നിവയുടെ സഹായത്തോടെ അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ രേഖീയമാണോ എന്ന് കണ്ടെത്താൻ കഴിയും.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 149 15-02-2023 15:22:07

നിർവ്വചനം 10.7

ഒരു രേഖീയമല്ലാത്ത സാധാരണ അവകലന സമവാക്യം രേഖീയമല്ലാത്ത ഒന്നാണ്.

$y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ ന്റെ ഗുണകങ്ങളിൽ ആശ്രിത ചരം y അല്ലെങ്കിൽ അതിന്റെ ഡെറിവേറ്റീവുകൾ $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$, പോലുള്ള സമവാക്യങ്ങൾ അടങ്ങിയിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ, സമവാക്യത്തിൽ ദൃശ്യമാകുമ്പോൾ, അവകലന സമവാക്യം ഒരു രേഖീയമല്ലാത്തതാണ്. കൂടാതെ ആശ്രിതചരത്തിന്റെയോ അല്ലെങ്കിൽ അതിന്റെ ഫലനങ്ങളായ $\sin y$ അല്ലെങ്കിൽ $e^{y'}$ ഒരു രേഖീയ സമവാക്യത്തിൽ ദൃശ്യമാകാൻ കഴിയില്ല.

ഉദാഹരണത്തിന്,

(1) $\frac{dy}{dx} = ax^3$, $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$, $\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$ ഇവ ഒരു രേഖീയ അവകലന സമവാക്യങ്ങളാണ് കൂടാതെ $y\frac{dy}{dx} + \sin x = 0$ എന്നത് രേഖീയമല്ലാത്ത അവകലന സമവാക്യങ്ങളാണ്.

(2) $y'' + 2x^3y' = 7xy + x^2$ എന്നിവ രണ്ടാം ക്രമമുള്ള സാധാരണ അവകലന സമവാക്യം (ODE) ആകുന്നു.

(3) $y'' + y' = \sqrt{x}$ എന്നത് രണ്ടാം ക്രമമുള്ള രേഖീയ സാധാരണ അവകലന സമവാക്യം (ODE) ആണ്.

(4) $y^2 + y' = \sqrt{x}$ എന്നത് ഒന്നാം ക്രമമുള്ള രേഖീയമല്ലാത്ത ODE ആകുന്നു.

(5) $y' = x\sin(y)$ എന്നത് ഒന്നാം ക്രമമുള്ള രേഖീയമല്ലാത്ത ODE ആകുന്നു.

(6) $y'' = y\sin(x)$ എന്നത് ക്രമം രണ്ടായ രേഖീയ ODE ആകുന്നു.

നിർവ്വചനം 10.8

1 ൽ $g(x) = 0$ ആണെങ്കിൽ മുകളിലുള്ള സമവാക്യം **ഏകതാനമാണെന്ന്** പറയപ്പെടുന്നു. അല്ലാത്ത പക്ഷം ഇത് **ഏകതാനമല്ലാത്തതാകുന്നു.**

കുറിപ്പ്

$y_i(x), i = 1, 2$ എന്നിവ ഏകതാനസമവാക്യത്തിന്റെ രണ്ട് പരിഹാരങ്ങളാണ്

$$a_n(x)y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = 0 \quad \ldots(2)$$

$a_n(x)y_i^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y_i^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1(x)y_i(x) + a_0(x)y_i(x) = 0, i = 1, 2$.

$u(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, എന്ന് കരുതുക c_1, c_2 എന്നിവ അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരതകളാണ്. അപ്പോൾ $u(x)$ (2) ന്റെ ഒരു പരിഹാരമാണെന്ന് എളുപ്പത്തിൽ പരിശോധിക്കാൻ കഴിയും.

അങ്ങനെ ആദ്യ ക്രമമുള്ള രേഖീയ അവകലന സമവാക്യം $y' + p(x)y = f(x)$. എന്ന് എഴുതുന്നു. ഇതുപോലെ എഴുതാൻ കഴിയാത്ത ആദ്യ ക്രമമുള്ള അവകലന സമവാക്യം രേഖീയമാണ്. $y = 0$ എന്നത് $y' + p(x)y = 0$ എന്ന ഏകതാനമായ സമവാക്യത്തിന് ഒരു പരിഹാരമാകുന്നു. ഞങ്ങൾ ഇതിനെ നിസ്സാര പരിഹാരമെന്നു വിളിക്കുന്നു. വാസ്തവത്തിൽ ഇത് ഒരു പൊതു രേഖീവ ഏകതാന അവകലന സമവാക്യത്തിനും ശരിയാണ്.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 150 15-02-2023 15:22:12

10.4. അവകലന സമവാക്യങ്ങളുടെ രൂപീകരണം

10.4.1 ഭൗതിക സാഹചര്യങ്ങളിൽ നിന്നുള്ള അവകലന സമവാക്യങ്ങളുടെ രൂപീകരണം

ഇപ്പോൾ യഥാർത്ഥ ജീവിത പ്രശ്നങ്ങളുടെ മാതൃകകളായി അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ എങ്ങനെ ഉണ്ടാകുന്നുവെന്ന് വിശദീകരിക്കാൻ ഞങ്ങൾ ചില മോഡലുകൾ നൽകുന്നു.

മോഡൽ 1: (ന്യൂട്ടന്റെ നിയമം)

ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാമത്തെ ചലന നിയമമനുസരിച്ച് സ്ഥിരമായ മാസ് m ഉള്ള ഒരു വസ്തുവിന്റെ തൽക്ഷണ ത്വരണം $F = ma$ എന്ന സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് വസ്തുവിന്റെ F പ്രവർത്തനവുമായി ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. ഒരു സ്വതന്ത്ര വീഴ്ചയുടെ കാര്യത്തിൽ ഒരു ഒബ്ജക്റ്റ് ഭൂനിരപ്പിൽ നിന്ന് $h(t)$ ഉയരത്തിൽ നിന്ന് പുറത്തുവിടുന്നു. അപ്പോൾ ന്യൂട്ടന്റെ രണ്ടാമത്തെ നിയമം $m\frac{d^2h}{dt^2} = f\left(t, h(t), \frac{dh}{dt}\right)$, എന്ന അവകലന സമവാക്യം വിവരിക്കുന്നു. ഇവിടെ m എന്നത് വസ്തുവിന്റെ പിണ്ഡമാണ്, h എന്നത് ഭൂനിരപ്പിന് മുകളിലുള്ള ഉയരമാണ്. സമയത്തിന്റെ പ്രവർത്തനമെന്ന നിലയിൽ അറിയപ്പെടാത്ത ഉയരത്തിന്റെ രണ്ടാമത്തെ ക്രമമുള്ള അവകലന സമവാക്യമാണിത്.

മോഡൽ 2: (പോപ്പുലേഷൻ ഗ്രോത്ത് മോഡൽ)

സന്തതികൾ കൂടുമ്പോഴെല്ലാം ജനസംഖ്യ വർദ്ധിക്കും. ഉദാഹരണത്തിന്, മുയലുകളെ നമ്മുടെ ജനസംഖ്യയായി എടുക്കാം. കൂടുതൽ മുയലുകൾ കൂടുതൽ മുയലുകളുടെ കുഞ്ഞുങ്ങളെ നൽകുന്നു. സമയം കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച് മുയലുകളുടെ എണ്ണം വർദ്ധിക്കുന്നു. അക്കാലത്ത് ജനസംഖ്യയുടെ ബയോമാസ് $N(t)$ യുടെ വളർച്ചാനിരക്ക് ജനസംഖ്യയുടെ ബയോമാസിന് ആനുപാതികമാണെങ്കിൽ ജനസംഖ്യയെ നിയന്ത്രിക്കുന്ന അവകലന സമവാക്യം നൽകുന്നത് $\frac{dN}{dt} = rN$, എന്നാണ് ഇവിടെ $r > 0$ എന്നത് വളർച്ചാ നിരക്ക്.

മോഡൽ 3: (ലോജിസ്റ്റിക് ഗ്രോത്ത് മോഡൽ)

ഒരു സ്ഥായിയായ ജനസംഖ്യ L എന്നത് രോഗം വ്യാപിക്കുന്ന നിരക്ക് (അതായത് രോഗബാധിതരായ ആളുകളുടെ എണ്ണത്തിന്റെ വർദ്ധനവിന്റെ നിരക്ക്) ബാധിച്ച ആളുകളുടെ എണ്ണത്തിന് ആനുപാതികമാണ് ഇതുവരെ ബാധിച്ചിട്ടില്ലാത്ത ആളുകളുടെ എണ്ണം:

$$\frac{dN}{dL} = kN(L-N),\ k > 0\,.$$

അഭ്യാസം 10.2

1. ഇനിപ്പറയുന്ന ഓരോ ഭൗതിക പ്രസ്താവനകളും അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ രൂപത്തിൽ പ്രകടിപ്പിക്കുക.

(i) നിലവിലെ അളവ് Q വിന് ആനുപാതികമായി റേഡിയം ക്ഷയിക്കുന്നു.

(ii) ഒരു നഗരത്തിന്റെ ജനസംഖ്യ, ജനസംഖ്യയുടെ ഗുണനഫലത്തിനും $5,00,000$ ജനസംഖ്യക്കും ഇടയിലുള്ള വ്യത്യാസത്തിന് ആനുപാതികമായി വർദ്ധിക്കുന്നു.

(iii) ഒരു നിശ്ചിത പദാർത്ഥത്തിന്, താപനില T യുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് നീരാവി മർദ്ദത്തിന്റെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് P നീരാവി മർദ്ദത്തിന് ആനുപാതികവും താപനിലയുടെ വർഗ്ഗത്തിന് വിപരീത അനുപാതവുമാണ്.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 151 15-02-2023 15:22:14

(iv) ഒരു ലാഭിക്കൽ തുക പ്രതിവർഷം 8% പലിശ നൽകുന്നു, തുടർച്ചയായി കൂട്ടിച്ചേർക്കുന്നു. കൂടാതെ മറ്റൊരു നിക്ഷേപത്തിൽ നിന്നുള്ള വരുമാനം പ്രതിവർഷം ₹ 400 എന്ന നിരക്കിൽ തുടർച്ചയായി തുകയിലേയ്ക്ക് ചേർക്കപ്പെടുന്നു.

2. ഒരു ഗോളാകൃതിയിലുള്ള മഴത്തുള്ളി അതിന്റെ ഉപരിതലവിസ്തീർണ്ണത്തിന് ആനുപാതികമായി ബാഷ്പീകരിക്കപ്പെടുന്നുവെന്ന് കരുതുക. മഴത്തുള്ളിയുടെ ആരം മാറുന്നതിന്റെ തോത് ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഒരു അവകലന സമവാക്യം എഴുതുക.

10.4.2 ജ്യാമിതീയ പ്രശ്നങ്ങളിൽ നിന്നുള്ള അവകലന സമവാക്യങ്ങളുടെ രൂപീകരണം

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഒരു ഫലന കുടുംബത്തെ ചില സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ കൊണ്ട് പരിധി കണ്ടെത്താൻ ഒരു അവകലന സമവാക്യത്തിന് കഴിയും. ഉദാഹരണത്തിന് $y = \mathrm{A}\,e^{x} + \mathrm{B}\,e^{-x}$, ൽ നിന്ന് A,B എന്നീ സ്ഥിരാങ്കങ്ങളെ ഒഴിവാക്കിയാൽ $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ എന്ന സമവാക്യം കിട്ടുന്നു. n അനിയന്ത്രിത സ്ഥിരാങ്കമായ വക്ര കുടുംബത്തിന്റെ സമവാക്യം എടുക്കുക. ഈ സ്ഥിരതകളൊന്നും അടങ്ങിയിട്ടില്ലാത്ത ഫലന സമവാക്യം രൂപീകരിക്കാൻ അനുവദിക്കുക. ഞങ്ങൾ താഴെപ്പറയുന്ന രീതിയിൽ മുന്നോട്ടുപോയി:

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യത്തെ തുടർച്ചയായി n തവണ അവകലനപ്പെടുത്തുക അപ്പോൾ n അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ കിട്ടുന്നു. തന്നിരിക്കുന്ന n സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന് $(n+1)$ സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്നും n തുടർച്ചയായ വ്യത്യാസങ്ങളിൽ നിന്ന് ഉണ്ടാകുന്ന n പുതുതായി ലഭിച്ച സമവാക്യങ്ങളിൽ നിന്നും n അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരതകളെ ഇല്ലാതാക്കുന്നു. എലിമിനേഷന്റെ ഫലം ആവശ്യമായ അവകലന സമവാക്യം നൽകുന്നു. അതിൽ n ാം ഓർഡറിന്റെ അവകലജം അടങ്ങിയിരിക്കണം.

ഉദാഹരണം 10.2

ഒരു ശീർഷത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന എല്ലാ നേർ രേഖകളുടെയും കുടുംബത്തിനുള്ള അവകലന സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

ഉത്തരം

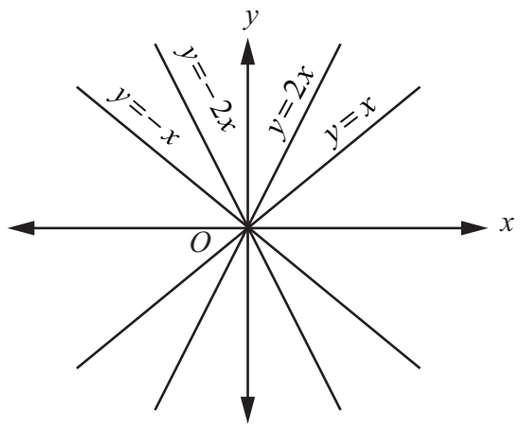
ശീർഷത്തിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന നേർരേഖ $y = mx$, എന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവിടെ m എന്നത് അനിയന്ത്രിതമായ ഒരു സ്ഥിരാങ്കമാണ്. ... (1)

ഇരുവശത്തെയും x, കൊണ്ട് അവകലനപ്പെടുത്തിയാൽ

$$\frac{dy}{dx} = m\,. \qquad \ldots (2)$$

(1), (2), ഇവ ഉപയോഗിച്ച് $y = x\frac{dy}{dx}$. എന്ന അവകലന സമവാക്യം ലഭിക്കുന്നു.

തന്നിരിക്കുന്ന സമവാക്യമായ $y = mx$ ൽ ഒരു ഏക പക്ഷീയമായ സ്ഥിരാങ്കം മാത്രമേ ഉള്ളൂവെന്ന് നിരീക്ഷിക്കുക. അങ്ങനെ നമുക്ക് ക്രമം ഒന്നുള്ള അവകലന സമവാക്യം ലഭിക്കും.



ചിത്രം. 10.1

ഉദാഹരണം 10.3

$y = \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x$ എന്ന അവകലന സമവാക്യത്തിൽ നിന്ന് A,B എന്നീ അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരതകളെ ഒഴിവാക്കി അവകലന സമവാക്യം രൂപപ്പെടുത്തുക.

ഉത്തരം

തന്നിട്ടുള്ളത് $y = \mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x$ ... (1)

(1) നെ രണ്ട് തവണ അവകലനപ്പെടുത്തുക, അപ്പോൾ

$$\frac{dy}{dx} = -\mathrm{A}\sin x + \mathrm{B}\cos x\,. \qquad \ldots (2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\mathrm{A}\cos x - \mathrm{B}\sin x = -(\mathrm{A}\cos x + \mathrm{B}\sin x)\,. \qquad \ldots (3)$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 152 15-02-2023 15:22:18

(1) ൽ നിന്നും (3), നെ കുറച്ചാൽ നാം ആവശ്യപ്പെട്ട സമവാക്യം $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം 10.4

ഒരു വൃത്തത്തിലെ ബിന്ദുക്കളായ $(a,0)$, $(-a,0)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന അവകലന സമവാക്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

ഉത്തരം

y അക്ഷത്തിലെ $(a,0)$, $(-a,0)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ ഒരു വൃത്തം കടന്നുപോകുന്നു.

$(0,b)$ വൃത്തത്തിന്റെ കേന്ദ്രം എന്നിരിക്കട്ടെ അതുകൊണ്ട് വൃത്തത്തിന്റെ ആരം $\sqrt{a^2+b^2}$ ആകുന്നു.

അതുകൊണ്ട് ഒരു വൃത്തത്തിലെ അവകലന സമവാക്യം $(a,0)$, $(-a,0)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നു പോകുന്നു. $x^2+(y-b)^2=a^2+b^2$, b ഒരു അനിയന്ത്രിത സ്ഥിരാങ്കം x കൊണ്ട് രണ്ട് വശങ്ങളെയും അവകലന പ്പെടുത്തിയാൽ. ... (1)

സമവാക്യം (1) ന്റെ ഇരുവശങ്ങളും x, കൊണ്ട് അവകലനപ്പെടുത്തിയാൽ

$$2x+2(y-b)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow y-b=-\frac{x}{\frac{dy}{dx}} \Rightarrow b=\frac{x}{\frac{dy}{dx}}+y.$$

സമവാക്യം (1) ൽ b യുടെ വില ആരോപിച്ചാൽ

$$x^2+\frac{x^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = a^2+\left(\frac{x}{\frac{dy}{dx}}+y\right)^2$$

$$\Rightarrow x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x^2 = a^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left[x+y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^2$$

$\Rightarrow (x^2-y^2-a^2)\frac{dy}{dx}-2xy=0$, എന്നുള്ള അവകലന സമവാക്യം കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം 10.5

പരാബോള $y^2=4ax$, ന്റെ അവകലന സമവാക്യം കാണുക, a ഒരു അനിയന്ത്രിത സ്ഥിരാങ്കമാകുന്നു.

ഉത്തരം

പരാബോള $y^2=4ax$, a ഒരു അനിയന്ത്രിത സ്ഥിരാങ്കം. ... (1)

x, കൊണ്ട് ഇരുവശങ്ങളും അവകലനപ്പെടുത്തിയാൽ $2y\frac{dy}{dx}=4a \Rightarrow a=\frac{y}{2}\frac{dy}{dx}$

a യുടെ വില (1) ൽ ആരോപിച്ചാൽ $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x}$ എന്ന അവകലന സമവാക്യം കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം 10.6

x - അക്ഷം ഫോക്കസായിട്ടുള്ളതും കേന്ദ്രം ശീർഷവും ആയിട്ടുള്ള എല്ലാദീർഘ വൃത്തങ്ങളുടെയും അവകലന സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

ഉത്തരം

x-അക്ഷം ഫോക്കസായിട്ടുള്ളതും ശീർഷം കേന്ദ്രമായതുമായ ദീർഘ വൃത്തങ്ങളുടെ അവകലന സമവാക്യം $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad a>b$ ... (1)

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 153 15-02-2023 15:22:22

a , b എന്നിവ അനിയന്ത്രിത സ്ഥിരങ്ങൾ ആകുന്നു.

x കൊണ്ട് സമവാക്യം (1) നെ അവകലനം ചെയ്താൽ

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \frac{x}{a^2}+\frac{y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0 \quad \ldots (2)$$

x കൊണ്ട് സമവാക്യം (2) നെ അവകലനം ചെയ്തൽ

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\left[y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=0 \Rightarrow \frac{1}{a^2}=-\frac{1}{b^2}\left[y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]$$

$\frac{1}{a^2}$ ന്റെ വിലയെ സമവാക്യം (2) ൽ ആരോപിച്ചാൽ ആവശ്യമായ സമവാക്യം കിട്ടുന്നതാണ്

$$-\frac{1}{b^2}\left[y\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]x+\frac{y}{b^2}\frac{dy}{dx}=0 \Rightarrow xy\frac{d^2y}{dx^2}+x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-y\frac{dy}{dx}=0$$

ഇതാണ് ആവശ്യപ്പെട്ട അവകലന സമവാക്യം.

പരാമർശം

ഒരു അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരാങ്കം ഇല്ലാതാക്കുന്നതിന്റെ ഫലം ക്രമം ഒന്നുള്ള അവകലന സമവാക്യം നൽകുന്നു. കൂടാതെ രണ്ട് അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരതകളെ ഇല്ലാതാക്കുന്നതിലൂടെ ക്രമം രണ്ടുള്ള ഒരു അവകലന സമവാക്യത്തിലേയ്ക്ക് നയിക്കുന്നു.

അഭ്യാസം 10.3

1. എല്ലാ തലത്തിലും ലംബമല്ലാത്ത വരികളുടെ തിരശ്ചീന രേഖകളുടെ കുടുംബത്തിന്റെ അവകലന സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.
2. $x^2+y^2=r^2$ എന്ന വൃത്തത്തിൽ സ്പർശിക്കുന്ന എല്ലാ നേർരേഖകളുടെയും അവകലന സമവാക്യം രൂപപ്പെടുത്തുക.
3. x-അക്ഷത്തിൽ കേന്ദ്രങ്ങളിലൂടെ കടന്നുപോകുന്ന വൃത്തങ്ങളുടെ അവകലന സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.
4. ലാറ്റസ് റെക്ടം $4a$ ഉള്ള എല്ലാ പാരബോളകളുടെയും കുടുംബത്തിന്റെ അവകലന സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക. അതിന്റെ അക്ഷങ്ങൾ x - അക്ഷത്തിന് സമാനമാണ്.
5. പാരബോളയുടെ കുടുംബത്തിന്റെ ശീർഷകം $(0,-1)$ എന്നതിലും y-അക്ഷത്തിൽ കേന്ദ്രത്തിലും ഉള്ള അവകലന സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.
6. എല്ലാ y-അക്ഷത്തിന്റെയും, കേന്ദ്രത്തിന്റെയും അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ മൂലബിന്ദുവിൽ കണ്ടെത്തുക.
7. ചാപങ്ങളുടെ ഗണത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന $y=Ae^{8x}+Be^{-8x}$, എന്ന സമവാക്യത്തിന് അനുയോജ്യമായ അവകലന സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.
8. ചാപത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന $xy=ae^x+be^{-x}+x^2$ എന്ന സമവാക്യത്തിന് അനുയോജ്യമായ അവകലന സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 154 15-02-2023 15:22:25

10.5 സാധാരണ അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ

നിർവ്വചനം 10.9 : (DE യുടെ പരിഹാരം)

അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ ഒരു **പരിഹാരം** അവകലന സമവാക്യത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന സ്വതന്ത്ര ചരങ്ങളുടെ പദങ്ങളിലെ ആശ്രിത ചരങ്ങളുടെ ഒരു പ്രകടനമാണ്.

മുന്നറിയിപ്പ്

(i) ഒരു അവകലന സമവാക്യത്തിന് പരിഹാരമുണ്ടെന്നതിന് യാതൊരു ഉറപ്പുമില്ല.
ഉദാഹരണത്തിന്, $\left(y'(x)\right)^2 + y^2 + 1 = 0$ ന് പരിഹാരമില്ല. അതിനാൽ $\left(y'(x)\right)^2 = -\left(y^2+1\right)$, $y'(x)$ ഇവ യഥാർത്ഥമാകാൻ കഴിയില്ല.

(ii) കൂടാതെ ഒരു അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ പരിഹാരം നിലവിലുണ്ടെങ്കിൽ അത് അദ്വിതീയമല്ല.
ഉദാഹരണത്തിന് $y = e^{2x}$, $y = 2e^{2x}$, $y = \sqrt{8}e^{2x}$, എന്നിവ പരിഹാരങ്ങളാണ് വാസ്തവത്തിൽ

$\frac{dy}{dx} - 2y = 0.$, $y = ce^{2x}$, $c \in \mathbb{R}$, എന്നിവ $\frac{dy}{dx} - 2y = 0.$ എന്ന സമവാക്യത്തിന് പരിഹാരങ്ങളാണ്.

അതിനാൽ ഒരു അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ സാധ്യമായ എല്ലാ പരിഹാരങ്ങളെയും പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നതിന്, ഒരു അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതു പരിഹാരമെന്ന ആശയം ഞങ്ങൾ അവതരിപ്പിക്കുന്നു.

നിർവ്വചനം 10.10 : (പൊതു പരിഹാരം)

അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമം പോലെ അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരാങ്കങ്ങളെ **പൊതുവായ പരിഹാരം** എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

പരാമർശം

സാധാരണയായി അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരതകളും (ODE യുടെ കാര്യത്തിൽ) അല്ലെങ്കിൽ അനിയന്ത്രിതമായ പ്രവർത്തനങ്ങളും (ഒരു PDE യുടെ കാര്യത്തിൽ) **പൊതുവായ പരിഹാരം** സാധ്യമായ എല്ലാ പരിഹാരങ്ങളും ഉൾക്കൊള്ളുന്നു.

നിർവ്വചനം 10.11 : (പ്രത്യേകപരിഹാരം)

അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുവായ പരിഹാരത്തിൽ അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരങ്ങൾക്ക് ഞങ്ങൾ പ്രത്യേക മൂല്യങ്ങൾ നൽകിയാൽ തത്ഫലമായുണ്ടാകുന്ന പരിഹാരത്തിനെ ഒരു പ്രത്യേക പരിഹാരം എന്നു വിളിക്കുന്നു.

പരാമർശം

(i) അധിക നിബന്ധനകൾ നൽകി പലപ്പോഴും ഒരു അവകലന സമവാക്യത്തിന് ഒരു പ്രത്യേക പരിഹാരം ഞങ്ങൾ കണ്ടെത്തുന്നു.

(ii) ആദ്യക്രമമുള്ള അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുവായ പരിഹാരം $y' = f(x, y)$ ഒരു ഒറ്റത്തവണയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു.
ഉദാഹരണത്തിന്, $y = ce^{2x}$, $c \in \mathbb{R}$, അവകലന സമവാക്യം $\frac{dy}{dx} - 2y = 0.$ യുടെ പൊതുവായ പരിഹാരമാണ്
ഉദാഹരണത്തിന് $y = a\cos x + b\sin x$ എന്നത് രണ്ടാമത്തെ ക്രമത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുവെന്ന് ഞങ്ങൾ ഇതിനകം കണ്ടു. ഇതിൽ രണ്ട്, അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ അടങ്ങിയിരിക്കുന്നതിനാൽ ഇത് പൊതുവായ ഒന്നാണ്. പൊതുവായ നിർദ്ധാരണത്തിൽ $a = 1$, $b = 0$ തുടരുകയാണെങ്കിൽ നമുക്ക് $y = \cos x$ ലഭിക്കും. ഇതാണ് $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ യുടെ നിർദ്ധാരണം.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 155 15-02-2023 15:22:29

പ്രയോഗത്തിൽ, അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരതകളെ ഉയർത്തിക്കൊണ്ട് അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ ഉണ്ടാകുന്നില്ല. എഞ്ചിനീയറിംഗ്, സയൻസ്, സോഷ്യൽ സയൻസുകളിൽ പോലും എല്ലാ ശാരീരിക പ്രശ്നങ്ങളും അന്വേഷിക്കുമ്പോൾ ഇത് പതിവായി ഉയർന്നുവരുന്നു. തന്നിരിക്കുന്ന വ്യവസ്ഥകളെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന അദ്വിതീയ പരിഹാരം നേടുന്നതിന് ചരങ്ങളിലെ ചില നിബന്ധനകളോടൊപ്പമാണ് പ്രധാനമായും ഈ അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ.

ഉദാഹരണം 10.7

അവകലന സമവാക്യം $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$, r ഒരു സ്ഥിരാങ്കം ആയാൽ $x^2+y^2=r^2$ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

ഉത്തരം

തന്നിട്ടുള്ളത് $x^2+y^2=r^2, r\in\mathbb{R}$ ... (1)

ഈ സമവാക്യത്തിൽ ഒരു അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരാങ്കം അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു.

അതിനാൽ നൽകിയ സമവാക്യം വേർ തിരിക്കേണ്ടതുണ്ട് x, കൊണ്ട് (1) നെ അവകലനപ്പെടുത്തിയാൽ

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0,\quad \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

അതിനാൽ, $x^2+y^2=r^2$ എന്നത് $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ എന്ന സമവാക്യത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.

അതിനാൽ, $x^2+y^2=r^2$ എന്നത് $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$ എന്ന അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണമാണ്.

ഉദാഹരണം 10.8

$xy'+7\frac{1}{y'}-y=0$ എന്ന അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം $y=mx+\frac{7}{m}, m\neq 0$ എന്ന് കാണിക്കുക.

ഉത്തരം

തന്നിരിക്കുന്ന പ്രവർത്തനം $y=mx+\frac{7}{m}$, m .... (1)

സമവാക്യം (1) ന്റെ ഇരുവശങ്ങളും x, കൊണ്ട് വേർതിരിച്ചാൽ $y'=m$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

y', y എന്നിവയുടെ വില തന്നിട്ടുള്ള അവകലന സമവാക്യത്തിൽ ആരോപിച്ചാൽ,

$xy'+\frac{7}{y'}-y=xm+\frac{7}{m}-mx-\frac{7}{m}=0$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

അതിനാൽ തന്നിരിക്കുന്ന പ്രവർത്തനം $xy'+7\frac{1}{y'}-y=0$ എന്ന അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണമാണ്.

ഉദാഹരണം 10.9

$\frac{dy}{dx}+2xy-4x^3=0$ എന്ന അവകലന സമവാക്യത്തിന് നിർദ്ധാരണം $y=2\left(x^2-1\right)+Ce^{-x^2}$ എന്ന് കാണിക്കുക.

ഉത്തരം

തന്നിരിക്കുന്ന പ്രവർത്തനം $y=2\left(x^2-1\right)+Ce^{-x^2}$, C ഒരു ഏകപക്ഷീയമായ സ്ഥിരാങ്കമാണ്. ...(1)

സമവാക്യം (1) ന്റെ ഇരുവശങ്ങളും x, കൊണ്ട് അവകലനപ്പെടുത്തിയാൽ $\frac{dy}{dx}=4x-2xCe^{-x^2}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു

$\frac{dy}{dx}$, y എന്നിവയുടെ വില സമവാക്യത്തിൽ ആരോപിച്ചാൽ

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 156 15-02-2023 15:22:33

$$\frac{dy}{dx}+2xy-4x^3 = 4x-2xCe^{-x^2}+2x\left[2\left(x^2-1\right)+Ce^{-x^2}\right]-4x^3 = 0$$

അതുകൊണ്ട് $\frac{dy}{dx}+2xy-4x^3=0$ എന്ന അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണമാണ്.

ഉദാഹരണം 10.10

$x^2y''+xy'+y=0$ എന്ന അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണമാണ് $y=a\cos(\log x)+b\sin\left(\log x\right), x>0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

ഉത്തരം

തന്നിട്ടുള്ള പ്രവർത്തനം $y=a\cos(\log x)+b\sin\left(\log x\right)$ ...(1)

a, b എന്നിവ അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ. ഈ രണ്ട് സ്ഥിരങ്ങളെയും ഒഴിവാക്കുന്നതിന് ഈ ഫലനത്തെ രണ്ടു പ്രാവശ്യം അവകലനപ്പെടുത്തണം.

(1) നെ x, കൊണ്ട് അവകലനപ്പെടുത്തിയാൽ

$y'=-a\sin\left(\log x\right)\cdot\frac{1}{x}+b\cos\left(\log x\right)\cdot\frac{1}{x}\Rightarrow xy'=-a\sin\left(\log x\right)+b\cos\left(\log x\right)$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

വീണ്ടും x, കൊണ്ട് അവകലനം ചെയ്താൽ

$xy''+y'=-a\cos\left(\log x\right)\cdot\frac{1}{x}-b\sin\left(\log x\right)\cdot\frac{1}{x}\Rightarrow x^2y''+xy'+y=0$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

അതുകൊണ്ട്, $y=a\cos(\log x)+b\sin\left(\log x\right)$ എന്ന അവകലന സമവാക്യത്തിന് നിർദ്ധാരണമാണ്.

അഭ്യാസം 10.4

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ അവയുമായി ബന്ധപ്പെട്ടുള്ള വ്യംജകങ്ങൾക്ക് ഒരു നിർദ്ധാരണമാണോ എന്ന് കണ്ടെത്തുക.
   (i) $y=2x^2$; $xy'=2y$
   (ii) $y=ae^x+be^{-x}$; $y''-y=0$
2. $y=e^{mx}$ എന്നത് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അവകലന സവാക്യങ്ങൾക്ക് ഒരു നിർദ്ധാരണമാണോ കൂടാതെ m ന്റെ വില കാണുക.
   (i) $y'+2y=0$ (ii) $y''-5y'+6y=0$
3. ഒരു ചാപം $(2,5)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്നുപോകുന്നു. ഏത് ഘട്ടത്തിലും ചാപത്തിലേയ്ക്കുള്ള സ്പർശരേഖയുടെ ചരിവ് ആ ബിന്ദുവിലെ ഓർഡിനേറ്റിന്റെ നാലിരട്ടിയുടെ തലകീഴിയാണ്. എങ്കിൽ ആ ചാപത്തിന്റെ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക.
4. $y=e^{-x}+mx+n$ എന്നത് $e^x\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)-1=0$ എന്നഅവകലനസമവാക്യത്തെപൂർത്തീകരിക്കുന്നതാണോ എന്ന് കണ്ടെത്തുക
5. $y=ax+\frac{b}{x}, x\neq 0$ എന്നത് $x^2y''+xy'-y=0$ എന്ന സമവാക്യത്തെ പൂർത്തീകരിക്കുന്നതാണോ? കണ്ടെത്തുക.
6. $y=ae^{-3x}+b$, a, b എന്നത് അനിയന്ത്രിത സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ ആയാൽ $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}=0$ എന്ന അവകലന സമവാക്യത്തെ പൂർത്തീകരിക്കുന്നതാണോ എന്ന് കണ്ടെത്തുക.
7. $y^2=2a\left(x+a^{\frac{2}{3}}\right)$, എന്ന അവകലനസമവാക്യത്തെ പൂർത്തീകരിക്കുന്നതാണോ ചാപത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന $\left(y^2-2xy\frac{dy}{dx}\right)^3=8\left(y\frac{dy}{dx}\right)^5$ എന്ന സമവാക്യം എന്ന് കണ്ടെത്തുക. കൂടാതെ a ഒരു പോസിറ്റീവ് പരാമീറ്ററാണ്.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 157 15-02-2023 15:22:40

8. അവകലന സമവാക്യം $\frac{d^2y}{dx^2}+b^2y=0$ എന്നതിനെ പൂർത്തീകരിക്കുന്നതാണോ $y=a\cos bx$ എന്നത് കണ്ടെത്തുക

ഒന്നാം ക്രമവും ഘാതം ഒന്നായതുമായ ചില തരം അവകലന സമവാക്യങ്ങൾക്ക് പരിഹാരം കാണുന്നതിനുള്ള ചില അടിസ്ഥാന രീതികളെ കുറിച്ച് ഞങ്ങൾ ചർച്ച ചെയ്യുന്നു.

10.6 ക്രമം ഒന്നും ഘാതം ഒന്നുമുള്ള അവകലന സമവാക്യത്തിനുള്ള നിർദ്ധാരണം

10.6.1 ചരങ്ങൾ വേർപെടുത്തുന്ന രീതി

അവകലന സമവാക്യങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം, ചരം രേഖപ്പെടുത്തൽ എന്നിവയെക്കുറിച്ചെല്ലാം തുടക്കത്തിൽ ലെബനീസ് അവതരിപ്പിച്ചു. പിന്നീട് ഇത് ജോൺ ബെർണോലി 1694 ൽ രൂപീകരിച്ചു.

ഒന്നാം ക്രമമുള്ള ഒരു അവകലന സമവാക്യത്തെ വേർതിരിച്ച് $h(y)y'=g(x)$ എന്ന് എഴുതാവുന്നതാണ് ഇവിടെ ഇടതുവശം y' യുടെ ഫലനവും പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. കൂടാതെ വലതുവശം x ന്റെ ഫലനത്തെ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നു. ഈ രൂപത്തിൽ അവകലന സമവാക്യത്തെ മാറ്റിയെഴുതുന്നത് ചരങ്ങളെ വേർതിരിക്കുന്ന രീതി എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

ഇപ്രകാരം സമവാക്യത്തിലെ ചരങ്ങളെ വേർതിരിക്കാനാകുമെങ്കിൽ ഒരു ഒന്നാം ക്രമമുള്ള അവകലന സമവാക്യത്തെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നത് ലളിതമായിരിക്കും. ഇപ്രകാരം $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$ എന്നത് **ചരം വേർതിരിക്കാവുന്ന** അല്ലെങ്കിൽ ലഘുവായി **വേർതിരിക്കാവുന്ന സമവാക്യത്തോടു** കൂടിയ ഒന്നാകുന്നു.

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx=-\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy. \quad ...(1)$$

സമവാക്യം (1) ന്റെ ഇരുവശങ്ങളും സമാകലനപ്പെടുത്തിയാൽ $\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx=-\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy+C$, എന്ന് കിട്ടുന്നു. C ഒരു അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരാങ്കമാകുന്നു.

പരാമർശം

1. രണ്ട് അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരാങ്കത്തെയും ഒരു അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരാങ്കം എന്ന നിലയിൽ ഇരുവശത്തും അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരാങ്കം ചേർക്കേണ്ട ആവശ്യമില്ല.
2. ഈ അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരാങ്കത്തിനുള്ള ഒരു നിർദ്ധാരണമാണ് അവകലന സമവാക്യം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക എന്നുള്ളത്.

ഒരു അവകലന സമവാക്യം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നത് നേരത്തെ തന്നെ അവകലന സമവാക്യം സമകലനപ്പെടുത്തുന്നതിൽ പ്രതിപാദിച്ചിട്ടുണ്ട്. എന്തു കൊണ്ടെന്നാൽ അവകലന സമവാക്യം നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്ന പ്രക്രിയയിൽ സമാകലനം ഉൾപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട് എന്നതിനാൽ.

ഉദാഹരണം 10.11

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}=1+y^2$.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത് $\left(1+x^2\right)\frac{dy}{dx}=1+y^2$. ... (1)

തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യത്തെ ചരം വേർതിരിക്കൽ രീതി ഉപയോഗിച്ച്

$\frac{dy}{1+y^2}=\frac{dx}{1+x^2}$ എന്നെഴുതാം. ... (2)

സമവാക്യം (2), ന്റെ ഇരുവശങ്ങളും സമാകലനപ്പെടുത്തിയാൽ $\tan^{-1}y=\tan^{-1}x+C$ എന്ന് കിട്ടുന്നു .... (3)

എന്നാൽ $\tan^{-1}y-\tan^{-1}x=\tan^{-1}\left(\frac{y-x}{1+xy}\right)$. ... (4)

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 158 15-02-2023 15:22:43

(3) ൽ (4) ആരോപിച്ചാൽ $\tan^{-1}\left(\frac{y-x}{1+xy}\right) = C$, $\frac{y-x}{1+xy} = \tan C = a$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$y - x = a(1+xy)$ എന്നത് ആവശ്യപ്പെട്ട നിർദ്ധാരണമാകുന്നു.

ഉദാഹരണം 10.12

$y(1) = 2$ എന്നത് $\left(1+x^3\right)dy - x^2 y dx = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുമ്പോഴുണ്ടാകുന്ന നിർദ്ധാരണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത് $(1+x^3)dy - x^2 y dx = 0$.

മുകളിലുള്ള സമവാക്യത്തെ $\frac{dy}{y} - \frac{x^2}{1+x^3}dx = 0$ എന്ന് എഴുതാം.

ഇരുവശങ്ങളും സമാകലനപ്പെടുത്തിയാൽ $\log y - \frac{1}{3}\log(1+x^3) = C_1$,

$$3\log y - \log(1+x^3) = \log C.$$

$$3\log y = \log(1+x^3) + \log C,$$

$$\text{അങ്ങനെ } \log y^3 = \log C(1+x^3).$$

അതുകൊണ്ട് തന്നിട്ടുള്ള അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ പ്രത്യേക നിർദ്ധാരണം, $y^3 = C(1+x^3)$ ആകുന്നു. $x = 1,\ y = 2$. ആയാൽ $2^3 = C(1+1) \implies C = 4$ ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് പ്രത്യേക നിർദ്ധാരണം $y^3 = 4(1+x^3)$

10.6.2 പ്രതിസ്ഥാപിത രീതി

അവകലന സമവാക്യത്തെ ഈ രീതിയിൽ എടുത്താൽ $\frac{dy}{dx} = f(ax+by+c)$.

(i) $a \neq 0,\ b \neq 0$, ആയാൽ തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യത്തെ ചരം വേർതിരിക്കൽ രീതിയിൽ ചുരുക്കുകയും $ax+by+c = z$ എന്ന് ആരോപിക്കുകയും ചെയ്യുക.

(ii) $a = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $b = 0$, ആയാൽ അപ്രകാരമുള്ള അവകലന സമവാക്യത്തെ നേരത്തേതന്നെ വേർതിരിക്കൽ രീതിയിൽ ആക്കാവുന്നതാണ്.

ഉദാഹരണം 10.13

നിർദ്ധാരണം $y' = \sin^2\left(x-y+1\right)$.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത് $y' = \sin^2\left(x-y+1\right)$

$z = x-y+1$, എന്ന് ആരോപിച്ചാൽ $\frac{dz}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$.

തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യത്തെ ചുരുക്കിയാൽ $1 - \frac{dz}{dx} = \sin^2 z$

$$\text{അതായത്, } \frac{dz}{dx} = 1 - \sin^2 z = \cos^2 z.$$

$$\text{ചരത്തെ വേർപെടുത്തിയാൽ } \frac{dz}{\cos^2 z} = dx \text{ (അല്ലെങ്കിൽ) } \sec^2 z dz = dx.$$

$$\text{സമാകലനപ്പെടുത്തിയാൽ } \tan z = x + C \text{ (അല്ലെങ്കിൽ) } \tan\left(x-y+1\right) = x + C.$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 159 15-02-2023 15:22:51

ഉദാഹരണം 10.14

നിർദ്ധാരണം : $\frac{dy}{dx} = \sqrt{4x+2y-1}$.

നിർദ്ധാരണം

$z = 4x+2y-1$, എന്ന് ആരോപിച്ചാൽ

$$\frac{dz}{} = 4+2\frac{dy}{} = 4+2\sqrt{z}$$

$$\text{അതുകൊണ്ട്} \quad \frac{dz}{4+2\sqrt{z}} = dx .$$

$$\text{സമാകലനപ്പെടുത്തിയാൽ,} \quad \int\frac{dz}{4+2\sqrt{z}} = x+C .$$

$z = u^2$, എന്നാരോപിച്ചാൽ

$$\int\frac{dz}{4+2\sqrt{z}} = \int\frac{udu}{u+2} = u-2\log|u+2|+C,$$

$$\text{അല്ലെങ്കിൽ} \quad \sqrt{z}-2\log\left|\sqrt{z}+2\right| = x+C$$

$z = 4x+2y-1$, എന്ന് ആരോപിച്ചാൽ

$$\sqrt{4x+2y-1}-2\ \log\left|\sqrt{4x+2y-1}+2\right| = x+C .$$

ഉദാഹരണം 10.15

നിർദ്ധാരണം: $\frac{dy}{dx} = \frac{x-y+5}{2(x-y)+7}$.

നിർദ്ധാരണം

$$\text{തന്നിട്ടുള്ളത്} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{x-y+5}{2(x-y)+7}$$

$$z = x-y$$

$$\frac{dz}{dx} = 1-\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} \ {}^{1-\frac{dz}{dx}} \ 1-\frac{dz}{dx}$$

അപ്പോൾ തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യം

$$1-\frac{dz}{dx} = \frac{z+5}{2z+7}$$

$$\frac{dz}{dx} = 1-\frac{z+5}{2z+7}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z+2}{2z+7}$$

ചരങ്ങൾ വേർതിരിച്ചാൽ

$$\frac{2z+7}{z+2}dz = dx$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 160 15-02-2023 15:22:55

$$\frac{2(z+2)+3}{(z+2)}\,dz = dx$$

$$\left(2+\frac{3}{z+2}\right)dz \;=\; dx$$

ഇരുവശങ്ങളും സമാകലനപ്പെടുത്തിയാൽ

$$2z+3\log\left|z+2\right| \;=\; x+C$$

അതായത്, $2(x-y)+3\log\left|x-y+2\right| = x+C$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 10.16

നിർദ്ധാരണം : $\dfrac{dy}{dx}=\left(3x+y+4\right)^2$.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള അവകലന സമവാക്യത്തിൽ $3x+y+4=z$ എന്ന് ആരോപിച്ചാൽ.

x, കൊണ്ട് അവകലനപ്പെടുത്തിയാൽ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx}-3$. എന്ന് കിട്ടുന്നു. അതുകൊണ്ട് തന്നിട്ടുള്ള അവകലന സമവാക്യം $\dfrac{dz}{dx}=z^2+3$ എന്നായി മാറുന്നു.

ഈ സമവാക്യത്തിൽ ചരത്തെ വേർപെടുത്തുകയും സമാകലനപ്പെടുത്തുകയും ചെയ്താൽ തന്നിട്ടുള്ള അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ സാധാരണ നിർദ്ധാരണം $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\dfrac{3x+y+4}{\sqrt{3}}\right)=x+C$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

അഭ്യാസം 10.5

1. ബലം F ഉം മാസ്സ് M, ഉം ഉള്ള ഒരു ഓട്ടോ മൊബൈലിന്റെ ചലനത്തെ സൃഷ്ടിക്കുന്ന സ്ഥിരമായ ശക്തിയാണെങ്കിൽ, അതിന്റെ പ്രവേഗം V നൽകുന്നത് $M\dfrac{dV}{dt}=F-kV$, ആണ്. ഇവിടെ k ഒരു സ്ഥിരാങ്കമാണ്. $V=0$ അപ്പോൾ $t=0$ ആയാൽ V യെ t ഉൾപ്പെടുന്ന പദമാക്കി മാറ്റുക.
2. പ്രവേഗം v, ആയ ഒരു പാരച്യൂട്ട് ലംബമായി വീഴുന്നതിനെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന സമവാക്യമാണ് $v\dfrac{dv}{dx}=g\left(1-\dfrac{v^2}{k^2}\right)$, കൂടാതെ g യും k യും സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ ആകുന്നു. v യും x ഉം ആരംഭം പൂജ്യം ആണെങ്കിൽ x ഉൾപ്പെടുന്ന പദമായി v കണ്ടെത്തുക.
3. ചായ്വ് $\dfrac{y-1}{x^2+x}$ ഉം അത് കടന്നുപോകുന്ന ബിന്ദു $(1,0)$ ഉം ആയിട്ടുള്ള ഒരു ചാപത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.
4. താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള അവകലന സമവാക്യങ്ങളുടെ നിർദ്ധാരണം കാണുക:

   (i) $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}$

   (ii) $ydx+\left(1+x^2\right)\tan^{-1}x\;dy=0$

   (iii) $\sin\dfrac{dy}{dx}=a,\;\; y(0)=1$

   (iv) $\dfrac{dy}{dx}=e^{x+y}+x^3e^y$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 161 15-02-2023 15:22:59

(v) $\left(e^{y}+1\right)\cos x\ dx+e^{y}\sin x\ dy=0$

(vi) $\left(ydx-xdy\right)\cot\left(\frac{x}{y}\right)=ny^{2}dx$

(vii) $\frac{dy}{dx}-x\sqrt{25-x^{2}}=0$

(viii) $x\cos y\ dy=e^{x}\left(x\log x+1\right)dx$

(ix) $\tan y\frac{dy}{dx}=\cos\left(x+y\right)+\cos\left(x-y\right)$

(x) $\frac{dy}{dx}=\tan^{2}\left(x+y\right)$

10.6.3 ഏകതാനമായ രീതി അല്ലെങ്കിൽ ഏകതാനമായ അവകലന സമവാക്യം

നിർവ്വചനം 10.12 : (ഘാതം *n* ആയ ഏകതാനമായ ഫലനം)

x, y എന്നിവ ചരങ്ങളായുള്ള ഒരു ഫലനം $f(x,y)$ എന്നത് ക്രമം n ആയിട്ടുള്ള **ഏകതാനമായ** ഫലനമാകണമെങ്കിൽ $f(tx,ty)=t^{n}f(x,y)$ യും $n\in\mathbb{R}$ ഉം x, y, t എന്നിവ അനുയോജ്യമായ നിയന്ത്രിതങ്ങളും ആയിരിക്കണം. ഇതിനെ **യൂളറിന്റെ ഏകത** എന്ന് വിളിക്കുന്നു..

ഉദാഹരണത്തിന്,

(i) $f(x,y)=6x^{2}+2xy+4y^{2}$ എന്നത് ഘാതം രണ്ട് ആയിട്ടുള്ള $x, y,$ യിലെ ഏകതാനമായ ഫലനമാണ്.

(ii) എന്നാൽ $f(x,y)=x^{3}+\left(\sin x\right)e^{y}$ എന്നത് ഒരു ഏകതാനമായ ഫലനമല്ല.

$f(x,y)$ ഡിഗ്രി പൂജ്യമായ **ഏകതാനമായ** ഫലനമാണെങ്കിൽ $g\ \ f(x,y)$ എല്ലായ്പ്പോഴും $g\left(\frac{y}{x}\right)$ അല്ലെങ്കിൽ $g\left(\frac{x}{y}\right)$ എന്ന രീതിയിലായിരിക്കും.

നിർവ്വചനം 10.13: (ഏകതാന അവകലന സമവാക്യം)

ഒരു സാധാരണ അവകലന സമവാക്യം **ഏകതാന** സമവാക്യത്തിന്റെ **രൂപ**ത്തിലാണെങ്കിൽ അവകലന സമവാക്യത്തെ $\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right)$ എന്നെഴുതാവുന്നതാണ്.

മുൻകരുതൽ

നിർവചനം 10.12 ൽ നിന്നും വ്യത്യസ്തമായാണ് നിർവ്വചനം 10.7 ൽ ഏകതാനം എന്ന പദത്തെ അവതരിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നത്.

പരാമർശം

(i) അവകലന സമവാക്യം $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ [അവകലന രൂപത്തിൽ] എന്നത് **ഏകതാനമായാൽ** M , N എന്നിവ **ഘാതമുള്ള അവകലന ഫലനങ്ങളായിരിക്കും.**

(ii) മുകളിൽപ്പറഞ്ഞ സമവാക്യത്തെ $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ [അവകലന രൂപത്തിൽ] എന്ന് എഴുതാവുന്നതാണ് അവിടെ $f(x,y)=-M(x,y)/N(x,y)$ എന്നത് ഘാതം 0 ആയ ഏകകാല സമവാക്യമാണ്.

ഉദാഹരണമായി

(1) ഏകകാല സമവാക്യം $\left(x^{2}-3y^{2}\right)dx+2xy\ dy=0$. ഈ സമവാക്യത്തെ $\frac{dy}{dx}=\frac{3y^{2}-x^{2}}{2xy}=\frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y/x}\right)$.

എന്ന് എഴുതാവുന്നതാണ് ഇതിനെ വീണ്ടും മാറ്റി $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y/x}\right)=g\left(\frac{y}{x}\right)$. ഇപ്രകാരം എഴുതാവുന്നതാണ് അതുകൊണ്ട്, $\left(x^{2}-3y^{2}\right)dx+2xy\ dy=0$ എന്നത് ഒരു ഏകകാല സമവാക്യമാണ്.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 162 15-02-2023 15:23:05

(2) എന്നിരിക്കിലും, അവകലന സമവാക്യം $\frac{dy}{dx}=\frac{x^3+y^2}{2x^3-xy^2}$ എന്നത് ഒരു ഏകകാല സമവാക്യമല്ല

ഒരു ഏകകാല അവകലന സമവാക്യം $\frac{dy}{dx}=g\left(\frac{y}{x}\right)$, എന്നതിന് ഉത്തരം കാണുക $v=\frac{y}{x}.$, $y=xv$, $\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$.എന്ന് എടുക്കുക. തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യം $x\frac{dv}{dx}=f(v)-v$ എന്ന രീതിയിൽ മാറ്റപ്പെടും. ഇതിനെ ചരം വേർതിരിക്കൽ രീതിയിൽ മാറ്റിയാൽ കിട്ടുന്നതിന് അനുകൂലമായിട്ടുള്ളതാണ് ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഫലം.

സിദ്ധാന്തം 10.1

$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ഒരു ഏകകാല സമവാക്യമാണെങ്കിൽ ചരം $y=vx,$ എന്ന് മാറ്റിയാൽ v, x എന്നീ ചരങ്ങളിൽ വേർതിരിക്കാവുന്ന സമവാക്യമായി മാറുന്നു.

ഉദാഹരണം 10.17

$\left(x^2-3y^2\right)dx+2xydy=0$ യെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യം ഏകകാല സമവാക്യമാണെന്നറിയുക.

അപ്പോൾ തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യത്തെ ഇപ്രകാരം എഴുതുക $\frac{dy}{dx}=\frac{3y}{2x}-\frac{x}{2y}$.

$y=vx$,എന്നിരിക്കട്ടെ അപ്പോൾ $v+x\frac{dv}{dx}=\frac{3v}{2}-\frac{1}{2v}$ അല്ലെങ്കിൽ $x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2-1}{2v}$.

ചരത്തെ വേർതിരിച്ചാൽ $\frac{2vdv}{v^2-1}=\frac{dx}{x}$.

സമാകലനപ്പെടുത്തിയാൽ $\log\left|v^2-1\right|=\log|x|+\log|C|$,

അതായത് $\left|v^2-1\right|=|Cx|$, C ഒരു അനിയന്ത്രിത സംഖ്യയാണ്.

v യ്ക്ക് പകരമായി $\frac{y}{x}$ ആരോപിച്ചാൽ $\left|\frac{y^2}{x^2}-1\right|=|Cx|$.

അപ്പോൾ $\left|y^2-x^2\right|=\left|Cx^3\right|$.

അങ്ങനെ, $y^2-x^2=\pm Cx^3$ $y^2-x^2=kx^3$ എന്ന സാധാരണ സമവാക്യം കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം 10.18

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $\left(y+\sqrt{x^2+y^2}\right)dx-xdy=0,\quad y(1)=0$.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത് ഏകകാല സമവാക്യമാണോ എന്ന് ശരി നോക്കുക.

എന്നിട്ട് അവകലന രൂപത്തിൽ $\frac{dy}{dx}=\frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x}$ എന്നെഴുതുക.

ആദ്യ വില $x=1$, എന്നും $x>0$ യും $x=\sqrt{x^2}$ ഉം ആയിരിക്കണം.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 163 15-02-2023 15:23:11

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}$.

$y = vx$. എന്നിരിക്കട്ടെ $v + x\frac{dv}{dx} = v + \sqrt{1+v^2}$, അപ്പോൾ $x\frac{dv}{dx} = \sqrt{1+v^2}$.

ചരങ്ങളെ വേർപെടുത്തിയാൽ $\frac{dv}{\sqrt{v^2+1}} = \frac{dx}{x}$.

സമാകലനപ്പെടുത്തിയാൽ $\log\left|v+\sqrt{v^2+1}\right| = \log|x| + \log|C|$ അല്ലെങ്കിൽ $v+\sqrt{v^2+1} = xC$.

അപ്പോൾ v യ്ക്ക് പകരം $\frac{y}{x}$, എന്ന് ആരോപിച്ചാൽ $\frac{y}{x}+\sqrt{\frac{y^2}{x^2}+1} = Cx = y+\sqrt{x^2+y^2} = Cx^2$ അപ്പോൾ തന്നിട്ടുള്ള അവകലന സമവാക്യത്തിന് സാധാരണ സമവാക്യം കിട്ടുന്നു.

$y = 0$, $x = 1$. എന്നീ വിലകൾ ആരോപിച്ച് C യുടെ വില കണ്ടുപിടിക്കുമ്പോൾ $C = 1$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

അവകലന സമവാക്യത്തിന് $y+\sqrt{x^2+y^2} = x^2$ എന്ന പ്രത്യേക നിർദ്ധാരണം കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം 10.19

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $(2x+3y)dx + (y-x)dy = 0$.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യത്തെ $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+3y}{x-y}$ എന്ന് എഴുതാം.

ഇത് ഒരു ഏകകാല സമവാക്യമാകുന്നു.

$y = vx$ എന്ന് എടുക്കുക അപ്പോൾ $v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2+3v}{1-v}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

അങ്ങനെ, $x\frac{dv}{dx} = \frac{2+2v+v^2}{1-v}$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{1-v}{(1+v)^2+1}dv = \frac{dx}{x}$ അല്ലെങ്കിൽ $-\frac{1}{2}\left[\frac{2v+2}{v^2+2v+2} - \frac{4}{(v+1)^2+1}\right]dv = \frac{dx}{x}$

ഇരുവശങ്ങളും സമാകലനപ്പെടുത്തിയാൽ $-\frac{1}{2}\log\left|v^2+2v+2\right| + 2\tan^{-1}(v+1) = \log|x| + \log|C|$

അല്ലെങ്കിൽ $\log\left|v^2+2v+2\right| - 4\tan^{-1}(v+1) = -2\log|x| - 2\log|C|$

അല്ലെങ്കിൽ $\log\left|v^2+2v+2\right| + \log|x|^2 - 4\tan^{-1}(v+1) = -2\log|C|$

അല്ലെങ്കിൽ $\log\left|(v^2+2v+2)x^2\right| - 4\tan^{-1}(v+1) = -2\log|C|$.

ഇവിടെ v യ്ക്ക് പകരം $\frac{y}{x}$, എന്ന് ആരോപിച്ചാൽ, $\log\left|y^2+2xy+2x^2\right| - 4\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{x}\right) = k$, എന്ന് കിട്ടും $k = -2\log|C|$ എന്നതാണ് യഥാർത്ഥ നിർദ്ധാരണം.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 164 15-02-2023 15:23:16

ഉദാഹരണം 10.20

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $y^2 + x^2 \frac{dy}{dx} = xy \frac{dy}{dx}$.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യത്തെ $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{xy - x^2}$ എന്ന് എഴുതാം.

ഇത് ഒരു ഏകകാല സമവാക്യമാകുന്നു.

$y = vx$. എന്ന് ആരോപിക്കുക, അപ്പോൾ $x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{v-1}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ചരങ്ങളെ വേർപെടുത്തുമ്പോൾ, $\frac{v-1}{v} dv = \frac{dx}{x}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

സമാകലനപ്പെടുത്തുക, അപ്പോൾ $v - \log|v| = \log|x| + \log|C|$ അല്ലെങ്കിൽ $v = \log|vxC|$.

v യ്ക്ക് പകരം $\frac{y}{x}$, ആരോപിച്ചാൽ, $\frac{y}{x} = \log|Cy|$ അല്ലെങ്കിൽ $|Cy| = e^{y/x}$ അല്ലെങ്കിൽ $y = ke^{y/x}$ ഇതാണ് നിങ്ങൾ ആവശ്യപ്പെട്ട നിർദ്ധാരണം.

ഉദാഹരണം 10.21

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $\left(1 + 2e^{x/y}\right)dx + 2e^{x/y}\left(1 - \frac{x}{y}\right)dy = 0$.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യം $\frac{dx}{dy} = \frac{\left(\frac{x}{y} - 1\right)2e^{x/y}}{1 + 2e^{x/y}} = g\left(\frac{x}{y}\right)$. ...(1)

സമവാക്യം (1) ലെ $\frac{x}{y}$ യുടെ വെളിപ്പെടുത്തൽ മുഖാന്തിരം യഥാർത്ഥ വിലയായ $x = vy$ ആരോപിച്ചാൽ.

$y\frac{dv}{dy} = -\frac{2e^v + v}{1 + 2e^v}$ എന്നാകുന്നു

ചരങ്ങൾ വേർതിരിച്ചാൽ $\frac{1 + 2e^v}{v + 2e^v} dv = -\frac{dy}{y}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

സമാകലനം ചെയ്താൽ

$\log|2e^v + v| = -\log|y| + \log|C|$ അല്ലെങ്കിൽ $\log|2ye^v + vy| = \log|C|$ അല്ലെങ്കിൽ $2ye^v + vy = \pm C$.

v യ്ക്ക് പകരം $\frac{x}{y}$ എന്നാരോപിച്ചാൽ, $2ye^{x/y} + x = k$, $k = \pm C$, എന്ന യഥാർത്ഥ നിർദ്ധാരണം കിട്ടുന്നു.

അഭ്യാസം 10.6

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ അവകലന സമവാക്യം കണക്കാക്കുക:

1. $\left[x + y\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right]dx = x\cos\left(\frac{y}{x}\right)dy$

2. $\left(x^3 + y^3\right)dy - x^2 y dx = 0$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 165 15-02-2023 15:23:22

3. $ye^{\frac{x}{y}}dx=\left(xe^{\frac{x}{y}}+y\right)dy$

4. $2xydx+\left(x^2+2y^2\right)dy=0$

5. $\left(y^2-2xy\right)dx=\left(x^2-2xy\right)dy$

6. $x\frac{dy}{dx}=y-x\cos^2\left(\frac{y}{x}\right)$

7. $\left(1+3e^{\frac{y}{x}}\right)dy+3e^{\frac{y}{x}}\left(1-\frac{y}{x}\right)dx=0$, ആയാൽ $y=0,\ x=1$

8. $\left(x^2+y^2\right)dy=xy\,dx$. ഉം $y(1)=1$ ഉം $y(x_0)=e$. ആയാൽ x_0 ന്റെ വില കാണുക.

10.7 ക്രമം ഒന്നായ രേഖീയ അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ

ക്രമം ഒന്നായ അവകലന സമവാക്യം

$$\frac{dy}{dx}+Py\ =\ Q. \qquad \ldots (1)$$

P യും Q യും x ന്റെ ഫലനങ്ങൾ ആകുന്നു. y യുടെയും അവയുടെ അവകലജം $\frac{dy}{dx}$ ന്റെയും അതിനെ ആശ്രയിച്ച ചരം y യും അവയുടെ അവകലജവും ആശ്രിതമല്ലാത്ത ചരം x ഉം ആദ്യ ക്രമമുള്ളവയായിരിക്കും.

നിർദ്ധാരണം

(1), നെ സമാകലനപ്പെടുത്തിയാൽ ഏകകാല സമവാക്യം $\frac{dy}{dx}+Py=0$. ...(2) ആയിരിക്കും.

സമവാക്യം (2) നെ സമാകലനപ്പെടുത്തിയാൽ:

ചരത്തെ വേർപെടുത്തി, $\frac{dy}{y}=-Pdx$ എന്നെഴുതാം.

സമാകലനത്തിലൂടെ $ye^{\int Pdx}=C$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

അപ്പോൾ $\frac{d}{dx}\left(ye^{\int Pdx}\right)=e^{\int Pdx}\frac{dy}{dx}+y.Pe^{\int Pdx}$

$$=e^{\int Pdx}\left(\frac{dy}{dx}+Py\right)=Qe^{\int Pdx} \qquad \ldots (3)\ (\text{സമവാക്യം ഉപയോഗിച്ച് }(1))$$

സമവാക്യം (3) ന്റെ ഇരുവശങ്ങളും സമാകലനപ്പെടുത്തിയാൽ താഴെകാണുന്ന അവകലന സമവാക്യം കിട്ടുന്നു.

$$ye^{\int Pdx}\ =\ \int Qe^{\int Pdx}dx+C.$$

ഇവിടെ $e^{\int Pdx}$ എന്നതിനെ സമവാക്യം (1) ന്റെ **സമാകലന ഘടകം** എന്ന് പറയുന്നു.

പരാമർശം

1. രേഖീയ അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം

   $y\times(I.F)=\int Q(I.F)dx+C$, C ഒരു അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരാങ്കം.

2. സമ.കലന ഘടകം $e^{\int Pdx}$, P എന്നത് y യുടെ ഗുണാങ്കമാകുന്നു. $\frac{dy}{dx}$ ന്റെ ഗുണാങ്കം ഒന്നാകുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 166 15-02-2023 15:23:26

3. ക്രമം ഒന്നുള്ള അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ രൂപം $\frac{dx}{dy}+Px=Q$, എന്നാകുന്നു. ഇവിടെ y യുടെ ഫലനങ്ങൾ P, Q എന്നിവയാകുന്നു. ഇവിടെ x ഉം അതിന്റെ അവകലജമായ $\frac{dx}{dy}$ ന്റെയും ഗുണനഫലത്തിനും ഒന്നും സംഭവിക്കുന്നില്ല. ആശ്രിത ചരം x ഉം അനിയന്ത്രിതചരമായ y യുടെ അവകലജവും ക്രമം ഒന്നുള്ളവയാകുന്നു.
ഈ അവസരത്തിൽ നിർദ്ധാരണമെന്നത് $xe^{\int Pdy}=\int Qe^{\int Pdy}dy+C$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 10.22

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $\frac{dy}{dx}+2y=e^{-x}$.

നിർദ്ധാരണം

$$\text{തന്നിട്ടുള്ളത്}\quad \frac{dy}{dx}+2y=e^{-x} \qquad \ldots (1)$$

ഇത് ഒരു രേഖീയ അവകലന സമവാക്യമാകുന്നു.
ഇവിടെ $P=2$; $Q=e^{-x}$ ആകുന്നു.

$$\int Pdx=\int 2dx=2x.$$

$$\text{അങ്ങനെ,}\quad \text{I.F.}=e^{\int Pdx}=e^{2x}.$$

$$\text{അതുകൊണ്ട് (1) ന്റെ നിർദ്ധാരണം}\quad ye^{\int Pdx}=\int Qe^{\int Pdx}dx+C.$$

അതുകൊണ്ട്, $ye^{2x}=\int e^{-x}e^{2x}dx+C$ അല്ലെങ്കിൽ $ye^{2x}=e^{x}+C=y=e^{-x}+Ce^{-2x}$ എന്നത് യഥാർത്ഥ നിർദ്ധാരണമാകുന്നു.

ഉദാഹരണം 10.23

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $\left[y\left(1-x\tan x\right)+x^2\cos x\right]dx-xdy=0$.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യത്തെ ഇപ്രകാരം എഴുതാം $\frac{dy}{dx}+\frac{\left(x\tan x-1\right)}{x}y=x\cos x$.

ഇത് ഒരു രേഖീയ അവകലന സമവാക്യമാകുന്നു $P=\frac{\left(x\tan x-1\right)}{x}$; $Q=x\cos x$.

$$\int Pdx=\int\frac{\left(x\tan x-1\right)}{x}dx=-\log|\cos x|-\log|x|=-\log|x\cos x|=\log\frac{1}{|x\cos x|}.$$

$$\text{അങ്ങനെ,}\quad \text{I.F.}=e^{\int Pdx}=e^{\log\frac{1}{|x\cos x|}}=\frac{1}{x\cos x}$$

$$\text{നിർദ്ധാരണം}\quad ye^{\int Pdx}=\int Qe^{\int Pdx}dx+C$$

$$\text{അതായത്.,}\quad y\frac{1}{x\cos x}=\int\left(x\cos x\right)\frac{1}{x\cos x}dx+C$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 167 15-02-2023 15:23:31

അല്ലെങ്കിൽ $y\dfrac{1}{x\cos x} = x + C$

അല്ലെങ്കിൽ $y = x^2\cos x + Cx\cos x$ എന്നത് നിങ്ങൾ ആവശ്യപ്പെട്ട നിർദ്ധാരണമാകുന്നു.

ഉദാഹരണം 10.24

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക : $\dfrac{dy}{dx} + 2y\cot x = 3x^2\operatorname{cosec}^2 x$.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യം $\dfrac{dy}{dx} + 2y\cot x = 3x^2\operatorname{cosec}^2 x$.

ഇത് ഒരു രേഖീയ അവകലന സമവാക്യമാകുന്നു, $P = 2\cot x$; $Q = 3x^2\operatorname{cosec}^2 x$.

$$\int P dx = \int 2\cot x dx = 2\log|\sin x| = \log|\sin x|^2 = \log\sin^2 x.$$

അങ്ങനെ, $\text{I.F} = e^{\int P dx} = e^{\log\sin^2 x} = \sin^2 x$.

നിർദ്ധാരണം. $ye^{\int P dx} = \int Qe^{\int P dx} dx + C$.

$$y\sin^2 x = \int 3x^2\operatorname{cosec}^2 x\cdot\sin^2 x dx + C = \int 3x^2 dx + C = x^3 + C.$$

അങ്ങനെ, $y\sin^2 x = x^3 + C$ എന്നത് യഥാർത്ഥ സമവാക്യമാകുന്നു.

ഉദാഹരണം 10.25

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $\left(1+x^3\right)\dfrac{dy}{dx} + 6x^2y = 1 + x^2$.

നിർദ്ധാരണം

$\dfrac{dy}{dx}$ ന്റെ ഗുണോത്തരം 1 ആയിരിക്കുകയും ഇരുവശങ്ങളും $\left(1+x^3\right)$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുകയും ചെയ്യുക.

അപ്പോൾ സമവാക്യം $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{6x^2y}{1+x^3} = \dfrac{1+x^2}{1+x^3}$ എന്നാകുന്നു.

ഇത് y അടങ്ങിയിട്ടുള്ള ഒരു രേഖീയ അവകലന സമവാക്യമാകുന്നു.

ഇവിടെ, $P = \dfrac{6x^2}{1+x^3}; Q = \dfrac{1+x^2}{1+x^3}$

$$\int P dx = \int\frac{6x^2}{1+x^3}dx = 2\log\left|1+x^3\right| = \log\left|1+x^3\right|^2 = \log\left(1+x^3\right)^2$$

അങ്ങനെ I.F. $= e^{\int P dx} = e^{\log\left(1+x^3\right)^2} = \left(1+x^3\right)^2$

നിർദ്ധാരണം എന്നത് $ye^{\int P dx} = \int Qe^{\int P dx} dx + C$ ആകുന്നു.

അതായത്, $y\left(1+x^3\right)^2 = \int\frac{1+x^2}{1+x^3}\left(1+x^3\right)^2 dx + C = \int\left(1+x^2\right)\left(1+x^3\right)dx + C = \int\left(1+x^2+x^3+x^5\right)dx + C$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 168 15-02-2023 15:23:38

അല്ലെങ്കിൽ $y\left(1+x^3\right)^2 = x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}+C$

$y = \frac{1}{(1+x^3)^2}\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\frac{x^6}{6}+C\right]$ എന്നത് യഥാർത്ഥ നിർദ്ധാരണമാകുന്നു.

ഉദാഹരണം 10.26

നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക $ye^y dx = \left(y^3+2xe^y\right)dy$.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യത്തെ $\frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x = y^2e^{-y}$ എന്ന് എഴുതാവുന്നതാണ്.

ഇത് ഒരു രേഖീയ അവകലന സമവാക്യമാകുന്നു. ഇവിടെ $P = -\frac{2}{y}$; $Q = y^2e^{-y}$.

$$\int P dy = \int -\frac{2}{y}dy = -2\log|y| = \log|y|^{-2} = \log\left(\frac{1}{y^2}\right),$$

$$\text{അങ്ങനെ, I.F.} = e^{\int Pdy} = e^{\log\left(\frac{1}{y^2}\right)} = \frac{1}{y^2}.$$

$$\text{നിർദ്ധാരണം എന്നത് } xe^{\int Pdy} = \int Qe^{\int Pdy}dy + C$$

$$\text{അതായത്, } x\left(\frac{1}{y^2}\right) = \int y^2e^{-y}\left(\frac{1}{y^2}\right)dy + C = \int e^{-y}dy + C = -e^{-y} + C$$

$$\text{അല്ലെങ്കിൽ } x = -y^2e^{-y} + Cy^2 \text{ എന്നത് യഥാർത്ഥ നിർദ്ധാരണമാകുന്നു.}$$

അഭ്യാസം 10.7

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള രേഖീയ അവകലന സമവാക്യങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക:

1. $\cos x\frac{dy}{dx} + y\sin x = 1$
2. $\left(1-x^2\right)\frac{dy}{dx} - xy = 1$
3. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = \sin x$
4. $\left(x^2+1\right)\frac{dy}{dx} + 2xy = \sqrt{x^2+4}$
5. $\left(2x-10y^3\right)dy + ydx = 0$
6. $x\sin x\frac{dy}{dx} + \left(x\cos x + \sin x\right)y = \sin x$
7. $\left(y - e^{\sin^{-1}x}\right)\frac{dx}{dy} + \sqrt{1-x^2} = 0$
8. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{(1-x)\sqrt{x}} = 1-\sqrt{x}$
9. $\left(1+x+xy^2\right)\frac{dy}{dx} + \left(y+y^3\right) = 0$
10. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x\log x} = \frac{\sin 2x}{\log x}$
11. $\left(x+a\right)\frac{dy}{dx} - 2y = \left(x+a\right)^4$
12. $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2 x}{1+x^3} - \frac{3x^2}{1+x^3}y$
13. $x\frac{dy}{dx} + y = x\log x$
14. $x\frac{dy}{dx} + 2y - x^2\log x = 0$
15. $\frac{dy}{dx} + \frac{3y}{x} = \frac{1}{x^2}$, ആയിരിക്കുമ്പോൾ $y = 2$ ആകുന്നു $x = 1$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 169 15-02-2023 15:23:45

10.8 ക്രമം ഒന്ന് ആയിട്ടുള്ള സാധാരണ അവകലന സമവാക്യങ്ങളുടെ പ്രയോഗങ്ങൾ

യഥാർത്ഥ ലോകത്തിലെ പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് പരിഹാരം കണ്ടെത്തുന്നതിന് അവകലന സമവാക്യങ്ങൾക്ക് വളരെ വിശാലമായ പങ്കാണുള്ളത്. ഭാവിയിൽ അല്ലെങ്കിൽ അജ്ഞാതമായ ഒരു സ്ഥലത്ത് സ്വഭാവ രീതികൾ പ്രവചിക്കാൻ അവകലന സമവാക്യങ്ങളുടെ വിഷയത്തിന് വിപുലമായ പ്രയോഗങ്ങളുണ്ട്. നിരവധി പ്രശ്നങ്ങളിൽ അളവ് മാറുന്ന നിരക്ക് തന്നിട്ടുള്ള ഫലനങ്ങളുടെ അളവ് അല്ലെങ്കിൽ സമയം എന്നിവയെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കും. ഇത്തരത്തിലുള്ള മൂല്യങ്ങൾ മാത്രം പരിഗണിക്കുക. ഇവിടെ x നെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് അളവിന്റെ അളവ് എടുക്കുന്ന സമയത്തെയാണ് കൂടാതെ തൽക്ഷണ നിരക്കിന്റെ അളവ് എന്നതിന്റെ സമയം t എന്നത് $\frac{dx}{dt}$ ആയി മാറുന്നു. ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്ന അവകലന സമവാക്യം എന്നതിന്റെ രൂപം $\frac{dx}{dt} = f(x,t)$ എന്നാകുന്നു. ഈ വിഭാഗത്തിൽ ഞങ്ങൾ പരിഗണിക്കുന്നത് ഈ രീതിയിലുള്ള കണക്കുകളാണ്. കൂടാതെ നിരക്ക് അനുസരിച്ച് ഞങ്ങൾ അർത്ഥമാക്കുന്നത് തൽക്ഷണ നിരക്ക് മാത്രമാണ്.

10.8.1 ജനസംഖ്യാ വളർച്ച

ഇപ്പോൾ ഒരു ജനസംഖ്യയുടെ വളർച്ച (ഉദാഹരണത്തിന് മനുഷ്യൻ, ഒരു മൃഗം, അല്ലെങ്കിൽ ഒരു ബാക്ടീരിയ കോളനി) സമയത്തിന്റെ പ്രവർത്തനമായി ഞങ്ങൾ കണക്കാക്കുന്നു.

$x(t)$ എന്നത്ജനസംഖ്യയുടെവലുപ്പമായികണക്കാക്കാം $x(t)$ എന്നത്പൂർണ്ണസംഖ്യമൂല്യമുള്ളതാണെങ്കിലും $x(t)$ യെ ഒരു അവകലന ഫലനമായി കണക്കാക്കുകയും $x(t)$ യെ നിർണ്ണയിക്കാൻ അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ സാങ്കേതികതകൾ ഉപയോഗിക്കുകയും ചെയ്യാം. അക്കാലത്തെ ജനസംഖ്യയുടെ അളവിന് നേരിട്ട് ആനുപാതികമായ തോതിൽ ജനസംഖ്യ വളരുന്നുവെന്ന് കരുതുക.

$\frac{dx}{dt} = kx$, എന്ന് കിട്ടുന്നു ഇവിടെ k എന്നത് ആനുപാതികതയുടെ സ്ഥിരമാണ് . … (1)

ഇവിടെ $k > 0$, അതുകൊണ്ട് ജനസംഖ്യ എല്ലായ്പ്പോഴും വർദ്ധിക്കുന്നു.

അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം $x(t) = Ce^{kt}$, C എന്നത് സമാകലനത്തിന്റെ സ്ഥിരസംഖ്യയാണ് C, k എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ നിർണ്ണയിക്കുന്നത് ആരംഭ ദിശയിലെ വ്യവസ്ഥകളിൽ കൂടിയാണ് അതിനാൽ ജനസംഖ്യ കാലത്തിനനുസരിച്ച് ഗണ്യമായി വർദ്ധിക്കുന്നു. ജനസംഖ്യാ വളർച്ചയെക്കുറിച്ചുള്ള ഈ നിയമത്തെ **മാൽത്തൂഷിയൻ നിയമം** എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണം 10.27

ഒരു ജനസംഖ്യയുടെ വളർച്ച നിലവിലുള്ള സംഖ്യയ്ക്ക് ആനുപാതികമാണ്. ഒരു കോളനിയിലെ ജനസംഖ്യ 50 വർഷത്തിനുള്ളിൽ ഇരട്ടിയാണെങ്കിൽ എത്രവർഷത്തിനുള്ളിൽ ജന സംഖ്യ മൂന്നിരട്ടിയാകും?

നിർദ്ധാരണം

സമയം t യും $x(t)$ ജനസംഖ്യയാണെന്നുമിരിക്കട്ടെ അപ്പോൾ $\frac{dx}{dt} = kx$.

ചരത്തെ വേർപെടുത്തിയാൽ $\frac{dx}{x} = kdt$.

ഇരുവശങ്ങളും സമാകലനപ്പെടുത്തിയാൽ കിട്ടുന്നത്, $\log|x| = kt + \log|C|$ അല്ലെങ്കിൽ $x = Ce^{kt}$, ഇവിടെ C ഒരു അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരാങ്കമാണ്.

x_0 എന്നത് ജനസംഖ്യയും $t = 0$ യും ആയാൽ $C = x_0$.

അപ്പോൾ കിട്ടുന്നത് $x = x_0 e^{kt}$.

$x = 2x_0$, യും $t = 50$ ഉം ആയാൽ, $k = \frac{1}{50}\log 2$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

അങ്ങനെ, t സമയമാകുമ്പോൾ ജനസംഖ്യ $x = x_0 2^{\frac{t}{50}}$ എന്നാകുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 170 15-02-2023 15:23:49

t_1 വർഷത്തിനുള്ളിൽ ജനസംഖ്യ മൂന്നിരട്ടിയായാണെന്ന് കരുതുക.

അതായത്, $x = 3x_0$, ആയിരിക്കുമ്പോൾ $t = t_1$.

$t_1 = 50\left(\frac{\log 3}{\log 2}\right)$ ആകുന്നു. അതുകൊണ്ട് ജനസംഖ്യ $50\left(\frac{\log 3}{\log 2}\right)$ വർഷത്തിനുള്ളിൽ മൂന്നിരട്ടിയായി വർദ്ധിക്കുന്നു.

10.8.2. രാസപ്രവർത്തനപരമായ ക്ഷതം

ഒരു ആറ്റത്തിന്റെ ന്യൂക്ലിയസിൽ പ്രോട്ടോണുകളുടെയും ന്യൂട്രോണുകളുടെയും സംയോജനം അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു. ഈ പ്രോട്ടോണുകളുടെയും ന്യൂട്രോണുകളുടെയും സംയോജനം അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു. പ്രോട്ടോണുകളുടെയും, ന്യൂട്രോണുകളുടെയും കോമ്പിനേഷനുകളിൽ പലതും അസ്ഥിരമാണ്, അതാണ് ആറ്റങ്ങൾ ക്ഷയിക്കുന്നത് അല്ലെങ്കിൽ മറ്റുപദാർത്ഥങ്ങളിലേയ്ക്ക് പരിവർത്തനം ചെയ്യുന്നത് അത്തരം അണുകേന്ദ്രങ്ങൾ **റേഡിയോ ആക്ടീവ്** ആണെന്ന് പറയപ്പെടുന്നു.

ഒരു പദാർത്ഥത്തിന്റെ ന്യൂക്ലിയസ്സുകൾ ക്ഷയിക്കുന്ന നിരക്ക് $\frac{d\mathrm{A}}{dt}$ പദാർത്ഥത്തിന്റെ ആപേക്ഷികത $\mathrm{A}(t)$ ആവശ്യമായ സമയം t എന്നിങ്ങനെയാണ്.

അപ്പോൾ കിട്ടുന്ന അവകലനസമവാക്യം $\frac{d\mathrm{A}}{dt} \propto \mathrm{A}$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{d\mathrm{A}}{dt} = k\mathrm{A}$ …(2), എന്നാകുന്നു. ഇവിടെ k എന്നത് സ്ഥിരമായ ആനുപാതിക സംഖ്യയാകുന്നു. ഇവിടെ ക്ഷയം സംഭവിക്കുന്നതിനാൽ $k < 0$, ആയിരിക്കും.

പരാമർശം

അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ (1), (2), ഇവ ഒരുപോലെയാണെന്ന് കാണുന്നു. എന്നാൽ ഒരു വ്യത്യാസമുള്ളത് ചിഹ്നങ്ങളുടെ വ്യാഖ്യാനങ്ങളിലും ആനുപാതികതയുടെ സ്ഥിരതയിലും മാത്രമാകുന്നു. വളർച്ചയാണെങ്കിൽ. $k > 0$ യും ക്ഷയമാണ് സംഭവിക്കുന്നതെങ്കിൽ, $k < 0$ യും ആയിരിക്കും.

ഒരു അവകലന സമവാക്യത്തിന് വ്യത്യസ്ത പ്രതിഭാസങ്ങൾക്ക് ഗണിതശാസ്ത്ര മാതൃക നൽകാൻ കഴിയും.

ഉദാഹരണം 10.28

ഒരു റേഡിയോ ആക്ടീവ് ഐസോടോപ്പിന് $200\mathrm{mg}$, പിണ്ഡമുണ്ട് രണ്ട് വർഷത്തിനു ശേഷം $50\mathrm{mg}$ ആയി കുറയുന്നു. ഏതു സമയത്തു വേണമെങ്കിലും ശേഷിക്കുന്ന ഐസോടോപ്പിന്റെ അളവ് കണ്ടെത്തുക? അതിന്റെ അർദ്ധായുസ് എന്താണ് (അർദ്ധായുസ്സ് എന്നാൽ റേഡിയോ ആക്ടിവിറ്റിക്കായി എടുത്ത സമയം. ഒരു നിർദ്ദിഷ്ട ഐസോടോപ്പിന്റെ യഥാർത്ഥ മൂല്യത്തിന്റെ പകുതിയായി കുറയുന്നു).

നിർദ്ധാരണം

t വർഷങ്ങൾക്ക് ശേഷമുള്ള ഐസോടോപ്പിന്റെ പിണ്ഡം A ആകുന്നു. $-k$ എന്നത് സ്ഥിര അനുപാതമാണ്. $k > 0$. ആകുന്നു. അഴുകലിന്റെ രൂപത്തെ $\frac{d\mathrm{A}}{dt} = -k\mathrm{A}$, എന്നും കണക്കാക്കുന്നു. ഇവിടെ നെഗറ്റീവ് ചിഹ്നം സൂചിപ്പിക്കുന്നത് പിണ്ഡം കുറയുന്നുവെന്നാണ്. ഇത് ഒരു വേർതിരിച്ച സമവാക്യമാകുന്നു ചരങ്ങളെ വേർതിരിച്ച് $\frac{d\mathrm{A}}{\mathrm{A}} = -kdt$ എന്ന് എഴുതുന്നു.

ഇരു വശവും സമാകലനപ്പെടുത്തിയാൽ $\log|\mathrm{A}| = -kt + \log|C|$ അല്ലെങ്കിൽ $A = Ce^{-kt}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

തന്നിട്ടുള്ളത് ആരംഭമാസ്സ് $200\mathrm{mg}$. അതായത്, $\mathrm{A} = 200$ അപ്പോൾ $t = 0$ ആകുന്നു. അങ്ങനെ, $C = 200$.

അപ്പോൾ കിട്ടുന്നത് $\mathrm{A} = 200e^{-kt}$.

അതുപോലെ, $\mathrm{A} = 150$, $t = 2$ അതായത്, $k = \frac{1}{2}\log\left(\frac{4}{3}\right)$.

അങ്ങനെ t, വർഷങ്ങൾക്ക് ശേഷമുള്ള ബാക്കി വന്ന ഐസോടോപ്പിന്റെ പിണ്ഡത്തിന്റെ അളവ് $\mathrm{A}(t) = 200e^{-\frac{t}{2}\log\left(\frac{4}{3}\right)}$ എന്നാകുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 171 15-02-2023 15:23:53

അങ്ങനെ t_h എന്നത് സമയത്തിന് അനുസരിച്ച് $A = 100\text{mg}$.

അങ്ങനെ, $t_h = \dfrac{2\log\left(\frac{1}{2}\right)}{\log\left(\frac{3}{4}\right)}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

10.8.3. ന്യൂട്ടന്റെ തണുപ്പിക്കൽ/ചൂടാക്കൽ നിയമം

150° കപ്പ് കാപ്പി ഒഴിച്ച് $80^\circ C$ ൽ മേശപ്പുറത്ത് വയ്ക്കുന്നത് പരിഗണിക്കുക. കോഫിയുടെ താപനിലയ്ക്ക് എന്തു സംഭവിക്കും? മുറിയുടെ ഊഷ്മാവിൽ എത്തുന്നതു വരെ കപ്പ് കാപ്പി തണുക്കുമെന്ന് ഞങ്ങൾ നിരീക്ഷിക്കുന്നു. റഫ്രിജറേറ്ററിൽ നിന്ന് 35° ഗ്ലാസ് തണുത്ത വെള്ളം എടുത്ത് $80^\circ C$ മുറിയിൽ മോശപ്പുറത്ത് വയ്ക്കുക. തണുത്ത വെള്ളത്തിന്റെ താപനിലയ്ക്ക് എന്തു സംഭവിക്കും? അതുപോലെ മുറിയുടെ ഊഷ്മാവിൽ എത്തുന്നതു വരെ വെള്ളം ചൂടാക്കുന്നത് നമുക്ക് നിരീക്ഷിക്കാം.

ന്യൂട്ടന്റെ തണുപ്പിക്കൽ അല്ലെങ്കിൽ ചൂടാക്കൽ നിയമമനുസരിച്ച് ശരീരത്തിന്റെ താപ നില മാറുന്ന നിരക്ക് ശരീരത്തിന്റെ താപനിലയും ചുറ്റുമുള്ള മാധ്യമത്തിന്റെ താപനിലയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തിന് ആനുപാതികമാണ്. $T(t)$ ഒരു സമയത്ത് ശരീരത്തിന്റെ താപന ിലയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ സമയം t, ആകുന്നു. T_m എന്നത് ചുറ്റുമുള്ള മാധ്യമത്തിന്റെ താപനിലയും ശരീരത്തിന്റെ താപനില മാറുന്ന നിരക്കിനെ $\dfrac{dT}{dt}$ എന്നുമാണെങ്കിൽ ന്യൂട്ടൺ തണുപ്പിക്കൽ (അല്ലെങ്കിൽ) താപനം $\dfrac{dT}{dt} \propto T - T_m$ അല്ലെങ്കിൽ $\dfrac{dT}{dt} = k\left(T - T_m\right)$, ആകുന്നു. ഇവിടെ k ആനുപാതികതയുടെ സ്ഥിരത. രണ്ടായാലും തണുപ്പിക്കൽ അല്ലെങ്കിൽ താപനം T_m എന്നത് സ്ഥിരമാണെങ്കിൽ അത് $k < 0$ എന്ന കാരണത്താൽ നിലകൊള്ളുന്നു.

ഉദാഹരണം 10.29

ഒരു കൊലപാതക അന്വേഷണത്തിൽ കൃത്യം രാത്രി 8 മണിക്ക് ഒരു മൃതദേഹം ഒരു ഡിറ്റക്ടീവ് കണ്ടെത്തി ജാഗ്രയോടെ ഡിറ്റക്ടീവ് ശരീര താപനില അളക്കുകയും 70°F. ആണെന്ന് കണ്ടെത്തുകയും ചെയ്തു. രണ്ട് മണിക്കൂറിന് ശേഷം ഡിറ്റക്ടീവ് ശരീരതാപനില വീണ്ടും അളക്കുകയും അത് 60°F. ആണെന്ന് കണ്ടെത്തുകയും ചെയ്തു. മുറിയുടെ താപനില 50°F, ആണ് മരണത്തിന് മുമ്പുള്ളവ്യക്തിയുടെ ശരീരതാപനില 98.6°F, ആണെന്ന് അനുമാനിക്കുന്നു ഏത് സമയത്താണ് കൊലപാതകം നടന്നത്?

$\left[\log(2.43) = 0.88789;\quad \log(0.5) = -0.69315\right]$

നിർദ്ധാരണം

സമയം t ആകുമ്പോൾ ശരീര ഊഷ്മാവ് T യും സമയം 8 ആയിരുന്നപ്പോൾ ശരീര ഊഷ്മാവ് 70^0F യും ആയിരുന്നു.

ന്യൂട്ടന്റെ തണുപ്പിക്കൽ നിയമമനുസരിച്ച്, $\dfrac{dT}{dt} = k\left(T - 50\right)$ അല്ലെങ്കിൽ $\dfrac{dT}{T-50} = k\,dt$.

ഇരുവശങ്ങളും സമാകലനപ്പെടുത്തിയാൽ $\log|50 - T| = kt + \log C$ അല്ലെങ്കിൽ $50 - T = Ce^{kt}$.

$t = 0,\ T = 70$, ആകുമ്പോൾ $C = -20$

$t = 2, T = 60$, ആയിരുന്നപ്പോൾ $-10 = -20e^{k2}$ എന്നും.

അങ്ങനെ, $k = \dfrac{1}{2}\log\left(\dfrac{1}{2}\right)$ എന്ന് എഴുതാവുന്നതാണ്.

അതുകൊണ്ട് നിർദ്ധാരണം $50 - T = -20e^{\frac{1}{2}t\log\left(\frac{1}{2}\right)}$ അല്ലെങ്കിൽ $T = 50 + 20\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}}$ എന്നാകുന്നു

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 172 15-02-2023 15:23:58

ഇപ്പോൾ t, യുടെ മൂല്യം കണ്ടെത്താൻ ഞങ്ങൾ ആഗ്രഹിക്കുന്നു.

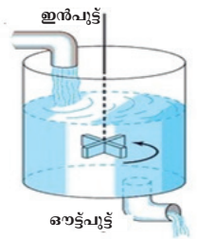
ഇതിനായി $T(t) = 98.6$, എന്നും $t = 2\left(\dfrac{\log\left(\frac{48.6}{20}\right)}{\log\left(\frac{1}{2}\right)}\right) \approx -2.56$ എന്നും എടുക്കുന്നു.

ഇത് ദൃശ്യമാകുന്നു. 5.30 p.m സമയമാണ് അയാൾ കൊല്ലപ്പെട്ടതെന്ന്.

10.8.4 മിശ്രിത പ്രശ്നങ്ങൾ

രാസ വ്യവസായത്തിൽ ഇടയ്ക്കിടെ മിശ്രിത പ്രശ്നങ്ങൾ ഉണ്ടാകാറുണ്ട്. ഒരൊറ്റ ടാങ്ക് ഉൾപ്പെടുന്ന അടിസ്ഥാന മോഡൽ പരിഹരിക്കുന്നതിന് ഞങ്ങൾ വിശദീകരിക്കുന്നു.

S എന്ന ഒരു പദാർത്ഥം ഒരു നിശ്ചിത നിരക്കിൽ ഒരു കണ്ടെയ്നറിൽ ഒഴുകാൻ അനുവദിച്ചിരിക്കുന്നു. ഒപ്പം മിശ്രിതം ഇളക്കി ഏകീകൃതമായി സൂക്ഷിക്കുന്നു. കൂടാതെ അത്തരമൊരു സാഹചര്യത്തിൽ, ഈ ഏകീകൃത മിശ്രിതം ഒരേ സമയം മറ്റൊരു നിരക്കിൽ കണ്ടെയ്നറിൽ നിന്ന് പുറത്തേക്ക് ഒഴുകുന്നു. ഇപ്പോൾ നമ്മൾ S പദാർത്ഥത്തിന്റെ അളവ് നിർണ്ണയിക്കാൻ ശ്രമിക്കുന്നു.



ചിത്രം. 10.2

T യുടെ സമയത്ത് നിലവിലുള്ള S ന്റെ അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കാൻ x നെ അനുവദിക്കുന്നു. ഒപ്പം t യുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് $\dfrac{dx}{dt}$ എന്ന അവകലനം മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഔട്ട് എന്നത് അത് പുറത്തു പോകുന്ന നിരക്കിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അപ്പോൾ നമുക്ക് $\dfrac{dx}{dt}$ ഇൻ - ഔട്ട് എന്ന സമവാക്യം കിട്ടുന്നു.

ഉദാഹരണം 10.30

ഒരു ടാങ്കിൽ 1000 ലിറ്റർ വെള്ളം അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു. അതിൽ 100 ഗ്രാം ഉപ്പ് അലിഞ്ഞു ചേരുന്നു. ഉപ്പുവെള്ളം (വെള്ളത്തിൽ ഉപ്പ് സാധാരണയായി സോഡിയം ക്ലോറൈഡ്) ഒരു വലിയ സാന്ദ്രീകരണ പരിഹാരമാണ്) മിനിറ്റിൽ 10 ലിറ്റർ എന്ന തോതിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്നു. ഒരോ ലിറ്ററിലും 5 ഗ്രാം ഉപ്പ് അലിഞ്ഞു ചേരുന്നു. ടാങ്കിന്റെ മിശ്രിതം ഇളക്കി ഏകീകൃതമായി സൂക്ഷിക്കുന്നു. ഉപ്പുവെള്ളം മിനിറ്റിൽ 10 ലിറ്റർ തീർന്നു സമയം t ആയിരിക്കുമ്പോഴുള്ള ഉപ്പിന്റെ അളവ് കണ്ടെത്തുക.

നിർദ്ധാരണം

$x(t)$ എന്നത് ടാങ്കിലെ ഉപ്പിന്റെ അളവിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇതിന്റെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് $\dfrac{dx}{dt}$ = ഇൻഫ്ലോറേറ്റ് ഔട്ട് - ഫ്ലോറേറ്റ്.

പുറത്തേയ്ക്ക് പോകുന്നതിന്റെ അളവ് ഒരു മിനിറ്റിൽ 10 ലിറ്റർ ആകുന്നു. അതായത് $10/1000 = 0.01$ ആകുന്നു. ടാങ്കിലെ ആകെ മിശ്രിതം അങ്ങനെ പുറത്തേയ്ക്ക് പോകുന്ന ഉപ്പ് 0.01 സമയം $x(t)$, യും ആകുന്നു. അതായത് $0.01x(t)$.

അങ്ങനെ അവകലന സമവാക്യം $\dfrac{dx}{dt} = 50 - 0.01x = -0.01(x - 5000)$ എന്നാകുന്നു.

ഇതിനെ $\dfrac{dx}{x - 5000} = -(0.01)dt$ എന്ന് എഴുതാം

ഇരുവശങ്ങളും സമാകലനപ്പെടുത്തിയാൽ $\log|x - 5000| = -0.01t + \log C$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 173 15-02-2023 15:24:01

അല്ലെങ്കിൽ $x-5000=Ce^{-0.01t}$ അല്ലെങ്കിൽ $x=5000+Ce^{-0.01t}$

ആദ്യമായി $t=0,\ x=100$, ആയാൽ $100=5000+C$, $C=-4900$.

അങ്ങനെ ടാങ്കിലെ ഉപ്പിന്റെ അളവ് സമയം t ആയിരിക്കുമ്പോൾ $x=5000-4900e^{-0.01t}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു. ■

അഭ്യാസം 10.8

1. ഒരു പ്രത്യേക ബാക്ടീരിയ സംസ്കരണത്തിൽ ബാക്ടീരിയകളുടെ എണ്ണത്തിൽ വർദ്ധനവിന്റെ നിരക്ക് നിലവിലെ സംഖ്യയുടെ ആനുപാതികമാണ്. 5 മണിക്കൂറിനുള്ളിൽ എണ്ണം മൂന്നിരട്ടിയാകുമ്പോൾ 10 മണിക്കൂറിനു ശേഷം എത്ര ബാക്ടീരിയകൾ ഉണ്ടെന്ന് കണ്ടെത്തുക ?
2. 40 വർഷത്തെ കാലയളവിൽ ജനസംഖ്യ 3,00,000 ൽ നിന്ന് 4,00,000 ആയി വർദ്ധിക്കുകയും ജന സംഖ്യയുടെ വർദ്ധനവ് ആ സമയത്തെ ജനസംഖ്യയ്ക്ക് ആനുപാതികമാണെന്നും തന്നിരുന്നാൽ t, സമയത്തിൽ നഗരത്തിലെ ജനസംഖ്യ കാണുക.
3. പ്രതിരോധവും മെസൽഫ് ഇൻഡക്റ്റൻസും അടങ്ങിയിട്ടുള്ള ഒരു ഇലക്ട്രിക് സർക്യൂട്ടിലുള്ള ഇലക്ട്രോ മെറ്റീവ് ബലത്തിന്റെ സമവാക്യം $E=Ri+L\frac{di}{dt}$, എന്നാകുന്നു. ഇവിടെ E എന്നത് സർക്യൂട്ടിലേയ്ക്കുള്ള ഇലക്ട്രോമെറ്റീവ് ബലവും, പ്രതിരോധം R ഉം L, എന്നത് വൈദ്യുത ചാലകതയുമാണ്. എങ്കിൽ $E=0$ സമയം t യും ആകുമ്പോഴുള്ള വൈദ്യുതി കണക്കാക്കുക.
4. $10\ m/s$ വേഗതയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു മോട്ടോർ ബോട്ടിന്റെ എഞ്ചിൻ അടഞ്ഞിരിക്കുന്നു. തുടർന്നുള്ള സമയത്ത് (എഞ്ചിൻ അടച്ചതിനുശേഷം) റിഡാർഡേഷൻ ആ സമയത്തെ വേഗതയ്ക്ക് തുല്യമാണ്. എഞ്ചിൻ സ്വിച്ച് ഓഫ് ചെയ്ത് 2 സെക്കന്റിനു ശേഷം ഉള്ള വേഗത കണ്ടെത്തുക.
5. ഒരു വ്യക്തി തുടർച്ചയായി 5% എന്ന നിരക്കിൽ ഒരു ബാങ്ക് അക്കൗണ്ടിൽ 10,000 നിക്ഷേപിക്കുന്നുവെന്ന് കരുതുക. 18 മാസത്തിനുശേഷം അയാളുടെ ബാങ്ക് അക്കൗണ്ടിൽ എത്ര പണം ഉണ്ടാകും?
6. റേഡിയോ ആക്ടീവ് ന്യൂക്ലിയസ് ക്ഷയം എന്നത് നിലവിലുള്ള സാമ്പിളുകളുടെ എണ്ണത്തിന് ആനുപാതിക മാണ്. ഒരു നിശ്ചിത സാമ്പിളിൽ റേഡിയോ ആക്ടീവ് ന്യൂക്ലിയസുകളുടെ യഥാർത്ഥ എണ്ണത്തിന്റെ 10%, 100 വർഷകാലയളവിൽ ശിഥിലമാകുന്നു. യഥാർത്ഥ റേഡിയോ ആക്ടീവ് ന്യൂക്ലിയസുകളുടെ എത്രശതമാനം 1000 വർഷത്തിനു ശേഷം നിലനിൽക്കും?
7. $80^\circ C$ മുതൽ $25^\circ C$ വരെയുള്ള മുറിയുടെ ഊഷ്മാവിൽ $100^\circ C$ ഊഷ്മാവുള്ള ജലം 10 മിനിട്ടുകൊ ണ്ട് തണുക്കുന്നു. കണ്ടെത്തുക?
   (i) 20 മിനിട്ടിനുശേഷമുള്ള ജലത്തിന്റെ താപനില
   (ii) താപനില $40^\circ C$ ഉള്ളപ്പോൾ

   $\left[\log_e\frac{11}{15}=-0.3101;\ \log_e 5=1.6094\right]$
8. രാവിലെ 10.00 A.M. ഒരു സ്ത്രീ മൈക്രോവേവ് ഓവനിൽ നിന്ന് ഒരു കപ്പ് ചൂടുള്ള കോഫി എടുത്ത് തണുപ്പിക്കാൻ അടുത്തുള്ള അടുക്കള കൗണ്ടറിൽ വച്ചു. ഈ നിമിഷത്തിൽ കോഫിയുടെ താപനില $180^\circ F$, ആയിരുന്നു. 10 മിനിട്ടിനുശേഷം അത് $160^\circ F$ ആയി അടുക്കളയുടെ സ്ഥിരമായ താപനില $70^\circ F$ ആണെന്ന് കരുതുക..
   (i) 10.15A.M കോഫിയുടെ താപനില എന്തായിരുന്നു.? $\left[\log\frac{9}{11}=-0.2006\right]$
   (ii) കാപ്പികുടിക്കാൻഇഷ്ടപ്പെടുന്നത്അതിന്റെതാപനില$130^\circ F$ നും$140^\circ F$ നുമിടയിലായിരിക്കുമ്പോൾ ഏത് സമയത്താണ്? അവൾ കോഫി കുടിച്ചിട്ടുണ്ടോ? $\left[\log\frac{6}{11}=-0.6061\right]$ $\left[\log\frac{7}{11}=-0.4519\right]$
9. $t=0$ സമയത്ത് $100^\circ C$ ലെ ഒരു കലം വെള്ളം തിളപ്പിച്ചാറുന്നു. ആ സമയത്ത് ഒരു സ്റ്റൗവിൽ നിന്ന് നീക്കം ചെയ്യുകയും ചെയ്യുന്നു. അടുക്കളയിൽ തണുക്കാൻ അനുവദിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. 5 മിനിട്ടിനു ശേഷം ജലത്തിന്റെ താപനില $80^\circ C$, ആയി കുറഞ്ഞു. മറ്റൊരു 5 മിനിട്ടിനുശേഷം അത് $65^\circ C$ ആയി കുറഞ്ഞു. അടുക്കളയുടെ താപനില നിർണ്ണയിക്കുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 174 15-02-2023 15:24:06

10. ഒരു ടാങ്കിൽ തുടക്കത്തിൽ 50 ലിറ്റർ ശുദ്ധജലം അടങ്ങിയിരിക്കുന്നു. സമയം $t = 0$ ആയിരുന്നു. ആ സമയം മുതൽ ലിറ്ററിന് 2 ഗ്രാം അലിഞ്ഞു ചേർന്ന ഉപ്പ് അടങ്ങിയ ഉപ്പുവെള്ളം മിനിറ്റിൽ 3 ലിറ്റർ എന്ന തോതിൽ ടാങ്കിലേയ്ക്ക് ഒഴുകുന്നു. മിശ്രിതം ഇളക്കി ഏകീകൃതമായി സൂക്ഷിക്കുകയും നന്നായി ഇളക്കിയ മിശ്രിതം ഒരേ നിരക്കിൽ ടാങ്കിൽ നിന്ന് ഒരേ സമയം ഒഴുകുകയും ചെയ്യുന്നു. ഏതുസമയത്ത് ടാങ്കിൽ ഉപ്പിന്റെ അളവ് കണ്ടെത്തും $t > 0$ ആയിരിക്കും.

അഭ്യാസം 10.9

FL6EV

തന്നിരിക്കുന്ന നാല് ഉത്തരങ്ങളിൽ നിന്ന് ശരിയായ അല്ലെങ്കിൽ ഏറ്റവും അനുയോജ്യമായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുക്കുക:

1. $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^{1/3} + x^{1/4} = 0$ അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമവും ഘാതവും യഥാക്രമം

(1) 2, 3 (2) 3, 3 (3) 2, 6 (4) 2, 4

2. $y = A\cos(x + B)$, A, B എന്നിവ പരാമീറ്ററുകളായ അവകലനസമവാക്യം കാണുക

(1) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ (2) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (3) $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ (4) $\frac{d^2x}{dy^2} = 0$

3. അവകലന സമവാക്യം $\sqrt{\sin x}\,(dx + dy) = \sqrt{\cos x}\,(dx - dy)$ ആയാൽ ഇവയുടെ ക്രമവും, ഘാതവും കാണുക

(1) 1, 2 (2) 2, 2 (3) 1, 1 (4) 2, 1

4. ആരം 'a' യും കേന്ദ്രം (h, k) യും ആയിട്ടുള്ള എല്ലാ വൃത്തങ്ങളുടെയും അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമം എന്ത്?

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 1

5. $y = Ae^x + Be^{-x}$, A, B എന്നിവ അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ ആയ സമവാക്യം കണ്ടെത്തുക

(1) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ (2) $\frac{d^2y}{dx^2} - y = 0$ (3) $\frac{dy}{dx} + y = 0$ (4) $\frac{dy}{dx} - y = 0$

6. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ എന്ന അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ സാധാരണ നിർദ്ധാരണം കാണുക

(1) $xy = k$ (2) $y = k\log x$ (3) $y = kx$ (4) $\log y = kx$

7. $2x\frac{dy}{dx} - y = 3$ എന്ന അവകലന സമവാക്യത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന നിർദ്ധാരണം ഏത്

(1) നേർരേഖകൾ (2) വൃത്തങ്ങൾ (3) പരാബോള (4) സർപ്പിളാകൃതി

8. $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം

(1) $y = ce^{\int pdx}$ (2) $y = ce^{-\int pdx}$ (3) $x = ce^{-\int pdy}$ (4) $x = ce^{\int pdy}$

9. $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1+y}{\lambda}$ എന്ന അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ സമാകലന ഘടകം എന്ത്

(1) $\frac{x}{e^{\lambda}}$ (2) $\frac{e^{\lambda}}{x}$ (3) λe^x (4) e^x

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 175 15-02-2023 15:24:13

10. $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)$ എന്നത് x, കൂടാതെ $P(x)$ ആയാൽ അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ സമാകലന ഘടകം എന്ത്?

(1) x (2) $\frac{x^2}{2}$ (3) $\frac{1}{x}$ (4) $\frac{1}{x^2}$

11. $y(x)=1+\frac{dy}{dx}+\frac{1}{1\cdot 2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+....$ എന്ന അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ ഘാതം കാണുക

(1) 2 (2) 3 (3) 1 (4) 4

12. p, q എന്നിവ ക്രമമായിട്ടുള്ള അവകലന സമവാക്യം $y\frac{dy}{dx}+x^3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)+xy=\cos x$, ആയാൽ

(1) $p<q$ (2) $p=q$ (3) $p>q$ (4) p നിലനിൽക്കുന്നു q നിലനിൽക്കുന്നില്ല

13. $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$ എന്ന അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം

(1) $y+\sin^{-1}x=c$ (2) $x+\sin^{-1}y=0$ (3) $y^2+2\sin^{-1}x=C$ (4) $x^2+2\sin^{-1}y=0$

14. $\frac{dy}{dx}=2xy$ എന്ന അവകലനസമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം

(1) $y=Ce^{x^2}$ (2) $y=2x^2+C$ (3) $y=Ce^{-x^2}+C$ (4) $y=x^2+C$

15. $\log\left(\frac{dy}{dx}\right)=x+y$ എന്ന അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം

(1) $e^x+e^y=C$ (2) $e^x+e^{-y}=C$ (3) $e^{-x}+e^y=C$ (4) $e^{-x}+e^{-y}=C$

16. $\frac{dy}{dx}=2^{y-x}$ ന്റെ നിർദ്ധാരണം

(1) $2^x+2^y=C$ (2) $2^x-2^y=C$ (3) $\frac{1}{2^x}-\frac{1}{2^y}=C$ (4) $x+y=C$

17. $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{\phi\left(\frac{y}{x}\right)}{\phi'\left(\frac{y}{x}\right)}$ എന്ന അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം

(1) $x\phi\left(\frac{y}{x}\right)=k$ (2) $\phi\left(\frac{y}{x}\right)=kx$ (3) $y\phi\left(\frac{y}{x}\right)=k$ (4) $\phi\left(\frac{y}{x}\right)=ky$

18. $\sin x$ സമാകലന ഘടകമായ രേഖീയ അവകലന സമവാക്യം $\frac{dy}{dx}+Py=Q$, ആയാൽ P യുടെ വില

(1) $\log\sin x$ (2) $\cos x$ (3) $\tan x$ (4) $\cot x$

19. ക്രമം n, $n+1$ ആയിട്ടുള്ള സാധാരണ നിർദ്ധാരണത്തിന്റെ അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരാങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം

(1) $n-1,\ n$ (2) $n,\ n+1$ (3) $n+1,\ n+2$ (4) $n+1,\ n$

20. ക്രമം 3 ആയിട്ടുള്ള അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ അനിയന്ത്രിത സ്ഥിരാങ്കങ്ങളുടെ എണ്ണം

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) 0

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 176 15-02-2023 15:24:21

21. അവകലന സമവാക്യം $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x+1}$ എന്നതിന്റെ സമാകലന ഘടകം കാണുക

(1) $\frac{1}{x+1}$ (2) $x+1$ (3) $\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ (4) $\sqrt{x+1}$

22. ജനസംഖ്യ P യും വർഷം t യും ആയ ജനസംഖ്യയിലെ വർദ്ധനവിന്റെ നിരക്ക്

(1) $P = Ce^{kt}$ (2) $P = Ce^{-kt}$ (3) $P = Ckt$ (4) $P = C$

23. t സമയത്തിനു ശേഷം ശേഷിക്കുന്ന p പദാർത്ഥങ്ങളുടെ അളവ് പദാർത്ഥത്തിന്റെ ബാഷ്പീകരണ നിരക്ക് ശേഷിക്കുന്ന തുകയ്ക്ക് ആനുപാതികമാണെങ്കിൽ

(1) $P = Ce^{kt}$ (2) $P = Ce^{-kt}$ (3) $P = Ckt$ (4) $Pt = C$

24. $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+3}{2y+f}$ എന്ന അവകലന സമവാക്യം ഒരു വൃത്തത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു എങ്കിൽ a യുടെ വില കാണുക

(1) 2 (2) –2 (3) 1 (4) –1

25. ഒരു വക്രത്തിന്റെ ചായ്‌വ് $y = f(x)$ ആകുന്നു. അപ്പോൾ വക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ (-1,1). എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോകുന്നുവെങ്കിൽ വക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം കാണുക.

(1) $y = x^3 + 2$ (2) $y = 3x^2 + 4$ (3) $y = 3x^3 + 4$ (4) $y = x^3 + 5$

സംഗ്രഹം

1. അറിയപ്പെടാത്ത ഫലനത്തിന്റെ കുറഞ്ഞത് ഒരു അവകലനമെങ്കിലും അടങ്ങിയിരിക്കുന്ന. ഏതെങ്കിലും സമവാക്യമാണ് അവകലന സമവാക്യം കൂടാതെ സാധാരണ അവകലജം അല്ലെങ്കിൽ ഭാഗിക അവകലജം.
2. ഒരു അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ **ക്രമം** അവകലനത്തിലെ ഏറ്റവും ഉയർന്ന അവകലജമാകുന്നു.
3. ഒരു അവകലന സമവാക്യം ഒരു പോളിനോമിയൽ രൂപത്തിൽ പ്രകടമാകുമെങ്കിൽ, ഉയർന്ന ഓർഡർ ഡെറിവേറ്റീവിന്റെ സംയോജിത ഘാതത്തെ അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ **ഘാതം** എന്ന് വിളിക്കുന്നു.
4. അവകലന സമവാക്യം ഏറ്റവും ഉയർന്ന ക്രമം അവകലജമുള്ള പോളിനോമിയൽ സമവാക്യ രൂപത്തിൽ പ്രകടമാകില്ല. തുടർന്ന് അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ അളവ് നിർവചിക്കപ്പെടുന്നില്ല.
5. ഒരു സ്വതന്ത്ര ചരത്തെ സംബന്ധിച്ച് ഒന്നോ അതിലധികമോ ഫലനങ്ങളുടെ സാധാരണ അവകലജങ്ങൾ മാത്രമേ ഇവ അവകലന സമവാക്യത്തിൽ അടങ്ങിയിട്ടുള്ളൂവെങ്കിൽ, ഇത് ഒരു സാധാരണ അവകലന സമവാക്യം (ODE) ആണെന്ന് പറയപ്പെടുന്നു.
6. രണ്ടോ അതിലധികമോ സ്വതന്ത്ര ചരങ്ങളുടെ ഒന്നോ അതിലധികമോ ഫലനങ്ങളുടെ ഭാഗിക അവകലജങ്ങൾമാത്രം ഉൾപ്പെടുന്ന ഒരു സമവാക്യത്തെയാണ് ഭാഗിക അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ (PDE) എന്ന് പറയുന്നത്.
7. ഒരു ഏകപക്ഷീയമായ സ്ഥിരമായ വരുമാനം ആദ്യ ക്രമമുള്ള അവകലനസമവാക്യം ഇല്ലാതാക്കുന്നതിന്റെ ഫലവും രണ്ട് അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരതകളെ രണ്ടാം ക്രമമുള്ള അവകലന സമവാക്യത്തിലേയ്ക്ക് നയിക്കുന്നു.
8. അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ ഒരു നിർദ്ധാരണം അവകലനസമവാക്യത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന സ്വതന്ത്രചരം (s) ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ആശ്രിത ചരത്തിലുള്ള ഒരു പദപ്രയോഗമാണ്.
9. അവകലനസമവാക്യത്തിന്റെ ക്രമം പോലെ അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരതകൾ അടങ്ങിയിരിക്കുന്ന നിർദ്ധാണത്തെ **പൊതു നിർദ്ധാരണം** എന്നു വിളിക്കുന്നു.
10. അവകലന സമവാക്യത്തിന്റെ പൊതുവായ നിർദ്ധാരണത്തിൽ അനിയന്ത്രിതമായ സ്ഥിരതകൾക്ക് ഞങ്ങൾ പ്രത്യേക മൂല്യങ്ങൾ നൽകിയാൽ, ഫലമുണ്ടാകുന്ന നിർദ്ധാരണത്തെ ഒരു പ്രത്യേക നിർദ്ധാരണം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 177 15-02-2023 15:24:23

11. $f_1(x)g_1(y)dx + f_2(x)g_2(y)dy = 0$ എന്ന രൂപത്തിന്റെ സമവാക്യത്തെ ചരം വേർതിരിക്കാവുന്ന അല്ലെങ്കിൽ വേർതിരിക്കാവുന്ന സമവാക്യമുള്ള ഒരു സമവാക്യം എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

12. ഫലനം $f(x, y)$ ഒരു ഏകകാല ഫലനമെന്ന് പറയണമെങ്കിൽ $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ ആയിരിക്കും. ഘാതം n ചരം x എന്നിവയാണ്. ഇതിനെ യൂളറിന്റെ ഏകത എന്ന് വിളിക്കുന്നു. x, y , t എന്നിവ നിയന്ത്രിതങ്ങളായിരിക്കും.

13. $f(x, y)$ ഘാതം പൂജ്യമായ ഏകകാല ഫലനമാണ്. അത് ഉൾപ്പെടുന്ന ഫലനം g ആകുന്നു. എങ്കിൽ $f(x, y)$ എല്ലായ്പ്പോഴും $g\left(\frac{y}{x}\right)$ രൂപത്തിലായിരിക്കും.

14. ഒരു സാധാരണ അവകലന സമവാക്യത്തെ ഏകകാല രൂപത്തിലാണെന്ന് പറയണമെങ്കിൽ ആ അവകലന സമവാക്യം $\frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$ രൂപത്തിലായിരിക്കണം.

15. അവകലന സമവാക്യം $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ [അവകലന രൂപത്തിൽ] ഏകകാലമാണെന്ന് പറയണമെങ്കിൽ M , N ഒരേ ഘാതമുള്ള ഏകകാല ഫലനങ്ങളായിരിക്കണം.

16. $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ എന്നത് ഒന്നാം കൃതിയിലുള്ള അവകലന സമവാക്യമാണ്. P , Q എന്നിവ x ന്റെ ഫലനങ്ങൾ ആകുന്നു. സ്വതന്ത്രചരം y ഉം സ്വതന്ത്രചരം x നെ സംബന്ധിച്ച അതിന്റെ അവകലജം $\frac{dy}{dx}$ ഉം ഒന്നാം കൃതിയിൽ ആയിരിക്കണം. തന്നിരിക്കുന്ന അവകലന സമവാക്യം (1) ന്റെ നിർദ്ധാരണം $ye^{\int Pdx} = \int Qe^{\int Pdx}dx + C$ ആകുന്നു. ഇവിടെ $e^{\int Pdx}$ എന്നത് സമാകലന ഘടകം (I.F.) ആകുന്നു.

17. $\frac{dx}{dy} + Px = Q$, എന്നത് ഒന്നാം കൃതിയിലുള്ള ഒരു അവകലന സമവാക്യമാണ് P യും Q വും y യുടെ മാത്രം ഫലനങ്ങളാണ്. ഇവിടെ x ന്റെ ഗുണനഫലമല്ലാത്ത അതിന്റെ അവകലജമായ $\frac{dx}{dy}$ യ്ക്കും ഒന്നും സംഭവിക്കുന്നില്ല. ഒപ്പം തന്നെ x എന്ന ആശ്രിത ചരവും അതിന്റെ അവകലജവും അതിനെ ആശ്രയിച്ചുള്ള സ്വതന്ത്രമല്ലാത്ത ചരം y യുടെയും ഘാതം 1 ആയിരിക്കും. ഇപ്രകാരം നിർദ്ധാരണം $xe^{\int Pdy} = \int Qe^{\int Pdy}dy + C$ എന്ന് എഴുതവുന്നതാണ്.

18. ഒരു അളവിന്റെ തുകയെ x എന്നും സമയം t , എന്നും സൂചിപ്പിക്കുന്നു. സമയം t യുടെ അളവ് മാറുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന തൽക്ഷണ നിരക്ക് $\frac{dx}{dt}$ ആകുന്നു. ഇതനുസരിച്ച് അവകലന സമവാക്യം $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$ എന്നാകുന്നു.

ICT CORNER

https://ggbm.at/dy9kwgbt അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക

ബ്രൗസർ ഓപ്പൺ ചെയ്ത് തന്നിട്ടുള്ള URL ലിങ്ക് ടൈപ്പ് ചെയ്യുകയോ അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുകയോ ചെയ്യുക. ജിയോജിബ്രയിൽ12 ാം സ്റ്റാൻഡേർഡ് മാത്തമാറ്റിക്സ് വാല്യം -2 എന്ന് പേരുള്ള വർക്ക് ബുക്ക് ഓപ്പണാകും. നിങ്ങളുടെ ടെക്സ്റ്റ് ബുക്കുമായി ബന്ധപ്പെട്ട അധ്യായങ്ങൾ വർക്ക്ബുക്കിന്റെ ഇടത് വശത്ത് ഉണ്ടാകും. സാധാരണ അവകലന സമവാക്യങ്ങൾ എന്നു പേരുള്ള അധ്യായം ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. അപ്പോൾ ഈ അധ്യായവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ധാരാളം വർക്ക്ഷീറ്റുകൾ നിങ്ങൾക്ക് കാണാൻ കഴിയും. അങ്ങനെ എല്ലാ വർക്ക് ഷീറ്റിലും എത്തുക

12th Mathematics Vol 2 Chapter 10 Malayalam.indd 178 15-02-2023 15:24:28

അധ്യായം

11

സംഭാവ്യത വിതരണങ്ങൾ

VSJPT

സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തത്തെ സാമാന്യബുദ്ധി കണക്കുകൂട്ടലിലേക്ക് ചുരുക്കിയിരിക്കുന്നു
-ലാപ്ലേസ്

ലാപ്ലേസ്
(1749-1827)

യാദൃശ്ചിക ചരങ്ങളുടെ (റാൻഡം വേരിയബിൾ) ചരിത്രവും അവ മാപ്പിംഗിലേക്ക് എങ്ങനെ പരിണമിച്ചു എന്നതും സാമ്പിൾ സ്പേസ് മുതൽ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ വരെ താൽപര്യമുള്ള വിഷയമായിരുന്നു. ആധുനിക ഗണങ്ങളുടെയും മാപ്പിംഗുകളുടെയും കണ്ടുപിടിത്തത്തിനുശേഷം വ്യാഖ്യാനം തീർച്ചയായും സംഭവിച്ചു. (1900), പക്ഷേ എറൈമെൻകോ പറയുന്ന പോലെ റാൻഡം വേരിയബിളുകൾ വളരെ നേരത്തെ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു. റാൻഡം വേരിയബിളുകളെ മാപ്പിംഗുകളായി വ്യാഖ്യാനിക്കേണ്ടതിന്റെ ആവശ്യകത ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞർക്ക് തോന്നി. 1812--ൽ ലാപ്ലേസ് സിദ്ധാന്തം അനെറ്റിക്ഡെസ് സംഭാവ്യതകളെക്കുറിച്ചുള്ള തന്റെ പുസ്തകം പ്രസിദ്ധീകരിച്ചു. സ്ഥിതിവിവരക്കണക്കുകളിൽ നിരവധി അടിസ്ഥാന ഫലങ്ങൾ നൽകി. ഇതിന്റെ ആദ്യ പകുതിയിൽ സംഭാവ്യത രീതികളും പ്രശ്നങ്ങളും രണ്ടാമത്തെ പകുതിയിൽ സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്കൽ ആപ്ലിക്കേഷനുകളും സംയോജിപ്പിച്ചു.

പഠനലക്ഷ്യങ്ങൾ

ഈ അദ്ധ്യായം പൂർത്തിയാക്കുമ്പോൾ കുട്ടികൾ താഴെപ്പറയുന്ന കാര്യങ്ങൾ പഠിക്കും

- റാൻഡം വേരിയബിൾ, വ്യതിരിക്തവും തുടർച്ചയായതുമായ റാൻഡം വേരിയബിളുകൾ നിർവചിക്കുക
- സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം നിർവ്വചിക്കുക
- സഞ്ചിത വിതരണ ഫലതത്തിൽ നിന്ന് സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം നിർണ്ണയിക്കുക
- സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനത്തിൽ നിന്ന് സഞ്ചിത വിതരണ ഫലനം കാണുക
- റാൻഡം വേരിയബിളിനായി ശരാശരിയും വ്യത്യാസവും (വ്യതിയാനം) കണക്കാക്കുക
- ബെർനോലിയം ദ്വിമാത വിതരണങ്ങളും തിരിച്ചറിയുകയും പ്രയോഗിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

11.1 ആമുഖം

ഒരു ക്രമരഹിതയുടെ സാധ്യമായ ഫലങ്ങളെ പൂർണ്ണമായും വിവരിക്കുന്ന ഒരു സാമ്പിൾ സ്പേസ് എന്ന ആശയം ഒരു വർഷത്തെ ഉയർന്ന ദ്വിതീയ കോഴ്സിന്റെ രണ്ടാം വാല്യത്തിൽ പരീക്ഷണം വികസിപ്പിച്ചെടുത്തിട്ടുണ്ട്.

ഈ അധ്യായത്തിൽ ഒരു റാൻഡത്തിന്റെ സാമ്പിൾ സ്ഥലത്ത് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന റാൻഡം വേരിയബിൾ എന്ന ഒരു ഫലനത്തെക്കുറിച്ച് ഞങ്ങൾ വിശദീകരിക്കുന്നത്. പരീക്ഷണവും അതിന്റെ സംഭാവ്യത വിതരണവും ആണ്.

11.2 യാദൃശ്ചികചരങ്ങൾ (റാൻഡംവേരിയബിൾ)

ക്രമരഹിതമായ ഒരു പരീക്ഷണത്തിന്റെ ഫലം എല്ലായ്പ്പോഴും സങ്കൽപ്പത്തിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നതിനുള്ള ലളിതമായ കാര്യമല്ല. ഞങ്ങൾ പരിഗണിച്ച നിരവധി ക്രമരഹിതമായ പരീക്ഷണങ്ങൾ, സാമ്പിൾസ്പേസ് S ഒരു വിവരണമാണ്. സാധ്യമായ ഫലങ്ങൾ, ആണ് ഒരു പരീക്ഷണത്തിന്റെ അല്ലെങ്കിൽ സാമ്പിൾസ്പേസ് S ബിന്ദുക്കൾ.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 179 15-02-2023 15:25:28

അത് അക്കങ്ങൾ ആകണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി ഒരു യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിൽ ഒരു നാണയം ടോസ് ചെയ്യുമ്പോൾ തല H, അല്ലെങ്കിൽ പൂവ് T ചില യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിന്റെ ഘട്ടങ്ങളിൽ പുറത്തുവരുന്ന ഫലങ്ങൾ സംഖ്യാമൂല്യങ്ങൾ ആവണമെന്നില്ല. അതുപോലെ പുറത്തുവരുന്ന ഫലങ്ങൾക്ക് നമ്മൾ ഒരു മൂല്യം സങ്കല്പിക്കുന്നു. അതായത് തലയ്ക്ക് 1 പൂവിന് 0 അംഗങ്ങൾക്ക് അത്തരം ഒരു ന്യൂമെറിക്കൽ മൂല്യം S എന്ന് കുറിക്കുന്നു. ഇതിനെ റാൻഡം വേരിയബിൾ എന്നു പറയുന്നു. ഒരു റാൻഡം വേരിയബിളിനെ ഫലനം എന്നും പറയുന്നു. അതായത് ഒരു റാൻഡം വേരിയബിൾ എന്നത്:

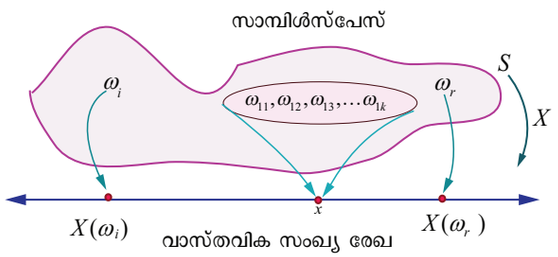
നിർവചനം 11.1

ഒരു റാൻഡം വേരിയബിൾ X *സാമ്പിൾ സ്പേസ് എന്ന വാസ്തവിക നമ്പറുകളിലേക്ക് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു ഫലനമാണ് ബിന്ദുക്കളുടെ വിപരീത ഇമേജ് അല്ലെങ്കിൽ* $\mathbb{R}$ *ന്റെ ഉപഗണം അല്ലെങ്കിൽ ഇന്റർവെൽ* S *ലെ ഒരു ഇവന്റ് ആണ് അതിനുള്ള സാധ്യത നിയുക്തമാക്കുന്നത്.*

റാൻഡം വേരിയബിളുകളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നതിന് ഞങ്ങൾ അക്ഷരമാലയിലെ വലിയ അക്ഷരങ്ങൾ ആയ X, Y, Z എന്നിവ ഉപയോഗിക്കുന്നു. കൂടാതെ റാൻഡം വേരിയബിളുകളുടെ സാധ്യമായ മൂല്യങ്ങളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നതിന് x, y, z പോലുള്ള ചെറിയ അക്ഷരങ്ങളും ഉപയോഗിക്കുന്നു.

$S = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots\}$ ഒരു റാൻഡം പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാമ്പിൾസ്പേസ് ആണെന്നും $\mathbb{R}$ യഥാർത്ഥ രേഖയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നുവെന്നും കരുതുക. റാൻഡം വേരിയബിൾ X എന്നത് S ൽ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു യഥാർത്ഥമൂല്യമുള്ള ഫലനമാണ്. ഇത് $X : S \to \mathbb{R}$. ω എന്നത് S ലെ ഒരു സാമ്പിൾ പോയിന്റ് ആണ് എങ്കിൽ $X(\omega)$ ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യയാണ്.

$X(\omega)$ എന്നത് പരിസരങ്ങളുടെ ഗണം ആണ് അതായത് $\omega \in S$ പരിസരഗണത്തെ R_x എന്ന് കുറിക്കുന്നു $R_x = \{X(\omega) / \omega \in S\}$.



ചിത്രം 11.1

ചിത്രം 11.1 ൽ ചില സാമ്പിളുകളെ മാപ്പിംഗിൽ കാണിക്കുന്നു പോയിന്റുകൾ ω_i അല്ലെങ്കിൽ സാമ്പിൾ സ്പേസ് S ലെ ഇവന്റുകളെ വാസ്തവികസംഖ്യാക്രമത്തിൽ R സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണത്തിന് $\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \ldots \omega_{1k} \in S$, എന്നിവയ്ക്ക് x ന്റെ സാധ്യമായ മൂല്യമാണെങ്കിൽ $\{\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \ldots \omega_{1k}\}$ എന്നിവയെ X ന്റെ വിപരീത ബിംബങ്ങൾ എന്നു വിളിക്കുന്നു.

അതായത് $X^{-1}(x) = \{\omega_{11}, \omega_{12}, \omega_{13}, \ldots \omega_{1k}\}$ എന്നത് S ലെ ഒരു ഇവന്റാണ്.

വിശദീകരണം 11.1

ഒരു നാണയം ഒരു പ്രാവശ്യം ടോസ്സ് ചെയ്യുന്നു. എങ്കിൽ അതിന്റെ സാമ്പിൾ സ്പേസിൽ 2 സാമ്പിൾ ബിന്ദുക്കൾ കാണും H (തല), T (പൂവ്).

അതായത് $S = \{T, H\}$

അതായത് $X : S \to \mathbb{R}$ എന്നത് തലകളുടെ എണ്ണം

എങ്കിൽ $X(T) = 0$, $X(H) = 1$.

X എന്നത് ഒരു റാൻസം വേരിയബിളും 0, 1 എന്നീ മൂല്യങ്ങൾ അടങ്ങിയതുമാണ്. $X(\omega)$ എന്നത് തലകളുടെ എണ്ണത്തെ കുറിക്കുന്നു എങ്കിൽ.

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \omega = \text{പൂവ്} \\ 1 & \omega = \text{തല} \end{cases}$$

ഉദാഹരണം 11.1

രണ്ടു നാണയം ഒരു പ്രാവശ്യം ടോസ്സ് ചെയ്താൽ, X എന്നത് പൂവുകളുടെ എണ്ണത്തെക്കുറിക്കുന്നു. എങ്കിൽ, (i) സാമ്പിൾസ്പേസ് എഴുതുക (ii) ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജ് (വിപരീതബിംബം) (iii) റാൻഡം വേരിയബിളുകളുടെ മൂല്യം, ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജുകളുടെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം ഇവ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

(i) സാമ്പിൾസ്പേസ് $S = \{H, T\} \times \{H, T\}$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 180 15-02-2023 15:25:33

$S = \{TT, TH, HT, HH\}$

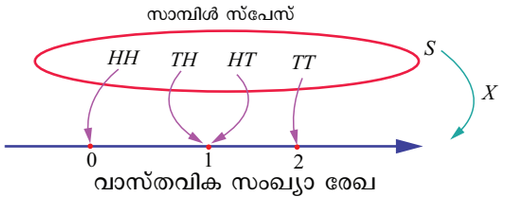
(ii) $X : S \to \mathbb{R}$ എന്നത് പൂവുകളുടെ എണ്ണം

അപ്പോൾ $X(TT) = 2$ (2 പൂവുകൾ)

$X(TH) = 1$ (1 പൂവുകൾ)

$X(HT) = 1$ (1 പൂവുകൾ)

$X(HH) = 0$ (0 പൂവുകൾ).



S ൽ നിന്നും $\mathbb{R}$ ലേക്കുള്ള ഒരു ഫലനം ആണ് $X(.)$

ചിത്രം 11.2

X എന്നത് 0, 1, 2 എന്നീ മൂല്യങ്ങൾ അടങ്ങിയ ഒരു റാൻഡം വേരിയബിൾ ആണ്.

$X(\omega)$ എന്നത് പൂവുകളുടെ എണ്ണത്തെ കുറിക്കുന്നു. ഇത് നല്കുന്നത്.

$$X(\omega) = \begin{cases} 2 \text{ എങ്കിൽ } \omega = TT \\ 1 \text{ എങ്കിൽ } \omega = HT, TH \\ 0 \text{ എങ്കിൽ } \omega = HH \end{cases}$$

1 ന്റെ ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജസ് ആണ് $\{TH, HT\}$. $\therefore X^{-1}(\{1\}) = \{TH, HT\}$.

(iii) ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജുകളുടെ അംഗങ്ങളുടെ പട്ടിക താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

റാൻഡം വേരിയബിളുകളുടെ മൂല്യങ്ങൾ	0	1	2	ആകെ
ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജുകളുടെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം	1	2	1	4

ഉദാഹരണം 11.2

ഒരു ജോഡി പകിടകൾ ഒരു പ്രാവശ്യം ഉരുട്ടുമ്പോൾ, X എന്നത് ആകെ സാമ്പിൾസ്പേസുകളുടെ എണ്ണത്തെ കുറിക്കുന്നു. എങ്കിൽ (i) സാമ്പിൾ സ്പേസ് കാണുക (ii) X എന്ന റാൻഡം വേരിയബിളുകളുടെ മൂല്യങ്ങൾ എടുക്കുക (iii) 10 ന്റെ ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജ് കാണുക (iv) X ന്റെ ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജുകളുടെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

(i) സാമ്പിൾസ്പേസ്

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

ഇതിൽ 36 (α, β) എന്ന ക്രമജോഡികൾ അടങ്ങിയിട്ടുണ്ട്. α , β എന്നിവ പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളും 1 മുതൽ 6 വരെ അക്കങ്ങൾ ഉള്ളതുമാണ്, X ലെ ഓരോ ബിന്ദുവും (a, b) എന്നത് ആ പഴക്കടയിലെ സംഖ്യകളുടെ തുക ആണ് .

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{Bmatrix}$$

$X(\alpha, \beta) = \alpha + \beta$.

$X(1,1) = 1+1 = 2$

$X(1,2) = X(2,1) = 3$

$X(1,3) = X(2,2) = X(3,1) = 4$

$X(1,4) = X(2,3) = X(3,2) = X(4,1) = 5$

$X(1,5) = X(2,4) = X(3,3) = X(4,2) = X(5,1) = 6$

$X(1,6) = X(2,5) = X(3,4) = X(4,3) = X(5,2) = X(6,1) = 7$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 181 15-02-2023 15:25:38

$$X(2,6) = X(3,5) = X(4,4) = X(5,3) = X(6,2) = 8$$

$$X(3,6) = X(4,5) = X(5,4) = X(6,3) = 9$$

$$X(4,6) = X(5,5) = X(6,4) = 10$$

$$X(5,6) = (6,5) = 11$$

$$X(6,6) = 12.$$

(ii) റാൻഡം വേരിയബിൾ X ന് എടുക്കുന്ന മൂല്യങ്ങൾ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

(iii) 10 ന്റെ ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജുകൾ $\{(4, 6), (5, 5), (6, 4)\}$.

(iv) ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജുകളുടെ എണ്ണം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു

റാൻഡം വേരിയബിളുകളുടെ മൂല്യം	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	ആകെ
ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജുകളുടെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	36

ഉദാഹരണം 11.3

ഒരു കുടത്തിൽ 2 വെള്ള പന്തുകളും 3 ചുമന്ന പന്തുകളും ഉണ്ട്. യാദൃശ്ചിക രീതിയിൽ 3 പന്തുകൾ ആ കുടത്തിൽ നിന്ന് തിരഞ്ഞെടുത്തു. X എന്നത് തെരഞ്ഞെടുക്കപ്പെട്ട ചുമന്ന പന്തുകളുടെ എണ്ണത്തെക്കുറിച്ചാൽ റാൻഡം വേരിയബിൾ X ന്റെ മൂല്യവും അതിന്റെ ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജ് എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക.

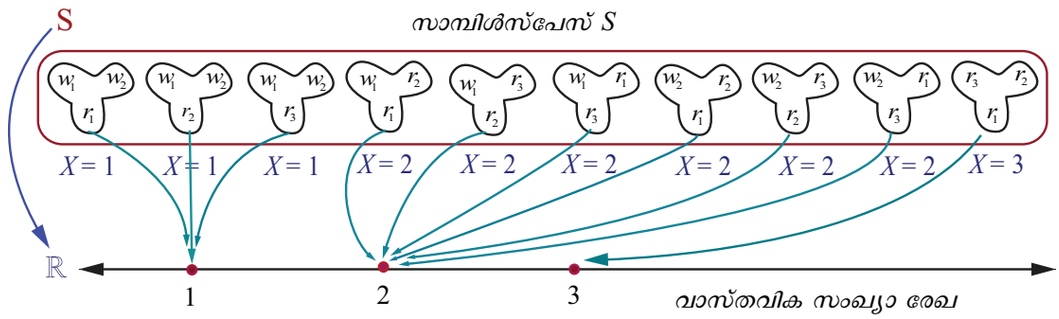
നിർദ്ധാരണം

ചുമന്ന, വെള്ള പന്തുകൾ യഥാക്രമം w_1, w_2, r_1, r_2, r_3 എന്നിരിക്കട്ടെ.

സാമ്പിൾ സ്പേസ് $5c_3 = 10$ വിവിധതരം സാമ്പിൾസ് ഉണ്ട് സൈസ് 3 യിലുള്ള.

$$S = \{w_1w_2r_1,\ w_1w_2r_2,\ w_1w_2r_3,\ w_1r_1r_2,\ w_1r_2r_3,\ w_1r_1r_3,\ w_2r_1r_2,\ w_2r_2r_3,\ w_2r_1r_3,\ r_1r_2r_3\}.$$

റാൻഡം വേരിയബിൾ X ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ 1, 2, 3 എന്നാകുന്നു.



X (.) S ൽ നിന്നും വാസ്തവിക സംഖ്യാരേഖകളിലേക്കുള്ള ഫലനം

ചിത്രം. 11.3

റാൻഡം വേരിയബിൾ X ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ	1	2	3	ആകെ
ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജിന്റെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം	3	6	1	10

പരാമർശം

X എന്നത് വെള്ളപ്പന്തുകളുടെ എണ്ണത്തെ കുറിക്കുന്നു. അതിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ യഥാക്രമം 0,1, 2 ആണെങ്കിൽ ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജിന്റെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 182 15-02-2023 15:25:42

റാൻഡം വേരിയബിൾ X ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ	0	1	2	ആകെ
ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജിന്റെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം	1	6	3	10

വിശദീകരണം 11.2

150 കുട്ടികൾ അടങ്ങിയ ഒരുബാച്ച് 4 ബസ്സുകളിലായിട്ട് വിനോദയാത്ര പോകുന്നു. ആദ്യത്തെ ബസ്സിൽ 38 കുട്ടികൾ, രണ്ടാമത്തെ ബസ്സിൽ 36 കുട്ടികളും, മൂന്നാമത്തെ ബസ്സിൽ 32 കുട്ടികളും ബാക്കിയുള്ള കുട്ടികൾ 4-ാമത്തെ ബസ്സിലും കയറുന്നു. ബസ്സ് ലക്ഷ്യസ്ഥാനത്തെത്തുമ്പോൾ 150 വിദ്യാർത്ഥികളിൽ ഒരാളെ യാദൃശ്ചികമായി തെരഞ്ഞെടുത്തു.

യാദൃശ്ചികമായി തെരഞ്ഞെടുത്ത വിദ്യാർത്ഥി ഇരുന്ന ബസ്സിനെ X എന്നെടുത്താൽ X ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ 32, 36, 38, 44 എന്നായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 11. 4

6 വെള്ള പന്തുകളും 4 കറുത്ത പന്തുകളും അടങ്ങിയ ഒരു കുടത്തിൽ നിന്നും യാദൃശ്ചികമായി രണ്ടു പന്തുകൾ എടുക്കുന്നു. അത് ഒരു കറുത്ത പന്തായാൽ ₹ 30 പാരിതോഷികം കിട്ടുന്നു. വെള്ളയായാൽ ₹ 20 കിട്ടുന്നു. എങ്കിൽ X എന്നത് ജയിക്കുന്ന തുകയെ കുറിക്കുന്നു. X ന്റെ മൂല്യങ്ങളെയും അതിന്റെ ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജുകളെയും കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

സാധ്യമായ സംഭവങ്ങൾ (i) രണ്ടും കറുത്തപന്തുകൾ (ii) ഒരു വെള്ളയും ഒരു കറുപ്പും പന്തുകൾ (iii) രണ്ടും വെള്ള പന്തുകൾ X എന്ന റാൻഡം വേരിയബിളിൽ ഉള്ള മൂല്യങ്ങൾ,

$$X \text{ (രണ്ടും കറുത്ത പന്തുകൾ)} = ₹\ 2(30) = ₹\ 60$$
$$X \text{ (ഒരു വെള്ളയും, ഒരു കറുപ്പും)} = ₹\ 30 - ₹\ 20 = ₹\ 10$$
$$X \text{ (രണ്ടും വെള്ളപ്പന്തുകൾ)} = ₹\ 2(-20) = -₹\ 40$$

എങ്കിൽ X എന്നത് $60, 10, -40$ എന്നീ മൂല്യങ്ങളെ കൊണ്ടുള്ളതാകുന്നു.

കുറിപ്പ് : 40 ന്റെ ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജുകൾ $\{b_1b_2, b_1b_3, b_1b_4, b_2b_3, b_2b_4, b_3b_4.\}$ എന്നിവയാണ്.

റാൻഡം വേരിയബിൾ X ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ	60	10	-40	ആകെ
ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജിന്റെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം	6	24	15	45

വിശദീകരണം 11.3

$\binom{6}{0}\binom{4}{2}$ $\binom{6}{1}\binom{4}{1}$ $\binom{6}{2}\binom{4}{0}$ $\binom{10}{2}$

തലകിട്ടും വരെ ഒരു നാണയം ടോസ്സ് ചെയ്താൽ.

സാമ്പിൾസ്പേസ് $S = \{H, TH, TTH, TTTH, \ldots\}$.

തലകിട്ടുന്നതുവരെ നാണയം ടോസ്സ് ചെയ്യുന്നതിനെ X എന്ന് കുറിക്കുന്നു.

റാൻഡം വേരിയബിൾ X ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ $1, 2, 3, \ldots$

വിശദീകരണം 11.4

N എന്നത് ഒരു സേവനസ്ഥലത്ത് നിശ്ചിതവരിയായി നിൽക്കുന്ന ആളുകളുടെ എണ്ണം എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ സാമ്പിൾ സ്പേസ് എന്നു പറയുന്നത് ഒരു ഋണമല്ലാത്ത ഒരു പൂർണ്ണാങ്കമാണ് $S = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ എന്നത് ഒരു റാൻഡം വേരിയബിൾ ആണ് അതിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ $0, 1, 2, 3, \ldots\ N$

വിശദീകരണം 11.5

ഒരു പരീക്ഷണത്തിൽ വൈദ്യുതി ബൾബിന്റെ ആയുസ്സിനെ കുറിച്ച് നിരീക്ഷിക്കുന്നു. സാമ്പിൾ സ്പേസ് എന്നത് വൈദ്യുതബൾബിന്റെ ആയുസ്സിനെ കുറിക്കുന്നു. സാമ്പിൾ സ്പേസ് $S = [0, \infty)$. X എന്നത് വൈദ്യുതബൾബിന്റെ ആയുസ്സിനെക്കുറിക്കുന്നു, X എന്നത് ഒരു റാൻഡം വേരിയബിൾ ആണ് അതിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ $[0, \infty)$.

വിശദീകരണം 11.6

r വ്യാസാർദ്ധമുള്ള ഒരു ഡിസ്ക് ആണ് D. അതിൽനിന്നും യാദൃശ്ചികമായി ഒരു ബിന്ദു എടുത്താൽ അത് D ആകുന്നു. X എന്നത് കേന്ദ്രത്തിൽ ആ ബിന്ദുവരെയുള്ള ദൂരം ആണ്. സാമ്പിൾസ്പേസ് $S = D$ കൂടാതെ റാൻഡം വേരിയബിൾ X എന്നത് 0 മുതൽ r വരെയുള്ള സംഖ്യകളെ എടുക്കണം അതായത് $X(\omega) \in [0, r]$; $\omega \in S$.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 183 15-02-2023 15:25:45

അഭ്യാസം 11.1

1. X എന്നത് 3 നാണയങ്ങളെ തുടർച്ചയായി ഒരു പ്രാവശ്യം വീതം ടോസ്സ് ചെയ്യുമ്പോൾ കിട്ടുന്ന പൂവുകളുടെ എണ്ണത്തെക്കുറിക്കുന്നു. എങ്കിൽ റാൻഡം വേരിയബിൾ X ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജിന്റെ ബിന്ദുക്കളുടെ എണ്ണം ഇവ കാണുക.
2. 52 കാർഡുകൾ അടങ്ങിയ ഒരു കെട്ടിൽ നിന്നും യാദൃശ്ചികമായി രണ്ടു കാർഡുകൾ എടുത്താൽ ഒരു റാൻഡം വേരിയബിളിലെ കറുത്തകാർഡുകളുടെ എണ്ണം, റാൻഡം വേരിയബിളിന്റെ മൂല്യം കൂടാതെ ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജിന്റെ ബിന്ദുക്കളുടെ എണ്ണം ഇവ കാണുക.
3. ഒരു കുടത്തിൽ 5 മാങ്ങകളും 4 ആപ്പിളുകളും ഉണ്ട്. അതിൽ നിന്നും യാദൃശ്ചികമായി 3 പഴങ്ങൾ എടുത്തു. ആപ്പിളുകളുടെ എണ്ണം ഒരു റാൻഡം വേരിയബിൾ എങ്കിൽ റാൻഡം വേരിയബിളുകളുടെ മൂല്യങ്ങൾ കൂടാതെ ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജുകളുടെ ബിന്ദുക്കളുടെ എണ്ണം ഇവ കാണുക.
4. 6 ചുവന്ന പന്തുകളും 8 കറുത്ത പന്തുകളും ഉള്ള ഒരു കുടത്തിൽ നിന്ന് യാദൃശ്ചികമായി രണ്ടു പന്തുകൾ എടുത്തു. ഇതിൽ ചുവന്ന പന്ത് കിട്ടിയാൽ ₹ 15 ലഭിക്കും. കറുത്ത പന്തുകിട്ടിയാൽ ₹ 10 ലഭിക്കും. X എന്നത് ജയിക്കുന്ന തുകയെക്കുറിക്കുന്നു എങ്കിൽ X ന്റെ മൂല്യങ്ങളും ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജുകളുടെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണവും കാണുക.
5. 6 വശങ്ങളുള്ള ഒരു പകിടയുടെ ഒരുവശത്ത് 2 എന്ന അക്കം കുറിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. 2 വശങ്ങളിൽ 3 എന്ന് കുറിക്കുന്നു. ബാക്കിയുള്ള വശങ്ങളിൽ 4 എന്ന അക്കവും കുറിക്കുന്നു. ആ പകിട 2 പ്രാവശ്യം ഉരുട്ടുന്നു. X എന്നത് 2 പ്രാവശ്യം എറിയുമ്പോഴുള്ള ആകെ തുക, എങ്കിൽ റാൻഡം വേരിയബിളിന്റെ മൂല്യങ്ങളും ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജിന്റെ ബിന്ദുക്കളുടെ എണ്ണവും കാണുക.

11.3 റാൻഡം വേരിയബിളിന്റെ തരങ്ങൾ

ഈ അധ്യായത്തിൽ നമ്മൾ രണ്ടുതരത്തിലുള്ള റാൻഡം വേരിയബിളിനെക്കുറിച്ച് മാത്രം പഠനം ചുരുക്കിയിരിക്കുന്നു. ഒന്നാമത്തെ റാൻഡം വേരിയബിളായി സങ്കല്പിച്ചിരിക്കുന്നത് ഏറ്റവും കൂടുതൽ വ്യതിരിക്ത മൂല്യങ്ങൾ ആണ്. രണ്ടാമത്തേതായി സങ്കല്പിച്ചിരിക്കുന്നത് തുടർച്ചയായി വരുന്ന മൂല്യങ്ങളാണ്. അതായത്

(i) വ്യതിരിക്ത റാൻഡം വേരിയബിൾ (അളവ് കണക്കാക്കൽ)

(ii) തുടർച്ചയായ റാൻഡം വേരിയബിൾ (അളവ് അളക്കുന്നതിന്)

11.3.1 വ്യതിരിക്ത റാൻഡം വേരിയബിളുകൾ

ഈ പാഠഭാഗത്ത് നാം ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്

(i) വ്യതിരിക്ത റാൻഡം വേരിയബിളുകൾ

(ii) സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം

(iii) സഞ്ചിത വിതരണ പ്രവർത്തനം.

(iv) സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത പ്രവർത്തനത്തിൽ നിന്നും സഞ്ചിത വിതരണ പ്രവർത്തനം നേടുന്ന രീതി.

(v) സഞ്ചിത വിതരണ പ്രവർത്തനത്തിൽ നിന്നും സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത പ്രവർത്തനം നേടുന്ന രീതി.

റാൻഡം വേരിയബിളുകളുടെ ഗണം വ്യതിരിക്ത സംഖ്യകളാണെങ്കിൽ റാൻഡം വേരിയബിളിന്റെ വിപരീത ചിത്രം പരിമിതമോ എണ്ണമറ്റതോ ആണ്. അത്തരമൊരു റാൻഡം വേരിയബിളിനെ വ്യതിരിക്ത റാൻഡം വേരിയബിൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഒരു സാമ്പിൾ സ്പേസ് നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്ന റാൻഡം വേരിയബിൾ വ്യതിരിക്തമാണ്.

നിർവചനം 11.2 (വ്യതിരിക്ത റാൻഡം വേരിയബിൾ)

ഒരു റാൻഡം വേരിയബിൾ X ഒരു സാമ്പിൾ സ്പേസിൽ വാസ്തവിക സംഖ്യകളിലേക്ക് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു. X പരിധി കണക്കാക്കാമെങ്കിൽ $\mathbb{R}$ നെ വ്യതിരിക്ത റാൻഡം വേരിയബിൾ എന്ന് വിളിക്കുന്നു. അതായത്, ഇതിന് പരിമിതമായ അല്ലെങ്കിൽ എണ്ണമറ്റ മൂല്യങ്ങൾ മാത്രമേ അനുമാനിക്കാൻ കഴിയൂ. ഇവിടെ ഓരോ മൂല്യവും ഗണം S ൽ ആകെ ധനസംഭവ്യത 1 ആണ്.

പരാമർശം

വ്യതിരിക്ത റാൻഡം വേരിയബിളിനെ തുടർച്ചയായ സാബിൾസ് പേസിൽ നിർവ്വചിക്കുന്നതിനുള്ള സാധ്യതയും ഉണ്ട്,

(i) എല്ലാ $X(\omega)=10$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ച റാൻഡം വേരിയബിൾ $\omega \in S$, ഒരു വ്യതിരിക്ത റാൻഡം വേരിയബിൾ ആണ്.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 184 15-02-2023 15:25:45

(ii) തുടർച്ചയായ സ്പേസിനായി $S=[0,20]$, നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന റാൻഡം വേരിയബിൾ

$$X(\omega)=\begin{cases}1 & \text{for } \omega\in[0,10)\\ 2 & \text{for } \omega\in[10,20]\end{cases}$$ ഒരു വ്യതിരിക്ത റാൻഡം വേരിയബിൾ ആണ്.

11.3.2 സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം

ഒരു വ്യതിരിക്ത റാൻഡം വേരിയബിൾ X എടുക്കുന്ന സംഭാവ്യത x, അതായത് $P(X=x)$, പതിവായി $f(x)$ അല്ലെങ്കിൽ $p(x)$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. $f(x)$ ഫലനത്തെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം എന്ന് വിളിക്കുന്നു. എന്നിരുന്നാലും ചില രചയിതാക്കൾ ഇതിനെ സംഭാവ്യത ഫലനം അല്ലെങ്കിൽ ആവൃത്തിഫലനം എന്നും വിളിക്കുന്നു. ഈ അധ്യായത്തിൽ റാൻഡം വേരിയബിൾ വിഭിന്നമാകുമ്പോൾ, സാധാരണ പദാവലിയായി സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം എന്നും ഉപയോഗിക്കുന്നു അതിന്റെ പൊതുവായ ചുരുക്കെഴുത്ത് pmf എന്നാണ്.

നിർവചനം 11.3 (സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം)

X എന്നത് $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \ldots,$ എന്നീ മൂല്യങ്ങളുള്ള ഒരു വ്യതിരിക്ത റാൻഡം വേരിയബിൾ ആണെങ്കിൽ $f(.)$ അല്ലെങ്കിൽ $p(.)$ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നതും

$$f(x_k)=P(X=x_k), \qquad k=1,2,3,\ldots n,\ldots$$

ഇതിനെ X ന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം എന്ന് പറയുന്നു

സിദ്ധാന്തം 11.1 (തെളിവില്ലാതെ)

യഥാർത്ഥ മൂല്യങ്ങളായ $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \ldots.$ എന്നിവയ്ക്കായി ഇനിപ്പറയുന്ന സവിശേഷതകളെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തിയാൽ മാത്രമേ $f(x)$ എന്ന ഫലനം സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം ആകുകയുള്ളൂ

(i) $f(x_k)\geq 0$, $k=1,2,3,\ldots n,\ldots$ കൂടാതെ (ii) $\sum_k f(x_k)=1$

കുറിപ്പ് :

(i) സംഭാവ്യതകളുടെ ഗണം $\{f(x_k)=P(X=x_k), \quad k=1,2,3,\ldots n,\ldots\}$ ഇതിനെ **വ്യതിരിക്ത റാൻഡം വേരിയബിളുകളുടെ സംഭാവ്യത ഫലനം** എന്നു പറയുന്നു

(ii) റാൻഡം വേരിയബിൾ ഒരു ഫലനം ആയതിനാൽ അത് താഴെ പറയുന്ന രീതികളിൽ അവതരിപ്പിക്കാൻ കഴിയും

(a) പട്ടികാരീതി (b) ഗ്രാഫിക്കൽ രൂപത്തിലും (c) എക്സ്പ്രഷൻ രൂപത്തിലും

ഉദാഹരണം 11.5

രണ്ട് നാണയങ്ങൾ ഒരേ സമയത്തിൽ ടോസ്സ് ചെയ്താൽ (അതായത് ഒരു നാണയം രണ്ടു പ്രാവശ്യം ടോസ്സ് ചെയ്യുന്നതിനു തുല്യം) രണ്ട് തലകൾ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

സാമ്പിൾസ്പേസ് $S=\{H,T\}\times\{H,T\}$

അതായത് $S=\{TT, TH, HT, HH\}$

X എന്നത് തലകളുടെ എണ്ണത്തെ കുറിക്കുന്ന ഒരു റാൻഡം വേരിയബിൾ ആണ്.

$$X(TT)=0, \qquad X(TH)=1,$$
$$X(HT)=1, \text{ കൂടാതെ } X(HH)=2.$$

റാൻഡം വേരിയബിൾ X ൽ അടങ്ങിയിരിക്കുന്ന മൂല്യങ്ങൾ 0, 1, 2

റാൻഡം വേരിയബിളിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ	0	1	2	ആകെ
ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജിന്റെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം	1	2	1	4

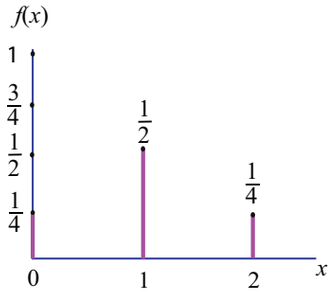
12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 185 15-02-2023 15:25:50

തന്നിട്ടുള്ള സംഭാവ്യതകൾ

$$f(0) = P(X=0) = \frac{1}{4},$$

$$f(1) = P(X=1) = \frac{1}{2}$$

കൂടാതെ $$f(2) = P(X=2) = \frac{1}{4}$$



$f(x)$ ന്റെ സംഭാവ്യതസാന്ദ്രത ഫലനം

ചിത്രം 11.4

ഫലനം $f(x)$ എന്നത് ഈ നിബന്ധനയെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു

(i) $f(x) \geq 0, \quad x = 0, 1, 2$

(ii) $\sum_x f(x) = \sum_{x=0}^{x=2} f(x) = f(0) + f(1) + f(2)$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$$

$f(x)$ എന്നത് സംഭാവ്യതസാന്ദ്രത ഫലനമാണ്.

സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(അല്ലെങ്കിൽ) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & ; \quad x = 0 \\ \frac{1}{2} & ; \quad x = 1 \\ \frac{1}{4} & ; \quad x = 2 \end{cases}$$

ഉദാഹരണം 11.6

ഒരു ജോഡി പകിടകൾ ഒരു പ്രാവശ്യം ഉരുട്ടുമ്പോൾ മുഖ സംഖ്യ 4 കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

X എന്നത് ഒരു യാദൃശ്ചിക ചരമാണ് അതിന്റെ മൂല്യം x എന്നത് 4 കളുടെ എണ്ണമാണ്.

സാമ്പിൾസ്പേസ് S എന്നതിന്റെ പട്ടിക തന്നിട്ടില്ല.

$$S = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6) \\ (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6) \\ (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6) \\ (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6) \\ (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6) \\ (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{Bmatrix}$$

ഇതിനെ ഇപ്രകാരം എഴുതാം

$S = \{(i, j)\}$, ഇവിടെ $i = 1,2,3\ldots,6$ കൂടാതെ $j = 1,2,3,\ldots 6$

X ൽ അടങ്ങിയിട്ടുള്ള മൂല്യങ്ങൾ 0, 1, 2.

ഇതിൽ നിന്നും നാം മനസ്സിലാക്കുന്നത്

(i) $X = 0,$ എങ്കിൽ (i, j) $i \neq 4,$ $j \neq 4,$

(ii) $X = 1,$ എങ്കിൽ $(1,4),(2,4),(3,4),(5,4),(6,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,5),(4,6)$

(iii) $X = 2,$ എങ്കിൽ $(4,4),$

യാദൃശ്ചികചരം X ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ	0	1	2	ആകെ
ഇൻവോഴ്സ് ഇമേജുകളുടെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം	25	10	1	36

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 186 15-02-2023 15:25:56

സംഭാവ്യതകൾ

$$f(0) = P(X=0) = \frac{25}{36},$$

$$f(1) = P(X=1) = \frac{10}{36}$$

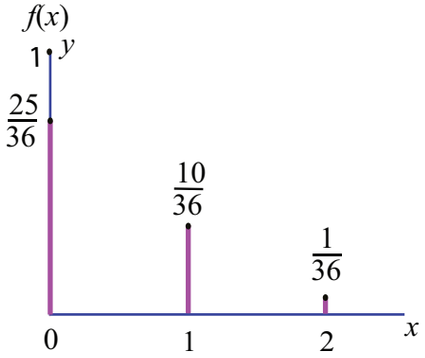
കൂടാതെ $f(2) = P(X=2) = \frac{1}{36}$

കൃത്യമായി ഫലനം $f(x)$ ഈ നിബന്ധന തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.

(i) $f(x) \geq 0, \quad x = 0, 1, 2$ കൂടാതെ

(ii) $\sum_x f(x) = \sum_{x=0}^{x=2} f(x) = f(0) + f(1) + f(2) = 1$

$$= \frac{25}{36} + \frac{10}{36} + \frac{1}{36} = 1$$



$f(x)$ന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം
ചിത്രം. 11.5

സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനത്തെ താഴെപ്പറയുന്നവിധം സൂചിപ്പിക്കാം

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{25}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{1}{36}$

(അല്ലെങ്കിൽ) $f(x) = \begin{cases} \frac{25}{36} & ; x = 0 \\ \frac{10}{36} & ; x = 1 \\ \frac{1}{36} & ; x = 2 \end{cases}$

11.3.3 സഞ്ചിത വിതരണ പ്രവർത്തനം അല്ലെങ്കിൽ വിതരണ പ്രവർത്തനം (ഫലനം)

ഒരു യാദൃശ്ചിക ചരം X ന്റെ മൂല്യം ചില യഥാർത്ഥ സംഖ്യ x നെക്കാൾ കുറവോ തുല്യമോ ആകാനുള്ള സാധ്യതകണക്കാക്കാൻ നിരവധി സാഹചര്യങ്ങളുണ്ട്. $F(x) = P(X \leq x)$ എന്നെഴുതാം. എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യ x നെയും, $F(x)$ എന്ന് വിളിക്കാം. യാദൃശ്ചിക ചരം X ന്റെ സഞ്ചിത വിതരണ ഫലനം അല്ലെങ്കിൽ വിതരണ പ്രവർത്തനം എന്നത് പൊതുവായി cdf എന്ന ചുരുക്കപേരിൽ അറിയുന്നു.

നിർവചനം 11.4: (സഞ്ചിതവിതരണ ഫലനം)

വ്യതിരിക്ത യാദൃശ്ചികപദം X ന്റെ **സഞ്ചിത വിതരണ പ്രവർത്തനമാണ്** $F(x)$ അടങ്ങിയിട്ടുള്ള മൂല്യങ്ങൾ $x_1, x_2, x_3, \ldots$ ആയാൽ $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ എന്നിവ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനങ്ങൾ $f(x_i)$ എന്നത്

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i), \qquad x \in \mathbb{R}$$

ഒരു യാദൃശ്ചികചരത്തിന്റെ വിതരണ പ്രവർത്തനത്തിനെയാണ് വ്യതിരിക്ത വിതരണ ഫലനം എന്നു പറയുന്നു. അതുമാത്രമല്ല, സംഭാവ്യത വിതരണ ഫലനം $f(x)$ നെ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് വ്യതിരിക്ത ഗണ മൂല്യങ്ങൾ $x_1, x_2, x_3, \ldots,$ എന്നിവകൊണ്ടാണ്, സഞ്ചിതഫലത്തെ $F(x)$ എന്നതിനെ നിർവചിക്കുന്നത് എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യമൂല്യങ്ങളുമാണ് $x \in \mathbb{R}$.

(സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം ഉപയോഗിച്ചും നമുക്ക് സഞ്ചിത വിതരണഫലനം കണ്ടുപിടിക്കാം)

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x_i)$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 187 15-02-2023 15:26:02

X എന്നത് വെറും പരിമിത സംഖ്യമൂല്യങ്ങളായ $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ എന്നിവയാണ് ഉൾക്കൊള്ളുന്നതെങ്കിൽ ഇവിടെ $x_1 < x_2 < x_3 <, \cdots < x_n$, സഞ്ചിത വിതരണ ഫലനം ഇപ്രകാരം തന്നിട്ടുണ്ട്

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < x_1 \\ f(x_1), & x_1 \le x < x_2 \\ f(x_1) + f(x_2), & x_2 \le x < x_3 \\ f(x_1) + f(x_2) + f(x_3), & x_3 \le x < x_4 \\ \vdots & \vdots \\ f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n), & x_n \le x < \infty \end{cases}$$

വ്യതിരിക്ത യാദൃശ്ചികചരം X-ൽ സഞ്ചിത വിതരണ ഫലനത്തിലെ എല്ലാ താഴെപ്പറയുന്ന ഗുണങ്ങളെയും തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.

(i) $0 \le F(x) \le 1$, $x \in \mathbb{R}$.

(ii) $F(x)$ എന്നത് വാസ്തവികമൂല്യവും കുറയാത്ത ഫലനവുമാണ് $\left(x < y, \text{എങ്കിൽ } F(x) \le F(y)\right)$.

(iii) $F(x)$ എന്നത് വലതുവശതുടർച്ചയായ ഫലനമാണ് $\left(\lim_{x \to a+} F(x) = F(a)\right)$.

(iv) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$.

(v) $\lim_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$.

(vi) $P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

(vii) $P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - F(x)$.

(viii) $P(X = x_k) = F(x_k) - F(x_k^-)$.

കുറിപ്പ്

ചില ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞർ സഞ്ചിതവിതരണ ഫലനത്തിന്റെ $F(x)$ നിർവചനത്തിൽ വലതുവശ തുടർച്ചയ്ക്കു പകരം ഇടതുവശ തുടർച്ച ഉപയോഗിക്കുന്നു.

11.3.4 സഞ്ചിത വിതരണ ഫലനം സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫനത്തിൽ നിന്നും

ഒരു വ്യതിരിക്ത യാദൃശ്ചിക ചരം X ന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം കൂടാതെ സഞ്ചിത വിതരണ ഫലനം ഇവ രണ്ടും X ന്റെ എല്ലാ സംഭാവ്യത നിർദ്ദേശങ്ങളും അടങ്ങിയിട്ടുള്ളതാകുന്നു. X ന്റെ സംഭാവ്യത വിതരണത്തെ ഇത് രണ്ടിലേതെങ്കിലും ഒന്നുകൊണ്ട് കണ്ടുപിടിക്കാം. യഥാർത്ഥത്തിൽ വ്യതിരിക്ത യാദൃശ്ചികചരം X ന്റെ സംഭാവ്യത വിതരണം F നെ X ന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം $f(x)$ കൊണ്ട് അങ്ങോട്ടും ഇങ്ങോട്ടും വെളിപ്പെടുത്താം.

ഉദാഹരണം 11.7

യാദൃശ്ചികചരം X ന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം $f(x)$ ഇതാണ്

x	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{12}$

(i) ഇതിന്റെ സഞ്ചിത വിതരണ ഫലനം കാണുക (ii) കൂടാതെ $P(X \le 3)$, (iii) $P(X \ge 2)$ ഇവ കാണുക?

നിർദ്ധാരണം

(i) നിർവചനപ്രകാരം യഥാർത്ഥ യാദൃശ്ചികചരത്തിന്റെ സഞ്ചിത വിതരണഫലനം ഇതാണ്

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i)$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 188 15-02-2023 15:26:06

$P(X<1) = 0 \ ; \ -\infty < x < 1$.

$$F(1) = P(X \le 1) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i) = \sum_{-\infty}^{1} P(X = x) = P(X<1) + P(X=1) = 0 + \frac{1}{12} = \frac{1}{12} .$$

$$F(2) = P(X \le 2) = \sum_{-\infty}^{2} P(X = x) = P(X<1) + P(X=1) + P(X=2).$$

$$= 0 + \frac{1}{12} + \frac{5}{12} = \frac{1}{2}.$$

$$F(3) = P(X \le 3) = \sum_{-\infty}^{3} P(X = x) = P(X<1) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3).$$

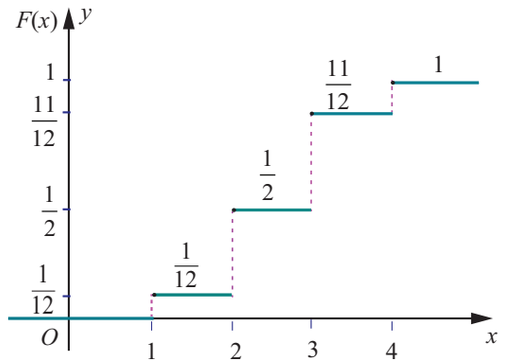
$$= 0 + \frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{5}{12} = \frac{11}{12}.$$

$$F(4) = P(X \le 4) = \sum_{-\infty}^{4} P(X = x) = P(X<1) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4).$$

$$= 0 + \frac{1}{12} + \frac{5}{12} + \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = 1.$$

സഞ്ചികവിതരണ ഫലനം എന്നത്

$$F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 1 \\ \frac{1}{12}, & 1 \le x < 2 \\ \frac{1}{2}, & 2 \le x < 3 \\ \frac{11}{12}, & 3 \le x < 4 \\ 1, & 4 \le x < \infty \end{cases}$$



$F(x)$ ന്റെ സഞ്ചിതവിതരണ ഫലനം

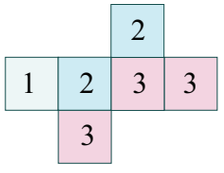
ചിത്രം 11.6

(ii) $P(X \le 3) = F(3) = \frac{11}{12}$.

(iii) $P(X \ge 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \le 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$.

ഉദാഹരണം 11.8

6 വശങ്ങളുള്ള ഒരു പകിടയുടെ ഒരുവശത്ത് 1 എന്നും രണ്ടു വശങ്ങളിൽ 2 എന്നും ബാക്കിയുള്ള വശങ്ങളിൽ 3 എന്ന അക്കങ്ങളും എഴുതിയിട്ടുണ്ട് പകിട രണ്ടു പ്രാവശ്യം ഉരുട്ടുന്നു. X എന്നത് രു പ്രാവശ്യം പകിട എറിയുമ്പോഴുള്ള ആകെ തുകയെ കുതിക്കുന്നുവെങ്കിൽ



ചിത്രം 11.7

(i) സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം കാണുക.

(ii) സഞ്ചിത വിതരണ ഫലനം കാണുക.

(iii) $P(3 \le X < 6)$ കാണുക (iv) $P(X \ge 4)$ കാണുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 189 15-02-2023 15:26:10

നിർദ്ധാരണം:

X എന്നത് പകിട രണ്ടു പ്രാവശ്യം എറിയുമ്പോഴുള്ള ആതെ തുക, അതിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ 2, 3, 4, 5, 6. സാമ്പിൾ സ്പേസ് S ൽ നിന്ന്,

യാദൃശ്ചിക ചരങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ	2	3	4	5	6	ആകെ
ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജിന്റെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം	1	4	10	12	9	36

സാമ്പിൾ സ്പേസ് S

I \ II	1	2	2	3	3	3
1	2	3	3	4	4	4
2	3	4	4	5	5	5
2	3	4	4	5	5	5
3	4	5	5	6	6	6
3	4	5	5	6	6	6
3	4	5	5	6	6	6

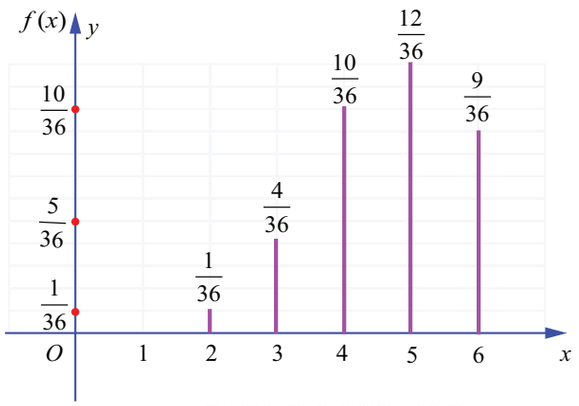
$$P(X=2) = \frac{1}{36}, \qquad P(X=3) = \frac{4}{36}$$

$$P(X=4) = \frac{10}{36}, \qquad P(X=5) = \frac{12}{36},$$

$$P(X=6) = \frac{9}{36}.$$

(i) സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{9}{36}$



സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം

ചിത്രം 11.8

(ii) സഞ്ചിത വിതരണ ഫലനം

വ്യതിരിക്ത യാദൃശ്ചികചരത്തിനുവേണ്ടിയുള്ള സഞ്ചിതവിതരണ ഫലനത്തിന്റെ നിർവചനത്തിൽ നിന്നും നമുക്ക്

$$F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i),$$

$$P(X < x) = 0 \quad -\infty < X < 2.$$

$$F(2) = P(X \le 2) = \sum_{-\infty}^{2} P(X = x) = P(X < 2) + P(X = 2) = 0 + \frac{1}{36} = \frac{1}{36}.$$

$$F(3) = P(X \le 3) = \sum_{-\infty}^{3} P(X = x) = P(X < 2) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0 + \frac{1}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{36}.$$

$$F(4) = P(X \le 4) = \sum_{-\infty}^{4} P(X = x) = P(X < 2) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

$$= 0 + \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{10}{36} = \frac{15}{36}.$$

$$F(5) = P(X \le 5) = \sum_{-\infty}^{5} P(X = x) = P(X < 2) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$$

$$= 0 + \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} = \frac{27}{36}.$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 190 15-02-2023 15:26:17

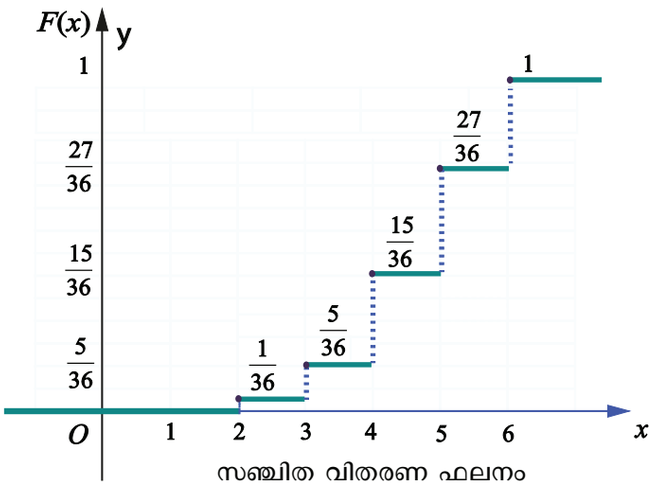
$$F(6) = P(X \le 6) = \sum_{-\infty}^{6} P(X = x)$$

$$= P(X < 2) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$$

$$= 0 + \frac{1}{36} + \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} + \frac{9}{36} = 1.$$

സഞ്ചിത വിതരണ ഫലനം എന്നത്

$$\begin{cases} 0 & ; \quad -\infty < x < 2 \\ \frac{1}{36} & ; \quad 2 \le x < 3 \\ \frac{5}{36} & ; \quad 3 \le x < 4 \\ \frac{15}{36} & ; \quad 4 \le x < 5 \\ \frac{27}{36} & ; \quad 5 \le x < 6 \\ 1 & ; \quad 6 \le x < \infty \end{cases}$$



ചിത്രം. 11.9

(iii) $P(3 \le X < 6) = \sum_{x=3}^{5} P(X = x_i) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5)$

$$= \frac{4}{36} + \frac{10}{36} + \frac{12}{36} = \frac{26}{36}.$$

(iv) $P(X \ge 4) = \sum_{x=4}^{\infty} P(X = x_i)$

$$= P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$$

$$= \frac{10}{36} + \frac{12}{36} + \frac{9}{36} = \frac{31}{36}.$$

11.3.5 സഞ്ചിതവിതരണ ഫലനത്തിൽ നിന്ന് സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം

ഒരു വ്യതിരിക്ത യാദൃശ്ചിക ചരം X ന് സഞ്ചിത വിതരണ ഫലനം F ഓരോ x_i യ്ക്കും ഒരു കയറ്റം (ജംപ്) ഉണ്ട്. മാത്രമല്ല അടുത്തടുത്ത x_i കൾ മാറാതെയും ഇരിക്കും. x_i യിലുള്ള കയറ്റങ്ങളുടെ ഉയരം $f(x_i)$ ഇതേ രീതിയിൽ F നിന്ന് x_i ലേക്കുള്ള സംഭാവ്യതകൾ തിരിച്ചെടുക്കാം.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 191 15-02-2023 15:26:20

$x_1 < x_2, < x_3 \cdots$ എന്ന രീതിയിലുള്ള $x_1, x_2, x_3, \ldots$ മൂല്യങ്ങൾ അടങ്ങിയ വ്യതിരിക്ത യാദൃശ്ചികചരം X എന്നിരിക്കട്ടെ. കൂടാതെ $F(x_i)$ എന്നത് വിതരണ ഫലനമാണ്. എന്നാൽ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം $f(x_i)$ എന്നത്

$$f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1}), \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

കുറിപ്പ്

$x = a$ യിൽ $F(x)$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ കയറ്റം (ജംപ്) $\left|F(a^+) - F(a^-)\right|$. F എന്നത് കുറയാത്ത വലതു വശ തുടർച്ചയായതുമാണ്. എന്നാൽ സഞ്ചിത വിതരണ ഫലനത്തിന്റെ കയറ്റം ഒരു സംഭാവ്യതയാണ് $P(X = x) = F(x) - F(x^-)$.

ഇവിടെ കയറ്റം (നിർത്തലാക്കൽ കാരണം) ഒരു സംഭാവ്യതയാണ്. അതായത് ഒരു സഞ്ചിത വിതരണ ഫലനം അല്ല സഞ്ചിതവിതരണഫലനങ്ങളുടെ ഗണം പരിമിതമാണ്!

ഉദാഹരണം 11.9

താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള സഞ്ചിതവിതരണ ഫലനം $F(x)$ ന്റെ വ്യതിരിക്ത യാദൃശ്ചിക ചരം X ന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം കാണുക $f(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -2 \\ 0.25 & -2 \le x < -1 \\ 0.60 & -1 \le x < 0 \\ 0.90 & 0 \le x < 1 \\ 1 & 1 \le x < \infty \end{cases}$$

(i) $P(X < 0)$ കൂടാതെ (ii) $P(X \ge -1)$ ഇവ കാണുക?.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളിൽ നിന്ന് X എന്നത് ഒരു വ്യതിരിക്ത യാദൃശ്ചിക ചരമാണ് അതിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ,

$-2, -1, 0,$ കൂടാതെ 1.

വ്യതിരിക്ത യാദൃശ്ചിക ചരങ്ങ(X)ളുടെ നിർവചനങ്ങളനുസരിച്ച്, നമുക്ക് $f(x) = P(X = x)$

.....ലുള്ള $F(x)$ ന്റെ ഇടതുവശ പരിധി $x = -2$, $F(-2^-)$

$$f(-2) = P(X = -2) = F(-2) - F(-2^-) = 0.25 - 0 = 0.25.$$

അതുപോലെ കയറ്റമുള്ള ബിന്ദുക്കൾവേണ്ടി നമുക്ക്

$$f(-1) = P(X = -1) = F(-1) - F(-2) = 0.60 - 0.25 = 0.35.$$

$$f(0) = P(X = 0) = F(0) - F(-1) = 0.90 - 0.60 = 0.30,$$

$$f(1) = P(X = 1) = F(1) - F(0) = 1 - 0.90 = 0.10.$$

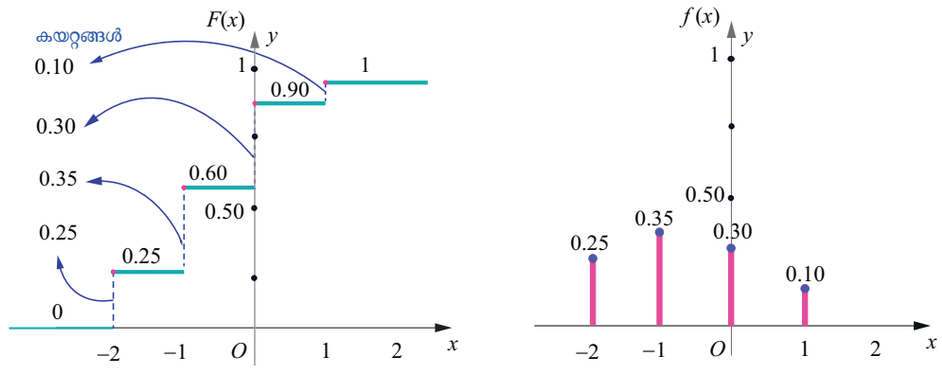
സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം എന്നത്

x	-2	-1	0	1
$f(x)$	0.25	0.35	0.30	0.10

വിതരണ ഫലനം $F(x)$ എന്നതിന്റെ കയറ്റങ്ങൾ $x = -2, -1, 0,$ ഒപ്പം 1. ഇവിടെ വച്ചു നടക്കുന്നു. കയറ്റങ്ങൾ യഥാക്രമം $0.25, 0.35, 0.30,$ കൂടാതെ 0.1 എന്നിവ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പടത്തിൽ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഈ കയറ്റങ്ങളാണ് സംഭാവ്യതയുടെ സാന്ദ്രത ഫലനം നിർണ്ണയിക്കുന്നത്.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 192 15-02-2023 15:26:28



വിതരണഫലനം $F(x)$ കൂടാതെ എല്ലാ x_i ലുള്ള കയറ്റങ്ങളും

സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം $f(x)$

ചിത്രം 11.10

(i) $P(X<0)=\sum_{-\infty}^{-1}P(X=x)=P(X=-2)+P(X=-1)=0.25+0.35=0.60$.

(ii) $P(X\geq -1)=\sum_{-1}^{1}P(X=x)=P(X=-1)+P(X=0)+P(X=1)=0.35+0.30+0.10=0.75$

ഉദാഹരണം 11.10

ഒരു യാദൃശ്ചികചരം X എന്നതിന്റെ സംഭാവ്യം സാന്ദ്രത ഫലനം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	k	$2k$	$6k$	$5k$	$6k$	$10k$

എന്നാൽ (i) $P(2<X<6)$ (ii) $P(2\leq X<5)$ (iii) $P(X\leq 4)$ (iv) $P(3<X)$ കാണുക

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം ആയതിനാൽ സംഭാവ്യത 1 ആകുന്നു. അതായത് $\sum_x f(x)=1$.

തന്നിട്ടുള്ള വിവരങ്ങളിൽ നിന്ന് $k+2k+6k+5k+6k+10k=1$

$$30k=1 \Rightarrow k=\frac{1}{30}$$

സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം എന്നത്

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{1}{30}$	$\frac{2}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{5}{30}$	$\frac{6}{30}$	$\frac{10}{30}$

(i) $P(2<X<6)=f(3)+f(4)+f(5)=\frac{6}{30}+\frac{5}{30}+\frac{6}{30}=\frac{17}{30}$.

(ii) $P(2\leq X<5)=f(2)+f(3)+f(4)=\frac{2}{30}+\frac{6}{30}+\frac{5}{30}=\frac{13}{30}$.

(iii) $P(X\leq 4)=f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=\frac{1}{30}+\frac{2}{30}+\frac{6}{30}+\frac{5}{30}=\frac{14}{30}$.

(iv) $P(3<X)=f(4)+f(5)+f(6)=\frac{5}{30}+\frac{6}{30}+\frac{10}{30}=\frac{21}{30}$.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 193 15-02-2023 15:26:34

അഭ്യാസം 11.2

1. 3 നാണയങ്ങൾ തുടർച്ചയായി ടോസ്സ് ചെയ്യുന്നു തലകൾ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം കാണുക.

2. 6 വശങ്ങളുള്ള ഒരു പകിടയിൽ 1 വശത്ത് 4 എന്ന് കുറിക്കുന്നു, രണ്ടു വശങ്ങളിൽ 3 എന്ന് കുറിക്കുന്നു, ബാക്കിയുള്ള വശങ്ങളിൽ 5 എന്ന അക്കം കുറിക്കുന്നു. ഈ പകിട ഒരു പ്രാവശ്യം ഉരുട്ടുന്നു. X എന്നത് രണ്ടുപ്രാവശ്യം ഉരുട്ടുമ്പോഴുള്ള ആകെ ഫലങ്ങളാണ് എങ്കിൽ

   (i) സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം (ii) സഞ്ചിത വിതരണ ഫലനം

   (iii) $P(4 \le X < 10)$ (iv) $P(X \ge 6)$ ഇവ കാണുക.

3. 4 കുട്ടികളുള്ള ഒരു കുടുംബത്തിലെ പെൺകുട്ടികളുടെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനവും സഞ്ചിത വിതരണ ഫലനവും കാണുക. ആൺകുട്ടികൾക്കും പെൺകുട്ടികൾക്കും തുല്യ സംഭാവ്യത നൽകുക.

4. ഒരു വ്യതിരിക്ത യാദൃശ്ചിക ചരത്തിൽ 0, 1, 2 എന്നീ മൂല്യങ്ങൾ മാത്രം എടുത്താൽ സംഭാവ്യതയുടെ സാന്ദ്രതഫലനം ഇപ്രകാരം നിർവചിക്കുക

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{k}, & x = 0,1,2 \\ 0 & \text{മറ്റുള്ളവയ്ക്ക്} \end{cases}$$ എങ്കിൽ താഴെ പറയുന്നവ കാണുക

   (i) k യുടെ മൂല്യം കാണുക (ii) സഞ്ചിത വിതരണഫലനം കാണുക (iii) $P(X \ge 1)$.

5. വ്യതിരിക്ത യാദൃശ്ചിക ചരങ്ങളിലെ സഞ്ചിത വിതരണ ഫലനം തന്നിട്ടുണ്ട്

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < -1 \\ 0.15 & -1 \le x < 0 \\ 0.35 & 0 \le x < 1 \\ 0.60 & 1 \le x < 2 \\ 0.85 & 2 \le x < 3 \\ 1 & 3 \le x < \infty \end{cases}$$ എങ്കിൽ

   (i) സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം (ii) $P(X < 1)$ (iii) $P(X \ge 2)$ ഇവ കാണുക.

6. ഒരു റാൻഡം വേരിയബിൾ X ന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	k^2	$2k^2$	$3k^2$	$2k$	$3k$

എന്നാൽ (i) k യുടെ മൂല്യം (ii) $P(2 \le X < 5)$ (iii) $P(3 < X)$ ഇവ കാണുക?

7. ഒരു വ്യതിരിക്ത റാൻഡം വേരിയബിളിന്റെ സഞ്ചിത വിതരണ ഫലനം താഴെ തന്നിട്ടുണ്ട്

$$F(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -\infty < x < 0 \\ \dfrac{1}{2} & ; \quad 0 \le x < 1 \\ \dfrac{3}{5} & ; \quad 1 \le x < 2 \\ \dfrac{4}{5} & ; \quad 2 \le x < 3 \\ \dfrac{9}{10} & ; \quad 3 \le x < 4 \\ 1 & ; \quad 4 \le x < \infty \end{cases}$$

എങ്കിൽ (i) സംഭാവ്യതസാന്ദ്രത ഫലനം (ii) $P(X < 3)$ കൂടാതെ (iii) $P(X \ge 2)$ ഇവ കാണുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 194 15-02-2023 15:26:37

11.4 തുടർച്ചയായ വിതരണങ്ങൾ

ഈ വിഭാഗത്തിൽ നമ്മൾ പഠിക്കുന്നത്

(i) തുടർച്ചയായ യാദൃശ്ചിക ചരങ്ങൾ

(ii) സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം

(iii) വിതരണഫലനം (സഞ്ചിത വിതരണ ഫലനം).

(iv) സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനത്തിൽ നിന്നും വിതരണ ഫലനം കണ്ടുപിടിക്കൽ.

(v) വിതരണ ഫലനത്തിൽ നിന്നും സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം കണ്ടുപിടിക്കൽ.

ചിലപ്പോഴൊക്കെ ഒരു ചെമ്പുകമ്പിയിലുള്ള വൈദ്യുതിയുടെ അളവ് അല്ലെങ്കിൽ ഒരു വൈദ്യുതി ബൾബിന്റെ കാലാവധിയുടെ ദൈർഘ്യം എന്നിവ അളക്കാൻ ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യകൾക്കിടയിലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു മൂല്യത്തെ സങ്കല്പിക്കാം. അതിനുശേഷമേ ഈ അളവുകളുടെ തുല്യത സാധ്യമാകുകയുള്ളൂ. ഈ അളവിനെകുറിക്കുന്ന യാദൃശ്ചിക ചരത്തെ തുടർച്ചയായ യാദൃശ്ചിക ചരം എന്നു പറയുന്നു. വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ ഇടവേളകൾക്കിടയിലുള്ള എല്ലാ മൂല്യങ്ങളും അടങ്ങിയ യാദൃശ്ചിക ചരത്തിന്റെ റേഞ്ച്, അതായത് വാസ്തവികസംഖ്യകളുടെ **തുടർച്ചയായ** റേഞ്ച് ആയി കാണുന്നു എന്നെടുക്കാം

11.4.1 തുടർച്ചയായ യാദൃശ്ചിക ചരത്തിന്റെ നിർവചനം

നിർവചനം 11.5 (തുടർച്ചയായ യാദൃശ്ചിക ചരം)

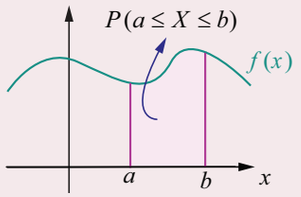
S എന്നത് ഒരു സാമ്പിൾ സ്പേസ് $X : S \to R$ എന്നും ഒരു യാദൃശ്ചികചരം R ന്റെ ഒരു ഗണമായി I ൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു മൂല്യത്തെ എടുക്കാം. I ൽ ഉള്ള എല്ലാ X നും $P(X = x) = 0$ എന്നത് x ന്റെ ഒരു **തുടർച്ചയായ യാദൃശ്ചിക ചരമാണ്**

11.4.2 സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം

നിർവചനം 11.6: (സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം)

ഒരു ഋണമല്ലാത്ത വാസ്തവികമൂല്യ ഫലനം $f(x)$ എന്നത് ഒരു **സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനമാകണമെങ്കിൽ** x ന്റെ സാധ്യമായ ഓരോ ഫലങ്ങളും $x \in [a, b]$ എന്ന തുടർച്ചയായ യാദൃശ്ചികചരം X അടങ്ങിയിട്ടുള്ളതും താഴെക്കാണുന്ന ഗുണം ഉള്ളതുമാകണം

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\, dx$$



ചിത്രം 11.11

സിദ്ധാന്തം 11.2 (തെളിവില്ലാത്തെ)

ഏതെങ്കിലും ഒരു തുടർച്ചയായ യാദൃശ്ചിക ചരം X നും $f(.)$ എന്ന ഫലനം ഒരു സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം ആകണമെങ്കിൽ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഗുണങ്ങൾ നിർബന്ധമായും തൃപ്തിപ്പെടുത്തണം.

(i) $f(x) \ge 0$, എന്നത് x കൂടാതെ (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

കുറിപ്പ്

മുകളിൽ പറഞ്ഞ നിർവചനം അനുസരിച്ച് X എന്നത് ഒരു തുടർച്ചയായ യാദൃശ്ചിക ചരമാണെങ്കിൽ,

$$P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\, dx, \text{ എന്നത് അർത്ഥമാക്കുന്നത് } P(X = a) = \int_a^a f(x)\, dx = 0$$

അതായത് X ഒരു പ്രത്യേക മൂല്യം എടുത്താൽ അതിന്റെ സംഭാവ്യത പൂജ്യം ആകും.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 195 15-02-2023 15:26:40

11.4.3 വിതരണ ഫലനം (സഞ്ചിതവിതരണ ഫലനം)

നിർവചനം 11.7 : (സഞ്ചിത വിതരണ ഫലനം)

$f(x)$ എന്ന തുടർച്ചയായ യാദൃശ്ചിക ചരം X ന്റെ വിതരണഫലനം അല്ലെങ്കിൽ സഞ്ചിത വിതരണ ഫലനം $F(x)$ എന്നത്

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du, \qquad -\infty < u < \infty .$$

പരാമർശം

(1) ഒരു വ്യതിരിക്ത തരത്തിൽ, $f(a) = P(X = a)$ എന്നത് X മൂല്യം എടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യതയാകുന്നു.

തുടർച്ചയായ തരങ്ങളിൽ, $f(x);\ x = a$ എന്നത് X ആയും, a മൂല്യത്തെ കൊണ്ടുള്ള സംഭാവ്യതയുമാണ് അതായത് $f(a) \neq P(X = a)$. ആകും. X എന്നത് തുടർച്ചയായ തരമാണ് എങ്കിൽ എല്ലാ $P(X = a) = 0$ നും $a \in \mathbb{R}$ ആകും.

(2) ഒരു യാദൃശ്ചിക ചരം തുടർച്ചയായുള്ളതാണ് എങ്കിൽ വ്യതിരിക്തത്തിൽ കൂട്ടലിന് പകരം അപഗ്രഥനം ആകും.

(3) ഒരു തുടർച്ചയായ യാദൃശ്ചിക ചരം

$$P(a < X < b) = P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = P(a \le X \le b)$$

(4) തുടർച്ചയായ യാദൃശ്ചിക ചരത്തിന്റെ വിതരണ ഫലനത്തെ തുടർച്ചയായ വിതരണ ഫലനം എന്നു പറയാം.

11.4.3.1 വിതരണഫലനത്തിന്റെ ഗുണങ്ങൾ

X, ഒരു തുടർച്ചയായ യാദൃശ്ചിക ചരം, ആണെങ്കിൽ സഞ്ചിതവിതരണ ഫലനം താഴെപ്പറയുന്ന ഗുണങ്ങളെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തണം.

(i) $0 \le F(x) \le 1$.

(ii) $F(x)$ എന്നത് ഒരു കുറയാത്ത വാസ്തവിക മൂല്യം ആണ്. എന്നാൽ $x < y$, അതായത് $F(x) \le F(y)$.

(iii) $F(x)$ എല്ലായിടത്തും തുടർച്ചയായിട്ടുള്ളതാണ്.

(iv) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$ കൂടാതെ $\lim_{x \to \infty} F(x) = F(+\infty) = 1$.

(v) $P(X > x) = 1 - P(X \le x) = 1 - F(x)$.

(vi) $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

ഉദാഹരണം 11.11

തന്നിട്ടുള്ള ഫലനത്തിൽ നിന്ന് സ്ഥിരാങ്കം C യുടെ മൂല്യം കാണുക $f(x) = \begin{cases} Cx^2 & 1 < x < 4 \\ 0 & \text{മറ്റുള്ളവയ്ക്ക്} \end{cases}$

എന്നത് സാന്ദ്രത ഫലനമാണെങ്കിൽ (i) $P(1.5 < X < 3.5)$ (ii) $P(X \le 2)$ (iii) $P(3 < X)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

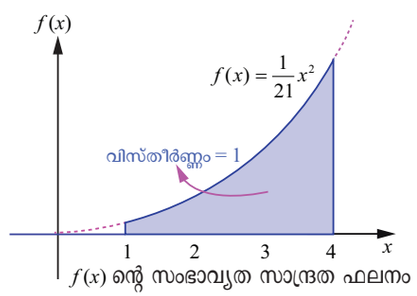
നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള ഫലനം ഒരു സംഭാവ്യത ഫലനം ആയതു കൊണ്ട്,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

$$\int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

തന്നിട്ടുള്ള നിർദ്ദേശം അനുസരിച്ച്,



$f(x)$ ന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം

ചിത്രം 11.12

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 196 15-02-2023 15:26:45

$$\int_{-\infty}^{1} 0\,dx + \int_{1}^{4} Cx^2\,dx + \int_{4}^{\infty} 0\,dx = 1.$$

$$0 + C\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^4 + 0 = 1, \quad \Rightarrow C\left[\frac{64-1}{3}\right] = 1 \quad \Rightarrow 21C = 1 \quad \Rightarrow C = \frac{1}{21}.$$

സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം എന്നത്

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{21}x^2 & 1 < x < 4 \\ 0 & \text{അല്ലെങ്കിൽ} \end{cases}$$

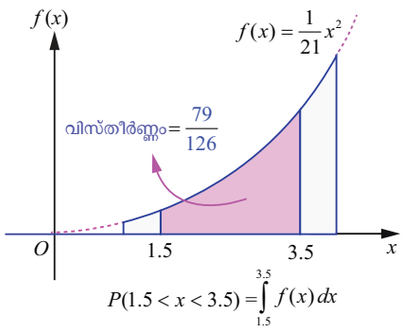
$f(x)$ തുടർച്ചയായതുകൊണ്ട് ഏതൊരു പ്രത്യേക X നും സംഭാവ്യത പൂജ്യമായിരിക്കും. എന്നാൽ യാദൃശ്ചിക ചരം തുടർച്ചയാകുമ്പോൾ അടയാളങ്ങൾ $<$ നെ $\leq$ കൂടാതെ $>$ നെ $\geq$ പരസ്പരം മാറ്റം ചെയ്യാം

(i) $P(1.5 < X < 3.5) = P(1.5 \leq X < 3.5) = P(1.5 < X \leq 3.5) = P(1.5 \leq X \leq 3.5)$

$$P(1.5 < X < 3.5) = \int_{1.5}^{3.5} f(x)\,dx = \frac{1}{21}\int_{1.5}^{3.5} x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{21}\left(\frac{x^3}{3}\right) = \frac{1}{21}\left(\frac{(3.5)^3 - (1.5)^3}{3}\right)$$

$$= \frac{79}{126}.$$

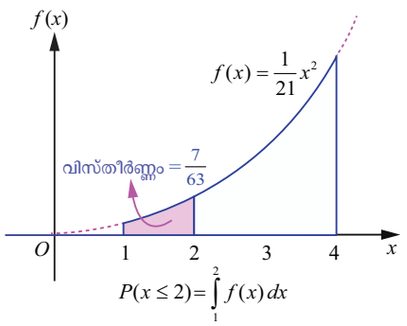


ചിത്രം 11.13

(ii) $P(X \leq 2) = \int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{1} f(x)\,dx + \int_{1}^{2} f(x)\,dx$

$$P(X \leq 2) := 0 + \frac{1}{21}\int_1^2 x^2\,dx = \frac{1}{21}\left(\frac{x^3}{3}\right)_1^2$$

$$= \frac{1}{21}\left(\frac{2^3 - 1^3}{3}\right) = \frac{7}{63}.$$

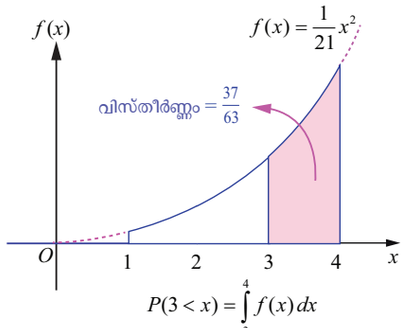


ചിത്രം 11.14

(iii) $P(3 < X) = \int_{3}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{3}^{4} f(x)\,dx + \int_{4}^{\infty} f(x)\,dx$

$$= \frac{1}{21}\int_3^4 x^2\,dx + 0 = \frac{1}{21}\left(\frac{x^3}{3}\right)_3^4.$$

$$= \frac{1}{21}\left(\frac{4^3 - 3^3}{3}\right) = \frac{37}{63}$$



ചിത്രം 11.15

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 197 15-02-2023 15:26:50

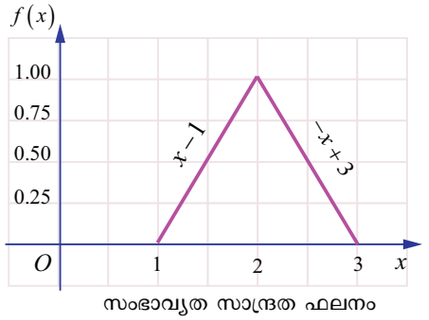
11.4.4 സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനത്തിൽ നിന്നും വിതരണ ഫലന കണ്ടുപിടിക്കൽ

ഒരു തുടർച്ചയായ യാദൃശ്ചിക ചരം X ന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനവും സഞ്ചിത വിതരണ ഫലനവും (അല്ലെങ്കിൽ വിതരണ ഫലനം) X ന്റെ എല്ലാ സംഭാവ്യത നിർദ്ദേശങ്ങളെ കൊണ്ടുള്ളതാണ്. X ന്റെ സംഭാവ്യത വിതരണത്തെ ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു മൂല്യമായി തീരുമാനിക്കും. X ന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനത്തിൽ നിന്ന് തുടർച്ചയായ യാദൃശ്ചികചരം X ന്റെ വിതരണ ഫലനത്തെ തീരുമാനിക്കും $F \quad f(x)$.

ഉദാഹരണം 11.12

X എന്ന സംഭാവ്യത ഒരു യാദൃശ്ചിക ചരത്തിന്റെ $f(x)$ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു

$$f(x)=\begin{cases} x-1, & 1\le x<2 \\ -x+3, & 2\le x<3 \\ 0 & \text{മറ്റുള്ളവയ്ക്ക്} \end{cases}$$



സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം

ചിത്രം 11.16

(i) $F(x)$ വിതരണ ഫലനം

(ii) $P(1.5 \le X \le 2.5)$ എന്നിവ കാണുക

നിർദ്ധാരണം

(i) നിർവ്വചനപ്രകാരം $F(x)=P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$

$x<1$ ആകുമ്പോൾ $\quad F(x) = P(X\le x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,du=0$.

$1\le x<2$ ആകുമ്പോൾ $\quad F(x) = P(X\le x)=\int_{-\infty}^{1} 0\,du+\int_{1}^{x}(u-1)\,du$

$$=0+\left[\frac{(u-1)^2}{2}\right]_1^x=\frac{(x-1)^2}{2}$$

$2\le x<3$ ആകുമ്പോൾ $\quad F(x) = P(X\le x)=\int_{-\infty}^{1} 0\,du+\int_{1}^{2}(u-1)\,du+\int_{2}^{x}(3-u)\,du$

$$=0+\left[\frac{(u-1)^2}{2}\right]_1^2+\left[-\frac{(3-u)^2}{2}\right]_2^x$$

$$=\frac{1^2-0}{2}+\frac{1-(3-x)^2}{2}=1-\frac{(3-x)^2}{2}$$

$x\ge 3$ ആകുമ്പോൾ, $\quad F(x) = P(X\le x)=\int_{-\infty}^{1} 0\,du+\int_{1}^{2}(u-1)\,du+\int_{2}^{3}(3-u)\,du+\int_{3}^{x} 0\;du$

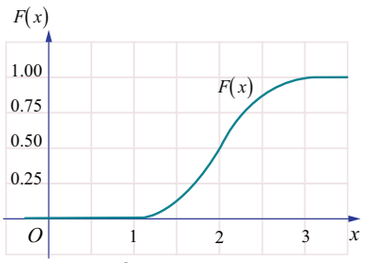
$$=\int_{-\infty}^{1} 0\,du+\int_{1}^{2}(u-1)\,du+\int_{2}^{3}(3-u)\,du+\int_{3}^{x} 0\,du$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 198 15-02-2023 15:26:55

$$= 0 + \left[\frac{(u-1)^2}{2}\right]_1^2 + \left[-\frac{(3-u)^2}{2}\right]_2^3 + 0$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

ഇതിൽനിന്നും $F(x) = \begin{cases} 0, & -\infty < x < 1 \\ \frac{(x-1)^2}{2}, & 1 \le x < 2 \\ 1 - \frac{(3-x)^2}{2}, & 2 \le x < 3 \\ 1 & 3 \le x < \infty \end{cases}$



വിതരണ ഫലനം

ചിത്രം 11.17

(ii) $P(1.5 \le X \le 2.5) = F(2.5) - F(1.5)$

$$= \left(1 - \frac{(3-2.5)^2}{2}\right) - \left(\frac{(1.5-1)^2}{2}\right)$$

$$= \frac{1.75 - 0.25}{2} = 0.75$$

അല്ലെങ്കിൽ

$$P(1.5 \le X \le 2.5) = \int_{1.5}^{2.5} f(x)\,dx = \int_{1.5}^{2} (x-1)\,dx + \int_{2}^{2.5} (-x+3)\,dx = 0.75$$

ശരി നോക്കുക : (i) $F(x)$ എല്ലായിടത്തും തുടർച്ചയായത് ആയിരിക്കും.

(ii) ചിത്രം 11.16-ൽ ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= \frac{1}{2}bh = 1$.

11.4.5 സംഭാവ്യത വിതരണഫലനത്തിൽ നിന്നും സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം.

തുടർച്ചയായ യാദൃശ്ചികചരം X ന്റെ വിതരണ ഫലനം $f(x)$ ൽ നിന്നും സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം $F(x)$ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതി.

തുടർച്ചയായ യാദൃശ്ചികചരം X ന്റെ വിതരണ ഫലനം $F(x)$ എന്നിരിക്കട്ടെ എങ്കിൽ സേംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം എന്നത് $f(x)$

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x),$$ ഡെറിവേറ്റിവ്സ് നിലനിൽക്കുന്നിടത്തെല്ലാം.

ഉദാഹരണം 11.13

ഒരു യാദൃശ്ചികചരം X ന്റെ വിതരണ ഫലനം $F(x)$,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x \end{cases}$$ എങ്കിൽ

(i) സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം $f(x)$ (ii) $P(0.2 \le X \le 0.7)$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക?.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 199 15-02-2023 15:27:00

നിർദ്ധാരണം

(i) $F(x)$ ന്റെ തുടർച്ചയായ ബിന്ദുക്കളിൽ നിന്ന് x ന്റെ മൂല്യം വിലയിടുന്ന $f(x)$ നെ വേർതിരിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് കിട്ടുന്നത്

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & 0\le x<1\\ 0, & x\ge 1\end{cases}$$

$f(x)$ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം തുടർച്ചയായിട്ടുള്ളതല്ലെങ്കിൽ $x=0$ അല്ലെങ്കിൽ $x=1$. $f(0)$, $f(1)$ എന്നതിനെ ഏതു രീതിയിലും നിർവചിക്കാം. $f(0)=1$ കൂടാതെ, $f(1)=0$ എന്നത് നമുക്ക് എടുക്കാം.

∴ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം $f(x)$ എന്നത്

$$f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1\\ 0, & \text{മറ്റുള്ളവയ്ക്ക്}\end{cases}$$

(ii) $$P(0.2\le X\le 0.7)=F(0.7)-F(0.2)$$
$$=0.7-0.2=0.5$$

അല്ലെങ്കിൽ

$$P(0.2\le X\le 0.7)=\int_{0.2}^{0.7} f(x)\,dx=\int_{0.2}^{0.7} 1\,dx=0.5$$

പരാമർശം

നിർവചനത്തിൽ നിന്ന്, $P(X\le x)=F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$. $F(x)$ അല്ലെങ്കിൽ $f(x)$ എന്നിവയിലേതെങ്കിലും ഉപയോഗിച്ച് സംഭാവ്യത $P(a<X<b)$ കണ്ടുപിടിക്കാം.

കുറിപ്പ്

മുകളിൽ നിർവചിച്ച സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനത്തെ നമുക്ക് എങ്ങനെയും നിർവചിക്കാം

$f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1\\ 0, & \text{മറ്റുള്ളവയ്ക്ക്}\end{cases}$ അല്ലെങ്കിൽ $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x\le 1\\ 0 & \text{മറ്റുള്ളവയ്ക്ക്}\end{cases}$ അല്ലെങ്കിൽ $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{മറ്റുള്ളവയ്ക്ക്}\end{cases}$

ഉദാഹരണം 11.14

യാദൃശ്ചികചരം X ന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം $f(x)=\begin{cases}k & 1\le x\le 5\\ 0 & \text{മറ്റുള്ളവയ്ക്ക്}\end{cases}$ എങ്കിൽ

(i) വിതരണഫലനം (ii) $P(X<3)$ (iii) $P(2<X<4)$ (iv) $P(3\le X)$ എന്നിവ കാണുക

നിർദ്ധാരണം

$f(x)$ ഒരു സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം ആയതുകൊണ്ട്, $f(x)\ge 0$ കൂടാതെ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$

അതായത് $$\int_{-\infty}^{1} 0\,dx+\int_{1}^{5} k\,dx+\int_{5}^{\infty} 0\,dx=1$$

$$0+k\left(x\right)_1^5+0=1\Rightarrow 4k=1\Rightarrow k=\frac{1}{4}$$

∴ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം എന്നത്

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 1\le x\le 5\\ 0, & \text{മറ്റുള്ളവയ്ക്ക്}\end{cases}$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 200 15-02-2023 15:27:07

(i) വിതരണഫലനം

വിതരണഫലനം $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$.

$x < 1$ ആകുമ്പോൾ, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{x} 0\,du = 0$.

$1 \le x < 5$ ആകുമ്പോൾ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{1} 0\,du + \int_{1}^{x} \frac{1}{4}\,du = \frac{1}{4}(x-1)$.

$x \ge 5$ ആകുമ്പോൾ $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{1} 0\,du + \int_{1}^{5} \frac{1}{4}\,du + \int_{5}^{x} 0\,du = 1$.

അങ്ങനെ $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{x-1}{4}, & 1 \le x \le 5 \\ 1, & x > 5. \end{cases}$$

(ii) $P(X < 3) = P(X \le 3) = F(3) = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$ ($F(x)$ തുടർച്ചയായതുകൊണ്ട്).

(iii) $P(2 < X < 4) = P(2 \le X \le 4) = F(4) - F(2) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

(iv) $P(3 \le X) = P(X \ge 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

ഉദാഹരണം 11.15

ഒരു വൈദ്യുതി ഉപകരണത്തിന്റെ ആയുഷ്കാലത്തെ കുറിക്കുന്ന യാദൃശ്ചിക ചരം X ന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം

$$f(x) = \begin{cases} k\,e^{-2x} & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \le 0. \end{cases}$$ എങ്കിൽ

(i) k യുടെ മൂല്യം (ii) വിതരണ ഫലനം (iii) $P(X < 2)$

(iv) X ന്റെ കുറഞ്ഞപക്ഷ 4 സമയ യൂണിറ്റുകളുടെ സംഭാവ്യത (v) $P(X = 3)$ എന്നിവ കാണുക?

നിർദ്ധാരണം

(i) സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം $f(x)$ എന്നത്കൊണ്ട്, $f(x) \ge 0$ കൂടാതെ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

അതായത് $\int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\infty} k\,e^{-2x}dx = 1$

$$0 + k\left(\frac{e^{-2x}}{-2}\right)_0^{\infty} = 1 \Rightarrow k\left(\frac{e^{-\infty} - e^{0}}{-2}\right) = 1 \Rightarrow k = 2$$

∴ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം

$$f(x) = \begin{cases} 2\,e^{-2x} & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad x \le 0 \end{cases}$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 201 15-02-2023 15:27:14

(ii) വിതരണ ഫലനം

നിർവചനപ്രകാരം വിതരണഫലനം $F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$

$x \le 0$ ആയാൽ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{x} 0\,du = 0$

$x > 0$ ആയാൽ $\quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du = \int_{-\infty}^{0} 0\,du + \int_{0}^{x} 2e^{-2u}\,du = 2\left(\frac{e^{-2u}}{-2}\right)_{0}^{x} = 1 - e^{-2x}$

ഇത് നല്കുന്നത് $\quad F(x) = \begin{cases} 0, & ; \quad x \le 0 \\ 1 - e^{-2x} & ; \quad x > 0 \end{cases}$.

(iii) $P(X < 2) = P(X \le 2) = F(2) = 1 - e^{-2\times 2} = 1 - e^{-4}$ ($F(x)$ തുടർച്ചയായതുകൊണ്ട്)

(iv) X ന്റെ കുറഞ്ഞപക്ഷ 4 സമയയൂണിറ്റുകളുടെ സംഭാവ്യത
$P(X \ge 4) = 1 - P(X < 4) = 1 - F(4) = 1 - (1 - e^{-2\times 4}) = e^{-8}$

(v) തുടർച്ചയായതുകൊണ്ട്, $x = a$ യിൽ $f(x)$ എന്നത് X മൂല്യം എടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത അല്ല. അതായത് $f(x)$, $x = a$ എന്നത് $P(X = a)$ നു സമമല്ല. X എന്നത് തുടർച്ചയായ രീതിയായതുകൊണ്ട് $P(X = a) = 0 \quad a \in \mathbb{R} \therefore P(X = 3) = 0$.

അഭ്യാസം 11.3

1. X ന്റെ സംഭാവ്യതസാന്ദ്രതഫലനം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു $f(x) = \begin{cases} k\,x\,e^{-2x} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$ എങ്കിൽ.

   k യുടെ മൂല്യം കാണുക.

2. X ന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം $f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ 2 - x & 1 \le x < 2 \\ 0 & \text{മറ്റുള്ളവയ്ക്ക്} \end{cases}$ എങ്കിൽ.

   (i) $P(0.2 \le X < 0.6)$ (ii) $P(1.2 \le X < 1.8)$ (iii) $P(0.5 \le X < 1.5)$ എന്നിവ കാണുക.

3. ഒരു പാൽ സൊസൈറ്റിയിൽ പാലുവിൽക്കുന്നത് ദിവസവും കുറഞ്ഞത് 200 ലിറ്ററും കൂടിയത് 600 ലിറ്ററു മാണെന്ന് കരുതുക. സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം

   $f(x) = \begin{cases} k & 200 \le x \le 600 \\ 0 & \text{മറ്റുള്ളവയ്ക്ക്} \end{cases}$ എങ്കിൽ

   (i) k യുടെ മൂല്യം കാണുക (ii) വിതരണ ഫലനം കാണുക

   (iii) ദിവസം 300 ലിറ്ററിനും 500 ലിറ്ററിനും ഇടയിൽ പാൽ വിൽക്കുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക?

4. X ന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം തന്നിട്ടുണ്ട്. $f(x) = \begin{cases} k\,e^{-\frac{x}{3}} & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad x \le 0 \end{cases}$ എങ്കിൽ

   (i) k യുടെ മൂല്യം കാണുക (ii) വിതരണഫലനം കാണുക (iii) $P(X < 3)$

   (iv) $P(5 \le X)$ (v) $P(X \le 4)$ എന്നിവ കാണുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 202 15-02-2023 15:27:21

5. X എന്ന റാൻഡം വേരിയബിളിന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം $f(x)$ തന്നിട്ടുണ്ട്,

$$f(x)=\begin{cases} x+1, & -1\le x<0 \\ -x+1, & 0\le x<1 \\ 0 & \text{മറ്റുള്ളവയ്ക്ക്} \end{cases} \quad \text{എങ്കിൽ}$$

(i) വിതരണഫലനം $F(x)$ (ii) $P(-0.5\le X\le 0.5)$ എന്നിവ കാണുക

6. X എന്നത് റാൻഡം വേരിയബിളാണെങ്കിൽ $F(x)$ എന്നത്,

$$\text{തന്നിട്ടുള്ളത്}\ F(x)=\begin{cases} 0, & -\infty < x< 0 \\ \frac{1}{2}\left(x^2+x\right) & 0\le x<1 \\ 1, & 1\le x< \infty \end{cases} \quad \text{എങ്കിൽ}$$

(i) സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം $f(x)$ (ii) $P(0.3\le X\le 0.6)$ എന്നിവ കാണുക

11.5 ഗണിതശാസ്ത്ര പ്രതീക്ഷ

റാൻഡം വേരിയബിളിന്റെ ഏറ്റവും പ്രധാനമായ സവിശേഷതയാണ് പ്രതീക്ഷ. പ്രതീക്ഷയുടെ അർത്ഥങ്ങൾ. പ്രതീക്ഷമൂല്യം, മാധ്യം, അദ്യമൊമന്റ് എന്നിവയാണ്.

സംഖ്യാശരാശരിയുടെ ഗണിതശാസ്ത്ര പ്രതീക്ഷകളുടെ നിർവചനം സംഖ്യാശരാശരിയുടെ പരമ്പരാഗതമായ ആശയത്തിൽ നിന്നാണ് ഉടലെടുത്തത്.

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ എന്ന n സംഖ്യകളുടെ സംഖ്യാ ശരാശരി

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{n}\ .$$

n ഒരൊറ്റമൂല്യമുള്ള $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ എന്നീ n സംഖ്യകളുടെ മുഴുവൻ ശേഖരത്തിനെയും സംഗ്രഹിക്കാനും കുറിക്കാനും ഒരൊറ്റമൂല്യമായ ശരാശരി ഉപയോഗിക്കുന്നു.

വിശദീകരണം

10 സംഖ്യകൾ എടുക്കുക. സംഖ്യകൾ ഇതാണ് $6, 2, 5, 5, 2, 6, 2, -4, 1, 5$.

$$\text{അതിന്റെ ശരാശരി}\ \frac{6+2+5+5+2+6+2-4+1+5}{10}=3\ .$$

$6, 2, 5, 5, 2, 6, 2, -4, 1, 5$ മുതലായ 10 സംഖ്യകളെയും യാദൃശ്ചികചരം X ന്റെ മൂല്യങ്ങളായി കരുതിയാൽ പ്രോബബിലിറ്റി മാസ് ഫലനം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു

x	-4	1	2	5	6
$P(X=x)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{10}$

മുകളിൽ പറഞ്ഞ കണക്കുകൂട്ടൽ പ്രകാരം ശരാശരിയെ ഇങ്ങനെയും എഴുതാം

$$-4\times\frac{1}{10}+1\times\frac{1}{10}+2\times\frac{3}{10}+5\times\frac{3}{10}+6\times\frac{2}{10}=3\ .$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 203 15-02-2023 15:27:25

ഈ വിശദീകരണം മൂലം യാദൃശ്ചിക ചരത്തിന്റെ ഓരോ മൂല്യത്തെയും അതിന്റെ സംഭാവ്യതകൊണ്ട് ഗുണിച്ച് കിട്ടുന്ന ഗുണനഫലങ്ങളുടെ സങ്കലനത്തിൽ നിന്ന് ഏതൊരു യാദൃശ്ചിക ചരത്തിന്റെയും ശരാശരി അല്ലെങ്കിൽ പ്രതീക്ഷമൂല്യം കിട്ടുന്ന എന്ന് നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കാം.

അതിനാൽ ശരാശരി $=\sum$ (x ന്റെ മൂല്യം) $\times$ (സംഭാവ്യത യാദൃശ്ചികചരം)

വ്യതിരിക്തമാണെങ്കിൽ ഇത് ശരിയാകുന്നു. തുടർച്ചയായുള്ള യാദൃശ്ചിക ചരങ്ങളുടെ കാര്യത്തിൽ ഇത് ഗണിതശാസ്ത്ര പ്രതീക്ഷയും സങ്കലനത്തിനും പകരമായി കൂട്ടുതുകയ്ക്ക് സമമായി ഇന്റഗ്രലുകൾ വരുന്നു.

യാദൃശ്ചികചരം X ന്റെ സംഭാവ്യത വിതരണത്തെ സംഗ്രഹിക്കാൻ രണ്ടു അളവുകൾ പലപ്പോഴും ഉപയോഗിക്കുന്നു. സ്ഥിതിവിവരക്കണക്കനുസരിച്ച് ഒന്ന് കേന്ദ്രപ്രവണത മറ്റൊന്ന് വ്യതിയാനം അല്ലെങ്കിൽ സംഭാവ്യത വിതരണങ്ങളുടെ വ്യത്യാസങ്ങൾ ആണ്. മാധ്യം എന്നത് സംഭാവ്യത വിതരണത്തിന്റെ കേന്ദ്രപ്രവണതയുടെ ഒരു അളവാണ്. കൂടാതെ വ്യതിയാനം എന്നത് വ്യതിയാനങ്ങളുടെ അളവാണ് അല്ലെങ്കിൽ വിതരണങ്ങളുടെ വ്യതിയാനങ്ങൾ ആണ്. പക്ഷേ ഈ രണ്ടു അളവുകളും ഒരിക്കലും തുല്യമല്ല. സംഭാവ്യത വിതരണത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ അതായത് രണ്ട് വ്യത്യസ്ത വിതരണങ്ങൾക്ക് ഒരേ മാധ്യവും വ്യതിയാനവുമാണ് ആ അളവുകൾ ലളിതമായതു കൊണ്ട് X ന്റെ സംഭാവ്യത വിതരണത്തെ കുറിച്ചുള്ള പഠനം ലളിതമാണ്.

11.5.1 മാധ്യം

നിർവചനം 11.8 : (മാധ്യം)

ഒരു യാദൃശ്ചിക ചരം X ന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം $f(x)$ എന്നിരിക്കട്ടെ. $E(X)$ അല്ലെങ്കിൽ μ എന്ന് അടയാളപ്പെടുത്തുക ,

$$E(X)=\begin{cases}\sum_{x} x\,f(x) & X \text{ വ്യതിരിക്ത ചരം എങ്കിൽ}\\ \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx & X \text{ തുടർച്ചയായ ചരം എങ്കിൽ}\end{cases}$$

എന്നത് പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന മൂല്യം അല്ലെങ്കിൽ ശരാശരി അല്ലെങ്കിൽ X ന്റെ ഗണിതശാസ്ത്ര പ്രതീക്ഷ എന്ന് കുറിക്കപ്പെടുന്നു

പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന മൂല്യം പൊതുവായി യാദൃശ്ചിക ചരത്തിന് കിട്ടേണ്ട ശരിയായ മൂല്യം ആയിരിക്കില്ല. ഇത് പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന യാദൃശ്ചിക ചരത്തിന്റെ മൂല്യത്തെ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് സഹായിക്കുന്നു. മാത്രമല്ല തനി പരീക്ഷണങ്ങൾ കൊണ്ട് ചരത്തിന്റെ ശരാശരി മൂല്യം കാണുന്നതിനും സാധിക്കുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 11.3 (തെളിവില്ലാതെ)

ഒരു യാദൃശ്ചിക ചരം X ന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം $f(x)$ എന്നിരിക്കട്ടെ. $g(X)$ എന്ന പുതിയ യാദൃശ്ചികചരത്തിന്റെ പ്രതീക്ഷമൂല്യം

$$E(g(X))=\begin{cases}\sum_{x} g(x)\,f(x) & g(x) \text{ വ്യതിരിക്തചരം എങ്കിൽ}\\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,f(x)\,dx & g(x) \text{ തുടർച്ചയായ ചരം എങ്കിൽ}\end{cases}$$

$g(X)=x^k$ എങ്കിൽ മേല്പറഞ്ഞ സിദ്ധാന്തം തരുന്ന പ്രതീക്ഷമൂല്യം യാദൃശ്ചിക ചരം X ന്റെ മൂല ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് ഉള്ള k-യുടെ മൊമന്റ് എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

$$E(X^k)=\begin{cases}\sum_{x} x^k\,f(x) & X \text{ വ്യതിരിക്തചരം എങ്കിൽ}\\ \int_{-\infty}^{\infty} x^k\,f(x)\,dx & X \text{ തുടർച്ചയായ ചരം എങ്കിൽ}\end{cases}$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 204 15-02-2023 15:27:27

കുറിപ്പ്

$k = 0$, എന്നാവുമ്പോൾ നിർവചനപ്രകാരം,

$$E(1) = \begin{cases} \sum_{x} f(x) = 1 & X \text{ ഒരു വ്യതിരിക്ത ചരം എങ്കിൽ} \\ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1 & X \text{ തുടർച്ചയായ ചരം എങ്കിൽ} \end{cases}$$

11.5.2 വ്യതിയാനം

വ്യതിയാനം എന്നത് സ്ഥിതിവിവര കണക്കുകളുടെ അളവിന്റെ ശരാശരി മൂല്യത്തിൽ നിന്ന് തന്നിട്ടുള്ള അള വുകൾ വ്യത്യസ്തമാകുന്നതിനെ കുറിച്ച് പറയപ്പെടുന്നു. ഗണിതശാസ്ത്രപ്രകാരം, വ്യതിയാനം എന്നത് ശരാശരി മൂല്യത്തിൽ നിന്നുള്ള വ്യതിചലനത്തിന്റെ വർഗ്ഗത്തിന്റെ മാധ്യമാണ്. ഇത് പരിവർത്തനം വ്യാപനം കൂടാതെ വികി രണം എന്നീ പദങ്ങൾ കൊണ്ട് കുറിക്കുന്നു.

നിർവചനം 11.9: (വ്യതിയാനം)

ഒരു ***യാദൃശ്ചിക ചരം*** X *ന്റെ വ്യതിയാനത്തെ* $\mathrm{Var}(X)$ *അല്ലെങ്കിൽ* $V(X)$ *അല്ലെങ്കിൽ* $\sigma^2 (\text{or } \sigma_x{}^2)$

$$V(X) = E(X - E(X))^2 = E(X - \mu)^2 \text{ എന്ന് കുറിക്കുന്നു.}$$

വ്യതിയാനത്തിന്റെ വർഗ്ഗമൂലത്തെ **പ്രമാണ വിചലനം** എന്നു പറയുന്നു. അതായത് പ്രമാണ വിചലനം $\sigma = \sqrt{V(X)}$. ഒരു യാദൃശ്ചിക ചരത്തിന്റെ വ്യതിയാനവും പ്രമാണവിചലനവും എല്ലായ്പ്പോഴും നോൺ-നെഗറ്റീവ് (ഋണമല്ലാത്തത്) ആണ്.

11.5.3 ഗണിതശാസ്ത്ര പ്രതീക്ഷകളുടെയും വ്യതിയാനങ്ങളുടെയും ഗുണങ്ങൾ

(i) $E(aX + b) = aE(X) + b$, ഇവിടെ a , b എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ ആണ്.

തെളിവ്

X എന്നത് വ്യതിരിക്ത യാദൃശ്ചിക ചരം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ

$$\begin{aligned} E(aX + b) &= \sum_{i=1}^{\infty} (ax_i + b) f(x_i) && \text{(നിർവചനപ്രകാരം)} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \left(ax_i f(x_i) + bf(x_i)\right) \\ &= a\sum_{i=1}^{\infty} x_i f(x_i) + b\sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) \\ &= aE(X) + b(1) && \left(\because \sum_{i=1}^{\infty} f(x_i) = 1\right) \\ E(aX + b) &= aE(X) + b\,. \end{aligned}$$

■

അതുപോലെ X എന്നത് തുടർച്ചയായ യാദൃശ്ചിക ചരം ആവുമ്പോൾ സംയോജനത്തിന് പകരം സമാകലനം നടത്തി നമുക്ക് ഇത് തെളിയിക്കാം.

ഉപസിദ്ധാന്തം 1:	$E(aX) = aE(X)$	($b = 0$ ആവുമ്പോൾ)
ഉപസിദ്ധാന്തം 2:	$E(b) = b$	($a = 0$ ആവുമ്പോൾ)

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 205 15-02-2023 15:27:31

(ii) $Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$

തെളിവ്

നമുക്കറിയാം $E(x) = \mu$

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X-\mu)^2 \\ &= E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) \\ &= E(X^2) - 2\mu E(X) + \mu^2 \qquad (\mu \text{ ഒരു സ്ഥിരാങ്കമായത് കൊണ്ട്}) \\ &= E(X^2) - 2\mu\mu + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2 \\ Var(X) &= E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 \end{aligned}$$

ഒരു യാദൃശ്ചികചരം X ന്റെ വ്യതിയാനം മറ്റൊരു സൂത്രം ഉപയോഗിച്ചും കണ്ടുപിടിക്കാം

$$\sigma^2 = \text{Var}(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

(iii) $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$ ഇവിടെ a , b എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ.

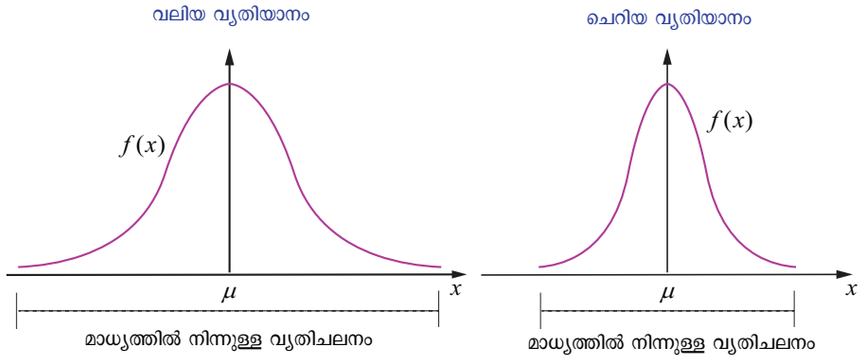
തെളിവ്

$$\begin{aligned} Var(aX+b) &= E\left((aX+b) - E(aX+b)\right)^2 \\ &= E\left(aX + b - aE(X) - b)\right)^2 \\ &= E\left(aX - aE(X)\right)^2 \\ &= E\left(a\left(X - E(X)\right)\right)^2 \\ &= a^2 E\left(X - E(X)\right)^2 . \end{aligned}$$

അതുകൊണ്ട് $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

ഉപസിദ്ധാന്തം 3:	$V(aX) = a^2 V(X)$	($b = 0$ ആവുമ്പോൾ)
ഉപസിദ്ധാന്തം 4:	$V(b) = 0$	($a = 0$ ആവുമ്പോൾ)

വ്യതിയാനം എന്നത് യാദൃശ്ചികചരത്തിന്റെ മൂല്യങ്ങളുടെ ശരാശരി μ വിനെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള ഡീവിയേഷന്റെ നിർദ്ദേശങ്ങളാണ്. σ^2 ചെറുതായി ഇരുന്നാൽ യാദൃശ്ചിക ചരങ്ങളുടെ ശരാശരി അടിസ്ഥാനമാക്കി മൂല്യങ്ങൾ അധികമായി കൂട്ടമായിരിക്കുന്നു. അതുപോലെ വലുതായി σ^2 എന്നത് യാദൃശ്ചിക ചരത്തിന്റെ ശരാശരിയിൽ നിന്ന് വളരെയധികം മാറിപ്പോയിരിക്കും.



ഒരേ മാധ്യവും വ്യത്യസ്ത വ്യതിയാനവും

ചിത്രം 11.18

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 206 15-02-2023 15:27:38

മുകളിൽ പറഞ്ഞ ചിത്രങ്ങൾ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് തുടർച്ചയായ രണ്ട് യാദൃശ്ചിക ചരത്തിന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനത്തെക്കുറിച്ച് ആണ്. അതിന്റെ വക്രങ്ങൾ മണിയുടെ ആകൃതിയായി ആണ് ഉള്ളത് കൂടാതെ ഒരേ മാധ്യവും വ്യത്യസ്ത വ്യതിയാനങ്ങളുമാണ്.

ഉദാഹരണം 11.16

താഴെ തന്നിരിക്കുന്നത് സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനത്തിന്റെ പട്ടിക $f(x)$ ആണെങ്കിൽ,

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	c^2	$2c^2$	$3c^2$	$4c^2$	c	$2c$

(i) c യുടെ മൂല്യം കാണുക (ii) മാധ്യവും വ്യതിയാനവും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

(i) $f(x)$ എന്നത് സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം ആയതിനാൽ, $f(x) \geq 0$ എല്ലാ x നും, കൂടാതെ $\sum_x f(x) = 1$.

അങ്ങനെ, $\sum_x f(x) = 1$

$$c^2 + 2c^2 + 3c^2 + 4c^2 + c + 2c = 0$$

$$c = \frac{1}{5} \text{ അല്ലെങ്കിൽ } -\frac{1}{2}.$$

എന്തെന്നാൽ $f(x) \geq 0$ എല്ലാ x നും, c യുടെ സാധ്യമായ മൂല്യം $\frac{1}{5}$ ആണ്.

സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം എന്നത്

x	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{1}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

(ii) മാധ്യവും വ്യതിയാനവും കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് താഴെപ്പറയാറുള്ള രീതി ഉപയോഗിക്കാം

x	$f(x)$	$x\,f(x)$	$x^2 f(x)$
1	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{25}$
2	$\frac{2}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{8}{25}$
3	$\frac{3}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{27}{25}$
4	$\frac{4}{25}$	$\frac{16}{25}$	$\frac{64}{25}$
5	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{25}{5}$
6	$\frac{2}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{72}{5}$
	$\sum f(x) = 1$	$\sum x\,f(x) = \frac{115}{25}$	$\sum x^2 f(x) = \frac{585}{25}$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 207 15-02-2023 15:27:47

മാധ്യം : $E(X) = \sum x f(x) = \frac{115}{25} = 4.6$

വ്യതിയാനം : $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 = \sum x^2 f(x) - \left(\sum x f(x)\right)^2$

$$= \frac{585}{25} - \left(\frac{115}{25}\right)^2 = 23.40 - 21.16 = 2.24$$

മാധ്യം, വ്യതിയാനം എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ ക്രമേണ $4.6,\ 2.24$ ആണ്.

ഉദാഹരണം 11.17

8 വെള്ളപന്തുകളും 4 കറുത്ത പന്തുകളും ഉള്ള ഒരു സഞ്ചിയിൽ നിന്നും യാദൃശ്ചികമായി രണ്ടു പന്തെടുക്കുന്നു. ഒരു കറുത്ത പന്തെടുത്താൽ വിജയിക്കാനുള്ള സാധ്യത ₹ 20 ഉം, അത് ഒരു വെള്ള പന്തായാൽ വിജയിക്കാനുള്ള സാധ്യത ₹ 10 ആയിരിക്കും. എങ്കിൽ വിജയപ്രതീക്ഷയുടെ തുകയും വ്യതിയാനവും കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

X എന്നത് ജയിക്കുന്ന തുക. സാധ്യമായ സംഭവങ്ങളുടെ തെരഞ്ഞെടുക്കൽ (i) രണ്ടു പന്തുകളും കറുപ്പ് അല്ലെങ്കിൽ (ii) ഒരു വെള്ള കൂടാതെ ഒരു കറുപ്പ് (iii) രണ്ടും വെള്ള പന്തുകൾ. X എന്നത് ഒരു യാദൃശ്ചിക ചരം അതിനെ ഇങ്ങനെ നിർവചിക്കാം

X (രണ്ടും കറുത്തപന്തുകൾ) = ₹ $2(20)$ = ₹ 40

X (ഒരു കറുത്ത കൂടാതെ ഒരു വെള്ള) = ₹ 20 – ₹ 10 = ₹10

X (രണ്ട് വെള്ള പന്തുകൾ) = ₹ (-20) = – ₹ 20

X എടുക്കുന്ന മൂല്യങ്ങൾ $40, 10$ കൂടാതെ -20

ആകെ പന്തുകൾ $n = 12$

2 പന്തു തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള ആകെ വഴികൾ $= \binom{12}{2} = \frac{12 \times 11}{1 \times 2} = 66$

2 പന്തുകൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള വഴികളുടെ എണ്ണം $= \binom{4}{2} = 6$

ഒരു കറുത്ത പന്തും ഒരു വെള്ള പന്തും തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള വഴികളുടെ എണ്ണം $= \binom{8}{1}\binom{4}{1} = 32$

2 വെള്ള പന്തുകൾ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള വഴികളുടെ എണ്ണം $= \binom{8}{2} = 28$

യാദൃശ്ചിക ചരങ്ങളുടെ X മൂല്യങ്ങൾ	40	10	–20	ആകെ
ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജുകളുടെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം	6	32	28	66

സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം എന്നത്

X	40	10	–20	ആകെ
$f(x)$	$\frac{6}{66}$	$\frac{32}{66}$	$\frac{28}{66}$	1

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 208 15-02-2023 15:27:52

മാധ്യം :

$$E(X) = \sum x\, f(x) = 40\cdot\left(\frac{6}{66}\right)+10\cdot\left(\frac{32}{66}\right)+(-20)\cdot\left(\frac{28}{66}\right)=0$$

അതായത് വിജയ പ്രതീക്ഷിയുടെ തുക 0 ആകുന്നു.

വ്യതിയാനം :

$$E(X^2) = \sum x^2\, f(x) = 40^2\cdot\left(\frac{6}{66}\right)+10^2\cdot\left(\frac{32}{66}\right)+(-20)^2\cdot\left(\frac{28}{66}\right)=\frac{4000}{11}$$

$$\left(E(X)\right)^2 = 0^2 = 0$$

ഇത് നല്കുന്നത് $V(X) = E(X^2)-\left(E(X)\right)^2 = \frac{4000}{11}-0=\frac{4000}{11}$

$\therefore$ $E(X) = 0$ കൂടാതെ $\mathrm{Var}(X)=\frac{4000}{11}$.

ഉദാഹരണം 11.18

$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x} & ; \quad x\geq 0\\ 0 & \text{മറ്റുള്ളവയ്ക്ക്}\end{cases}$ എന്ന സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം ഉള്ള ഒരു യാദൃശ്ചിക ചരം X , ന്റെ മാധ്യം, വ്യതിയാനം എന്നിവ കാണുക

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള വിതരണം തുടർച്ചയായിട്ടുള്ളതാണെന്ന് നമുക്ക് അനുമാനിക്കാം

മാധ്യം :

നിർവചനപ്രകാരം $\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$

$= \int_{-\infty}^{0} 0\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)dx+\int_{0}^{\infty} x\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)dx$

(നമുക്ക് ബെർനോളി സൂത്രം ഉപയോഗിച്ചു അല്ലെങ്കിൽ ഭാഗിഗ സമാകലനം ഉപയോഗിച്ചും കണ്ടുപിടിക്കാം)

$= 0+\lambda\int_{0}^{\infty} x\left(e^{-\lambda x}\right)dx$

$= 0+\lambda\left(\frac{\lfloor 1}{\lambda^2}\right)$ (ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ n ഗാമ ഇന്റഗ്രൽ ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാം $\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x}dx=\frac{\lfloor n}{\alpha^{n+1}}$)

$= \frac{1}{\lambda}$

വ്യതിയാനം :

നിർവചനപ്രകാരം, $E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\, f(x)\, dx$

$= \int_{-\infty}^{0} 0\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)dx+\int_{0}^{\infty} x^2\left(\lambda e^{-\lambda x}\right)dx$

(നമുക്ക് ബെർണൊലി സൂത്രം അല്ലെങ്കിൽ ഭാഗിക സമാകലനം ഉപയോഗിക്കാം)

$= 0+\lambda\int_{0}^{\infty} x^2\left(e^{-\lambda x}\right)dx$

$= 0+\lambda\left(\frac{\lfloor 2}{\lambda^3}\right)=\frac{2}{\lambda^2}$ (ധനപൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾക്ക് ഗാമ ഇന്റഗ്രൽ ഉപയോഗിക്കാം)

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 209 15-02-2023 15:27:58

$$\therefore\ Var(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

അതായത് $\frac{1}{\lambda}$, $\frac{1}{\lambda^2}$ എന്നിവ യഥാക്രമം മാധ്യം, വ്യതിയാനം ആണ്.

അഭ്യാസം 11.4

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് യാദൃശ്ചിക ചരം X ന്റെ മാധ്യം, വ്യതിയാനം എന്നിവ കാണുക.

(i) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} & x = 2, 5 \\ \frac{1}{5} & x = 0, 1, 3, 4 \end{cases}$

(ii) $f(x) = \begin{cases} \frac{4-x}{6} & x = 1, 2, 3 \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} 2(x-1) & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{മറ്റുള്ളവയ്ക്ക്} \end{cases}$

(iv) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} & x > 0 \\ 0 & \text{മറ്റുള്ളവയ്ക്ക്} \end{cases}$

2. 4 ചുവപ്പ് പന്തുകളും 3 കറുപ്പ് പന്തുകളും ഉള്ള ഒരു സഞ്ചിയിൽ നിന്ന് പുനസ്ഥാപനം ചെയ്യാതെ അടുത്തടുത്ത് 2 പന്തുകൾ വെളിയിൽ എടുക്കുക, ചുവപ്പ് പന്ത്കൾ ലഭിയ്ക്കാനുള്ള എണ്ണങ്ങളുടെ സാധ്യത X ആയാൽ X ന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനവും ശരാശരിയേയും കാണുക.

3. μ, σ^2 എന്നിവ ഒരു വ്യതിരിക്ത യാദൃശ്ചികചരം X ന്റെ മാധ്യം, വ്യതിയാനം എന്നിവയാണെങ്കിൽ, $E(X+3) = 10$ കൂടാതെ $E(X+3)^2 = 116$, എങ്കിൽ μ, σ^2 എന്നിവ കാണുക.

4. 4 നല്ല നാണയങ്ങൾ ഒരു പ്രാവശ്യം ടോസ്സ് ചെയ്യുമ്പോൾ തല ലഭിച്ച എണ്ണത്തിന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം, മാധ്യം, വ്യതിയാനം എന്നിവ കാണുക.

5. ഒരു യാത്രാ തീവണ്ടി ഓരോ അരമണിക്കൂറിനും റെയിൽവേ സ്റ്റേഷനിൽ എത്തും. എല്ലാ ദിവസവും രാവിലെ ഒരു വിദ്യാർത്ഥി തന്റെ വീട്ടിൽ നിന്നും തീവണ്ടി സ്റ്റേഷനിൽ ചെല്ലും. വിദ്യാർത്ഥി തീവണ്ടി സ്റ്റേറ്റഷനിൽ എത്തുന്ന സമയം മുതൽ തീവണ്ടിക്കായി കാത്തിരിക്കുന്ന സമയത്തെ മിനിറ്റിൽ X എന്ന് കുറിക്കാം. X ന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & 0 < x < 30 \\ 0 & \text{മറ്റുള്ളവയ്ക്ക്} \end{cases}$$

എങ്കിൽ യാദൃശ്ചികചരം X ന്റെ ഗണിത ശാസ്ത്ര പ്രതീക്ഷ വ്യക്തമാക്കുക.

6. തയ്യാറാക്കിയ കംപ്യൂട്ടറിലെ ഇലക്ട്രോണിക് ഉപകരണം ആയിരക്കണക്കിന് മണിക്കൂർ ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ തകരാറിലാകുന്ന സമയത്തിന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x} & x > 0 \\ 0 & \text{മറ്റുള്ളവയ്ക്ക്} \end{cases}$$

എങ്കിൽ യാദൃശ്ചികചരം X ന്റെ പ്രതീക്ഷമൂല്യം കാണുക.

7. ഒരു യാദൃശ്ചികചരം X ന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം

$$f(x) = \begin{cases} 16\,x\,e^{-4x} & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad x \le 0 \end{cases}$$

എങ്കിൽ X ന്റെ മാധ്യം, വ്യതിയാനം എന്നിവ കാണുക.

8. 600 ടിക്കറ്റുകൾ ഉള്ള ഒരു ലോട്ടറിയിൽ ഒരു സമ്മാനം ₹200 ഉം, 4 സമ്മാനങ്ങൾ ₹100 ഉം, 6 സമ്മാനങ്ങൾ ₹ 50 എന്ന് കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. ടിക്കറ്റ് ചിലവ് ₹ 2 എങ്കിൽ, ഒരു ടിക്കറ്റിന്റെ പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന ലാഭതുക എത്ര.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 210 15-02-2023 15:28:02

11.6 സൈദ്ധാന്തിക വിതരണങ്ങൾ: ചില പ്രത്യേകതരം വ്യതിരിക്ത വിതരണങ്ങൾ

മുകളിലുള്ള പാഠഭാഗത്ത് നമ്മൾ ധാരാളം പൊതുവായ സംഭാവ്യത വിതരണങ്ങളുടെ മാധ്യത്തെക്കുറിച്ചും വ്യതിയാനത്തെക്കുറിച്ചും പഠിച്ചു. ഇനി നമുക്ക് ചില വ്യതിരിക്ത സംഭാവ്യത വിതരണങ്ങളുടെ പ്രത്യേക പ്രാധാന്യത്തെക്കുറിച്ച് പഠിക്കാം.

ഈ പാഠഭാഗത്ത് നമുക്ക് താഴെകാണുന്ന വ്യതിരിക്ത വിതരണങ്ങളെക്കുറിച്ച് പഠിക്കാം.

(i) ഒറ്റ ബിന്ദുവുള്ള വിതരണം
(ii) രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ ഉള്ള വിതരണം
(iii) ബെർനോളി വിതരണം
(iv) ബൈനോമിയൽ വിതരണം.

11.6.1 ഒറ്റ ബിന്ദുവുള്ള വിതരണം

ഒരു യാദൃശ്ചികപരം X എന്നത് ഒരു ബിന്ദുവുള്ള വിതരണമാണെങ്കിൽ അവിടെ x_0 എന്ന ഒരു ബിന്ദു ഉണ്ടായിരിക്കുകയും അതിന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനത്തിന്റെ നിർവചനം $f(x) = P(X = x_0) = 1$ ഉം ആയിരിക്കും.

അതായത് സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഒരു ബിന്ദുവിനെ കേന്ദ്രീകരിച്ചിരിക്കുന്നു.

സഞ്ചിതാവൃത്തി വിതരണഫലനം എന്നത്

$$F(x) = \begin{cases} 0 & -\infty < x < x_0 \\ 1 & x_0 \le x < \infty \end{cases}$$

മാധ്യം :

$$E(X) = \sum_x x\, f(x) = x_0 \times 1 = x_0$$

വ്യതിയാനം :

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \sum_x x^2 f(x) - \big(x_0\big)^2 = {x_0}^2 - {x_0}^2 = 0$$

മാധ്യം, വ്യതിയാനം എന്നിവ യഥാക്രമം x_0 , 0 ആകുന്നു.

11.6.2 രണ്ടു ബിന്ദുക്കൾ ഉള്ള വിതരണം

(a) അസമഭാഗ രീതി: ഒരു യാദൃശ്ചികചരം X എന്നതിന് രണ്ടു ബിന്ദുവുള്ള വിതരണം എങ്കിൽ അവിടെ x_1 , x_2 ,എന്നീ രണ്ടു മൂല്യങ്ങൾ ഉടലെടുക്കുന്നു

അതായത് $f(x) = \begin{cases} p & x = x_1 \text{ ആകുമ്പോൾ} \\ 1-p & x = x_2 \text{ ആകുമ്പോൾ} \end{cases}$ ഇവിടെ $0 < p < 1$.

സഞ്ചിതാവൃതി വിതരണ ഫലനം എന്നത്

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \quad \text{എങ്കിൽ} \\ p & x_1 \le x < x_2 \quad \text{എങ്കിൽ} \\ 1 & x \ge x_2 \quad \text{എങ്കിൽ} \end{cases}$$

മാധ്യം :

$$E(X) = \sum_x x\, f(x) = x_1 \times p + x_2 \times (1-p) = px_1 + qx_2 \quad \text{ഇവിടെ } q = 1-p\,.$$

വ്യതിയാനം :

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \sum_x x^2 f(x) - \big(px_1 + qx_2\big)^2$$

$$= \big({x_1}^2 p + {x_2}^2 q\big) - \big(px_1 + qx_2\big)^2 = pq\big(x_2 - x_1\big)^2$$

$\therefore$ $px_1 + qx_2$, $pq\big(x_2 - x_1\big)^2$ എന്നിവയഥാക്രമം മാധ്യം, വ്യതിയാനം ആകുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 211 15-02-2023 15:28:07

(b) സമഭാഗരീതി:

$p = q = \frac{1}{2}$ ആകുമ്പോൾ 2 ബിന്ദുക്കൾ ഉള്ള വിതരണം എന്നത്,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & x = x_1 \text{ ആകുമ്പോൾ} \\ \frac{1}{2} & x = x_2 \text{ ആകുമ്പോൾ} \end{cases}$$

കൂടാതെ $0 < p < 1$ സഞ്ചിതാവൃത്തി ഫലനം എന്നത്,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < x_1 \quad \text{എങ്കിൽ} \\ \frac{1}{2} & x_1 \le x < x_2 \quad \text{എങ്കിൽ} \\ 1 & x \ge x_2 \quad \text{എങ്കിൽ} \end{cases}$$

മാധ്യം, വ്യതിയാനം എന്നിവയഥാക്രമം $\frac{x_1 + x_2}{2}$, $\frac{(x_2 - x_1)^2}{4}$.

11.6.3 ബെർനോളി വിതരണം

ജേക്കബ് ബെർണോലി
(1654 - 1705)

സ്വതന്ത്രശ്രമങ്ങളിലെസ്ഥിരതയോടുകൂടിയജയിക്കാനുള്ളസംഭാവ്യതpയെകുറിച്ച്ആദ്യം പഠിച്ചത് സ്വിസ് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ ജാകബ്സ് വെർനോളി (1654–1705)ആണ്. അദ്ദേഹത്തിന്റെ മരണശേഷം 8 വർഷങ്ങൾക്കുശേഷം 1713-ൽ അദ്ദേഹത്തിന്റെ മരുമകൾ നിക്കോളസ് ആപുസ്തകം പ്രസിദ്ധീകരിച്ചു (ആർട്ട് ഓഫ് കൺജക്റ്റിങ്) ബെർനോലി നമുക്ക് മനസ്സിലാക്കിതരുന്നത് പരീക്ഷണങ്ങളുടെ എണ്ണം വലുതകുന്തോറും ജയത്തിന്റെ അനുപാതം p യോട് അടുത്ത് കൊണ്ടിരിക്കും.

സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തത്തിൽ സ്വസ് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞൻ **ജേക്കബ് ബെർണോലി** യുടെ നാമത്തിൽ അറിയപ്പെടുന്ന **ബെർനോലി വിതരണം** ഒരു **യാദൃശ്ചിക ചരത്തിന്റെ വ്യതിരിക്ത സംഭാവ്യതവിതരണമാണ്**. അതായത് ഒരു യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിന്റെ അനന്തരഫലത്തിന് ഒരേ ഒരു സാധ്യത അതായത് ജയം അല്ലെങ്കിൽ തോൽവി (ഉദാഹരണമായി, തലകൾ അല്ലെങ്കിൽ പൂവുകൾ, കേടായത് അല്ലെങ്കിൽ നല്ലത്, മരണം അല്ലെങ്കിൽ ജനനം ഇതുപോലെ സാധ്യമായ വേറെ ജോഡികൾ) എന്ന് വിലയിരുത്തപ്പെടുന്നു. ഒരു ബെർണോലിപരീക്ഷണം എന്നത് യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണമാകുന്നു. ഒരു ബെർണോലി പരീക്ഷണം എന്നത് ധാരാളം സ്വതന്ത്ര്യ പരീക്ഷണങ്ങളുടെ ഫലമാണ്. വിജയസാധ്യത എല്ലാ പരീക്ഷണത്തിലും ഒരുപോലെ ആയിരിക്കും. ഏതൊരു പരീക്ഷണവും ദ്വൈതവൽക്കരിച്ചും ബെർതോലി രീതിയിൽ തുടരാം.

നിർവചനം 11.10: (ബെർനോലിയുടെ വിതരണം)

X (ജയം) = 1 കൂടാതെ X (തോല്വി) = 0, എന്ന് നിർവചിക്കപ്പെടുന്ന ഒരു ബെർനോലി പരീക്ഷണത്തോട് യോജിച്ച് ഒരു യാദൃശ്ചികചരം X ന്

$$f(x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ q = 1 - p & x = 0 \end{cases} \quad \text{ഇവിടെ } 0 < p < 1$$

X എന്നത് ബെർനോലി യാദൃശ്ചികചരം എന്നും കൂടാതെ $f(x)$ എന്നത് ബെർനോലി വിതരണം എന്നും വിളിക്കപ്പെടുന്നു.

അല്ലെങ്കിൽ സമാനമായി

ജയം p എന്ന സംഭാവ്യതയോടുകൂടിയ ബെർനോലി വിതരണത്തെ പിൻതുടർന്ന് ഒരു യാദൃശ്ചികചരം X നെ കുറിക്കുന്നത് $X \sim Ber(p)$ ഇവിടെ p എന്നത് പരാമീറ്റർ, അതിനെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം X എന്നത്

$$f(x) = p^x (1-p)^{1-x}, \quad x = 0, 1$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 212 15-02-2023 15:28:09

ബെർനോലി വിതരണത്തിന്റെ സഞ്ചിത വിതരണം

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ q=1-p & 0\le x<1\\ 1 & x\ge 1\end{cases}$$

മാധ്യം :

$$E(X)\ =\ \sum_x x\,f(x)=1\times p+0\times(1-p)=p\ ,$$

0 കൂടാതെ 1 എന്നീ മൂല്യങ്ങളെ മാത്രമേ X എടുക്കുകയുള്ളൂ അതിനാൽ പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന മൂല്യം p എന്നതിനെ "ഒരിക്കലും കാണില്ല" എന്ന് പറയുന്നു.

വ്യതിയാനം :

$$V(X)\ =\ E(X^2)-\big(E(X)\big)^2=\sum_x x^2 f(x)-p^2$$

$$=\left(1^2\,p+0^2\,q\right)-p^2=p(1-p)=pq\quad \text{ഇവിടെ } q=1-p$$

പരാമീറ്റർ p, ശരാശരി μ കൂടാതെ വ്യതിയാനം σ^2 എന്നീ മൂല്യങ്ങൾ അടങ്ങിയ ബെർതോലി വിതരണത്തെ പിൻതുടരുന്നതുമായ ഒരു ബെർതോലി യാദൃശ്ചിക ചരം ആണ് X എങ്കിൽ

$$\mu=p \qquad \text{കൂടാതെ} \qquad \sigma^2=pq$$

$p=q=\dfrac{1}{2}$, ആകുമ്പോൾ ബെർനോലി വിതരണം ഇപ്രകാരമാണ്

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & ;\quad x=0\\ \dfrac{1}{2} & ;\quad x=1\end{cases}$$

ഇവിടെ $0<p<1$. കൂടാതെ സഞ്ചിത വിതരണം എന്നത്

$$F(x)=\begin{cases}0 & ;\quad x<0\\ \dfrac{1}{2} & ;\quad 0\le x<1\\ 1 & ;\quad x\ge 1\end{cases}$$

$\dfrac{1}{2}$ കൂടാതെ $\dfrac{1}{4}$ എന്നിവ യഥാക്രമം മാധ്യം, വ്യതിയാനം എന്നിവയാണ്

11.6.4 ബൈനോമിയൽ വിതരണം

വളരെ പ്രാധാന്യമർഹിക്കുന്ന വിതരണമാണ് **ബൈനോമിയൽ വിതരണം** ആവർത്തന പരീക്ഷണങ്ങളിൽ രണ്ട് സാധ്യത മാത്രമാണെങ്കിൽ ഇത് പ്രയോഗിക്കുന്നു. അതായത് തലകൾ അല്ലെങ്കിൽ പൂക്കൾ, ജയം അല്ലെങ്കിൽ തോല്വി, കേടായസാധനം, അല്ലെങ്കിൽ നല്ല സാധനം ഇങ്ങനെയുള്ള സാധ്യമായ ജോഡികൾ കാണും. സംഭാവ്യതയുടെ സാധ്യതഫലങ്ങൾ കണക്കുകൂട്ടുന്നത് ഗുണനനിയമവും ട്രീഡയഗ്രം മൂലവുമാണ്.

ഒരു നാണയം ഒരു പ്രാവശ്യം ടോസ്സ് ചെയ്യുന്നു. X എന്നത് തലകളുടെ എണ്ണം. അതായത് $X\sim Ber(p),$, കാരണം നമുക്ക് കിട്ടുന്നത് ഒന്നുകിൽ തല $(X=1)$ അല്ലെങ്കിൽ പൂവ് $(X=0)$ സംഭാവ്യത p അല്ലെങ്കിൽ $1-p$.

ഒരു നാണയം n പ്രാവശ്യം ടോസ്സ് ചെയ്യുമ്പോൾ, X എന്നത് തലകളുടെ എണ്ണം X-ൽ അടങ്ങിയ മൂല്യങ്ങൾ $0, 1, 2, \ldots, n.$ തലകളുടെ എണ്ണം x ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക

$$P(X=x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x},\ x=0,\ 1,\ 2,\ ...,\ n.$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 213 15-02-2023 15:28:14

$X = x$ എന്നത്, n ടോസ്സുകളിലുള്ള x തലകളുടെ എണ്ണമാണ് കുറിക്കുന്നത്. അതായത് $\binom{n}{x}$ വഴികൾ തലകി ട്ടുന്നതിനും ബാക്കിയുള്ളത് $n-x$ പൂവുകളും. അങ്ങനെയുള്ള ഓരോ സംഭാവ്യതയുടെയും സാധ്യതഫലങ്ങൾ $p^x(1-p)^{n-x}$. ബെർനോലിയുടെ ബൈനോമിയൽ സിദ്ധാന്തം ഇവിടെ ഉപയോഗിക്കാം. n ന്റെ മൂല്യം 30 നും കുറവായി ഇരിക്കുന്നതെങ്കിൽ ബൈനോമിയൽ സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിക്കുന്നത് നന്നായിരിക്കും.

നിർവചനം 11.11: ബൈനോമിയൽ യാദൃശ്ചിക ചരം

ഒരു വ്യതിരിക്ത റാൻഡം വേരിയബിളും n -ആവർത്തന ശ്രമങ്ങളിലെ വിജയങ്ങളുടെ എണ്ണവുമായ X നെ ബൈനോമിയൽ യാദൃശ്ചിക ചരം എന്ന് വിളിക്കണമെങ്കിൽ

(i) n- ആവർത്തിച്ചുള്ള പരീക്ഷണങ്ങൾ സ്വതന്ത്ര്യവും n പരിമിതവുമാണ്

(ii) ഓരോ ശ്രമത്തി(ട്രയൽ)ലും (വിജയം) അല്ലെങ്കിൽ പരാജയം എന്ന് ലേബൽ ചെയ്തിട്ടുള്ള സാധ്യമായ രണ്ട് ഫലങ്ങൾ മാത്രമേ നൽകുന്നുള്ളൂ

(iii) വിജയ സംഭാവ്യത സൂചിപ്പിക്കുന്ന p ഓരോ ശ്രമത്തിലും സ്ഥിരമായിരിക്കും.

നിർവചനം 11.12 : ബൈനോമിയൽ വിതരണം

n സ്വതന്ത്ര പരീക്ഷണങ്ങളിൽ വിജയങ്ങളുടെ എണ്ണം കുറിക്കുന്നതും വിജയ സംഭാവ്യത p യും പരാജയ സംഭാവ്യത $q = 1-p$ യും ഉള്ള ബൈനോമിയൽ യാദൃശ്ചിക ചരം X ന് **ബൈനോമിയൽ വിതരണം** ഉണ്ടായിരിക്കും $X \sim B(n, p)$.

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, 2, ..., n.$$

വിതരണത്തിന്റെ പേര് ബൈനോമിയൽ വിപുലീകരണത്തിൽ നിന്ന് ലഭിച്ചു. a, b എന്നീ സ്ഥിരാങ്കങ്ങളുടെ ബൈനോമിയൽ വിപുലീകരണം ചുവടെ കൊടുക്കുന്നു.

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} a^x b^{n-x}$$

ഒരൊറ്റ ശ്രമത്തിലെ വിജയത്തിന്റെ സാധ്യതയെ സൂചിപ്പിക്കാൻ p യെ അനുവദിക്കുന്നു. തുടർന്ന് ബൈനോമിയൽ വിപുലീകരണം $a = p$, $b = 1-p$ എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ബൈനോമിയൽ യാദൃശ്ചിക ചരത്തിന്റെ സംഭാവ്യതകളുടെ ആകെത്തുക1 ആണെന്ന് തെളിയുന്നു. പരീക്ഷണത്തിലെ ഓരോ ട്രയലും {ജയം, പരാജയം} എന്നിങ്ങനെ രണ്ട് ഫലങ്ങളായി തിരിച്ചിരിക്കുന്നതു കൊണ്ട്. അതിനെ "bi" നോമിയിൽ എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

X ഒരു ദ്വിമാന ബൈനോമിയൽ യാദൃശ്ചിക ചരം ആണെങ്കിൽ അത് പാരാമീറ്ററുകളായ p, n, എന്നിവയ് ക്കൊപ്പം ബൈനോമിയൽ വിതരണം പിന്തുടരുന്നതും ഇവിടെ, μ ശരാശരി, σ^2 വ്യതിയാനം എന്നിവയുടെ മൂല്യം

$$\mu = np, \quad \sigma^2 = np(1-p)$$

പ്രതീക്ഷിച്ച മൂല്യം പൊതുവേ യാദൃശ്ചിക ചരത്തിന് എടുക്കാവുന്ന ഒരു സാധാരണ മൂല്യമല്ല. അത് ധാരാളം സ്വതന്ത്ര ആവർത്തന പരീക്ഷണത്തിലെ യാദൃശ്ചിക ചരത്തിന്റെ പ്രതീക്ഷിച്ച മൂല്യത്തെ ദീർഘകാല തുല്യശരാ ശരി മൂല്യമായി വ്യാഖ്യാനിക്കാൻ പലപ്പോഴും സഹായകമാവും. ഒരു ബൈനോമിയൽ വിതരണത്തിന്റെ ആകൃതി $p = 0.5$ അല്ലെങ്കിൽ n വലുതാകുമ്പോൾ സമഭാഗമാണ്.

$p = q = \frac{1}{2}$, ആയിരിക്കുമ്പോൾ ദ്വിപദവിതരണം ഇങ്ങനെ മാറുന്നു.

$$f(x) = \binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}, \qquad x = 0, 1, 2, ..., n.$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 214 15-02-2023 15:28:18

അതായത് $f(x)=\binom{n}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad x=0,1,2,...,n.$

$\therefore$ മാധ്യം, വ്യതിയാനം എന്നിവ യഥാക്രമം $\frac{n}{2}$ മറ്റും $\frac{n}{4}$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 11.19

താഴെപ്പറയുന്ന ഓരോന്നിനും ബൈനോമിയൽവിതരണം കണ്ടെത്തുക.

(i) 5 ഉചിതമായ നാണയങ്ങൾ ഒരുതവണ എറിയുകയും X തലകളുടെ എണ്ണം സൂചിപ്പിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

(ii) ഉചിതമായ പകിട 10 തവണ ഉരുട്ടി, X എന്നത് 4 പ്രത്യക്ഷപ്പെട്ടതിന്റെ എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

നിർദ്ധാരണം

(i) തന്നിട്ടുള്ളത് 5 ഉചിതമായ നാണയങ്ങൾ ഒരു തവണ എറിയുന്നു എന്നാണ് നാണയങ്ങൾ എല്ലാം ഉചിതമായ നാണയങ്ങളായതിനാൽ ഒരൊറ്റ നാണയത്തിൽ തല ലഭിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $p=\frac{1}{2}$ ഒപ്പം $q=1-p=\frac{1}{2}$ ആണ്.

അഞ്ച് നാണയങ്ങളിൽ ദൃശ്യമാകുന്ന തലകളുടെ എണ്ണം X എന്ന് കുറിക്കുക. X എന്ന ബൈനോമിയൽ യാദൃശ്ചിക ചരം എടുക്കുന്ന മൂല്യങ്ങൾ 0, 1,2,3,4, 5 $n=5$ ഒപ്പം $p=\frac{1}{2}$ $X\sim B\left(5,\frac{1}{2}\right)$.

$\therefore$ അതിനാൽ ബൈനോമിയൽ വിതരണം

$$f(x)=\binom{n}{x}p^x(1-p)^{n-x}, \quad x=0,1,2,...,n$$

ആയിത്തീരുന്നു

$$f(x)=\binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{n-x}, \quad x=0,1,2,...,5.$$

അതായത് $$f(x)=\binom{5}{x}\left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad x=0,1,2,...,n$$

(ii) ഉചിതമായ പകിട 10 പ്രാവശ്യം ഉരുട്ടി, X എന്നത് 4 പ്രത്യക്ഷപ്പെട്ടതിന്റെ എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. X എന്ന ബൈനോമിയൽ യാദൃശ്ചിക ചരം എടുക്കുന്ന മൂല്യങ്ങൾ $0, 1, 2, 3, \ldots 10$, $n=10$, $p=\frac{1}{6}$ അതായത് $X\sim B\left(10,\frac{1}{6}\right)$.

പകിടയിൽ 4 കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $p=\frac{1}{6}$ ഒപ്പം $q=1-p=\frac{5}{6}$.

അതിനാൽ ബൈനോമിയൽ വിതരണം

$$f(x)=\binom{10}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^x\left(\frac{5}{6}\right)^{10-x}, \quad x=0,1,2,...,10.$$

ഉദാഹരണം 11.20

ഒരു മൾട്ടിപ്പിൾ ചോയ്സ് പരീക്ഷയ്ക്ക് 10 ചോദ്യങ്ങൾ ഉണ്ട്. ഓരോ ചോദ്യത്തിനും കൃത്യമായി 4 പ തറിപ്പോകലിന് 4 ഉത്തരം കൊടുത്തിട്ടുണ്ട് ഉത്തരം വിദ്യാർത്ഥി ഊഹിച്ചു പറയുന്നു. X ശരിയായ ഉത്തരങ്ങളുടെ എണ്ണം സൂചിപ്പിക്കുന്നുവെന്നും കരുതുക. (i) ബൈനോമിയൽവിതരണം (ii) വിദ്യാർത്ഥിക്ക് ശരിയായ 7 ഉത്തരങ്ങൾ ലഭിക്കാനുള്ള സാധ്യത (iii) ശരിയായ ഒരു ഉത്തരമെങ്കിലും ലഭിക്കാനുള്ള സാധ്യത എന്നിവ കാണുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 215 15-02-2023 15:28:23

നിർദ്ധാരണം

(i) X വിജയത്തിന്റെ എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിനാൽ X ന് $0,1,2,...,10$ എടുക്കാം.

വിജയത്തിനുള്ള സാധ്യത $p=\frac{1}{4}$ പരാജയത്തിന് $q=1-p=\frac{3}{4}$, $n=10$ എന്നിവയാണ്.

അതിനാൽ X ബൈനോമിയൽ വിതരണം $X\sim B\left(10,\frac{1}{4}\right)$ പിന്തുടരുന്നു.

ഇത് നല്കുന്നത്, $$f(x)=\binom{10}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-x},\qquad x=0,1,2,...,10$$

(ii) ശരിയായ 7 ഉത്തരങ്ങൾക്കുള്ള സംഭാവ്യത

$$P(X=7)=f(7)=\binom{10}{7}\left(\frac{1}{4}\right)^{7}\left(\frac{3}{4}\right)^{10-7}=120\left(\frac{3^3}{4^{10}}\right)$$

ആ വിദ്യാർത്ഥിക്ക് 7 ശരിയുത്തരം കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $120\left(\frac{3^3}{4^{10}}\right)$.

(iii) കുറഞ്ഞത് ഒരു ഉത്തരമെങ്കിലും ശരിയാകുന്നതിനുള്ള സാധ്യത

$$P(X\geq 1)=1-P(X<1)=1-P(X=0)$$
$$=1-\binom{10}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{10}=1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}.$$

കുറഞ്ഞത് ഒരു ശരി ഉത്തരമെങ്കിലും വിദ്യാർത്ഥിക്ക് ലഭിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യത $1-\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$ ആണ്. ■

ഉദാഹരണം 11.21

ഒരു ബൈനോമിയൽ ചരം X ന്റെ മാധ്യം, വ്യതിയാനം യഥാക്രമം 2, 1.5 എന്നിവയാണ്. താഴെപ്പറയുന്നവ കാണുക.

(i) $P(X=0)$ (ii) $P(X=1)$ (iii) $P(X\geq 1)$

നിർദ്ധാരണം

സാധ്യതകൾ കണ്ടെത്താൻ n, p എന്നീ പാരാമീറ്ററുകളുടെ മൂല്യങ്ങൾ അറിഞ്ഞിരിക്കണം.

തന്നിട്ടുള്ളത്

$$\text{മാധ്യം}=np=2\quad \text{വ്യതിയാനം}=npq=1.5$$

ഇത് നല്കുന്നു $$\frac{npq}{np}=\frac{1.5}{2}=\frac{3}{4}$$

$$q=\frac{3}{4},\ p=1-q=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$

$np=2$, അപ്പോൾ $n=\frac{2}{p}=8$. അതുകൊണ്ട് $X\sim B\left(8,\frac{1}{4}\right)$.

ബൈനോമിയൽ വിതണം എന്നത്

$$P(X=x)=f(x)=\binom{8}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^{x}\left(\frac{3}{4}\right)^{8-x}\qquad x=0,1.2,...8$$

(i) $$P(X=0)=f(0)=\binom{8}{0}\left(\frac{1}{4}\right)^{0}\left(\frac{3}{4}\right)^{8-0}=\left(\frac{3}{4}\right)^{8}$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 216 15-02-2023 15:28:31

(ii) $$P(X=1) = f(1) = \binom{8}{1}\left(\frac{1}{4}\right)^{1}\left(\frac{3}{4}\right)^{8-1} = 2\left(\frac{3}{4}\right)^{7}$$

(iii) $$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{8}$$

ഉദാഹരണം 11.22

ABC കമ്പനി നിർമ്മിക്കുന്ന ഉൽപ്പന്നങ്ങളിൽ ശരാശരി 20% തകരാറുള്ളതായി കാണപ്പെടുന്നു. ഇതിൽ നിന്നും ക്രമരഹിതമായി 6 ഉൽപ്പന്നങ്ങൾ ഞങ്ങൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുകയും X വികലമായ ഉൽപ്പന്നങ്ങളുടെ എണ്ണം സൂചിപ്പിക്കുകയും ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ (i) രണ്ട് ഉൽപ്പന്നങ്ങൾ തകരാറുണ്ടാകാനുള്ള സാധ്യത (ii) പരമാവധി ഒരു ഉൽപ്പന്നം വികലമാണ് (iii) കുറഞ്ഞത് രണ്ട് ഉൽപ്പന്നങ്ങൾ വികലമാണ് ഇവയുടെ സാധ്യത കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത് $n = 6$

കേടായ ഉൽപ്പന്നം തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള സാധ്യത $\frac{20}{100}$, അതായത് $p = \frac{1}{5}$.

X കേടായ ഉൽപ്പന്നങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെസൂചിപ്പിക്കുന്നതിനാൽ, X ന് $0,1,2,...,6$ എന്നീ മൂല്യങ്ങൾ എടുക്കാം.

കേടായ(വിജയം) സാധ്യത $p = \frac{1}{5}$ പരാജയത്തിന് $q = 1 - p = \frac{4}{5}$, മറ്റും $n = 6$

$\therefore$ അതിനാൽ $X \sim B\left(6, \frac{1}{5}\right)$. എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ബൈനോമിയൽ വിതരണം X പിന്തുടരുന്നു.

$\therefore$ ഇത് നല്കുന്നു $$f(x) = \binom{6}{x}\left(\frac{1}{5}\right)^{x}\left(\frac{4}{5}\right)^{6-x}, \quad x = 0,1,2,...,6.$$

(i) രണ്ട് കേടായ ഉൽപ്പന്നം കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യം

$$P(X=2) = f(2) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{6-2} = 15\left(\frac{4^4}{5^6}\right)$$

(ii) പരമാവധി ഒരു ഉൽപ്പന്നം വികലമാകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത

$$P(X \leq 1) = P(X=0) + P(X=1)$$

$$= \binom{6}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^{0}\left(\frac{4}{5}\right)^{6-0} + \binom{6}{1}\left(\frac{1}{5}\right)^{1}\left(\frac{4}{5}\right)^{6-1}$$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)^{6} + (6)\left(\frac{4^5}{5^6}\right) = 2\left(\frac{4}{5}\right)^{5}$$

$\therefore$ പരമാവധി ഒരു കേടായ ഉൽപ്പന്നം കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $2\left(\frac{4}{5}\right)^{5}$.

(iii) കുറഞ്ഞത് 2 വികലമായ ഉൽപ്പന്നങ്ങളുടെ സംഭാവ്യത എന്നത്

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - 2\left(\frac{4}{5}\right)^{5}$$

കുറഞ്ഞത് 2 കേടായ ഉൽപ്പന്നം കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $1 - 2\left(\frac{4}{5}\right)^{5}$.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 217 15-02-2023 15:28:37

അഭ്യാസം 11.5

1. ബൈനോമിയൽ വിതരണത്തിന്റെ $P(X=k)$ കണക്കുകൂട്ടുക, $B(n,p)$ ഇവിടെ

   (i) $n=6,\ p=\frac{1}{3},\ k=3$ (ii) $n=10,\ p=\frac{1}{5},\ k=4$ (iii) $n=9,\ p=\frac{1}{2},\ k=7$

2. മിസ്റ്റർ Q വിന്റെ ഏത് ശ്രമത്തിലെ ലക്ഷ്യം നേടാനുള്ള സാധ്യത $\frac{1}{4}$. ആണ്. അവൻ 10 തവണ ശ്രമിക്കുന്നുവെന്ന് കരുതുക. അദ്ദേഹം ലക്ഷ്യത്തിലെത്താനുള്ള സാധ്യത കണ്ടെത്തുക (i) കൃത്യമായി 4 തവണ (ii) കുറഞ്ഞത് ഒരു തവണയെങ്കിലും.

3. ബൈനോമിയൽ വിതരണം ഉപയോഗിച്ച് ഇനിപ്പറയുന്ന പരീക്ഷണങ്ങളിൽ X ന്റെ ശരാശരിയും വ്യതിയാനവും കണ്ടെത്തുക

   (i) ഉചിതമായ നാണയം 100 തവണ എറിയുന്നു. ഒപ്പം X തലകളുടെ എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

   (ii) ഉചിതമായ പകിട 240 തവണ എറിയുന്നു. കൂടാതെ X നാലു പ്രത്യക്ഷപ്പെട്ടതിന്റെ എണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

4. പ്രത്യേകതരം വൈദ്യുത പരിശോധനയെ അതിജീവിക്കാനുള്ള സാധ്യത $\frac{3}{4}$. പരീക്ഷിച്ച 5 ഘടകങ്ങളിൽ 3 എണ്ണം കൃത്യമായി അതിജീവിക്കാനുള്ള സാധ്യത കണ്ടെത്തുക.

5. ഒരു ചില്ലറവ്യാപാരി ഒരു നിർമ്മാതാവിൽ നിന്ന് ഒരു പ്രത്യേകതരം ഇലക്ട്രോണിക് ഉപകരണം വാങ്ങുന്നു. ഉപകരണത്തിന്റെ വികലമായ നിരക്ക് 5% ആണെന്ന് നിർമ്മാതാവ് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ചില്ലറ വ്യാപാരിയുടെ ഇൻസ്പെക്ടർ കപ്പൽചരക്കിൽ നിന്ന് യാദൃശ്ചികമായി 10 ഇനങ്ങൾ എടുക്കുന്നു (i) കുറഞ്ഞത് ഒരു വികലമായ ഇനമെങ്കിലും ഉണ്ടാകും (ii) കൃത്യമായി രണ്ട് വികലമായ ഇനങ്ങൾ ഇവയുടെ സാധ്യത കാണുക.

6. ഒരു ഫ്ളൂറസെന്റ് ലൈറ്റിന് കുറഞ്ഞത് 600 മണിക്കൂറെങ്കിലും ഉപയോഗപ്രദമായ ആയുസ്സ് 0.9 ആണെങ്കിൽ, അത്തരം 12 ലൈറ്റുകൾക്കു താഴെപ്പറയുന്ന സാധ്യതകൾ കണ്ടെത്തുക

   (i) കൃത്യമായി 10 ലൈറ്റിന് കുറഞ്ഞത് 600 മണിക്കൂറെങ്കിലും ഉപയോഗപ്രദമായ ആയുസ്സ് ഉണ്ടാകും;

   (ii) കുറഞ്ഞത് 11 ലൈറ്റിന് കുറഞ്ഞത് 600 മണിക്കൂർ ഉപയോഗപ്രദമായ ആയുസ്സ് ഉണ്ടായിരിക്കും;

   (iii) കുറഞ്ഞത് 2 ലൈറ്റിനെങ്കിലും കുറഞ്ഞത് 600 മണിക്കൂർ ഉപയോഗപ്രദമായ ആയുസ്സ് ഉണ്ടാകില്ല.

7. ഒരു ബൈനോമിയൽ ചരം X ന്റെ ശരാശരി, പ്രമാണവിചലനം എന്നിവ യഥാക്രമം 6,2 ആണ്. എങ്കിൽ താഴെപ്പറയുന്നവ കാണുക. (i) സംഭാവ്യതസാന്ദ്രത ഫലനം (ii) $P(X=3)$ (iii) $P(X\geq 2)$.

8. $X\sim B(n,p)$ മറ്റും $4P(X=4)=P(X=2)$, $n=6$ ആണ്. എങ്കിൽ X ന്റെ വിതരണം, ശരിശരി കൂടാതെ പ്രമാണ വിചലനം എന്നിവ കാണുക.

9. ഒരു ബൈനോമിയൽ വിതരണത്തിന് 5 സ്വതന്ത്ര പരീക്ഷണങ്ങൾ അടങ്ങുന്നു, 1,2 വിജയങ്ങളുടെ സാധ്യത യഥാക്രമം 0.4096, 0.2048 എന്നിവയാണ്. യാദൃശ്ചികചരത്തിന്റെ ശരാശരിയും വ്യതിയാനവും കണ്ടെത്തുക.

അഭ്യാസം 11.6

തന്നിരിക്കുന്ന നാല് ഇതരമാർഗ്ഗങ്ങളിൽ നിന്ന് ശരിയായ അല്ലെങ്കിൽ ഏറ്റവും അനുയോജ്യമായ ഉത്തരം തിരഞ്ഞെടുക്കുക:

1. X എന്ന യാദൃശ്ചിക ചരത്തിന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനത്തോടുകൂടിയ

$$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^3} & x\geq 1\\ 0 & x<1\end{cases}$$

WLIQ7

എങ്കിൽ ഇനിപ്പറയുന്നവയിൽ ഏതാണ് ശരി

(1) ശരാശരി വ്യതിയാനം എന്നീ രണ്ടും നിലവിലുണ്ട് (2) ശരാശരി നിലവിലുണ്ട് എന്നാൽ വ്യതിയാനം നിലവിലില്ല
(3) ശരാശരിയും വ്യതിയാനവും നിലവിലില്ല (4) വ്യതിയാനം നിലവിലുണ്ട് എന്നാൽ ശരാശരി നിലവിലില്ല.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 218 15-02-2023 15:28:40

2. $2l$ നീളമുള്ള ഒരു വടി യാദൃശ്ചികമായി രണ്ട് കഷണങ്ങളായി വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നു. ഇതിൽ ചെറിയ കഷ്ണത്തിന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{l} & 0<x<l\\ 0 & l\le x<2l\end{cases}$$ എങ്കിൽ

രണ്ടു കഷണങ്ങളിൽ ഹ്രസ്വത്തിന്റെ ശരാശരിയും വ്യതിയാനവും യഥാക്രമം

(1) $\frac{l}{2}, \frac{l^2}{3}$ (2) $\frac{l}{2}, \frac{l^2}{6}$ (3) $l, \frac{l^2}{12}$ (4) $\frac{l}{2}, \frac{l^2}{12}$

3. കളിക്കാരൻ 6 വശമുള്ള ഒരു പകിട എറിയുന്നുവെന്ന് പരിഗണിക്കുക. ലഭിയ്ക്കുന്ന മുഖം 6 ആണെങ്കിൽ കളിക്കാരനു ₹ 36 കിട്ടുന്നു. അല്ലാത്തപക്ഷം അയാൾക്ക് ₹ k^2, നഷ്ടപ്പെടും. ഇവിടെ k എന്നത് വരുന്ന മുഖം $k = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

ഈ കളിയിൽ പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന തുക ₹

(1) $\frac{19}{6}$ (2) $-\frac{19}{6}$ (3) $\frac{3}{2}$ (4) $-\frac{3}{2}$

4. ആറുവശങ്ങളുള്ള 1, 2, 3, 4, 5, 6 എന്ന് കുറിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള പകിടയും നാലു വശങ്ങളുള്ള 1, 2, 3, 4 അക്കങ്ങളുള്ള പകിടയും കൂടി ഒരുമിച്ച് ഉരുട്ടി തുക നിർണ്ണയിക്കുന്നു. X ഈ തുകയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു വെങ്കിൽ 7 ന്റെ വിപരീത ഇമേജിലെ മൂലകങ്ങളുടെ എണ്ണം കാണുക

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

5. ഒരു ബൈനോമിയൽ വിതരണമുള്ള യാദൃശ്ചിക ചരം X ന് $n = 25$ ഉം $p = 0.8$ എങ്കിൽ പ്രമാണ വിചലനം

(1) 6 (2) 4 (3) 3 (4) 2

6. ഒരു നാണയം n തവണ എറിയുമ്പോൾ ലഭിച്ച തലകളുടെ എണ്ണവും ലഭിച്ച പൂവുകളുടെ എണ്ണവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തെ X പ്രതിനിധീകരിക്കട്ടെ എങ്കിൽ X ന്റെ സാധ്യമായ മൂല്യങ്ങൾ

(1) $i+2n,\ i = 0,1,2...n$ (2) $2i–n,\ i = 0,1,2...n$ (3) $n–i,\ i = 0,1,2...n$ (4) $2i+2n,\ i = 0,1,2...n$

7. $f(x)=\frac{1}{12},\ a<x<b$, എന്ന ഫലനം തുടർച്ചയുള്ള യാദൃശ്ചിക ചരം X ന്റെ സംഭാവ്യതസാന്ദ്രത ഫലനത്തെപ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. എങ്കിൽ ഇനിപ്പറയുന്നവയിൽ ഏതാണ് a, b ഇവയുടെ മൂല്യം ആകാൻ പാടില്ലാത്തത്

(1) 0, 12 (2) 5, 17 (3) 7, 19 (4) 16, 24

8. ഒരേ സ്കൂളിൽ നിന്ന് 160 വിദ്യാർത്ഥികളുമായി 4 ബസ്സുകൾ ഒരു ഫുട്ബോൾ സ്റ്റേഡിയത്തിൽ എത്തുന്നു. ബസ്സുകൾ യഥാക്രമം 42,36,34,48 വിദ്യാർത്ഥികളെ വഹിക്കുന്നു. വിദ്യാർത്ഥികളിൽ ഒരാളെ യാദൃശ്ചികമായി തിരഞ്ഞെടുത്തു. യാദൃശ്ചികമായി തിരഞ്ഞെടുത്ത വിദ്യാർത്ഥിയെ വഹിക്കുന്ന ബസ്സിലുണ്ടായിരുന്ന വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം X എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. 4 ബസ് ഡ്രൈവർമാരിൽ ഒരാളെയും യാദൃശ്ചികമായി തിരഞ്ഞെടുത്തു. ആ ബസ്സിലെ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ എണ്ണം സൂചിപ്പിക്കാൻ Y ഉപയോഗിക്കുന്നു.

എങ്കിൽ $E[X]$, $E[Y]$ എന്നിവ യഥാക്രമം.

(1) $50, 40$ (2) $40, 50$ (3) $40.75, 40$ (4) $41, 41$

9. രണ്ട് നാണയങ്ങൾ സ്വതന്ത്രമായി കറക്കി എറിഞ്ഞപ്പോൾ ആദ്യ നാണയം തല ഭാഗം കാണപ്പെടുന്ന രീതിയിൽ വീഴുകയും സംഭാവ്യത 0.6, ആകുകയും ചെയ്തു. രണ്ടാമത്തേതിന്റെ സംഭാവ്യത 0.5 യും X ആകെ തലകളുടെ എണ്ണത്തെയും സൂചിപ്പിച്ചാൽ $E[X]$ എത്ര

(1) 0.11 (2) 1.1 (3)11 (4)1

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 219 15-02-2023 15:28:44

10. 5 ചോദ്യങ്ങളും ഓരോ ചോദ്യത്തിനും പതറിപ്പോകുന്ന 3 ഉത്തരവും ഉള്ള ഒരു മൾട്ടിപ്പിൾ ചോയ്സ് പരീക്ഷയിൽ ഊഹിച്ചുകൊണ്ട് ഉത്തരമെഴുതുന്ന ഒരു വിദ്യാർത്ഥിക്ക് നാലോ അധിലധികമോ ശരിയായ ഉത്തരങ്ങൾ ലഭിക്കാനുള്ള സാധ്യതയാണ്

(1) $\frac{11}{243}$ (2) $\frac{3}{8}$ (3) $\frac{1}{243}$ (4) $\frac{5}{243}$

11. $P\{X=0\} = 1 - P\{X=1\}$ ഒപ്പം, $E[X] = 3\text{Var}(X)$ ആണെങ്കിൽ, $P\{X=0\}$ എന്നത്.

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{1}{5}$ (4) $\frac{1}{3}$

12. X എന്ന ബൈനോമിയൽ യാദൃശ്ചിക ചരത്തിന്റെ പ്രതീക്ഷ മൂല്യം 6, വ്യതിയാനം 2.4, എങ്കിൽ $P\{X=5\}$ എത്ര

(1) $\binom{10}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^6\left(\frac{2}{5}\right)^4$ (2) $\binom{10}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{10}$

(3) $\binom{10}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^6$ (4) $\binom{10}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^5\left(\frac{2}{5}\right)^5$

13. യാദൃശ്ചിക ചരം X ന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം

$$f(x) = \begin{cases} ax+b & 0<x<1 \\ 0 & \text{മറ്റുള്ളവയ്ക്ക്} \end{cases}$$

മറ്റും $E(X) = \frac{7}{12}$ എന്നാൽ, a യും b യും യഥാക്രമം

(1) 1, $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{2}$, 1 (3) 2, 1 (4) 1, 2

14. 0, 1, 2 എന്നീ മൂല്യങ്ങളിൽ ഒന്ന് X എടുക്കുന്നുവെന്ന് കരുതുക. ഏതെങ്കിലും ഒരു സ്ഥിരാങ്കം k ക്ക് $P(X=i) = k\,P(X=i-1);\ i=1,2$, $P(X=0) = \frac{1}{7}$ എന്നാൽ k യുടെ മൂല്യം

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

15. താഴെപ്പറയുന്നവയിൽ ഏതാണ് വ്യതിരിക്ത യാദൃശ്ചിക ചരം?

I. ഒരു ദിവസത്തിൽ ഒരു പ്രത്യേക സിഗ്നൽ കടക്കുന്ന കാറുകളുടെ എണ്ണം.

II. ഒരു നിമിഷത്തിൽ ട്രെയിൻ ടിക്കറ്റ് വാങ്ങാൻ ക്യൂവിലുള്ള ഉപഭോക്താക്കളുടെ എണ്ണം.

III. ഒരു ടെലിഫോൺ കോൾ പൂർത്തിയാക്കാൻ എടുത്ത സമയം.

(1) I, II (2) II മാത്രം (3) III മാത്രം (4) II, III

16. $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le a \\ 0 & \text{മറ്റുള്ളവയ്ക്ക്} \end{cases}$ ഒരു യാദൃശ്ചിക ചരത്തിന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനമാണെങ്കിൽ a യുടെ മൂല്യം

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

17. യാദൃശ്ചികചരത്തിന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതഫലനം നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നത് ഇപ്രകാരമാണ്:

x	–2	–1	0	1	2
$f(x)$	k	$2k$	$3k$	$4k$	$5k$

എങ്കിൽ

$E(X)$ എന്നത്:

(1) $\frac{1}{15}$ (2) $\frac{1}{10}$ (3) $\frac{1}{3}$ (4) $\frac{2}{3}$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 220 15-02-2023 15:28:48

18. X ന് ശരാശരി 0.4, ഉള്ള ഒരു ബെർനോലി വിതരണമുണ്ടാകട്ടെ എങ്കിൽ $(2X-3)$ ന്റെ വ്യതിയാനം

(1) 0.24 b) 0.48 (3) 0.6 (4) 0.96

19. 6 ട്രെയലുകളിൽ $9P(X=4) = P(X=2)$ എന്ന ആപേക്ഷികതയെ പിന്തുടരുന്ന ഒരു ബൈനോമിയൽ ചരമാണ് X എങ്കിൽ വിജയത്തിന്റെ സംഭാവ്യത

(1) 0.125 (2) 0.25 (3) 0.375 (4) 0.75

20. ഒരു കമ്പ്യൂട്ടർ വില്പനക്കാരന് തന്റെ മുൻ അനുഭവത്തിൽ നിന്ന് ഷോറൂമിൽ പ്രവേശിക്കുന്ന ഓരോ 20 ഉപഭോക്താക്കളിൽ ഒരാൾക്ക് താൻ കമ്പ്യൂട്ടർ വിൽക്കുന്നു എന്നറിയാം എങ്കിൽ അടുത്ത 3 ഉപഭോക്താക്കളിൽ 2 പേർക്ക് അയാൾ കമ്പ്യൂട്ടർ വില്ക്കാനുള്ള സാധ്യത എന്താണ്?

(1) $\frac{57}{20^3}$ (2) $\frac{57}{20^2}$ (3) $\frac{19^3}{20^3}$ (4) $\frac{57}{20}$

സംഗ്രഹം

- **ഒരു റാൻഡം വേരിയബിൾ** X എന്നത് ഒരു സാമ്പിൾ സ്പേസ് S ൽ നിന്ന് വാസ്തവിക സംഖ്യകളിലേക്ക് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ഒരു ഫലനമാണ്. ഇവിടെ ബിന്ദുക്കളുടെ ഇൻവേഴ്സ് ഇമേജ് അല്ലെങ്കിൽ ഉപഗണം ഇല്ലെങ്കിൽ $\mathbb{R}$ ലെ ഇടവേള എന്നിവ സംഭാവ്യങ്ങളുള്ള S ലെ സംഭവങ്ങളാണ്.

- സാമ്പിൾസ്പേസ് S ൽ നിന്ന് വാസ്തവിക സംഖ്യകളായ $\mathbb{R}$ ലേക്ക് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന യാദൃശ്ചിക ചരം X നെ വ്യതിരിക്തചരം എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ X ലെ അങ്കം പരിമിതമായിരിക്കണം, അതായത് S ലെ പരിമിതമായ അല്ലെങ്കിൽ എണ്ണത്തീർക്കാവുന്ന അനന്തമൂല്യങ്ങളുടെ ധനസംഭാവ്യതയുടെ ആകെ തുക ഒന്നായിരിക്കും.

- $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \ldots$, എന്നീ വ്യതിരിക്ത മൂല്യങ്ങളുള്ള ഒരു യാദൃശ്ചിക ചരമാണ് X എങ്കിൽ $f(.)$ അല്ലെങ്കിൽ $p(.)$ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നതും $f(x_k) = P(X = x_k)$, $k = 1,2,3,\ldots n,\ldots$ എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നതുമായ ഫലനത്തെയാണ്. X ന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം എന്നു വിളിക്കുന്നത്.

- $f(x)$ എന്ന ഫലനം സംഭാവ്യത സാന്ദ്രതാ ഫലനം ആണെങ്കിൽ

  (i) $f(x_k) \geq 0$, $k = 1,2,3,\ldots n,\ldots$ മറ്റും (ii) $\sum_k f(x_k) = 1$

- $x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$ എന്ന രീതിയിൽ $x_1, x_2, x_3, \ldots$ എന്നീ മൂല്യങ്ങളുടെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം $f(x)$ ആണെങ്കിൽ. വ്യതിരിക്ത യാദൃശ്ചികചരം X ന്റെ **സഞ്ചിത വിതരണഫലനം** $F(x_i)$ എന്നത് $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i), \quad x \in \mathbb{R}$ ആണ്

- $x_1, x_2, x_3, \ldots$ എന്നീ മൂല്യങ്ങൾ എടുക്കുന്ന ഒരു വ്യതിരിക്ത ചരമാണ് X എന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവിടെ $x_1 < x_2 < x_3, \ldots$ മറ്റും $F(x_i)$ വിതരണ ഫലനവുമാണെങ്കിൽ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം $f(x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$, $i = 1,2,3, \ldots$

- S എന്നത് സാമ്പിൾ സ്പേസ് എന്നിരിക്കട്ടെ. $X : S \to R$ എന്ന ഒരു യാദൃശ്ചികചരം $\mathbb{R}$ ൽ ഒരു ഗണമായ I യുടെ ഏതെങ്കിലും മൂല്യത്തെ എടുത്താൽ I-ൽ ഉള്ള എല്ലാ X നും $P(X = x) = 0$ ആയാൽ x നെ ഒരു **തുടർച്ചയായ യാദൃശ്ചികചരം** എന്നുവിളിക്കും

- തുടർച്ചയായ റാൻഡം വേരിയബിളിൽ $x \in [a,b]$ എന്ന രീതിയിൽ ഉള്ള സാധ്യമായ ഓരോ സംഭാവ്യതയും X ന് $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$ എന്നും കാണപ്പെടുന്നു. ഇത് ഒരു ഋണമല്ലാത്ത വാസ്തവിക മൂല്യ ഫലനമാണ്. ഇത് **സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനവുമാണ്**.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 221 15-02-2023 15:28:49

- $F(x)$ എന്നത് തുടർച്ചയായ യാദൃശ്ചികചരം X ന്റെ വിതരണ ഫലനമാണെങ്കിൽ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം $f(x)$ എന്നത്

$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = F'(x)$, ഡെറിവേറ്റീവ് നിലനിൽക്കുമ്പോഴെല്ലാം.

- *സംഭാവ്യത വിതരണ ഫലനമുള്ള ഒരു യാദൃശ്ചിക ചരമാണ് X എന്ന് കരുതുക എങ്കിൽ പ്രതീക്ഷ മൂല്യം അല്ലെങ്കിൽ ശരാശരി അല്ലെങ്കിൽ ഗണിതശാസ്ത്ര പ്രതീക്ഷ ഇവയെ. $E(x)$ അല്ലെങ്കിൽ μ കൊണ്ട് കുറിക്കുന്നു.*

$$E(X) = \begin{cases} \sum_x xf(x) & X \text{ ഒരു വിതിരിക്ത ചരം} \\ \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx & X \text{ ഒരു തുടർച്ചയായത് ചരം} \end{cases}$$

- *യാദൃശ്ചിക ചരം X ന്റെ വ്യതിയാനത്തെ കുറിക്കുന്നത് $V(x)$ അല്ലെങ്കിൽ σ^2 (or σ_x^2) എന്നത്*

$$V(x) = E(X - E(x))^2 = E(X - \mu)^2$$

ഗണിത ശാസ്ത്ര പ്രതീക്ഷയുടെയും വ്യതിയാനത്തിന്റെയും ഗുണങ്ങൾ

(i) $E(aX + b) = aE(X) + b$, ഇവിടെ a, b എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കൾ ആണ്

ഉപസിദ്ധാന്തം 1: $E(aX) = aE(X)$	(അപ്പോൾ $b = 0$)
ഉപസിദ്ധാന്തം 2: $E(b) = b$	(അപ്പോൾ $a = 0$)

(ii) $Var(x) = E(X)^2 - E(X)^2$

(iii) $Var(aX + b) = a^2Var(X)$ a, b എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ

ഉപസിദ്ധാന്തം 3: $V(aX) = a^2V(X)$	(അപ്പോൾ $b = 0$)
ഉപസിദ്ധാന്തം 4: $V(b) = 0$	(അപ്പോൾ $a = 0$)

- ബെർണോലി പരീക്ഷണവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് യാദൃശ്ചികചരം നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നത് X (വിജയം) = 1 മറ്റും X (പരാജയം) = 0.

$$f(x) = \begin{cases} p & x = 1 \\ q = 1 - p & x = 0 \end{cases} \quad \text{ഇവിടെ } 0 < p < 1$$

- X നെ ബെർണോലി യാദൃശ്ചികചരമെന്നും $f(x)$ നെ ബെർണൊലി വിതരണമെന്നും പറയുന്നു.
- X ഒരു ബെർണോലി യാദൃശ്ചികചരം ആണെങ്കിൽ അത് p പരാമീറ്ററിനൊപ്പം ബെർണോലി വിതരണത്തെ പിന്തുടരുന്നു. അപ്പോൾ ശരാശരി μ, വ്യതിയാനം σ^2 എന്നിവ $\mu = p$, $\sigma^2 = pq$ എന്നിവയാണ്.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 222 15-02-2023 15:28:50

- ഒരു വ്യതിരിക്ത യാദൃശ്ചിക ചരത്തിനെ ബൈനോമിയൽ യാദൃശ്ചിക ചരം എന്ന് വിളിക്കണമെങ്കിൽ. ആവർത്തിച്ചുള്ള n- പരീക്ഷണങ്ങളിൽ X വിജയങ്ങളുടെ എണ്ണമായിരിക്കണം മാത്രവുമല്ല.

  (i) ആവർത്തിച്ചുള്ള n പരീക്ഷണങ്ങൾ സ്വാതന്ത്ര്യവും പരിമിതവുമാണ്.

  (ii) ഓരോ ട്രയലും 'വിജയം' അല്ലെങ്കിൽ 'പരാജയം' എന്ന് ലേബൽ ചെയ്തിട്ടുള്ള സാധ്യമായ രണ്ട് ഫലങ്ങൾ മാത്രമേ നല്കുന്നുള്ളൂ

  (iii) ഓരോ ശ്രമത്തിലും വിജയസാധ്യത സൂചിപ്പിക്കുന്ന p സ്ഥിരതയോടെ തുടരുന്നു,

- n- സ്വതന്ത്ര പരീക്ഷണങ്ങളിൽ വിജയങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെ കുറിക്കുന്നതും വിജയ സംഭാവ്യത p -യും പരാജയ സംഭാവ്യത $q = 1 - p$ യും ഉള്ള ഒരു ബൈനോമിയൽ യാദൃശ്ചിക ചരം X ന് ഒരു ബൈനോമിയൽ വിതരണം ഉായിരിക്കും. അതായത് $X \sim B(n, p)$, X ന്റെ സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം

$$f(\mathrm{x}) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0,1,2,\ldots,n.$$

- പരാമീറ്റർ p യും n- ഉം ഉള്ള **ബൈനോമിയൽ വിതരണം** പിന്തുടരുന്ന ഒരു ബൈനോമിയൽ യാദൃശ്ചിക ചരമാണ് X എങ്കിൽ ശരാശരി μ വ്യതിയാനം σ^2 എന്നിവ $\mu = np$, $\sigma^2 = np(1-p)$ എന്നിവയാണ്.

ICT കോർണർ

https://ggbm.at/dy9kwgbt അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡിനെ സ്കാൻ ചെയ്യുക

ബ്രൗസർ തുറന്ന് തന്നിട്ടുള്ള URL ലിങ്ക് ടൈപ്പ് ചെയ്യുക (അല്ലെങ്കിൽ) QR കോഡിനെ സ്കാൻ ചെയ്യുക. അപ്പോൾ "**12th Standard Mathematics Vol-2**" എന്ന് പേരുള്ള ജിയോജീബ്ര വർക്ക് ബുക്ക് തുറക്കും. അതിന്റെ ഇടത് ഭാഗത്ത് പാഠഭാഗത്തെ ആസ്പദമാക്കി അനേകം അദ്ധ്യായങ്ങളുണ്ടാകും. അതിൽ "**Probability Distributions**". എന്ന പാഠം ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. അപ്പോൾ ഈ പാഠഭാഗത്തെ അനുബന്ധിച്ച് നിരവധി വർക്ക് ഷീറ്റുകൾ ലഭിക്കും.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 11 Malayalam.indd 223 15-02-2023 15:28:51

അദ്ധ്യായം

12

വ്യതിരിക്തമായ ഗണിതശാസ്ത്രം

PAIU1

"യുവാക്കളെ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ നിങ്ങൾ കാര്യങ്ങൾ മനസ്സിലാക്കുന്നില്ല. നിങ്ങൾ അവയെ ശീലിക്കുക".

-ജോൺ വോൺ ന്യൂമേൽ

12.1 ആമുഖം

ജോൺ വോൺ ന്യൂമേൻ (1903-1957)

ഗണിത ശാസ്ത്രത്തെ വിശാലമായ രണ്ടു ഭാഗങ്ങളായി വിഭജിച്ചിട്ടുണ്ട്. **തുടർച്ചയായ ഗണിതശാസ്ത്രം** ഇത് എണ്ണമറ്റ അനന്തമായ വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ **ഫലത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ളതാണ്.** ഏതെങ്കിലും രണ്ട് യഥാർത്ഥ സംഖ്യകൾക്കിടയിൽ എല്ലായ്പ്പോഴും എണ്ണമറ്റ അനന്തസംഖ്യകളുടെ ഒരു ഗണം ഉണ്ടെന്നതാണ് ഇതിന്റെ സവിശേഷത. തുടർച്ചയായ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലെ ഒരു ഫലനത്തിനെ ഇടവേളകളില്ലാതെ സുഗമമായ വക്രത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്താൻ കഴിയും.

വ്യതിരിക്തമായ ഗണിതശാസ്ത്രം ഇതിൽ പരിമിതമോ എണ്ണമറ്റതോ ആയ **വ്യതിരിക്തമായ മൂല്യങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്നു.** അതായത് ഏതെങ്കിലും രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾക്കിടയിൽ പരിമിതമോ എണ്ണമറ്റതോ ആയ അനന്തമായ ബിന്ദുക്കൾ ഉണ്ട്. ഉദാഹരണത്തിന് നമുക്ക് പരിമിതമായ അംഗങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ ഈ അംഗങ്ങളുള്ള ക്രമജോഡികളുടെ പട്ടികയായി നിർവചിക്കാൻ കഴിയും. ആ ക്രമജോഡികളെ പൂർണ്ണമായും പട്ടികയായി അവതരിപ്പിക്കാൻ കഴിയും.

പത്തൊൻപതുകളുടെ അവസാനത്തിലും ആദ്യ നൂറ്റാണ്ടിൽ ജീവിച്ചിരുന്ന ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞർ ഇരുപതാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഒരു പുതിയ ശാഖ വികസിപ്പിച്ചു. നിസ്സർഗ്ഗസംഖ്യകളുടെ ഗണം പോലുള്ള **പരിമിതമോ എണ്ണമറ്റതോ ആയ അനന്തമായ** ഗണങ്ങളെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയിരിക്കും. ഈ ഗണങ്ങളെ വ്യതിതിക്തമായ ഗണങ്ങൾ എന്നു പറയാം. കൂടാതെ അത്തരം ഗണങ്ങളുടെ സ്വഭാവം എന്താണെന്നും അത് പരസ്പരം ബന്ധപ്പെടുത്താനും കഴിയും. ഈ ഗണങ്ങളിൽ നിന്ന് നിസർഗ്ഗ സംഖ്യകളുടെ ഗണത്തിലേയ്ക്കും നിർവചിക്കാം. അതിനാൽ ഒരു വ്യതിരിക്തമായ ഗണത്തിലെ അംഗങ്ങളെ ഒരു ശ്രേണിയായി ക്രമീകരിക്കാൻ കഴിയുന്നു. വ്യതിരിക്തമായ ഗണങ്ങളിലെ അംഗങ്ങളുടെ ഈ സവിശേഷത മറ്റു അനന്തമായ ഗണങ്ങളായ വിടവില്ലാതെ തുടർച്ചയായ അംഗങ്ങളെ കൊണ്ടുള്ള വാസ്തവിക സംഖ്യകളിൽ കാണാൻ സാധിക്കില്ല.

നമ്മുടെ ദൈനം ദിന ജീവിതത്തിൽ കമ്പ്യൂട്ടറുകളുടെ പ്രയോഗങ്ങൾ ഒരു പ്രധാന പങ്ക് വഹിക്കുന്നുണ്ടെന്ന വസ്തുത ഏവർക്കും അറിയാം. വ്യക്തിഗത ഗണങ്ങൾ കാരണം കണക്കിന്റെ ഉപയോഗങ്ങൾ വർദ്ധിച്ചു വരുന്നതിനാൽ **കമ്പ്യൂട്ടർ ശാസ്ത്രം**, ശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഒരു പ്രധാന ഭാഗമായി മാറിയിരിക്കുന്നതു കാണാം. ആധുനിക പ്രോഗ്രാമിംഗും വിവരണങ്ങൾക്ക് സംക്ഷിപ്തമായ രീതിയിൽ ഭാഷകൾ രൂപകൽപ്പന ചെയ്യണം. ഇത് അടിസ്ഥാനമാക്കി. അൾഗോരിതം രൂപപ്പെടുത്തുന്നതിനായി പഠനത്തിൽ സ്വയം പരിശീലിപ്പിക്കാൻ കമ്പ്യൂട്ടർ ശാസ്ത്രജ്ഞരെ നിർബന്ധിക്കുന്നു. വ്യതിരിക്തമായ ഗണങ്ങൾ.

വ്യതിരിക്ത ഗണിത ശാസ്ത്രം പഠിക്കുന്നതിന്റെ പ്രധാനഗുണം അതിന്റെ ഫലങ്ങൾ വളരെ നല്ല ഉപകരണങ്ങളായി വർത്തിക്കുന്നു. എന്നതും യുക്തിസഹവും പ്രശ്ന പരിഹാര ശേഷിയും മെച്ചപ്പെടുത്തുന്നു. എന്നതുമാണ്. വ്യതിരക്തമായ ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിന്റെ **ചില ശാഖകൾ ഗണിതശാസ്ത്രപജരമായ യുക്തി, ബൂളിയൻ ബീജ ഗണിതം, ഗ്രാഫ്, സിദ്ധാന്തം കോഡിംഗ് സിദ്ധാന്തം** എന്നിവയാണ് വ്യതിരിക്തമായ ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിലെ ചില വിഷയങ്ങൾ അതായത് **ക്രമചയം സഞ്ചയം കൂടാതെ ഗണിതീയ പ്രേരണം** എന്നിവ മുൻവർഷങ്ങളിൽ ഇതിനകം ചർച്ച ചെയ്യപ്പെട്ടു. ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ രണ്ടു വിഷയങ്ങൾ, വ്യതിരിക്തമായ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ **ദ്വയാങ്കക്രിയയും, ഗണിതശാസ്ത്ര യുക്തിയും** ചർച്ച ചെയ്യുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 224 15-02-2023 15:30:09

ചിഹ്നങ്ങൾ

$\in$	–	അംഗമാണ്.
$\ni$	–	അങ്ങനെയെന്നാൽ.
$\forall$	–	എല്ലാത്തിനും
$\Rightarrow$	–	സൂചിപ്പിക്കുന്നു
$\exists$	–	നിലവിലുള്ളത്

പൊതുവായി ക്രിയകൾ എന്ന വാക്ക് ഒരേ സമയം അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒന്നോ അതിലധികമോ പ്രവർത്തന പ്രക്രിയയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് $\mathbb{Z}$ ലെ ഒരു അംഗത്തിന്റെ ഋണം കണ്ടെത്തുന്നതിന് ഒരു സമയത്ത് ഒരംഗം മാത്രം ഉൾപ്പെടുന്നു. ഇതിനെ ഏകാങ്കക്രിയ എന്നു പറയുന്നു. $\mathbb{Z}$ ലെ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് അംഗങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്നു. ഇതു പോലെയുള്ള പ്രക്രിയയെ **ദ്വയാങ്ക ക്രിയ** എന്നു പറയുന്നു. പൊതുവേ n അംഗങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്ന പ്രക്രിയയെ n ആങ്കക്രിയ $n \in \mathbb{N}$ ഈ ഭാഗത്ത് ദ്വയാങ്ക ക്രിയ വിശദമായി ചർച്ച ചെയ്യപ്പെടുന്നു.

പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

ഈ അദ്ധ്യായം പൂർത്തിയാക്കുമ്പോൾ വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവ മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിയും

- ദ്വയാങ്കക്രിയ നിർവചിച്ച് അതിന്റെ സവിശേഷതകൾ പരിശോധിക്കുന്നതിന്
- ബൂളിയൻ മെട്രിക്സിലെ ദ്വയാങ്കക്രിയ നിർവചിക്കുകയും വിവിധ സവിശേഷതകൾ പരിശോധിക്കുകയും ചെയ്യുന്നതിന്
- മോഡുലാർ ക്ലാസ്സുകളിൽ ദ്വയാങ്ക ക്രിയ നിർവചിക്കുകയും വിവിധ സവിശേഷതകൾ പരിശോധിക്കുകയും ചെയ്യുന്നതിന്
- ലളിതവും സംയുക്തവുമായ പ്രസ്താവനകൾ തിരിച്ചറിയുന്നതിന്
- യുക്തി സംയോജങ്ങൾ നിർവചിക്കുകയും യഥാർത്ഥ പട്ടികകൾ ക്രമീകരിക്കുകയും ചെയ്യുന്നതിന്
- യാഥാർത്ഥ്യം, വൈരുദ്ധ്യം, അനിശ്ചിതത്വം എന്നിവ തിരിച്ചറിയുന്നതിന്
- യുക്തി സഹമായ തുല്യത സ്ഥാപിച്ച് ദ്വൈതത്ത്വം പ്രയോഗിക്കുന്നതിന്

12.2 ദ്വയാങ്ക ക്രിയകൾ

12.2.1 നിർവചനം

$\mathbb{R}$ ലെ അടിസ്ഥാന ഗണിത ക്രിയകൾ **സങ്കലനം** $(+)$ **വ്യവകലനം** $(-)$ **ഗുണനം** $(\times)$ കൂടാതെ **ഹരണം** $(\div)$ നന്നിവയാണ്. പത്തൊൻപതാം നൂറ്റാണ്ടിന്റെ അവസാനത്തിലും ഇരുപതാം നൂറ്റാണ്ടിന്റെ ആരംഭത്തിലും പ്രമുഖ ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ആബേലും, കെയ്ലിയും, കോഷിയും മറ്റുള്ളവരും ഈ സാധാരണ ഗണിത ക്രിയകളിൽ തൃപ്തികരമായ സവിശേഷതകൾ സാമാന്യവൽക്കരിക്കാൻ ശ്രമിച്ചു. ഇതിന് അവസാനം അവർ **ആക്സിയോമാറ്റിക് സമീപനത്തിലൂടെ** പുതിയ **അമൂർത്ത ബീജഗണിതം** വികസിപ്പിച്ചു.

അടിസ്ഥാന ഗണിത പ്രവർത്തനങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകളിലൂടെ സങ്കലനവും ഗുണനവും ഉൾപ്പെടുന്ന ലളിതമായ ഉദാഹരണം പരിഗണിക്കുക.

$$m+n \in \mathbb{N}\ ;\ m \times n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall m, n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

മുകളിലുള്ള രണ്ട് ക്രിയകളിൽ ഓരോന്നും ഇനിപറയുന്ന നിരീക്ഷണങ്ങൾ നൽകുന്നു:

(1) ഒരേ സമയത്ത് $\mathbb{N}$ ന്റെ രണ്ട് അംഗങ്ങൾ കൃത്യമായി പ്രക്രിയ ചെയ്യപ്പെടുന്നു.

(2) തത്ഫലമായുണ്ടാകുന്ന അംഗം (ഫലം) $\mathbb{N}$ ന്റെ ഒരു അംഗമാണ്.

ശൂന്യമല്ലാത്ത ഒരു ഗണത്തിൽ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന അത്തരം ഏത് ക്രിയകളെയും അമൂർത്ത ബീജഗണിതത്തിലെ **ദ്വയാങ്കക്രിയ അല്ലെങ്കിൽ ദ്വയാങ്ക ഘടന** എന്നു പറയുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 225 15-02-2023 15:30:11

നിർവചനം 12.1

ശൂന്യമല്ലാത്ത ഗണം S ൽ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ഏതൊരു ക്രിയയെയും S ലെ **ദ്വയാങ്ക്രിയ** എന്നു വിളിക്കണമെങ്കിൽ താഴെ പറയുന്ന സവിശേഷതകൾ ഉണ്ടായിരിക്കണം:

(i) ഓരോ ക്രമജോഡികളുടെ ഗണം $(a,b) \in S \times S$ എന്ന ക്രിയ നിർവചിക്കേണ്ടതുണ്ട്.

(ii) $S \times S$ ൽ ഉള്ള ഓരോ ക്രമജോഡി (a,b) യോട് S ൽ $a*b$ എന്ന ഒരു **അദ്വിതിയമായ** ഒരംഗം ഉണ്ടായിരിക്കണം.

മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ, S ലെ ഏതെങ്കിലും ദ്വയാങ്ക്രിയകൾക്ക് S ന്റെ ഒരു **ക്രമജോഡി അംഗങ്ങൾക്കും** S ന്റെ **അദ്വിതീയ** അംഗത്തെ നിർണ്ണയിക്കുന്ന ഒരു നിയമമാണ് കൂടാതെ $*$ നെ ഒരു ഫലനമായും പരിഗണിക്കുന്നതാണ് എപ്പോഴെന്നാൽ കാർട്ടീഷ്യൻ ഗുണനഫലം $S \times S$ ൽ ഉൾവാങ്ങി S ൽ പുറത്തു വരുന്നു.

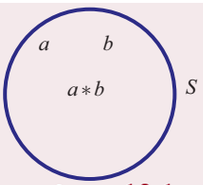
$$* : S \times S \to S \quad ; \quad *(a,b) = a*b \in S$$, ഇവിടെ $a*b$ ഒരു അദ്വിതീയ അംഗമാണ്.

ഒരു ദ്വയാങ്ക ക്രിയ നിർവചിക്കുന്ന $* : S \times S \to S \; ; \; *(a,b) = a*b \in S$ ആവശ്യപ്പെടുന്നത് $a*b$ എന്നത് എല്ലായ് പ്പോഴും S എന്ന ഗണത്തിലെ അംഗമായിരിക്കണം, S നും പൂരകമായിരിക്കാൻ പാടില്ല. $*$ എന്നാൽ S ൽ സംവൃതമാണ് അല്ലെങ്കിൽ $*$ നെ സംബന്ധിച്ച് S സംവൃതമാണ്. ഈ ഗുണത്തിനെ **സംവൃതഗുണം** എന്നു പറയുന്നു.

നിർവചനം 12.2

ഏതെങ്കിലും ഒരു ശൂന്യമല്ലാത്ത ഗണത്തിൽ ഒന്നോ അതിൽ കൂടുതലോ ദ്വയാങ്ക്രിയ നിർവചിക്കുന്നതിനെ **ബീജഗണിത ഘടന** എന്നു പറയുന്നു.

മറ്റൊരു രീതിയിൽ S ലെ $*$ എന്ന ദ്വയാങ്ക്രിയയെ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള രീതിയിൽ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു. $\forall a,b \in S, \; a*b$ അദ്വിതീയമാണ്. കൂടാതെ $a*b \in S$.



ചിത്രം. 12.1

കുറിപ്പ്

മുകളിൽ തന്നിട്ടുള്ള നിർവചനത്തിൽ നിന്ന് എല്ലാ ദ്വയാങ്ക്രിയയും സംവൃത ഗുണത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.

കുറിപ്പ്

ക്രിയ $*$ എന്നത് $+, \times, -, \div$ മാട്രിക്സ് സങ്കലനം, മാട്രിക്സ് ഗുണനം എന്നതു പോലെ ഒരു സാധാരണ ചിഹ്നമാണ്. ഇത് നാം നിർവചിക്കുന്ന ഗണത്തെ അപേക്ഷിച്ചിരിക്കും.

ഉദാഹരണത്തിന് $+$ കൂടാതെ $\times$ എന്നത് $\mathbb{N}$ ൽ ദ്വയാങ്കമാണ്. എന്നാൽ $-$ $\mathbb{N}$ ൽ ദ്വയാങ്കമല്ല.

ഇത് പരിശോധിക്കാൻ, $(3,4) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$* (a,b) = - (3,4) = 3 - 4 = -1 \notin \mathbb{N}.$$

അതുകൊണ്ട് $-$ എന്നത് $\mathbb{N}$ ന്റെ **ദ്വയാങ്ക്രിയ അല്ല**. $-$, $\mathbb{Z}$ ലെ ദ്വയാങ്ക്രിയ ആകുന്നതിലേയ്ക്ക് $\mathbb{N}$ നെ $\mathbb{Z}$. ലേക്ക് വിപുലീകരിക്കുന്നു. അങ്ങനെ $+, \times,$ കൂടാതെ അപേക്ഷിച്ച് $\mathbb{Z}$ സംവൃതമാണ്. അങ്ങനെ $(\mathbb{Z}, +, \times, -)$ എന്നത് ഒരു ബീജഗണിത ഘടന ആണ്.

നിരീക്ഷണങ്ങൾ

ഒരു ദ്വയാങ്ക്രിയ എന്നത് അതിനെ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ഗണത്തെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കും.

(a) ക്രിയ $-$, $\mathbb{N}$ ൽ **ദ്വയാങ്കമല്ല** എന്നാൽ $\mathbb{Z}$ ൽ ദ്വയാങ്ക്രിയ ആണ്. $\mathbb{N}$ നോട് പൂജ്യവും ഋണസംഖ്യകളും ചേർത്ത് $\mathbb{Z}$ (പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ) എന്ന ഗണത്തെ രൂപീകരിച്ചു.

(b) ക്രിയ $\div$ എന്നത് $\mathbb{Z}$ ൽ **ഒരു ദ്വയാങ്ക ക്രിയ അല്ല** ഉദാഹരണത്തിന് $(1,2) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ന് $\div (1, \; 2) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ അതുകൊണ്ട് $\mathbb{Z}$ നെ $\mathbb{Q}$ വരെ വിപുലീകരിക്കുന്നു.

(c) പൂജ്യ(0)ത്തിന്റെ ഹരണം അടിസ്ഥാന ഗണിതത്തിൽ വിശദീകരിച്ചിട്ടില്ല എന്നത് അറിയപ്പെടുന്ന വസ്തുതയാണ്. അതിനാൽ $\div$ എന്നത് $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ലെ ദ്വയാങ്ക്രിയയാണ്. അതുകൊണ്ട് $+, \times, -$ എന്നത് $\mathbb{Q}$ ലെ ദ്വയാങ്ക്രിയയും $\div$ എന്നത് $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ലെ ദ്വയാങ്ക്രിയയും ആണ്.

ഇപ്പോൾ $\mathbb{Q}$ നെ $\mathbb{R}$ ലേയ്ക്കും $\mathbb{R}$ നെ $\mathbb{C}$ യിലേയ്ക്കും വിപുലീകരിച്ചതിന്റെ കാരണം ചോദിച്ചു കൊണ്ടുള്ള ചോദ്യം ഉയർന്നിട്ടുണ്ട്. അതിനനുസരിച്ച് അടിസ്ഥാന ഗണിത ക്രിയകൾ $+, -, \times, \div$ മാത്രമല്ല $x^2 - 2 = 0$ കൂടാതെ $x^2 + 1 = 0$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 226 15-02-2023 15:30:17

എന്നീ സമീകരണങ്ങളുടെ മൂലകങ്ങൾ ഉൾകൊള്ളുന്നതുമായ ഒരു സംഖ്യാ സമ്പ്രദായം ആവശ്യമായി വന്നു.

അതുകൊണ്ട് നിലവിലുള്ള സംഖ്യാ സമ്പ്രദായത്തിൽ അപരിമേയ സംഖ്യകളെയും, സാങ്കല്പിക സംഖ്യകളെയും കൂട്ടി ചേർത്തു. തൽഫലമായി $\mathbb{R}$ ും $\mathbb{C}$ യും ലഭിച്ചും. ഏറ്റവും വലിയ സംഖ്യാ സമ്പ്രദായ $\mathbb{C}$ യിൽ ശരിയായ മറ്റു സംഖ്യാ സമ്പ്രദായങ്ങളായ $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ഉപഗണങ്ങളായി ചേർത്തിട്ടുണ്ട്.

സംഖ്യാ സമ്പ്രദായം / ക്രിയ	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$	$\mathbb{Q}\setminus\{0\}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$\mathbb{C}\setminus\{0\}$
$+$	ദ്വയാങ്കം	ദ്വയാങ്കം	ദ്വയാങ്കം	ദ്വയാങ്കം	ദ്വയാങ്കം	ദ്വയാങ്കം അല്ല	ദ്വയാങ്കം അല്ല	ദ്വയാങ്കം അല്ല
$-$	ദ്വയാങ്കം അല്ല	ദ്വയാങ്കം	ദ്വയാങ്കം	ദ്വയാങ്കം	ദ്വയാങ്കം	ദ്വയാങ്കം അല്ല	ദ്വയാങ്കം അല്ല	ദ്വയാങ്കം അല്ല
$\times$	ദ്വയാങ്കം	ദ്വയാങ്കം	ദ്വയാങ്കം	ദ്വയാങ്കം	ദ്വയാങ്കം	ദ്വയാങ്കം	ദ്വയാങ്കം	ദ്വയാങ്കം
$\div$	ദ്വയാങ്കം അല്ല	ദ്വയാങ്കം അല്ല	ദ്വയാങ്കം അല്ല	ദ്വയാങ്കം അല്ല	ദ്വയാങ്കം അല്ല	ദ്വയാങ്കം	ദ്വയാങ്കം	ദ്വയാങ്കം

പട്ടിക 12.1

ഉദാഹരണം 12.1

ബന്ധപ്പെട്ട ഗണങ്ങളിൽ താഴെ പറയുന്ന ക്രിയകളുടെ ദ്വയാങ്കക്രിയ (സംവൃതഗുണം) പരിശോധിക്കുക (ദ്വയാങ്കം അല്ലെങ്കിൽ ദ്വയാങ്കം ആക്കുക):

$a * b = a + 3ab - 5b^2; \forall a, b \in \mathbb{Z}$

നിർദ്ധാരണം

$\mathbb{Z}$ ലെ ദ്വയാങ്കക്രിയയാണ് $\times$ $a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \times b = ab \in \mathbb{Z}$ കൂടാതെ $b \times b = b^2 \in \mathbb{Z}$ ... (1)

$\mathbb{Z}$ ൽ $+$ ഒരു ദ്വയാങ്കക്രിയ എന്നത് ഒരു വസ്തുതയാണ് കൂടാതെ $(1) \Rightarrow 3ab = (ab + ab + ab) \in \mathbb{Z}$ ഉം

$5b^2 = (b^2 + b^2 + b^2 + b^2 + b^2) \in \mathbb{Z}$. .... (2)

കൂടാതെ $a \in \mathbb{Z}$ ഉം $3ab \in \mathbb{Z} \Rightarrow a + 3ab \in \mathbb{Z}$. ... (3)

(2), (3), $\mathbb{Z}$ ൽ $-$ ന്റെ സംവൃതഗുണത്തിൽ $a * b = (a + 3ab - 5b^2) \in \mathbb{Z}$. $a * b$ എന്നത് $\mathbb{Z}$ ൽ അംഗമായുള്ളതു കൊണ്ട് $*$, $\mathbb{Z}$ ദ്വയാങ്കക്രിയയാണ്.

12.2.2 ദ്വയാങ്കക്രിയയുടെ ചില സവിശേഷതകൾ

ക്രമവിനിമേയ നിയമം

S ശൂന്യമല്ലാത്ത ഒരു ഗണത്തിൽ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു ദ്വയാങ്കക്രിയ $*$ ക്രമവിനിമേയ നിയമം തൃപ്തിപെടുത്തണമെങ്കിൽ

$$a * b = b * a \quad \forall a, b \in S .$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 227 15-02-2023 15:30:21

സംയോജന നിയമം

S ശൂന്യമല്ലാത്ത ഒരു ഗണത്തിൽ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു ദ്വയാങ്കക്രിയ $*$ സംയോജന നിയമം തൃപ്തിപ്പെടുത്തണമെങ്കിൽ

$$a*(b*c)=(a*b)*c \quad \forall a,b,c \in S .$$

അനന്യതാ ഗുണം

ഒരു അംഗം $e \in S$ എന്നത് S ന്റെ **അനന്യത അംഗം** എന്നു പറയണമെങ്കിൽ $*$ എന്ന ദ്വയാങ്കക്രിയ എല്ലായ്പ്പോഴും $a \in S$ എങ്കിൽ $a*e=a$, $e*a=a$.

വ്യുൽക്രമ ഗുണം

e എന്ന ഒരു അനന്യത അംഗം നിലനിൽക്കുന്നുവെങ്കിൽ എല്ലാ $a \in S$, S ൽ b നിലവിലുണ്ട് അത്തരത്തിൽ $a*b=e$ കൂടാതെ $b*a=e$ എങ്കിൽ $b \in S$ നെ a യുടെ **വ്യുൽക്രമം അംഗം** എന്നു പറയുന്നു. അങ്ങനെയുള്ള അവസരങ്ങളിൽ $b=a^{-1}$ എന്ന് എഴുതും.

കുറിപ്പ്

S ലെ അംഗമാണ് a^{-1} ഇതിനെ a യുടെ വ്യുൽക്രമം എന്ന് വായിക്കുന്നു. $\frac{1}{a}$ എന്നല്ല.

കുറിപ്പ്

(i) $\mathbb{Z}$ ലെ **ഗുണന അനന്യത** 1 ആണ് കൂടാതെ $n\cdot 1=1\cdot n=n, \ \forall n \in \mathbb{Z}$ എന്ന ഗുണമുള്ള ഒരേ ഒരംഗം.

(ii) ഒരംഗത്തിന്റെ **ഗുണന വ്യുൽക്രമം** $2 \in \mathbb{Q}$ എങ്കിൽ $\frac{1}{2}$ കൂടാതെ x എന്ന പൂജ്യമല്ലാത്ത പരിമേയ സംഖ്യയ്ക്കു $2\cdot x=x\cdot 2=1$ എന്ന ഗുണമുണ്ട്.

കുറിപ്പ്

ഒരു ഗണിത പ്രസ്താവനയിൽ ഓരോന്നും, എല്ലാറ്റിനും ഉൾപ്പെടുമ്പോഴെല്ലാം. അത് ഓരോ ജോഡിയും അവിടെയുള്ള അംഗങ്ങൾക്കും തെളിയിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ഓരോ ജോഡി അല്ലെങ്കിൽ മൂന്ന് അംഗങ്ങൾക്ക് തെളിയിക്കാൻ അത്ര എളുപ്പമല്ല. പ്രസ്താവനയുടെ നിഷേധം തെളിയിക്കാൻ ഈ തരത്തിലുള്ള നിർവചനങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചേക്കാം. എന്നതിന്റെ (നിഷേധം) എന്നാണ്. അതിനാൽ പ്രസ്താവനയുടെ നിഷേധത്തിന് അത്തരം ഒരു ജോഡി അല്ലെങ്കിൽ മൂന്ന് അംഗങ്ങൾ നിർമ്മിക്കുക

അനന്യതയുടെയും, വ്യുൽക്രമത്തിന്റെയും, അസ്തിത്വവും, അതുല്യതയും ഉൾകൊള്ളുന്ന ചോദ്യങ്ങൾ പരിശോധിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ഇനിപറയുന്ന സിദ്ധാന്തങ്ങൾ ഈ ഫലങ്ങളെ കൂടുതൽ പൊതു രൂപത്തിൽ തെളിയിക്കുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 12.1: (അനന്യതയുടെ അതുല്യത)

ഒരു ബീജഗണിത ഘടനയിൽ അനന്യത (നിലവിലുണ്ടെങ്കിൽ) അദ്വിനീയമായിരിക്കും.

തെളിവ്

$(S,*)$ എന്നത് ഒരു ബീജഗണിത ഘടനയും $e \in S$ യും എന്നിരിക്കട്ടെ S ൽ e യുടെ വ്യുൽക്രമം നിലവിലുണ്ടെന്ന് കരുതുക.

അനന്യത അദ്വിതീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കപ്പെടും. e_1 , e_2 എന്നത് S ലെ രണ്ട് അനന്യത അംഗങ്ങളാണെന്ന് കരുതുക.

ആദ്യം e_1 അനന്യതയാണെന്നും e_2 , S ലെ ഏകപക്ഷീയമായ അംഗമാണെന്നും പരിഗണിക്കുക.

അനന്യതഗുണമനുസരിച്ച്, $e_2*e_1=e_1*e_2=e_2$ . ... (1)

e_1 , e_2 എന്നിവയുടെ പങ്കുകൾ പരസ്പരം മാറിയാൽ $e_1*e_2=e_2*e_1=e_1$ . ...(2)

(1), (2) ൽ നിന്ന്, $e_1=e_2$. അതിനാൽ അനന്യത അദ്വിതീയമായിരിക്കും എന്ന് തെളിയിച്ചു.

സിദ്ധാന്തം 12.2 (വ്യുൽക്രമത്തിന്റെ അതുല്യത)

ബീജഗണിത ഘടനയിൽ ഒരു അംഗത്തിന്റെ വ്യുൽക്രമം (നിലവിലുണ്ടെങ്കിൽ) അദ്വിതീയമായിരിക്കും.

തെളിവ്

$(S,*)$ എന്നത് ഒരു ബീജഗണിത ഘടനയും $a \in S$ വും എന്നിരിക്കട്ടെ a യുടെ വ്യുൽക്രമം S ൽ ഉണ്ടെന്ന് കരുതുക a യുടെ വ്യുൽക്രമം അദ്വിനീയമാണെന്ന് തെളിയിക്കപ്പെടും. S ൽ വ്യുൽക്രമം ഉണ്ടായിരുന്നാൽ ഉറപ്പായും e എന്ന അനന്യ S ൽ ഉണ്ടായിരിക്കും .

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 228 15-02-2023 15:30:25

$a \in S$ എന്നിരിക്കട്ടെ a യുടെ വ്യുൽക്രമം നിലവിലുണ്ടെങ്കിൽ) അദ്വിതീയമായിരിക്കും എന്ന് തെളിയിക്കണം.

a_1, a_2 എന്നീ രണ്ട് വ്യുൽക്രമങ്ങൾ a യ്ക്കുണ്ടെന്ന് കരുതുക,.

a യുടെ വ്യുൽക്രമം a_1 എന്ന് പരിഗണിച്ചാൽ $a * a_1 = a_1 * a = e$ ...(1)

a യുടെ വ്യുൽക്രമം a_2 എന്ന് പരിഗണിച്ചാൽ $a * a_2 = a_2 * a = e$ ...(2)

$$a_1 = a_1 * e = a_1 * (a * a_2) = (a_1 * a) * a_2 = e * a_2 = a_2 \quad (1), (2) \text{ ൽ നിന്ന്.}$$

അതിനാൽ, $a_1 = a_2$. a യുടെ വ്യുൽക്രമം അദ്വിനീയമാണെന്ന് തെളിയിച്ചു.

ഉദാഹരണം 12.2

$\mathbb{Z}$ ലെ $+$ എന്ന ഗണിത ക്രിയയ്ക്ക് (i) സംവൃത നിയമം (ii) ക്രമവിനിമേയ നിയമം (iii) സംയോജന നിയമം (iv) അനന്യത ഗുണം (v) വ്യുൽക്രമ ഗുണം എന്നിവ തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

(i) $m+n \in \mathbb{Z}, \forall m, n \in \mathbb{Z}$. അതിനാൽ $+$ എന്നത് $\mathbb{Z}$ ലെ ദ്വയാങ്കക്രിയയാണ്.

(ii) $m+n = n+m, \forall m, n \in \mathbb{Z}$. അതിനാൽ ക്രമവിനിമേയ നിയമം സംതൃപ്തമാണ്

(iii) $\forall m, n, p \in \mathbb{Z}, m+(n+p) = (m+n)+p$. അതിനാൽ സംയോജനാ നിയമം സംതൃപ്തമാണ്.

(iv) $m+e = e+m = m \Rightarrow e = 0.$ അങ്ങനെ $\exists\ 0 \in \mathbb{Z} \ni (m+0) = (0+m) = m$. അനന്യതാ ഗുണം ദൃഢമായി.

(v) $m+m' = m'+m = 0 \Rightarrow m' = -m.$ അങ്ങനെ $\forall m \in \mathbb{Z}, \exists$ $\ni$
$m+(-m) = (-m)+m = 0$ അതിനാൽ വ്യുൽക്രമ ഗുണം ദൃഢമായി. അങ്ങനെ $\mathbb{Z}$ ലെ സാധാരണ സങ്കലനം $+$ മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള അഞ്ചു നിയമങ്ങളും തൃപ്തിപ്പെടുത്തി.

അനന്യത 0 ഉം ഏതൊരു പൂർണ്ണാങ്കം m ന്റെ **വ്യുൽക്രമം** $-m$ നും ആണെന്നതു ശ്രദ്ധിക്കുക.

ഉദാഹരണം 12.3

$\mathbb{Z}$ ലെ $-$ എന്ന ഗണിത ക്രിയയ്ക്ക് (i) സംവൃത നിയമം (ii) ക്രമ വിനിമേയ നിയമം (iii) സംയോജന നിയമം (iv) അനന്യതാ ഗുണം (v) വ്യുൽക്രമ ഗുണം എന്നിവ പരിശോധിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

(i) $\mathbb{N}$ ൽ $-$ ദ്വയാങ്കമല്ല എന്നിരുന്നാലും $\mathbb{Z}$ ൽ ദ്വയാങ്കമാണ്. $\mathbb{Z}$ ലെ $-$ നെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന കൂടുതൽ നിയമങ്ങളുടെ സാധുത പരിശോധിക്കുന്നതിന് ചില പ്രത്യേക ലളിതമായ മൂല്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് പരിശോധിക്കുന്നതാണ് നല്ലത്.

(ii) $m = 4$, $n = 5$ എന്നെടുക്കുക $(m-n) = (4-5) = -1$, $(n-m) = (5-4) = 1$.
അതിനാൽ $(m-n) \neq (n-m)$ അതുകൊണ്ട് $\mathbb{Z}$ ലെ $-$ എന്ന ക്രിയ ക്രമവിനിമേയമല്ല.

(iii) സംയോജനനിയമം ശരി നോക്കുന്നതിന് $m = 4, n = 5$, $p = 7$ എന്ന് $(m-n)-p$ ലും $m-(n-p)$ യിലും പ്രതിസ്ഥാപിക്കുക.

$(m-n)-p = (4-5)-7 = (-1-7) = -8$ ...(1)

$m-(n-p) = 4-(5-7) = (4+2) = 6.$ ...(2)

(1), (2) ൽ നിന്നും, $(m-n)-p \neq m-(n-p)$.

അതിൽ $\mathbb{Z}$ ലെ $-$ സംയോജനമല്ല.

(iv) അനന്യത നിലവിലില്ല (എന്തുകൊണ്ട്).

(v) വ്യുൽക്രമം നിലവിലില്ല (എന്തുകൊണ്ട്).

ഉദാഹരണം 12.4

എല്ലാ ഇരട്ട പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ ഗണമായ $\mathbb{Z}_e$ = ലെ ഗണിതക്രിയ $+$ ന് (i) സംവൃത നിയമം (ii) ക്രമ വിനിമേയ നിയമം (iii) സംയോജന നിയമം (iv) അനന്യത ഗുണം (v) വ്യുൽക്രമ ഗുണം എന്നിവ പരിശോധിക്കുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 229 15-02-2023 15:30:32

നിർദ്ധാരണം

$\mathbb{Z}_e = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$ എന്ന **ഇരട്ട പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ** ഗണത്തെ പരിഗണിക്കുക.

$\mathbb{Z}_e$ ലുള്ള $+$ എന്ന ദ്വയാങ്കക്രിയയെ കൊണ്ട് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള നിയമങ്ങളെ ശരിനോക്കാം.

(i) ഏതെങ്കിലും രണ്ടു പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ തുക ഇരട്ട പൂർണ്ണാങ്കം ആയിരിക്കും.

എന്തെന്നാൽ $x, y \in \mathbb{Z}_e \Rightarrow x = 2m,\ y = 2n,\ m, n \in \mathbb{Z}$.

അതുകൊണ്ട് $(x + y) = 2m + 2n = 2(m + n) \in \mathbb{Z}_e$. അതിനാൽ $+$ ൽ $\mathbb{Z}_e$ എന്നത് ദ്വയാങ്കക്രിയയാണ്.

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{Z}_e, (x + y) = 2(m + n) = 2(n + m) = (2n + 2m) = (y + x)$.

അതിനാൽ $+$ ക്രമവിനിമേയ നിയമം തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.

(iii) സമാനമായി $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}_e,\ (x + y) + z = x + (y + z)$.
അതിനാൽ സംയോജന നിയമം ശരിയാണ്.

(iv) $x = 2k$ എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ, $2k + e = e + 2k = 2k \Rightarrow e = 0.$

അങ്ങനെ $\forall x \in \mathbb{Z}_e,\ \exists 0 \in \mathbb{Z}_e \ni x + 0 = 0 + x = x$.

അതിനാൽ, 0 അനന്യത അംഗം ആണ്.

(v) $x = 2k$, x' അതിന്റെ വ്യുൽക്രമം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ $2k + x' = 0 = x' + 2k \Rightarrow x' = -2k$. *i.e.*, $x' = -x$.

അങ്ങനെ $\forall x \in \mathbb{Z}_e, \exists -x \in \mathbb{Z}_e \ni x + (-x) = (-x) + x = 0$

അതിനാൽ $x \in \mathbb{Z}_e$ യുടെ വ്യുൽക്രമമാണ് $-x$.

ഉദാഹരണം 12.5

ഒറ്റ പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ ഗണമായ $\mathbb{Z}_o$ = ലെ $+$ എന്ന ഗണിത ക്രിയയ്ക്ക് (i) സംവൃത നിയമം (ii) ക്രമവിനിമേയ നിയമം (iii) സംയോജന നിയമം (iv) അനന്യത ഗുണം (v) വ്യുൽക്രമ നിയമം എന്നിവ തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ഒറ്റ പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ ഗണമായ $\mathbb{Z}_o$ യെ പരിഗണിക്കാം $\mathbb{Z}_o = \{2k + 1 : k \in \mathbb{Z}\} = \{..., -5, -3, -1, 1, 3, 5, ...\}$

$\mathbb{Z}_o$ ൽ $+$ **ദ്വയാങ്കക്രിയയല്ല** കാരണം $x = 2m + 1, y = 2n + 1, x + y = 2(m + n) + 2$ m, n ന്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും ഇതിന്റെ വില ഇരട്ട സംഖ്യയായിരിക്കും. ഉദാഹരണത്തിന് $3, 7 \in \mathbb{Z}_o$. എന്നീ രണ്ട് ഒറ്റ സംഖ്യകളെ പരിഗണിക്കുക. അവയുടെ തുക $3 + 7 = 10$ ഇത് ഇരട്ട സംഖ്യയാണ്. പൊതുവായി $x, y \in \mathbb{Z}_0$ എങ്കിൽ, $(x + y) \notin \mathbb{Z}_0$. ഇത് ഒരു ദ്വയാങ്കക്രിയ അല്ലാത്തതു കൊണ്ട് മറ്റു നിയമങ്ങൾ പരിശോധിക്കേണ്ടതില്ല.

ഉദാഹരണം 12.6

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ക്രിയയ്ക്ക് (i) സംവൃത ഗുണം (ii) ക്രമവിനിമേയ നിയമം (iii) സംയോജന നിയമം എന്നിവ പരിശോധിക്കുക.

$(a * b) = a^b; \forall a, b \in \mathbb{N}$ (ഘതാങ്ക നിയമ)

നിർദ്ധാരണം

(i) $a * b = a^b \in \mathbb{N}; \forall a, b \in \mathbb{N}$ എന്നതു ശരിയാണ്. അതിനാൽ $*$ എന്നത് $\mathbb{N}$ ലെ **ദ്വയാങ്കക്രിയയാണ്.**

(ii) $a * b = a^b$, $b * a = b^a$. $a = 2$, $b = 3$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുക. തുടർന്ന് $a * b = 2^3 = 8$ എന്നാൽ $b * a = 3^2 = 9$

അതിനാൽ $a * b$ എന്നത് $b * a$ യ്ക്ക് തുല്യമാകാൻ സാധ്യത ഇല്ല. അതുകൊണ്ട് $*$ ന് **ക്രമവിനിമേയ നിയമം ഇല്ല.**

(iii) $a * (b * c) = a * (b^c) = a^{(b^c)}$ എന്നിരിക്കട്ടെ. $a = 2,\ b = 3,\ c = 4$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ.

$a * (b * c) = 2 * (3 * 4) = 2^{3^4} = 2^{81}$

എന്നാൽ $(a * b) * c = (a^b) * c = (a^b)^c = a^{(bc)} = a^{bc} = 2^{12}$

അതിനാൽ $a * (b * c) \neq (a * b) * c$. അതുകൊണ്ട് $*$ $\mathbb{N}$ ൽ **സംയോജനമല്ല.**

കുറിപ്പ്: ഈ ദ്വയാങ്കക്രിയയ്ക്ക് അനന്യതയും വ്യുൽക്രമവും ഇല്ല (ന്യായീകരിക്കുക).

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 230 15-02-2023 15:30:40

ഉദാഹരണം 12.7

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഗണത്തിലെ ക്രിയയ്ക്ക് (i) സംവൃത നിയമം (ii)ക്രമവിനിമേയ നിയമം (iii) സംയോജന നിയമം (iv) അനന്യത ഗുണം (v) വ്യുൽക്രമ ഗുണം എന്നിവ പരിശോധിക്കുക.

$m * n = m + n - mn;\ m, n \in \mathbb{Z}$

നിർദ്ധാരണം

(i) $m + n - mn$ ന്റെ ഫലം എല്ലായ്പ്പോഴും ഒരു പൂർണ്ണാങ്കമായിരിക്കും. അതിനാൽ $*$, $\mathbb{Z}$ ലെ ഒരു **ദ്വയാങ്ക ക്രിയയാണ്.**

(ii) $m * n = m + n - mn = n + m - nm = n * m,\ \forall m, n \in \mathbb{Z}$. അതുകൊണ്ട് $*$ എന്ന ക്രിയ **ക്രമവിനിമേയ നിയമം** തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.

(iii) $(m * n) * p = (m + n - mn) * p = (m + n - mn) + p - (m + n - mn)\, p$

$$= m + n + p - mn - mp - np + mnp \quad \ldots (1)$$

അതുപോലെ $m * (n * p) = m * (n + p - np) = m + (n + p - np) - m(n + p - np)$

$$= m + n + p - np - mn - mp + mnp \quad \ldots (2)$$

(1), (2) ൽ നിന്ന്, $m * (n * p) = (m * n) * p$. അതിനാൽ $*$ എന്ന ക്രിയയ്ക്ക് **സംയോജന നിയമം തൃപ്തിപ്പെടുന്നു.**

(iv) e എന്ന ഒരു പൂർണ്ണാങ്കം

$m * e = e * m = m,\ \forall m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m + e - m\ e = m$ എന്ന രീതിയിൽ കണ്ടെത്തണം

$\Rightarrow e\,(1 - m) = 0 \Rightarrow e = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $m = 1$. എന്നാൽ m എന്നത് ഏകപക്ഷീയമായ ഒരു പൂർണ്ണാങ്കമാണ്. അതുകൊണ്ട് m എന്നത് 1 നു സമമായിരിക്കണമെന്നില്ല. അതിനാൽ ഒരേ ഒരു സാധ്യത $e = 0$ എന്നതാണ്. കൂടാതെ $m * 0 = 0 * m = m,\ \forall m \in \mathbb{Z}$. അതിനാൽ 0 എന്നത് അനന്യതയാണ്. അതുകൊണ്ട് **അനന്യത ഗുണം** തെളിയിച്ചു.

(v) $m * m' = m' * m = e = 0,\ \forall m \in \mathbb{Z}$ എന്ന തരത്തിൽ വരുന്ന $m' \in \mathbb{Z}$ എന്ന അംഗത്തിനെ കണ്ടെത്തണം.

$m * m' = 0 \Rightarrow m + m' - m\ m' = 0 \Rightarrow m' = \dfrac{m}{m-1}$. $m=1$ എന്നിരുന്നാൽ, m' നിർവചിക്കാൻ സാധിക്കില്ല.

ഇപ്പോൾ $m = 2$, m' ഒരു പൂർണ്ണാങ്കമാണ് എന്നാൽ $m=2$, ഒഴികെ m ന്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും m' ഒരു പൂർണ്ണാങ്കം ആകണമെന്നില്ല. അതുകൊണ്ട് $\mathbb{Z}$ **ന് വ്യുൽക്രമം ഇല്ല.**

12.2.3 ബൂളിയൻ മാട്രിക്സിലെ ചില ദ്വയാങ്കക്രിയകൾ

നിർവചനം 12.3

ഒരു **ബൂളിയൻ മാട്രിക്സ്** ഒരു യഥാർത്ഥ മാട്രിക്സാണ്, അതിന്റെ അംഗങ്ങൾ 0 അല്ലെങ്കിൽ 1 ആയിരിക്കും.

ബൂളിയൻ അംഗങ്ങളായ 0 നെയും 1 നെയും നിരവധി വഴികളിൽ നിർവചിക്കാൻ കഴിയും ഇലക്ട്രിക്കൽ സ്വിച്ചിൻ വിശദീകരിക്കുന്ന "on അല്ലെങ്കിൽ off" ഗ്രാഫ് സിദ്ധാന്തത്തിൽ സമീപസ്ഥല മാട്രിക്സ് എന്നിവയിൽ ബൂളിയൻ അംഗമായ 0, 1 ഉപയോഗിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇതേ തരത്തിലുള്ള ബൂളിയൻ മാട്രിക്സിനെ നമ്മുടെ ചർച്ചയ്ക്കു കൊണ്ടുവരാം.

ബൂളിയൻ മാട്രിക്സിന്റെ എല്ലാ ശേഖരണത്തിലും രണ്ടു തരത്തിലുള്ള ക്രിയകൾ നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ട്.

$A = \left[a_{ij}\right]$, $B = \left[b_{ij}\right]$ എന്നിവ **ഒരേ തരത്തിലുള്ള** ബൂളിയൻ മാട്രിക്സ് ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ അതിന്റെ **യോഗം** $\vee$ **സംഗമം** $\wedge$ എന്നിവയുടെ നിർവചനം താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു:

നിർവചനം 12.4: A, B യുടെ യോഗം

$$A \vee B = \left[a_{ij}\right] \vee \left[b_{ij}\right] = \left[a_{ij} \vee b_{ij}\right] = \left[c_{ij}\right]$$

$$\text{ഇവിടെ } c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ ഒന്നുകിൽ } a_{ij} = 1 \text{ അല്ലെങ്കിൽ } b_{ij} = 1 \text{ ആയിരുന്നാൽ} \\ 0,\ a_{ij} = 0,\ b_{ij} = 0 \text{ ആയിരുന്നാൽ} \end{cases}$$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 231 15-02-2023 15:30:48

നിർവചനം 12.5: A, B യുടെ സംഗമം

$$A \wedge B = [a_{ij}] \wedge [b_{ij}] = [a_{ij} \wedge b_{ij}] = [c_{ij}] \text{ ഇവിടെ } c_{ij} = \begin{cases} 1, a_{ij}=1, \ b_{ij}=1 \text{ എങ്കിൽ} \\ 0, \text{ഒന്നുകിൽ } a_{ij}=0 \text{ അല്ലെങ്കിൽ, } b_{ij}=0 \text{ എങ്കിൽ} \end{cases}$$

$$(a \vee b) = \max\{a,b\}\,;\ (a \wedge b) = \min\{a,b\}\,,\ a,b \in \{0,1\}\,.$$

ഉദാഹരണം 12.8

$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ എന്നിവ ഒരേ തരത്തിലുള്ള രണ്ട് ബൂളിയൻ മാട്രിക്സ് എന്നിരിക്കട്ടെ $A \vee B$, $A \wedge B$ എന്നിവ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$A \vee B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \vee \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \vee 1 & 1 \vee 1 \\ 1 \vee 0 & 1 \vee 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \wedge 1 & 1 \wedge 1 \\ 1 \wedge 0 & 1 \wedge 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

യോഗവും സംഗമവും തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന ഗുണങ്ങൾ

ഒരേ തരത്തിലുള്ള ബൂളിയൻ മാട്രിക്സുകളുടെ ഗണം $\mathbb{B}$ എന്നിരിക്കട്ടെ. യോഗവും സംഗമവും തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന ഗുണങ്ങൾ

സംവൃത നിയമം

$A, B \in \mathbb{B},\ A \vee B = [a_{ij}] \vee [b_{ij}] = [a_{ij} \vee b_{ij}] \in \mathbb{B}$. (കാരണം, $(a_{ij} \vee b_{ij})$ എന്നത് ഒന്നുകിൽ 0 അല്ലെങ്കിൽ 1 $\forall i, j$. $\vee$ എന്നത് $\mathbb{B}$ യിലെ ദ്വയാങ്ക ക്രിയയാണ്.

സംയോജന നിയമം

$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C,\ \forall A, B, C \in \mathbb{B}$. $\vee$ എന്നത് സംയോജനമാണ്.

അനന്യത ഗുണം

$\forall A \in \mathbb{B},\ \exists$ ശൂന്യഗണം $0 \in \mathbb{B} \ni A \vee 0 = 0 \vee A = A$. $\vee$ യുടെ അനന്യത ശൂന്യമാട്രിക്സ് ആണ്.

വ്യുൽക്രമ ഗുണം

ഏതെങ്കിലും ഒരു മാട്രിക്സ് $A \in \mathbb{B}$ യിൽ ഒരു മാട്രിക്സ് കണ്ടെത്താൻ കഴിയില്ല

$B \in \mathbb{B} \ni A \vee B = B \vee A = 0$. അതുകൊണ്ട് വ്യുൽക്രമം ഇല്ല.

അതുപോലെ $\wedge$ എന്ന ക്രിയ താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവ തൃപ്തിപ്പെടുത്തും എന്നത് തെളിയിക്കാൻ സാധിക്കും. (i) സംവൃത നിയമം (ii) സംയോജന നിയമം (iii) ക്രമവിനിമേയ നിയമം (iv) $\mathbb{B}$ യിൽ $U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സ് ആണ് അനന്യത ആയി നിൽക്കുന്നത് (v) വ്യുൽക്രമം ഉള്ളതു തീർച്ചപ്പെടുത്താൻ കഴിയില്ല.

12.2.4 മോഡുലാർ അരിത്തമറ്റിക്

അടിസ്ഥാന സംഖ്യാഗണിത ക്രിയകളായ സങ്കലനവും, ഗുണനവും, മാട്രിക്സ്, ബൂളിയൻ മാട്രിക്സിലെ യോഗവും സംഗമവും പോലുള്ള ക്രിയകളുടെ സവിശേഷതകളും ചർച്ച ചെയ്തു. ഈ ഭാഗത്ത് പുതിയ ഒരു ക്രിയ **മോഡുലാർ അരിത്തമാറ്റിക്കിനെ പറ്റി** ചർച്ചചെയ്യാം. മോഡുലാർ അരിത്താറ്റിക്ക് എന്നത് ഒരു സംഖ്യ a യെ ഒരു ധന പൂർണ്ണാങ്കം n (>1) കൊണ്ട് **ഹരിക്കുന്ന** പ്രക്രിയയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. a , b എന്നീ രണ്ടു പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ വ്യത്യാസം n ന്റെ മടങ്ങ് എങ്കിൽ മോഡുലസ് n ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ a യെയും b യെയും സമീകരണമാക്കി എഴുതാൻ സാധിക്കും. ഇതിനെ $a \equiv b (\mathrm{mod}\, n)$ എന്ന് എഴുതാം a സർവ്വസമം b മോഡുലോ n എന്ന് വായിക്കാം.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 232 15-02-2023 15:30:53

ഇതനുസരിച്ച് $a-b=n\cdot k$, $a\equiv b$ കൂടാതെ a യെ n കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ശിഷ്ടം b എന്നത് **ഏറ്റവും ചെറിയ ധന പൂർണ്ണാങ്കമായിരിക്കും.**

ഉദാഹരണത്തിന്, $25\equiv 4(\text{mod}\,7), -20\equiv -2(\text{mod}\,3)\equiv 1(\text{mod}\,3)$ കൂടാതെ $15\equiv 0(\text{mod}\,5)$, കൂടുതലായി പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളുടെ ഗണത്തെ n കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന ശിഷ്ടം $0,1,2,\ldots,n-1$ ആണ്. ഈ സന്ദർഭത്തിൽ $\mathbb{Z}_5$ ൽ,

$$\begin{aligned}
[0] &= \{\ldots,-15,-10,-5,0,5,10,15,\ldots\}\\
[1] &= \{\ldots,-14,-9,-4,1,\ 6,11,\ \ldots\}\\
[2] &= \{\ldots,-13,-8,-3,2,7,12,\ldots]\\
[3] &= \{\ldots,-12,-7,-2,3,8,13,\ldots\}\\
[4] &= \{\ldots,-11,-6,-1,4,9,14,\ldots\}.
\end{aligned}$$

ഇതിനെ $\mathbb{Z}_5=\{[0],[1],[2],[3],[4]\}$ എന്ന് എഴുതാം. ഓരോ ഭാഗത്തും ഏതെങ്കിലും രണ്ടു സംഖ്യകൾ മോഡുലോ 5 നു സർവ്വസമമായിരിക്കും.

2007 നു മുൻപു, 10-അക്കങ്ങളുള്ള ISBN (അന്താരാഷ്ട്ര നിലവാര പുസ്തക സംഖ്യ) സംഖ്യാ സമ്പ്രദായമാണ്. ഉദാഹരണത്തിന് അവസാനത്തെ അക്കം സമത്വ പരിശോധനയ്ക്കുള്ളതാണ്. ഇത് $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,X\}$ എന്ന ഗണത്തിൽ നിന്നും ലഭിക്കുന്നു. 81-7808-755-**3**എന്ന ISBN സംഖ്യയുടെ അവസാന അക്കമായ **3** നെ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള വിധത്തിൽ ലഭിക്കുന്നു.

$1*8+2*1+3*7+4*8+5*0+6*8+7*7+8*5+9*5=8+2+21+32+0+48+49+40+45=245\equiv 3(\text{mod}\,11)$.

പകരമായി ഭാരം കണക്കാക്കിയ തുക വിപരീത രീതിയിലാണ് കണക്കാക്കുന്നത്

$9*8+8*1+7*7+6*8+5*0+4*8+3*7+2*5+1*5=245=\mathbf{3}\ (\text{mod}\ 11)$.

രണ്ടു വഴികളിലും ഒരേ ചെക്ക് സംഖ്യ 3 ലഭിക്കുന്നു.

2007 നു ശേഷം, 13-അക്കങ്ങളുള്ള ISBN സംഖ്യകൾ പിന്തുടർന്നു ആദ്യത്തെ 12 അക്കങ്ങൾ (ഇടത്തു നിന്നും വലത്തോട്ട്) ഇട 3,1,3,1,.... എന്നിങ്ങനെ വലത്തു നിന്നു ഇടത്തോട്ടു ഗുണിക്കുന്നു. പിന്നെ ഇടയോടു കൂടിയ തുക കണക്കാക്കുന്നു. 10 ന്റെ അധിക മടങ്ങ് എടുക്കപ്പെടുന്നു. പിന്നീട് അതിന്റെ വ്യത്യാസം കണക്കാക്കുന്നു. അതിന്റെ സങ്കലന വ്യുൽക്രമം modulo 10, 13ാമത്തെ അക്കമായിരിക്കും.

ഉദാഹരണത്തിന് 978-81-931995-6-**5** എന്ന ISBN സംഖ്യയെ പരിഗണിക്കുക. ആദ്യത്തെ 12 അക്കങ്ങൾ ഇടത്തു നിന്നും വലത്തോട്ട് എടുക്കുക.

9	7	8	8	1	9	3	1	9	9	5	6
1	3	1	3	1	3	1	3	1	3	1	3
9	21	8	24	1	27	3	3	9	27	5	18

താഴെത്തെ വരിയുടെ തുക 155 ആണ്. 10 ന്റെ മടങ്ങുകളിൽ ഏറ്റവും അടുത്തു (ഉയർന്ന) വരുന്ന പൂർണ്ണാങ്കം 160 ആണ്. വ്യത്യാസം 160-155=5. modulo 10 ന്റെ സങ്കലന വ്യുൽക്രമം **5** ഇത് ISBN സംഖ്യയുടെ 13- ാമത്തെ അക്കമാണ്.

മോഡുലോ സംഖ്യാഗണിതത്തിൽ n നെക്കാൾ കുറഞ്ഞ പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളെ കൊണ്ടുള്ള ഗണം $\mathbb{Z}_n$ ൽ n ന്റെ **സങ്കലന മോഡുലോ** $n(+_n)$ കൂടാതെ n ന്റെ **ഗുണന മോഡുലോ** $n(\times_n)$ എന്നീ രണ്ടു പുതിയ ക്രിയകളെ വിശദീകരിച്ചിട്ടുണ്ട്.

നിർവചനം 12.6

(i) സങ്കലന മോഡുലോ n നെ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള രീതിയിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ട്.

$a,b\in\mathbb{Z}_n$ എന്ന് കരുതുക. എങ്കിൽ

$a+_n b=a+b$ യെ n കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നതിലുള്ള ശിഷ്ടം.

(ii) ഗുണന മോഡുലോ n നെ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള രീതിയിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ട്.

$a,b\in\mathbb{Z}_n$ എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ,

$a\times_n b$: $a\times b$ യെ n കൊണ്ട് ഹരിക്കുന്നതിലുള്ള ശിഷ്ടം

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 233 15-02-2023 15:30:57

ഉദാഹരണം 12.9

$\mathbb{Z}_5$ ലെ $+_5$ എന്ന ക്രിയയ്ക്ക് സങ്കലന മോഡുലോ 5 ന്റെ പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച് (i) സംവൃത നിയമം (ii) ക്രമവിനിമേയ നിയമം (iii) സംയോജന നിയമം (iv) അനന്യത ഗുണം (v) വ്യുൽക്രമ ഗുണം എന്നിവ പരിശോധിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$\mathbb{Z}_5 = \{[0], [1], [2], [3], [4]\}$ സങ്കലന മോഡുലോ 5 ന്റെ പട്ടിക താഴെ തന്നിട്ടുണ്ട് : $\{[0],[1],[2],[3],[4]\}$ എന്നിവയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന ശിഷ്ടങ്ങൾ $\{0,1,2,3,4\}$ എന്നിവയാണ്.

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

പട്ടിക 12.2

(i) പട്ടികയിലുള്ള ഓരോ അറയിലും $\mathbb{Z}_5$ ലെ **ഒരേ ഒരു അംഗമേ ഉള്ളൂ** $a +_5 b$ യുടെ ഫലം അദ്വിതീയമാണ് അതുകൊണ്ട് $+_5$ ഒരു **ദ്വയാങ്കക്രിയയാണ്**.

(ii) **പ്രധാന വികിർണ്ണത്തെ** കണക്കാക്കി **സമലക്ഷണത്തോടെയാണ്** സംഖ്യകൾ എഴുതിയിട്ടുള്ളത് അതുകൊണ്ട് $+_5$ ന് **ക്രമവിനിമയമാണെന്നു** തെളിയിച്ചു.

(iii) സംയോജന നിയമം പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച് നേരിട്ട് തെളിയിക്കാൻ സാധിക്കില്ല. ഇതിനെ സാധാരണ പോലെ തെളിയിക്കണം.

ഉദാഹരണത്തിന്, $(2 +_5 3) +_5 4 = 0 +_5 4 = 4 \pmod 5$

$2 +_5 (3 +_5 4) = 2 +_5 2 = 4 (\mathrm{mod}\, 5)$.

അതിനാൽ $(2 +_5 3) +_5 4 = 2 +_5 (3 +_5 4)$.

ഇതുപോലെ മൂന്ന് അംഗങ്ങൾ വീതം തെളിയിച്ചാൽ $+_5$ എന്ന ക്രിയ സംയോജനമാണെന്നു തെളിയിക്കാം.

(iv) പൂജ്യം വരുന്ന വരി നയിക്കുന്നതും, പൂജ്യം വരുന്ന നിരനയിക്കുന്നതും ഒരേ പോലെയാണ് അതു കൊണ്ട് അനന്യത 0 ആണ്.

(v) ഒരു വരിയിലും നിരയിലും അനന്യത 0 ഉള്ളതു കൊണ്ട് വ്യുൽക്രമം ഉണ്ടെന്ന് തീർത്തു പറയാം. പട്ടിക 12.2 ൽ നിന്ന് വ്യുൽക്രമം ഗുണം സത്യമാണെന്ന് തെളിയുന്നു. ഉദാഹരണമായി $\mathbb{Z}_5$ ൽ ഉള്ള അംഗങ്ങളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരംഗം 2 ന്റെ വ്യുൽക്രമം കാണുന്ന വിധം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

2 നേതൃത്വം നൽകുന്ന III ാവതു വരിയിലെ അനന്യത അംഗം 0 ന്റെ സ്ഥാനം മനസ്സിലാക്കുക III ാമത്തെ വരിയിൽ തിരശ്ചീനമായി നീങ്ങുമ്പോൾ 0 എത്തും, IV ാമത്തെ നിരയിൽ 0 നു ലംബമായി നീങ്ങുക. കാരണം 0 III ാമത്തെ വരിയിലും IV ാമത്തെ നിരയിലുമാണ് സ്ഥിതി ചെയ്യുന്നത്. IV ാമത്തെ നിരയിലെ ഏറ്റവും മുകളിലെ അംഗം 3 ആണ്. 3 എന്നത് 2 ന്റെ വ്യുൽക്രമമാണ് കാരണം $2 +_5 3 = 0 (\mathrm{mod}\, 5)$ ഈ രീതി ഉപയോഗിച്ച് $\mathbb{Z}_5$ ലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളുടെയും വ്യുൽക്രമം കാണാൻ സാധിക്കും. 0 ന്റെ വ്യുൽക്രമം 0,1 ന്റെ വ്യുൽക്രമം 4, 2 ന്റെ വ്യുൽക്രമം 3, 3 ന്റെ വ്യുൽക്രമം 2 കൂടാതെ 4 ന്റെ വ്യുൽക്രമം 1 എന്ന് അറിയാൻ സാധിക്കും.

ഉദാഹരണം 12.10

mod 11 നെ അപേക്ഷിച്ച് ശിഷ്ടങ്ങളുടെ ഗണമായ $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ന്റെ ഉപഗണം $A = \{1,3,4,5,9\}$ ൽ $\times_{11}$ എന്ന ക്രിയയ്ക്ക് (i) സംവൃത നിയമം (ii) ക്രമവിനിമേയ നിയമം (iii) സംയോജന നിയമം (iv) അനന്യഗുണം (v) വ്യുൽക്രമ നിയമം എന്നിവ ശരിനോക്കുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 234 15-02-2023 15:31:00

നിർദ്ധാരണം

$\times_{11}$ എന്ന ക്രിയയുടെ പട്ടിക താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

$\times_{11}$	1	3	4	5	9
1	1	3	4	5	9
3	3	9	1	4	5
4	4	1	5	9	3
5	5	4	9	3	1
9	9	5	3	1	4

പട്ടിക 12.3

മുമ്പത്തെ ഉദാഹരണത്തിൽ വിശദീകരിച്ച അതേ രീതി പിന്തുടരുക A യിൽ $\times_{11}$ എന്ന ക്രിയയുടെ ഗുണ വിശേഷതകൾ പരിശോധിക്കുന്ന പ്രക്രിയയുടെ ഒരു ഹ്രസ്വ രൂപരേഖ താഴെ തന്നിട്ടുണ്ട്.

(i) ഓരോ ബോക്സിലും A യ്ക്ക് അദ്വിതീയമായ അംഗം ഉള്ളതിനാൽ A യിൽ $\times_{11}$ **ഒരു ദ്വയാങ്കക്രിയയാണ്.**

(ii) പട്ടികയിലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും പ്രധാന വികിർണ്ണത്തിനെ കുറിച്ച് സമമിതിയാണ്. അതുകൊണ്ട് $\times_{11}$ **ക്രമവിനിമേയ നിയമം** ഉള്ളതാകും**.**

(iii) പതിവു പോലെ **സംയോജന നിയമം** ശരിയാണെന്നു കാണാം.

(iv) 1 നെ നയിക്കുന്ന വരിയിലും നിരയിലും ഉള്ള അംഗങ്ങൾ ഒരു പോലെയാണ്. അതുകൊണ്ട് **അനന്യത 1** ആണ്.

(v) ഓരോ വരിയിലും നിരയിലും അനന്യത 1 നിലവിലുള്ളതു കൊണ്ട് $\times_{11}$ എന്ന കിയയ്ക്ക് **വ്യുൽക്രമ നിയമം ഉണ്ടെന്നു ഉറപ്പാക്കാം**. 1 ന്റെ വ്യുൽക്രമം 1, 3 ന്റെത് 4, 4 ന്റെത് 3, 5 ന്റെത് 9 കൂടാതെ 9 ന്റെത് 5 ആകുന്നു.

അഭ്യാസം 12.1

1. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഗണങ്ങൾക്ക് $*$ ഒരു ദ്വയാങ്ക ക്രിയയാണെന്ന് നിർണ്ണയിക്കുക.

   (i) $a*b = a.|b|$ $\mathbb{R}$ ൽ (ii) $a*b = \min(a,b)$ $A = \{1,2,3,4,5\}$ എങ്കിൽ

   (iii) $(a*b) = a\sqrt{b}$, $\mathbb{R}$ ൽ ദ്വയാങ്കമാണ്.

2. $\mathbb{Z}$ ൽ, $*$ എന്ന ക്രിയ $(m*n) = m^n + n^m : \forall m,n \in \mathbb{Z}$ എന്ന് നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ട്. $*$, $\mathbb{Z}$ ൽ ഒരു ദ്വയാങ്കക്രിയ ആണോ?

3. $\mathbb{R}$ ൽ $*$ എന്ന ക്രിയ $(a*b) = a+b+ab-7$ എന്ന് നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ $*$, $\mathbb{R}$ ൽ ദ്വയാങ്കക്രിയ ആണോ? ആണെങ്കിൽ $3*\left(\frac{-7}{15}\right)$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക .

4. $A = \{a+\sqrt{5}b : a,b \in \mathbb{Z}\}$ എന്നിരിക്കട്ടെ. A യിൽ സാധാരണ ഗുണനം ഒരു ദ്വയാങ്കക്രിയ ആണോ എന്ന് ശരി നോക്കുക.

5. (i) $\mathbb{Q}$ ൽ $*$ എന്ന ക്രിയ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള രീതിയിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ട് എങ്കിൽ $\mathbb{Q}$ ൽ $*$ എന്നത് സംവൃത നിയമം ക്രമവിനിമേയ നിയമം, സംയോജന നിയമം എന്നിവയെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക: $a*b = \left(\frac{a+b}{2}\right)$; $a,b \in \mathbb{Q}$.

   (ii) $\mathbb{Q}$ ൽ $*$ എന്ന ക്രിയ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള രീതിയിൽ നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ട് എങ്കിൽ $\mathbb{Q}$ ൽ $*$ എന്നത് അനന്യത ഗുണം, വ്യുൽക്രമം ഗുണം എന്നിവയെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക: $a*b = \left(\frac{a+b}{2}\right)$; $a,b \in \mathbb{Q}$.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 235 15-02-2023 15:31:03

6. $A=\{a,b,c\}$ ൽ $*$ എന്ന ദ്വയാങ്കക്രിയ ക്രമവിനിമേയമാണെങ്കിൽ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പട്ടിക പൂർത്തിയാക്കുക.

$*$	a	b	c
a	b		
b	c	b	a
c	a		c

7. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പട്ടികയിൽ $A=\{a,b,c,d\}$ ൽ $*$ എന്ന ദ്വയാങ്കക്രിയ നിർവചിച്ചിട്ടുണ്ട് :

$*$	a	b	c	d
a	a	c	b	d
b	d	a	b	c
c	c	d	a	a
d	d	b	a	c

ഇത് ക്രമവിനിമേയ നിയമവും സംയോജന നിയമവും തൃപ്തിപ്പെടുത്തുമോ?

8. $A=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\1&0&0&1\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$ എന്നിവ ഒരേ തരത്തിലുള്ള മൂന്ന് ബൂളിയൻ മാട്രിക്സുകളാണ് എങ്കിൽ (i) $A\vee B$ (ii) $A\wedge B$ (iii) $(A\vee B)\wedge C$ (iv) $(A\wedge B)\vee C$ എന്നിവ കാണുക.

9. (i) $M=\left\{\begin{pmatrix}x&x\\x&x\end{pmatrix}:x\in R-\{0\}\right\}$ കൂടാതെ $*$ എന്നത് മാട്രിക്സ് ഗുണനമാണെന്നും ഇരിക്കട്ടെ M ൽ $*$ എന്നത് സംവൃതമാണോ എന്ന് നിർണ്ണയിക്കുക. അങ്ങനെയാണെങ്കിൽ ക്രമവിനിമേയ നിയമവും സംയോജക നിയമവും തൃപ്തിപ്പെടുത്തുമോ എന്നു പരിശോധിക്കുക.

(ii) $M=\left\{\begin{pmatrix}x&x\\x&x\end{pmatrix}:x\in R-\{0\}\right\}$ കൂടാതെ $*$ എന്നത് മാട്രിക്സ് ഗുണനമാണെന്നും ഇരിക്കട്ടെ M ൽ $*$ എന്നത് സംവൃതമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. അങ്ങനെയാണെങ്കിൽ അനന്യഗുണം, വ്യുൽക്രമഗുണം എന്നിവ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുമോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

10. (i) $A=\mathbb{Q}\setminus\{1\}$ എന്നിരിക്കട്ടെ. A ൽ $*$ എന്നത് $x*y=x+y-xy$ എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു. അങ്ങനെയെങ്കിൽ A ൽ $*$ എന്നത് ക്രമവിനിമേയ നിയമവും സംയോജന നിയമവും തൃപ്തിപ്പെടുത്തുമോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക..

(ii) $A=\mathbb{Q}\setminus\{1\}$ എന്നിരിക്കട്ടെ. A ൽ $*$ എന്നത് $x*y=x+y-xy$ എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു. അങ്ങനെയാണെങ്കിൽ A ൽ $*$ എന്നത് അനന്യത ഗുണം, വ്യുൽക്രമ നിയമം എന്നിവ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുമോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 236 15-02-2023 15:31:06

12.3 ഗണിത യുക്തി ചിന്ത

ജോർജ് ബൂലെ
(1815-1864)

ജോർജ് ബൂലെ ഒരു ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനും തത്വചിന്തകനും കൂടാതെ യുക്തി ചിന്തകനുമാണ്. ദ്വയാങ്ക സംഖ്യ ഉൾകൊള്ളുന്ന അദ്ദേഹത്തിന്റെ **ബൂളിയൻ ബീജഗണിതം** വിവിധ മേഖലകളിൽ പ്രധാന പങ്ക് വഹിക്കുന്നു. പ്രത്യേകിച്ച് കമ്പ്യൂട്ടറിന്റെ പ്രയോഗങ്ങളിൽ പ്രധാന പങ്ക് വഹിക്കുന്നു. അദ്ദേഹം പ്രതീകാത്മക യുക്തി എന്ന ആശയത്തെ അവതരിപ്പിച്ചു. കൂടാതെ ഗണിതയുക്തി ചിന്തയുടെ അതിവേഗ വികസനത്തിന് ധാരാളം ഫലങ്ങൾ നൽകി.

പ്രശസ്ത ഗ്രീക്ക് തത്വചിന്തകനായ അരിസ്റ്റോട്ടിൽ യുക്തി ചിന്തയിൽ ആദ്യത്തെ പുസ്തകം ഴുതി. പ്രശസ്ത ജർമ്മൻ തത്വചിന്തകനും, ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനുമായ ഗോട്ട് ഫ്രൈഡ് ലെബിന്നിനസ് 17 ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ചിഹ്നങ്ങൾ യുക്തിചിന്തയിൽ ഉപയോഗിക്കുന്നതിനുള്ള ആശയം രൂപപ്പെടുത്തി. 19 ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ജോർജ് ബൂലെയും, അഗസ്റ്റസ് ഡി മോർഗനും ഈ ആശയത്തെ പിന്നീട് സാക്ഷാത്കരിച്ചു. യുക്തി ചിന്തയും, ചിഹ്നങ്ങളും, ബീജഗണിതവും തമ്മിൽ ബന്ധിപ്പിക്കുന്നതിലൂടെ ഗണിത യുക്തി ചിന്തയുമായി വളരെയധികം ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. എന്ന വസ്തുത ജോർജ് ബൂലെ സ്ഥാപിച്ചു.

വൈദ്യുത സർക്യൂട്ടുകൾ വിശകലനം ചെയ്യാനും വൈദ്യുത കമ്പ്യൂട്ടറുകൾ രൂപകൽപന ചെയ്യാനും ദ്വയാങ്ക സംഖ്യകൾ *0, 1* (ന്യൂമേൻ തന്റെ മരണ കിടക്കയിൽ *0* യും *1* ും ലോകത്തിനെ ഭരിക്കാൻ പോകുന്നു എന്നു പറഞ്ഞു.) എന്നിവ ഉപയോഗിക്കാമെന്നും 1930 ൽ ഗവേഷകർ പുനരവലോകനം നടത്തി. ഇന്ന് ഡിജിറ്റൽ കമ്പ്യൂട്ടറുകളും വൈദ്യുത സർക്യൂട്ടറുകളും രൂപകൽപ്പന ചെയ്തിരിക്കുന്നത് ഈ ദ്വയാങ്ക അങ്കഗണിതം നടപ്പാക്കുന്നതിനാണ് യുക്തിചിന്ത പഠിക്കുന്നത് ഒരു ഭാഷയായും ഗണിത ശാസ്ത്രത്തിന്റെയും കമ്പ്യൂട്ടർ ശാസ്ത്രത്തിന്റെയും കിഴിവ് സംവിധാനവുമായിട്ടാണ്.

പൊതുവായി സാധുവായ യുക്തി വാദത്തിന്റെ പഠനമാണ് യുക്തിചിന്ത. എന്നാൽ ഗണിത യുകരിചിന്തയെ കൃത്യമായ ഗണിത ശാസ്ത്രപരമായി പ്രതിനിധീകരിക്കാൻ അനുവദിക്കുന്നു. കൂടാതെ ഒരു സംഘം കൃത്യമായ നിയമങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് സാധുവായ അനുമാനങ്ങൾ നടത്താനും ഇത് നമ്മളെ അനുവദിക്കുന്നു. ഇത് കമ്പ്യൂട്ടർ ശാസ്ത്രത്തിനുള്ള ശക്തമായ ഉപകരണമായി കണക്കാക്കപ്പെടുന്നു. കാരണം ഇത് പ്രധാനമായും പ്രോഗ്രാമിന്റെ കൃത്യത പരിശോധിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

12.3.1 പ്രസ്താവനയും അതിന്റെ വാസ്തവിക മൂല്യവും

ഗണിത യുക്തി ചിന്തയുടെ ലഘുവായ ഭാഗമാണ് **ഉപാദ്യമായ യുക്തിചിന്ത** കൂടാതെ ഇത് രൂപം നൽകുന്നതിന് പ്രസ്താവനകൾ അല്ലെങ്കിൽ നിർദ്ദേശങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. കൂടുതലും ആശയവിനിമയത്തിന് നമ്മുടെ ആശയങ്ങൾ നൽകുന്ന ഭാഷയുടെ ഉപയോഗം ആവശ്യമാണ്. അവയെല്ലാം വാക്യ രൂപത്തിലാണ് ഉള്ളത്.

വ്യത്യസ്ത രൂപത്തിലുള്ള വാക്യങ്ങൾ

(1) പ്രഖ്യാപന വാചകം (Assertive type)

(2) അവശ്യവാചകം (A command or a request type)

(3) ആശ്ചര്യകരമായ വാചകം (Emotions, excitement type)

(4) ചോദ്യം ചെയ്യൽ വാചകം (Question type)

(5) തുറന്നതരം വാചകം (Open type)

നിർവചനം 12.7

ഏതെങ്കിലും ഒരു **പ്രഖ്യാപന വാചകത്തിനെ** പ്രസ്താവന അല്ലെങ്കിൽ **നിർദ്ദേശം** എന്നു പറയുന്നു. ഇത് ഒന്നുകിൽ **ശരിയായിരിക്കാം** അല്ലെങ്കിൽ **തെറ്റായിരിക്കും** എന്നാൽ രണ്ടും ഒന്നിച്ചു വരുവാൻ പാടില്ല. ഏതെങ്കിലും ഒരു **ആവശ്യവാചകം**, ആശ്ചര്യകരമായോ, ആജ്ഞയായോ ഇരിക്കാം എന്നാൽ **നിർദ്ദശമായിരിക്കാൻ** പാടില്ല.

ഒരു വാക്യത്തിന്റെ **വാസ്തവിക മൂല്യം** എന്നത് ആ പ്രത്യേക പ്രസ്താവനയുടെ സത്യത്തെയോ, വ്യാജത്തെയോ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഒരു വാസ്തവിക വാക്യത്തിന്റെ വാസ്തവിക മൂല്യം **വാസ്തവികമായിരിക്കും**.

ഇതിനെ T അല്ലെങ്കിൽ 1 എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു ഒരു തെറ്റായ പ്രസ്താവനയുടെ വാസ്തവിക മൂല്യം തെറ്റായിരിക്കും. ഇതിനെ F അല്ലെങ്കിൽ 0 എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

വാക്യത്തിൽ പറഞ്ഞിട്ടില്ലാത്ത ചില വ്യവസ്ഥകൾക്കനുസരിച്ച് സത്യം വ്യത്യാസപ്പെടാവുന്ന ഒരു വാക്യമാണ് **തുറന്ന വാചകം**. ഉദാഹരണത്തിന് (i) $x \times 7 = 35$ എന്ന തുറന്ന വാചകത്തിന്റെ വാസ്തവിക മൂല്യം x ന്റെ മൂല്യത്തെ അനുസരിച്ചിരിക്കും. അതായത് $x = 5$ ആണെങ്കിൽ ശരിയും $x \neq 5$ എങ്കിൽ തെറ്റുമായിരിക്കും (ii) അവനൊരു മോശമായ വ്യക്തിയാണ്. ഇത് ഒരു തുറന്ന വാചകമാണ്. അഭിപ്രായം ഓരോ വ്യക്തിക്കും മാറുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 237 15-02-2023 15:31:07

ഉദാഹരണം 12.11

ശരിയായ പ്രസ്താവനകളെ തിരിച്ചറിയുക.

നിർദ്ധാരണം:

(1) ലോകത്തിലെ ഏറ്റവും ഉയരം കൂടിയ പർവ്വതം മൗണ്ട് എവറസ്റ്റ് ആണ്.

(2) $3+4=8$.

(3) $7+5>10$.

(4) എനിക്ക് ആ പുസ്തകം തരൂ.

(5) $(10-x)=7$.

(6) ആ പുഷ്പം എന്തു മനോഹരം!

(7) നിങ്ങൾ എവിടെ പോകുന്നു?

(8) നിങ്ങൾക്കെല്ലാം വിജയം നേരുന്നു.

(9) ഇതാണ് അവസാനത്തിന്റെ ആരംഭം.

(1) ും (3) ും വാചകത്തിന്റെ വാസ്തവിക മൂല്യം T അതേ സമയം (2) ന്റെത് F ആണ്. അതുകൊണ്ട് അതെല്ലാം പ്രസ്താവനകളാണ്. $x=3$ ആകുമ്പോൾ വാചകം (5)ശരിയാകുന്നു. $x\neq 3$ ആകുമ്പോൾ തെറ്റുമാകുന്നു. അതിനാൽ ഇത് ശരിയോ തെറ്റോ ആകുന്നു എന്നാൽ ഒരേ സമയത്ത് രണ്ടും ഒന്നിച്ചു വരുന്നില്ല. അതുകൊണ്ട് ഇതൊരു പ്രസ്താവനയാണ്.

വാക്യങ്ങൾ (4), (6), (7), (8) എന്നിവ പ്രസ്താവനകളല്ല. കാരണം (4) ഒരു അജ്ഞയാണ്, (6) ഒരു ആശ്ചര്യം ആണ് (7) ഒരു ചോദ്യമാണ് (8) ഈ വാക്യം ഒരാളുടെ ആശംസയാണ് (9) ഒരു വിരോധാഭാസം ആണ്.

12.3.2 സംയുക്ത പ്രസ്താവനകൾ, യുക്തിപരമായ യോജിപ്പുകൾ, വാസ്തവിക പട്ടിക

നിർവചനം 12.8: (ലഘുവും സംയുക്തവും ആയ പ്രസ്താവനകൾ)

ഒരു വാചകത്തിന്റെ രണ്ടോ അതിൽ കൂടുതലോ പ്രസ്താവനകളായി വിഭജിക്കാൻ സാധിക്കില്ല എങ്കിൽ അതിനെ **അണുപ്രസ്താവന** അല്ലെങ്കിൽ **ലഘു പ്രസ്താവന** എന്നു പറയുന്നു. രണ്ടോ അതിൽ കൂടുതലോ ലഘു പ്രസ്താവനകളെ സംയോജിപ്പിക്കുന്ന പ്രസ്താവനകളെ **സംയുക്ത പ്രസ്താവന** അല്ലെങ്കിൽ **തൻമാത്രാ പ്രസ്താവന** എന്നു പറയുന്നു. അതിനാൽ ഏതൊരു പ്രസ്താവനയും ഒന്നുകിൽ ലഘു പ്രസ്താവന അല്ലെങ്കിൽ സംയുക്ത പ്രസ്താവന ആയിരിക്കുമെന്നതു വ്യക്തമാണ്.

ലഘുപ്രസ്താവനകൾക്ക് ഉദാഹരണം

ഉദാഹരണം 12.11 ലെ (1), (2), (3) എന്നീ പ്രസ്താവനകൾ ലഘു പ്രസ്താവനകളാണ്.

സംയുക്ത പ്രസ്താവനകൾക്ക് ഉദാഹരണം

"1 ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യയല്ല കൂടാതെ ഊട്ടി കേരളത്തിലാണ് "

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള പ്രസ്താവന യഥാർത്ഥത്തിൽ രണ്ടു ലഘു പ്രസ്താവനകളുടെ സംയോഗമാണ്:

p : 1 ഒരു അഭാജ്യ സംഖ്യയല്ല.

q : ഊട്ടി കേരളത്തിലാണ്.

അതിനാൽ തന്നിട്ടുള്ള പ്രസ്താവന ഒരു ലഘു പ്രസ്താവന അല്ല. ഇതൊരു സംയുക്ത പ്രസ്താവനയാണ്.

മുകളിൽ ഉള്ള ചർച്ചകളിൽ നിന്ന് ഏത് ലഘു പ്രസ്താവനയും T അല്ലെങ്കിൽ F മൂല്യം എടുക്കുന്നു. അതിനാൽ ഇതിനെ ഒരു ചരം ആയി കണക്കാക്കാം. ഈ ചരത്തിന്റെ **പ്രസ്താവന ചരം** അല്ലെങ്കിൽ **ഉപാദ്യമായ ചരം** സാധാരണയായി ഉപാദ്യമായ ചരത്തിനെ $p, q, r, \ldots$ എന്നിങ്ങനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു

നിർവചനം 12.9 : (യുക്തിപരമായ യോജിപ്പുകൾ)

രണ്ടോ അതിലധികമോ ലളിതമായ വാക്യങ്ങൾ ബന്ധിപ്പിക്കുന്നതിന് നമ്മൾ വാക്കുകൾ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു കൂട്ടം പദങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. കൂടാതെ അല്ലെങ്കിൽ എങ്കിൽ മാത്രമേ കൂടാതെ ഇല്ല എന്നിങ്ങനെയാണ് ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന ഈ പദങ്ങളെ **യുക്തിപരമായ യോജിപ്പുകൾ** എന്നു പറയുന്നു.

ലഘു പ്രസ്താവനകളിൽ നിന്ന് ഒരു സംയുക്ത പ്രസ്താവന നിർമ്മിക്കുന്നതിന് ചില യോജിപ്പുകൾ ഉപയോഗിക്കേണ്ടി വരുന്നു. **നിഷേധം അല്ല സംയോജനം (ഒപ്പം) വിച്ഛേദിക്കൽ** എന്നിവയാണ് ചില അടിസ്ഥാന യുക്തിപരമായ യോജിപ്പുകൾ.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 238 15-02-2023 15:31:08

നിർവചനം 12.10

ചില **യുക്തിപരമായ യോജിപ്പുകൾ** ബന്ധിപ്പിച്ച ഒന്നോ അതിലധികമോ പ്രസ്താവനകൾ ഉൾപ്പെടുന്ന ഒരു പദപ്രയോഗമാണ് പ്രസ്താവന സൂത്രവാക്യം.

നിർവചനം 12.11: (വാസ്തവിക പട്ടിക)

ലഘു പ്രസ്താവനകളുടെ വാസ്തവിക മൂല്യങ്ങളുടെയും സംയുക്ത പ്രസ്താവനകളുടെ വാസ്തവിക മൂല്യങ്ങളുടെയും തമ്മിലുള്ള ബന്ധം കാണിക്കുന്ന പട്ടികയെ **വാസ്തവിക പട്ടിക** എന്നു പറയുന്നു.

നിർവചനം 12.12

(i) p ഒരു ലഘുപ്രസ്താവന എന്നിരിക്കട്ടെ. p യുടെ **നിരസിക്കലായ** പ്രസ്താവനയുടെ വാസ്തവിക മൂല്യം p യുടെ വിപരീതമായിരിക്കും. ഇതിനെ $\neg p$ എന്നു കുറിക്കുന്നു **(not p)** p അല്ല എന്നു വായിക്കുന്നു p , F ആയിരുന്നാൽ $\neg p$ യുടെ വാസ്തവിക മൂല്യം T ആണ്.

(ii) p കൂടാതെ q എന്നത് രണ്ട് ലഘു പ്രസ്താവനകൾ എന്നിരിക്കട്ടെ p , q എന്നിവയെ **and** എന്ന വാക്കിനാൽ ബന്ധിപ്പിക്കുന്നതു വഴി p , q എന്നിവയുടെ **സംയോജനം** ലഭിക്കും. അതിനെ $p \wedge q$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു. p സംയോജനം q ' or ' p hat q എന്നു വായിക്കും $p \wedge q$ ന്റെ വാസ്തവിക മൂല്യം T ആണ്, p , q എന്നിവ രണ്ടും T ആകുന്നു. അല്ലെങ്കിൽ F ആണ്.

(iii) p , q എന്നിവ അല്ലെങ്കിൽ എന്ന വാക്ക് ഉപയോഗിച്ച് ബന്ധിപ്പിക്കുന്നതിലൂടെ ലഭിച്ച സംയുക്ത പ്രസ്താവനയാണ് p , q എന്നീ രണ്ടു ലളിതമായ പ്രസ്താവനകളുടെ **വിച്ഛേദനം** ഇതിനെ $p \vee q$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇതിനെ p വിച്ഛേദിക്കൽ q അല്ലെങ്കിൽ p cup q എന്നു വായിക്കുന്നു. $p \vee q$ ന്റെ വാസ്തവിക മൂല്യം F ആണ്. p , q എന്നിവ രണ്ടും F . ആകുന്നു. അല്ലെങ്കിൽ T ആണ്.

യുക്തിപരമായ യോജിപ്പിക്കലും അവയുടെ വാസ്തവിക പട്ടികയും

(1) NOT [$\neg$] എന്നതിനായുള്ള വാസ്തവിക പട്ടിക (നിരസിക്കൽ)

$\neg p$ യുടെ വാസ്തവിക പട്ടിക

p	$\neg p$
T	F
F	T

പട്ടിക 12.4

(2) AND [$\wedge$] (സംയോജനത്തിന്റെ വാസ്തവിക പട്ടിക)

$p \wedge q$ ന്റെ വാസ്തവിക പട്ടിക

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

പട്ടിക 12.5

(3) OR [$\vee$] (വിച്ഛേദിക്കലിന്റെ വാസ്തവിക പട്ടിക)

$p \vee q$ ന്റെ വാസ്തവിക പട്ടിക

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

പട്ടിക 12.6

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 239 15-02-2023 15:31:11

ഉദാഹരണം 12.12

$\neg p$, $p \wedge q$ കൂടാതെ $q \vee \neg p$, ഇവിടെ p എന്നത് ഇത് തണുപ്പാണ് q എന്നത് മഴ പെയ്യുന്നു. എന്നാണ് ഇതുമായി ബന്ധപ്പെട്ട വാക്കുകളിൽ പ്രസ്താവന എഴുതുക.

നിർദ്ധാരണം

(1) $\neg p$: ഇത് തണുപ്പല്ല.

(2) $p \wedge q$: ഇത് തണുപ്പും മഴയുമാണ്.

(3) $p \vee q$: ഇത് തണുപ്പ് അല്ലെങ്കിൽ മഴയുമാണ്.

(4) $q \vee \neg p$: ഇത് മഴയാണ് അല്ലെങ്കിൽ ഇത് തണുപ്പല്ല

$\neg p$ എന്ന പ്രസ്താവന സൂത്രവാക്യത്തിൽ ഒരേ ഒരു ചരം p മാത്രം ഉള്ളതായി കാണാം. കൂടാതെ അതിന്റെ വാസ്തവിക പട്ടികയിൽ $2 = \left(2^1\right)$ വരികൾ ഉണ്ട് $p \wedge q$, $p \vee q$ എന്നീ പ്രസ്താവന സൂത്രവാക്യത്തിൽ p, q എന്നീ രണ്ടു ചരങ്ങളെ കൊണ്ടുള്ളതാണ്. അതിനാൽ അവയ്ക്കുള്ള വാസ്തവിക പട്ടികയിൽ $4 = \left(2^2\right)$ വരികൾ ഉണ്ട്. പൊതുവായി n ചരങ്ങളുള്ള പ്രസ്താവന സൂത്രവാക്യത്തിന്റെ വാസ്തവിക പട്ടീകയിൽ 2^n വരികളെ കൊണ്ടിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 12.13

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പ്രസ്താവന സൂത്രവാക്യത്തിൽ എത്ര വരികൾ ആവശ്യമായി വരും?

(i) $p \vee \neg t \wedge \left(p \vee \neg s\right)$ (ii) $\left(\left(p \wedge q\right) \vee \left(\neg r \vee \neg s\right)\right) \wedge \left(\neg t \wedge v\right)$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\left(p \vee \neg t\right) \wedge \left(p \vee \neg s\right)$ ൽ p, s കൂടാതെ t എന്നീ 3 ചരങ്ങൾ ഉണ്ട്. അതിനാൽ അതിനോടനുബന്ധിച്ച വാസ്തവിക പട്ടികയിൽ $2^3 = 8$ വരികളുണ്ട്.

(ii) $\left(\left(p \wedge q\right) \vee \left(\neg r \vee \neg s\right)\right) \wedge \left(\neg t \wedge v\right)$ ൽ p, q, r, s, t കൂടാതെ v, എന്നീ 6 ചരങ്ങളുണ്ട്. അതിനാൽ അതിനോടനുബന്ധിച്ച വാസ്തവിക പട്ടികയിൽ $2^6 = 64$ വരികളുണ്ട്.

സോപാധിക പ്രസ്താവന

നിർവചനം 12.13

p, q എന്നീ രണ്ടു പ്രസ്താവനകളുടെ സോപാധിക പ്രസ്താവനയാണ്. പ്രസ്താവന "p എങ്കിൽ തുടർന്ന് q" കൂടാതെ ഇതിന്റെ $p \to q$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇവിടെ p നെ **പരികല്പന** അല്ലെങ്കിൽ **മുൻഗാമിയായ** എന്നും q നെ **ഉപസംഹാരം** അല്ലെങ്കിൽ **അനന്തരഫലങ്ങൾ** എന്നും പറയുന്നു p ശരിയും q തെറ്റുമായി രുന്നെങ്കിൽ മാത്രം $p \to q$ തെറ്റായിരിക്കും. അല്ലെങ്കിൽ അത് ശരിയായിരിക്കും.

$p \to q$ ന്റെ വാസ്തവിക പട്ടിക

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

പട്ടിക 12.7

ഉദാഹരണം 12.14

$p \to q$ ഇന്ന് തിങ്കളാഴ്ച ആണെങ്കിൽ: എങ്കിൽ 4 + 4 = 8.

ഇവിടെ p, q എന്നീ സംയുക്ത പ്രസ്താവനകൾ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു,

p: ഇന്ന് തിങ്കളാഴ്ചയാണ്; q: 4 + 4 = 8.

$p \to q$ ന്റെ വാസ്തവിക മൂല്യം T ആണ് കാരണം q ന്റെ ഉപസംഹാരം T ആണ്.

ഒരു പ്രധാന കാര്യം എന്താണെന്നാൽ p, q എന്നീ പ്രസ്താവനകളുടെ അർത്ഥം മനസ്സിലാക്കി $p \to q$ നെ കണക്കാക്കാൻ പാടില്ല. കൂടാതെ p യ്ക്കു q മായി ബന്ധനമുണ്ടായിരിക്കണമെന്നു ആവശ്യമില്ല.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 240 15-02-2023 15:31:15

അനന്തരഫലങ്ങൾ

$p \to q$ എന്ന സോപാധിക പ്രസ്താവനയിൽ മൂന്നോ അതിൽ കൂടുതലോ സോപാധിക ഉരുവാകുന്നു. അവ താഴെ തന്നിട്ടുണ്ട്.

(i) എതിരായ പ്രസ്താവന $q \to p$.

(ii) പ്രതിലോമ പ്രസ്താവന $\neg p \to \neg q$.

(iii) നിശ്ചിത എതിർ പ്രസ്താവന $\neg q \to \neg p$.

ഉദാഹരണം 12.15

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള p , q എന്നീ പ്രസ്താവനകൾക്ക് (i) സോപാധിക പ്രസ്താവന (ii) എതിരായ പ്രസ്താവന (iii) പ്രതിലോമ പ്രസ്താവന കൂടാതെ (iv) നിരശ്ചിത എതിർ പ്രസ്താവന എഴുതുക.

p : അഭാജ്യ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം അനന്തമാണ് q: ഊട്ടി കേരളത്തിലാണ്.

നിർദ്ധാരണം

p , q എന്നിവയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട നാല് തരം സോപാധിക പ്രസ്താവനകൾ യഥാക്രമം താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

(i) $p \to q$: (സോപാധിക പ്രസ്താവന) അഭാജ്യ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം അനന്തമാണെങ്കിൽ ഊട്ടി കേരളത്തിലാണ്.

(ii) $q \to p$: (എതിരായ പ്രസ്താവന) ഊട്ടി കേരളത്തിലാണെങ്കിൽ അഭാജ്യ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം അനന്തമാണ്

(iii) $\neg p \to \neg q$ (പ്രതിലോ പ്രസ്താവന) അഭാജ്യ സംഖ്യകളുടെ എണ്ണം അനന്തമല്ലിൽ ഊട്ടി കേരളത്തിൽ അല്ല.

(iv) $\neg q \to \neg p$ (നിശ്ചിത എതിർ പ്രസ്താവന) ഊട്ടി കേരളത്തിലില്ലെങ്കിൽ അഭാജ്യസംഖ്യകളുടെ എണ്ണം അനന്തമല്ല.

ദ്വിസോപാധിക പ്രസ്താവന

നിർവചനം 12.14

p , q എന്നീ രണ്ടു പ്രസ്താവനകളുടെ **ദ്വിസോപാധിക** പ്രസ്താവനയാണ്, പ്രസ്താവന p എങ്കിൽ q ആണെങ്കിൽ മാത്രം കൂടാതെ ഇതിനെ $p \leftrightarrow q$ എന്ന് സൂചിപ്പിച്ചിരുന്നു. p , q എന്നിവയ്ക്ക് ഒരേ വാസ്തവിക മൂല്യങ്ങളാണെങ്കിൽ ഇതിന്റെ വാസ്തവിക മൂല്യം T ആണ്. അല്ലെങ്കിൽ അത് തെറ്റാണ്.

$p \leftrightarrow q$ ന്റെ വാസ്തവിക പട്ടിക

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

പട്ടിക 12.8

നിഷേധകമായ OR (EOR)[$\bar{\vee}$]

നിർവചനം 12.15

p , q എന്നിവ രണ്ട് പ്രസ്താവനകളാണെന്നിരിക്കട്ടെ തുടർന്ന് p **EOR** q എന്നത് ഒരു സംയുക്ത പ്രസ്താവനയാണെങ്കിൽ അതിന്റെ വാസ്തവിക മൂല്യം തീരുമാനിക്കുന്നത് ഒന്നുകിൽ p അല്ലെങ്കിൽ q പക്ഷെ രണ്ടുമല്ല. ഇതിനെ $p \,\bar{\vee}\, q$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. $p \,\bar{\vee}\, q$ ന്റെ വാസ്തവിക മൂല്യം T എപ്പോഴെങ്കിലും ഒന്നുകിൽ p അല്ലെങ്കിൽ q ആയിരിക്കും. അല്ലെങ്കിൽ അത് F ആയിരിക്കും. $p \,\bar{\vee}\, q$ ന്റെ വാസ്തവിക പട്ടിക താഴെ തന്നിട്ടുണ്ട്.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 241 15-02-2023 15:31:18

$p \bar{\vee} q$ ന്റെ വാസ്തവിക പട്ടിക

p	q	$p \bar{\vee} q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

പട്ടിക 12.9

ഉദാഹരണം 12.16

$(p \bar{\vee} q) \wedge (p \bar{\vee} \neg q)$ ന്റെ വാസ്തവിക പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക.

p	q	$\neg q$	r : $(p \bar{\vee} q)$	s: $(p \bar{\vee} \neg q)$	$r \wedge s$
T	T	F	F	T	F
T	F	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	T	F	T	F

പട്ടിക 12.10

വാസ്തവിക പട്ടിക ഉപയോഗിക്കാതെയും മുകളിൽ തന്നിട്ടുള്ള ഉത്തരം തെളിയിക്കാൻ സാധിക്കും. യുക്തിപര മായ തുല്യത പഠിച്ചതിനു ശേഷം ഈ തെളിവ് നൽകും.

12.3.3 പുനരുക്തി, വൈരുദ്ധ്യം, ആകസ്മികത

നിർവചനം 12.16

ഘടക പ്രസ്താവനയുടെ വാസ്തവിക മൂല്യങ്ങൾ പരിഗണിക്കാതെ ഒരു പ്രസ്താവന അതിന്റെ വാസ്തവിക മൂല്യം എല്ലായ്പ്പോഴും T ആണെങ്കിൽ അത് **പുനരുക്തി** എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ $\mathbb{T}$ എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ട് എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

നിർവചനം 12.17

ഘടക പ്രസ്താവനകളുടെ വാസ്തവിക മൂല്യങ്ങൾ പരിഗണിക്കാതെ ഒരു പ്രസ്താവന അതിന്റെ വാസ്തവിക മൂല്യം എല്ലായ്പ്പോഴും F ആണെങ്കിൽ അത് ഒരു **വൈരുദ്ധ്യമാണെന്നു** പറയുന്നു. ഇതിനെ $\mathbb{F}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

നിർവചനം 12.18

ഒരു പ്രസ്താവന പുനരുക്തിയോ വൈരുദ്ധ്യമോ അല്ലാതിരുന്നാൽ അതിനെ **ആകസ്മികത** എന്നു പറയുന്നു

നിരീക്ഷണങ്ങൾ

1. ഒരു പുനരുക്തിക്ക് പ്രസ്താവന ഫോർമൂലയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട നിരയിലെ എല്ലാ എൻട്രികളിലും T അടങ്ങിയിരിക്കും.
2. ഒരു വൈരുദ്ധ്യത്തിന് പ്രസ്താവന ഫോർമുലയുമായി ബന്ധപ്പെട്ട നിരയിലെ എല്ലാ എൻട്രികളിലെ F അടങ്ങിയിരിക്കും.
3. പുനരുക്തിയുടെ നിരസിക്കൽ വൈരുദ്ധ്യവും, വൈരുദ്ധ്യത്തിന്റെ നിരസിക്കൽ പുനരുക്തിയുമാണ്.
4. ഒരു പ്രസ്താവനയുടെ വിച്ഛേദിക്കലും അതിന്റെ നിഷേധവും പുനരുക്തിയാണ് കൂടാതെ ഒരു പ്രസ്താവന യുടെ സംയോജനവും അതിന്റെ നിഷേധവും വൈരുദ്ധ്യമാണ്. അതായത് $p \vee \neg p$ **പുനരുക്തിയും** $p \wedge \neg p$ ഒരു **വൈരുദ്ധ്യവുമാണ്**. ചുവടെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതു പോലെ അവയുടെ വാസ്തവിക പട്ടികകൾ നിർമ്മിച്ചു കൊണ്ട് ഇത് എളുപ്പത്തിൽ കാണാൻ കഴിയും.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 242 15-02-2023 15:31:19

പുനരുക്തിയുടെ ഉദാഹരണം

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
T	F	T
F	T	T

പട്ടിക 12.11

$p \vee \neg p$ യുടെ അവസാന നിരയിൽ T മാത്രമേ അടങ്ങിയിട്ടുള്ളൂ $p \vee \neg p$ ഒരു പുനരുക്തിയാണ്.

വൈരുദ്ധ്യത്തിനു ഉദാഹരണം

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	F
F	T	F

പട്ടിക 12.12

അവസാന നിരയിൽ F മാത്രമേ അങ്ങിയിട്ടുള്ളൂ $p \wedge \neg p$ ഒരു വൈരുദ്ധ്യമാണ്.

കുറിപ്പ്

പട്ടിക 12.10 ലെ അവസാന വരികളിലുള്ള എല്ലാ അംഗങ്ങളും F ആണ്. അതുകൊണ്ട് $(p \veebar q) \wedge (p \veebar \neg q)$ ഒരു വൈരുദ്ധ്യമാണ്.

ആകസ്മികതയ്ക്ക് ഉദാഹരണം

p	q	$p \leftrightarrow q$	$\neg q$	$p \rightarrow \neg q$	$\neg(p \rightarrow \neg q)$	$(p \leftrightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow \neg q)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F
F	T	F	F	T	F	F
F	F	T	T	T	F	F

പട്ടിക 12.13

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള വാസ്തവിക പട്ടികയിൽ അവസാനത്തെ നിരയിലുള്ള എല്ലാ അംഗങ്ങളും T യുടെയും F ന്റെയും സംയോഗമാണ്. തന്നിട്ടുള്ള പ്രസ്താവന പുനരുക്തിയുമല്ല വൈരുദ്ധ്യവുമല്ല. ഇത് ഒരു ആകസ്മികതയാണ്.

12.3.4 ദ്വൈതത

നിർവചനം 12.19

ഒരു പ്രസ്താവന സൂത്രവാക്യത്തിന്റെ ദ്വൈതത $\vee$ നെ $\wedge$ ആയും, $\wedge$ നെ $\vee$ ആയും T നെ F ആയും F നെ T ആയും മാറ്റി സ്ഥാപിക്കുന്നതിലൂടെ ലഭിക്കുക. $\mathbb{T}$ നെ $\mathbb{F}$ ആയും $\mathbb{F}$ നെ $\mathbb{T}$ ആയും മാറ്റി സ്ഥാപിച്ചാൽ **ദ്വൈതത** ലഭിക്കും.

പരാമർശം

(1) ദ്വൈതത കണ്ടുപിടിക്കുമ്പോൾ ചിഹ്നം $\neg$ മാറുന്നില്ല.

(2) ഒരു പ്രസ്താവനയുടെ ദ്വൈതത്തിന്റെ ദ്വൈതത അതു തന്നെയായിരിക്കും.

(3) ഒരു പ്രത്യേക പ്രസ്താവന $\mathbb{T}$ യുടെയും $\mathbb{F}$ ന്റെയും പരസ്പരം ദ്വൈതയായിരിക്കും.

(4) T , F ആയി മാറുന്നു കൂടാതെ തിരിച്ചും സംഭവിക്കുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 243 15-02-2023 15:31:21

ദ്വൈത തത്വം

ഒരു സംയുക്ത പ്രസ്താവന S_1 ൽ $\neg$, $\wedge$ ും $\vee$ ും മാത്രവും കൂടാത S_1 നെ $\wedge$ നെ $\vee$ ആയും, $\vee$ നെ $\wedge$ ആയും മാറ്റി സ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന പ്രസ്താവന S_2 ഉം എങ്കിൽ S_2 ഒരു വൈരുദ്ധ്യം ആയിരിന്നാൽ മാത്രം S_1 ഒരു പുനരുക്തിയാണ്.

ഉദാഹരണമായി

(i) $(p \vee q) \wedge (r \wedge s) \vee \mathbb{F}$ ന്റെ ദ്വൈതത $(p \wedge q) \vee (r \vee s) \wedge \mathbb{T}$ ആണ്.

(ii) $p \wedge [\neg q \vee (p \wedge q) \vee \neg r]$ ന്റെ ദ്വൈതത $p \vee [\neg q \wedge (p \vee q) \wedge \neg r]$ ആണ്.

12.3.5 യുക്തിപരമായ തുല്യത

നിർവചനം 12.20

A, B എന്നീ രണ്ടു സംയുക്ത പ്രസ്താവനകളെ **യുക്താനുസ്യൂത തുല്യത** അല്ലെങ്കിൽ കേവല തുല്യത എന്നു പറയണമെങ്കിൽ വാസ്തവിക പട്ടികയിൽ A യും B യുമായി ബന്ധപ്പെട്ട നിരകൾക്ക് **സമാനമായ വാസ്തവിക മൂല്യങ്ങളുണ്ടായിരിക്കണം**. A, B എന്നീ പ്രസ്താവനകളുടെ യുക്തിപരമായ തുല്യതയെ $A \equiv B$ അല്ലെങ്കിൽ $A \Leftrightarrow B$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

മുകളിൽ കൊടുത്തുള്ള നിർവചനത്തിൽ നിന്നും A, B എന്നിവ യുക്താനുസ്യൂത തുല്യത എങ്കിൽ $A \Leftrightarrow B$ എന്നത് പുനരുക്തിയായിരിക്കും എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

തുല്യതയുടെ ചില നിയമങ്ങൾ

1. വിവേക ശൂന്യമായ നിയമങ്ങൾ

(i) $p \vee p \equiv p$ (ii) $p \wedge p \equiv p$.

തെളിവ്

p	p	$p \vee p$	$p \wedge p$
T	T	T	T
F	F	F	F

പട്ടിക 12.14

മുകളിൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള വാസ്തവിക പട്ടികയിൽ p, $p \vee p$ കൂടാതെ $p \wedge p$ എന്നിവയ്ക്ക് ഒരേ വാസ്തവിക മൂല്യങ്ങളാണുള്ളത്. അതിനാൽ $p \vee p \equiv p$ യും $p \wedge p \equiv p$ യും ആണ്.

2. ക്രമവിനിമേയ നിയമങ്ങൾ

(i) $p \vee q \equiv q \vee p$ (ii) $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

തെളിവ് (i)

p	q	$p \vee q$	$q \vee p$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

പട്ടിക 12.15

$p \vee q$ ആയും $q \vee p$ യുമായി ബന്ധപ്പെട്ട നിരകൾ സമാനമാണ് ആയതിനാൽ $p \vee q \equiv q \vee p$.

ഇതുപോലെ (ii) $p \wedge q \equiv q \wedge p$ നെ തെളിയിക്കുക.

3. സംയോജന നിയമങ്ങൾ

(i) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ (ii) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 244 15-02-2023 15:31:26

തെളിവ്

സംയോജന നിയമം തെളിയിക്കുന്നതിനു ആവശ്യമായ വാസ്തവിക പട്ടിക താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു.

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	F	T	T	T
F	F	F	F	F	F	F

പട്ടിക 12.16

$(p \vee q) \vee r$, $p \vee (q \vee r)$ നോടനുബന്ധിച്ച നിരകൾ സമാനമാണ്.

ആയതിനാൽ $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$.

അതുപോലെ, (ii) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ നെ തെളിയിക്കാം.

4. വിതരണ നിയമങ്ങൾ

(i) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (ii) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

തെളിവ് (i)

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	F
F	F	F	F	F	F	F	F

പട്ടിക 12.17

$p \vee (q \wedge r)$, $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ നോട് അനുബന്ധിച്ച നിരകൾ സമാനമാണ്. ആയതിനാൽ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$.

അതുപോലെ (ii) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ എന്ന് തെളിയിക്കാം.

5. അനന്യത നിയമം

(i) $p \vee \mathbb{T} \equiv \mathbb{T}$ യും $p \vee \mathbb{F} \equiv p$ (ii) $p \wedge \mathbb{T} \equiv p$ യും $p \wedge \mathbb{F} \equiv \mathbb{F}$

p	$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$p \vee \mathbb{T}$	$p \vee \mathbb{F}$
T	T	F	T	T
F	T	F	T	F

പട്ടിക 12.18

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 245 15-02-2023 15:31:29

(i) $p \vee \mathbb{T}$, $\mathbb{T}$ നോട് അനുബന്ധിച്ച നിരകളിലെ അംഗങ്ങളെല്ലാം സമാനമാണ് ആയതിനാൽ അവ തുല്യമായതും ആണ് $p \vee \mathbb{F}$, p നോട് അനുബന്ധിച്ച വരികളിലെ അംഗങ്ങളെല്ലാം സമാനമാണ്. അതിനാൽ അവ തുല്യമാണ്.

ദ്വൈതത

(ii) $p \wedge \mathbb{T} \equiv p$ കൂടാതെ $p \wedge \mathbb{F} \equiv \mathbb{F}$ എന്നത് തെളിയിച്ചു.

6. പൂരക നിയമം

(i) $p \vee \neg p \equiv \mathbb{T}$ ഉം $p \wedge \neg p \equiv \mathbb{F}$ (ii) $\neg \mathbb{T} \equiv \mathbb{F}$ ഉം $\neg \mathbb{F} \equiv \mathbb{T}$

തെളിവ്

p	$\neg p$	$\mathbb{T}$	$\neg \mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\neg \mathbb{F}$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
T	F	T	F	F	T	T	F
F	T	T	F	F	T	T	F

പട്ടിക 12.19

(i) $p \vee \neg p$, $\mathbb{T}$ യോട് അനുബന്ധിച്ച നിരകളിലെ അംഗങ്ങളെല്ലാം സമാനമാണ് അതിനാൽ അവ തുല്യവും ആണ്. $p \wedge \neg p$, $\mathbb{F}$ നോട് അനുബന്ധിച്ച നിരകളിലെ അംഗങ്ങളെല്ലാം സമാനമാണ് അതിനാൽ അവ തുല്യമാണ്.

(ii) $\neg \mathbb{T}$, $\mathbb{F}$ നോട് അനുബന്ധിച്ച നിരകളിലെ അംഗങ്ങളെല്ലാം സമാനമാണ് അതിനാൽ അവ തുല്യവും ആണ്. $\neg \mathbb{F}$, $\mathbb{T}$ യോട് അനുബന്ധിച്ച നിരകളിലെ അംഗങ്ങളെല്ലാം സമാനമാണ് അതിനാൽ അവ തുല്യം ആണ്.

7. കടന്നുകയറ്റ നിയമം അല്ലെങ്കിൽ ഇരട്ട നിർദ്ദേശ നിയമം

$\neg(\neg p) \equiv p$

തെളിവ്

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
T	F	T
F	T	F

പട്ടിക 12.20

$\neg(\neg p)$, p യോട് അനുബന്ധിച്ച നിരകളിലെ അംഗങ്ങൾ സമാനമാണ്. അതിനാൽ തുല്യമാണ്.

8. ഡി മോർഗൻ നിയമം

(i) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (ii) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

തെളിവ് (i)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	T
F	T	T	F	F	T	T
F	F	T	T	F	T	T

പട്ടിക 12.21

$\neg(p \wedge q)$, $\neg p \vee \neg q$ നോട് അനുബന്ധിച്ച നിരകളിലെ അംഗങ്ങൾ സമാനമാണ് അതിനാൽ തുല്യവും ആണ്. അതുകൊണ്ട് $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ അതുപോലെ (ii) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ നെ തെളിയിക്കാം.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 246 15-02-2023 15:31:32

9. ആഗിരണ നിയമം

(i) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (ii) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \vee (p \wedge q)$	$p \wedge (p \vee q)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	F	F

പട്ടിക 12.22

(i) $p \vee (p \wedge q)$, p നോട് അനുബന്ധിച്ച നിരകളിലെ അംഗങ്ങളെല്ലാം സമാനമാണ് അതിനാൽ തുല്യവുമാണ്.

(ii) $p \wedge (p \vee q)$, p നോട് അനുബന്ധിച്ച നിരകളിലെ അംഗങ്ങളെല്ലാം സമാനമാണ് അതിനാൽ തുല്യവുമാണ്.

ഉദാഹരണം 12.17

തുല്യത നിയമം സ്ഥാപിക്കുക: $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

നിർദ്ധാരണം

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

പട്ടിക 12.23

$p \rightarrow q$, $\neg p \vee q$ എന്നിവയോട് അനുബന്ധിച്ച നിരകളിലെ അംഗങ്ങളെല്ലാം സമാനമാണ്. അതിനാൽ തുല്യവുമാണ്.

ഉദാഹരണം 12.18

ദ്വിസോപാധികയെ സോപാധികവുമായി ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന തുല്യതാ ഗുണം സ്ഥാപിക്കുക:

$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

നിർദ്ധാരണം

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T

പട്ടിക 12.24

$p \leftrightarrow q$ കൂടാതെ $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ എന്നിവയോട് അനുബന്ധിച്ച നിരകളിലെ അംഗങ്ങളെല്ലാം സമാനമാണ് അതിനാൽ തുല്യവുമാണ്.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 247 15-02-2023 15:31:35

ഉദാഹരണം 12.19

തുല്യത ഗുണം ഉപയോഗിച്ച് $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ എന്നത് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

12.15 കൂടാതെ 12.16 എന്നീ ഉദാഹരണങ്ങള ഉപയോഗിച്ച് ഇത് ലഭിക്കും

$$p \leftrightarrow q \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \quad \ldots (1)$$

$$\equiv (\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \text{ (ക്രിമവിനിമേയ നിയമം ഉപയോഗിച്ച്)} \quad \ldots (2)$$

$$\equiv (\neg p \wedge (p \vee \neg q)) \vee (q \wedge (p \vee \neg q)) \text{ (വിതരണ നിയമം ഉപയോഗിച്ച്)}$$

$$\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \vee (q \wedge \neg q) \text{ (വിതരണ നിയമം ഉപയോഗിച്ച്)}$$

$$\equiv \mathbb{F} \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \vee \mathbb{F}; \text{ (പൂരകഗുണം ഉപയോഗിച്ച്)}$$

$$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p); \text{ (അനന്യത ഗുണം ഉപയോഗിച്ച്)}$$

$$\equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q); \text{ (ക്രമവിനിമേയ നിയമം ഉപയോഗിച്ച്)}$$

അവസാനം (1) $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ ആയിത്തീരുന്നു.

അഭ്യാസം 12.2

1. p : വ്യാഴം ഒരു ഗ്രഹമാണ് കൂടാതെ q : ഇന്ത്യ ഒരു ദ്വീപാണ്. എന്നിവ രണ്ടുലഘുപ്രസ്താവനകൾ എന്നിരിക്കട്ടെ. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പ്രസ്താവനകളെ വിവരിക്കുന്ന വാക്കാലുള്ള വാചകം നൽകുക.
   (i) $\neg p$ (ii) $p \wedge \neg q$ (iii) $\neg p \vee q$ (iv) $p \rightarrow \neg q$ (v) $p \leftrightarrow q$

2. p , q എന്നീ പ്രസ്താവന ചരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഓരോ വാക്യങ്ങളെയും പ്രതികാത്മക രൂപത്തിൽ എഴുതുക.
   (i) 19 ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യയല്ല കൂടാതെ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ കോണുകളും തുല്യമായിരിക്കും.
   (ii) 19 ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യയാണ് കൂടാതെ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ കോണുകളും തുല്യമല്ല.
   (iii) 19 ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യയാണ് കൂടാതെ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ എല്ലാ കോണുകളും രുല്യമാണ്.
   (iv) 19 ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യയല്ല.

3. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പ്രസ്താവനകളുടെ വാസ്തവിക മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക
   (i) $6+2=5$ എങ്കിൽ, തുടർന്ന് പാല് വെള്ളയാണ്.
   (ii) ചൈന യൂറോപ്പിലാണ് അല്ലെങ്കിൽ $\sqrt{3}$ ഒരു പൂർണ്ണാങ്കമാണ്
   (iii) $5+5=9$ എന്നത് ശരിയല്ല അല്ലെങ്കിൽ ഭൂമി ഒരു ഗ്രഹമാണ്
   (iv) 11 ഒരു അഭാജ്യസംഖ്യയാണ് കൂടാതെ ദീർഘചതുരത്തിന്റെ എല്ലാ വശങ്ങളും തുല്യമാണ്.

4. താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന വാക്യങ്ങളിൽ ഏതാണ് നിർദ്ദേശം?
   (i) $4+7=12$ (ii) നിങ്ങൾ എന്തു ചെയ്യുന്നു? (iii) $3^n \leq 81, n \in \mathbb{N}$
   (iv) നമ്മുടെ ദേശീയ പക്ഷി മയിലാണ് (v) ഈ പർവ്വതം എത്ര ഉയരമാണ്!

5. താഴെ പറയുന്ന ഓരോ സൂചനകളുടെയും എതിർ, പ്രതിലോമ, നിശ്ചിത എതിർ പ്രസ്താവനകൾ എഴുതുക.
   (i) x , y എന്നിവ $x = y$, പോലുള്ള അക്കങ്ങളാണെങ്കിൽ $x^2 = y^2$
   (ii) ഒരു ചതുർഭുജം ഒരു ചതുരമാണെങ്കിൽ അത് ഒരു ദീർഘചതുരമാണ്

6. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പ്രസ്താവനകൾക്ക് വാസ്തവിക പട്ടിക തയ്യാറാക്കുക.
   (i) $\neg p \wedge \neg q$ (ii) $\neg(p \wedge \neg q)$ (iii) $(p \vee q) \vee \neg q$ (iv) $(\neg p \rightarrow r) \wedge (p \leftrightarrow q)$

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 248 15-02-2023 15:31:41

7. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സംയുക്ത പ്രസ്താവനകളെ പുനരുക്തി അല്ലെങ്കിൽ വൈരുദ്ധ്യം അല്ലെങ്കിൽ ആകസ്മികത ആണോ എന്ന് തെളിയിക്കുക

(i) $(p \wedge q) \wedge \neg(p \vee q)$ (ii) $\big((p \vee q) \wedge \neg p\big) \rightarrow q$

(iii) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \rightarrow q)$ (iv) $\big((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)\big) \rightarrow (p \rightarrow r)$

8. (i) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (ii) $\neg(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$ എന്നിവ തെളിയിക്കുക.

9. $q \rightarrow p \equiv \neg p \rightarrow \neg q$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

10. $p \rightarrow q$, $q \rightarrow p$ തെളിയിക്കുക

11. $\neg(p \leftrightarrow q) \equiv p \leftrightarrow \neg q$ തെളിയിക്കുക

12. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ എന്ന പ്രസ്താവന ഒരു പുനരുക്തി അല്ലെങ്കിൽ ഒരു വൈരുദ്ധ്യം ആണോ എന്ന് വാസ്തവിക പട്ടിക ഉപയോഗിക്കാതെ പരിശോധിക്കുക.

13. $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)$ കൂടാതെ $\neg p$ എന്നിവ യുക്തിപരമായ തുല്യതയാണോ എന്ന് വാസ്തവിക പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച് പരിശോധിക്കുക.

14. $p \rightarrow \big(q \rightarrow r\big) \equiv (p \wedge q) \rightarrow r$ എന്നത് വാസ്തവിക പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കുക.

15. വാസ്തവിക പട്ടിക ഉപയോഗിച്ച് $p \rightarrow (\neg q \vee r) \equiv \neg p \vee (\neg q \vee r)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

AXZN2

അഭ്യാസം 12.3

തന്നിരിക്കുന്ന നാല് ഇതര മാർഗ്ഗങ്ങളിൽ നിന്ന് ശരിയായ അല്ലെങ്കിൽ ഏറ്റവും അനുയോജ്യമായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക.

1. ഗണം S ലെ ഒരു ദ്വയാങ്കക്രിയ ഒരു ഫലനമാണെങ്കിൽ

(1) $S \rightarrow S$ (2) $\big(S \times S\big) \rightarrow S$ (3) $S \rightarrow \big(S \times S\big)$ (4) $\big(S \times S\big) \rightarrow \big(S \times S\big)$

2. _____ ൽ വ്യവകലനം ഒരു ദ്വയാങ്കക്രിയ അല്ല

(1) $\mathbb{R}$ (2) $\mathbb{Z}$ (3) $\mathbb{N}$ (4) $\mathbb{Q}$

3. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ ഏതാണ് $\mathbb{N}$ ൽ ദ്വയാങ്കക്രിയ ആയിട്ടുള്ളത്?

(1) വ്യവകലനം (2) ഗുണനം (3) ഹരണം (4) മുകളിലെ എല്ലാം

4. വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ ഗണം $\mathbb{R}$ ൽ '$*$' നെ താഴെ പറയുന്ന രീതിയിൽ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ ഏതാണ് $\mathbb{R}$ ൽ ദ്വയാങ്കക്രിയ അല്ലാത്തത്?

(1) $a * b = \min(a \cdot b)$ (2) $a * b = \max(a, b)$

(3) $a * b = a$ (4) $a * b = a^b$

5. $*$ എന്ന ക്രിയ $a * b = \dfrac{ab}{7}$ എന്നു നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നെങ്കിൽ _____ ൽ ദ്വയാങ്കക്രിയ അല്ല.

(1) $\mathbb{Q}^+$ (2) $\mathbb{Z}$ (3) $\mathbb{R}$ (4) $\mathbb{C}$

6. ഗണം $\mathbb{Q}$ ൽ $a \odot b = a + b + ab$ എന്ന് നിർവചിച്ചിരിക്കുന്നു. y യുടെ ഏത് മൂല്യത്തിനാണ്, $3 \odot \big(y \odot 5\big) = 7$ ആകുന്നത്?

(1) $y = \dfrac{2}{3}$ (2) $y = \dfrac{-2}{3}$ (3) $y = \dfrac{-3}{2}$ (4) $y = 4$

7. വാസ്തവിക സംഖ്യയിൽ $a * b = \sqrt{a^2 + b^2}$ ആണെങ്കിൽ $*$ എന്നത്

(1) ക്രമവിനിമേയ എന്നാൽ സംയോജനമല്ല (2) സംയോജനം എന്നാൽ ക്രമവിനിമേയം അല്ല

(3) ക്രമവിനിമേയവും സംയോജനവും ആണ് (4) ക്രമവിനിമേയവുമല്ല സംയോജനവുമല്ല

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 249 15-02-2023 15:31:47

8. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ ഏത് പ്രസ്താവനയ്ക്കാണ് വാസ്തവിക പട്ടിക T ഉള്ളത് ?

(1) ഒരു ഇരട്ടഫലനമാണ് $\sin x$.

(2) ഓരോ ചതുര മാട്രിക്സും ഏകവചനമാണ്

(3) സങ്കീർണ്ണ സംഖ്യയുടെയും അതിന്റെ സംയോജനത്തിന്റെയും ഗുണനം

(4) $\sqrt{5}$ തികച്ചും സാങ്കല്പികമാണ്

9. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ ഏതിനാണ് വാസ്തവിക പട്ടിക F ഉള്ളത്?

(1) ചെന്നൈ ഇന്ത്യയിലാണ് അല്ലെങ്കിൽ $\sqrt{2}$ ഒരു പൂർണ്ണാങ്കം ആണ്

(2) ചെന്നൈ ഇന്ത്യയിലാണ് അല്ലെങ്കിൽ $\sqrt{2}$ ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യയാണ്

(3) ചെന്നൈ ചൈനയിലാണ് അല്ലെങ്കിൽ $\sqrt{2}$ ഒരു പൂർണ്ണാങ്കമാണ്

(4) ചെന്നൈ ചൈനയിലാണ് അല്ലെങ്കിൽ $\sqrt{2}$ ഒരു അപരിമേയ സംഖ്യയാണ്

10. ഒരു സംയുക്ത പ്രസ്താവനയിൽ 3 ലഘുപ്രസ്താവനകൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ അതിന്റെ വാസ്തവിക പട്ടികയിൽ വരികളുടെ എണ്ണം

(1) 9 (2) 8 (3) 6 (4) 3

11. $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$ എന്ന പ്രസ്താവനയുടെ പ്രതിലോമ പ്രസ്താവന?

(1) $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ (2) $\neg(p \vee q) \rightarrow (p \wedge q)$

(3) $(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ (4) $(\neg p \wedge \neg q) \rightarrow (\neg p \vee \neg q)$

12. $(p \vee q) \rightarrow r$ എന്ന പ്രസ്താവനയുടെ നിശ്ചിത എതിർ പ്രസ്താവന?

(1) $\neg r \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ (2) $\neg r \rightarrow (p \vee q)$

(3) $r \rightarrow (p \wedge q)$ (4) $p \rightarrow (q \vee r)$

13. $(p \wedge q) \vee \neg q$ ന്റെ വാസ്തവിക പട്ടിക താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു

p	q	$(p \wedge q) \vee (\neg q)$
T	T	(a)
T	F	(b)
F	T	(c)
F	F	(d)

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ ഏതാണ് ശരി?

	(a)	(b)	(c)	(d)
(1)	T	T	T	T
(2)	T	F	T	T
(3)	T	T	F	T
(4)	T	F	F	F

14. $\neg(p \vee \neg q)$ ന്റെ വാസ്തവിക പട്ടികയിലെ അവസാന നിരയിലുള്ള വാസ്തവിക പട്ടിക 'F' ലുള്ള അന്തിമ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 250 15-02-2023 15:31:51

15. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ ഏതാണ് തെറ്റായുള്ളതു് p , q എന്നിവ രണ്ടു നിർദ്ദേശങ്ങളാണെങ്കിൽ

(1) $\neg (p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ (2) $\neg (p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

(3) $\neg (p \vee q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (4) $\neg (\neg p) \equiv p$

16.

p	q	$(p \wedge q) \rightarrow \neg p$
T	T	(a)
T	F	(b)
F	T	(c)
F	F	(d)

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള $(p \wedge q) \rightarrow \neg p$ യുടെ വാസ്തവിക പട്ടികയിൽ ഏതാണ് ശരിയായിട്ടുള്ളത്?

	(a)	(b)	(c)	(d)
(1)	T	T	T	T
(2)	F	T	T	T
(3)	F	F	T	T
(4)	T	T	T	F

17. $\neg (p \vee q) \vee [p \vee (p \wedge \neg r)]$ ന്റെ ദ്വൈതത

(1) $\neg (p \wedge q) \wedge [p \vee (p \wedge \neg r)]$ (2) $(p \wedge q) \wedge [p \wedge (p \vee \neg r)]$

(3) $\neg (p \wedge q) \wedge [p \wedge (p \wedge r)]$ (4) $\neg (p \wedge q) \wedge [p \wedge (p \vee \neg r)]$

18. $p \wedge (\neg p \vee q)$ ന്റെ നിർദ്ദേശം

(1) പുനരുക്തി (2) വൈരുദ്ധ്യം

(3) $p \wedge q$ ന്റെ യുക്തിപരമായ തുല്യത (4) $p \vee q$ ന്റെ യുക്തിപരമായ തുല്യത

19. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പ്രസ്താവനകളുടെ വാസ്തവിക മൂല്യം കാണുക:

(a) $4+2=5$ കൂടാതെ $6+3=9$ (b) $3+2=5$ കൂടാതെ $6+1=7$

(c) $4+5=9$ കൂടാതെ $1+2=4$ (d) $3+2=5$ കൂടാതെ $4+7=11$

	(a)	(b)	(c)	(d)
(1)	F	T	F	T
(2)	T	F	T	F
(3)	T	T	F	F
(4)	F	F	T	T

20. താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ ശരിയല്ലാത്തത് ഏത് ?

(1) ഒരു പ്രസ്താവനയുടെ നിഷേധത്തിന്റെ നിഷേധം ഒരു പ്രസ്താവന തന്നെയാണ്.

(2) വാസ്തവിക പട്ടികയിൽ അവസാനത്തെ നിരയിലെ അംമഗങ്ങളെല്ലാം T ആണെങ്കിൽ അതൊരു പുന രുക്തി ആണ്.

(3) വാസ്തവിക പട്ടികയിൽ അവസാനത്തെ നിരയിലെ അംഗങ്ങളെല്ലാം F ആണെങ്കിൽ അതൊരു വൈരുദ്ധ്യം ആണ്

(4) p, q എന്നത് രണ്ട് പ്രസ്താവകളാണെങ്കിൽ $p \leftrightarrow q$ ഒരു പുനരുക്തിയാണ്.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 251 15-02-2023 15:31:55

സംഗ്രഹം

(1) **ശൂന്യമല്ലാത്ത ഒരു ഗണം** S ലെ ദ്വയാംങ്ക ക്രിയ $*$ ന് S ന്റെ ഓരോ ക്രമ ജോഡി അംഗങ്ങൾക്കും S ന്റെ അദ്വിതീയ അംഗത്തെ നിർണ്ണയിക്കുന്ന ഒരു നിയമമാണ് (a,b) a,b $a*b$.

(2) **ക്രമവിനിമേയ നിയമം:** ശൂന്യമല്ലാത്ത ഒരു ഗണത്തിൽ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു ദ്വയാങ്കക്രിയ $*$ ക്രമവിനിമേയ നിയമം തൃപ്തിപെടുത്തണമെങ്കിൽ S $a*b=b*a,\ \forall a,b\in S$.

(3) **സംയോജന നിയമം:** ശൂന്യമല്ലാത്ത ഒരു ഗണത്തിൽ നിർവചിച്ചിരിക്കുന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു ദ്വയാങ്കക്രിയ $*$ സംയോജന നിയമം തൃപ്തിപ്പെടുത്തണമെങ്കിൽ S $a*(b*c)=(a*b)*c,\ \forall a,b,c\in S$.

(4) **അനന്യത ഗുണം:** ഒരംഗം $e\in S$ എന്നത് S ന്റെ **അനന്യത അംഗം** എന്നു പറയണമെങ്കിൽ $*$ എന്ന ദ്വയാങ്കക്രിയ എല്ലായ്പ്പോഴും $a\in S$ എങ്കിൽ $a*e=a$ കൂടാതെ $e*a=a$.

(5) **വ്യുൽക്രമ ഗുണം:** e എന്ന ഒരു അനന്യത അംഗം നിലനിൽക്കുന്നുവെങ്കിൽ എല്ലാ $a\in S$, S ൽ b നിലവിലുണ്ട് അത്തരത്തിൽ $a*b=e$ കൂടാതെ $b*a=e$ എങ്കിൽ $b\in S$ നെ a യുടെ വ്യുൽക്രമം എന്നു പറയുന്നു. അങ്ങനെയുള്ള അവസരങ്ങളിൽ $b=a^{-1}$ എന്ന് എഴുതാം .

(6) **അനന്യയുടെ അതുല്യത:** ഒരു ബീജഗണിത ഘടനയിൽ അനന്യത (നിലവിലുണ്ടെങ്കിൽ) അദ്വിതീയമായിരിക്കും.

(7) **വ്യുൽക്രമത്തിന്റെ അതുല്യത:** ബീജഗണിത ഘടനയിൽ ഒരു അംഗത്തിന്റെ വ്യുൽക്രമം (നിലവിലുണ്ടെങ്കിൽ) അദ്വിതീയമായിരിക്കും.

(8) ഒരു **ബൂളിയൻ മാട്രിക്സ്** ഒരു ബൂളിയൻ മാട്രിക്സ് ഒരു യഥാർത്ഥ മാട്രിക്സാണ് അതിന്റെ അംഗങ്ങൾ ഒന്നുകിൽ 0 അല്ലെങ്കിൽ 1 ആയിരിക്കും .

(9) **മോഡുലാർ അരിത്തമാറ്റിക്:** n എന്നത് 1 നെക്കാൾ വലിയ ഒരു ധനപൂർണ്ണാങ്കമാണെങ്കിൽ അതിനെ **മോഡുലസ് (മാപനാങ്കം)** എന്നു പറയുന്നു. $b-a$ യെ n കൊണ്ട് നിശ്ലേഷം ഹരിക്കാമെങ്കിൽ a,b. എന്നീ രണ്ട് പൂർണ്ണാങ്കങ്ങളെ സർവ്വസമ മോഡുലോ എന്നു പറയുന്നു. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ $a\equiv b\,(\mathrm{mod\ n})$ എന്നത് അർത്ഥമാക്കുന്നത് $a-b=n\cdot k$, k ഏതെങ്കിലും ഒരു പൂർണ്ണാങ്കം കൂടാതെ b എന്നത് a യെ n കൊണ്ട് ഹരിക്കുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന **ഋണസംഖ്യ അല്ലാത്ത ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ ശിഷ്ടമായിരിക്കും** $(0\le b\le n-1)$.

(10) ഗണിത ശാസ്ത്ര ചിഹ്നങ്ങളിലൂടെ യുക്തിയെ കുറിച്ചുള്ള പഠനമാണ് ഗണിത ശാസ്ത്രയുക്തി.

(11) p ഒരു ലഘു പ്രസ്താവന എന്നിരിക്കട്ടെ p യുടെ **നിരസിക്കലായ (നിഷേധം)** പ്രസ്താവനയുടെ വാസ്തവിക മൂല്യം p യുടെ വിപരീതമായിരിക്കും. ഇതിനെ $\neg p$ എന്നു കുറിക്കുന്നു. (**not** p) p അല്ല എന്നു വായിക്കുന്നു. $\neg p$ യുടെ വാസ്തവിക മൂല്യം T ആണെങ്കിൽ p , F ആയിരിക്കും, അല്ലെങ്കിൽ അത് F ആയിരിക്കും.

(12) p കൂടാതെ q എന്നത് രണ്ട് ലഘുപ്രസ്താവനകൾ എന്നിരിക്കട്ടെ p , q എന്നിവയെ **and** കൂടാതെ എന്ന വാക്കിനാൽ ബന്ധിപ്പിക്കുന്നതു വഴി p , q എന്നിവയുടെ **സംയോജനം** ലഭിക്കും. അതിനാൽ $p\wedge q$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു. p സംയോജനം q , ' p hat q ' എന്നു വായിക്കും $p\wedge q$ ന്റെ വാസ്തവിക മൂല്യം T ആണ്. p , q എന്നിവ രണ്ടും T ആകുന്നു. അല്ലെങ്കിൽ F ആണ്.

(13) p , q എന്നിവ 'അല്ലെങ്കിൽ' എന്ന വാക്ക് ഉപയോഗിച്ച് ബന്ധിപ്പിക്കുന്നതിലൂടെ ലഭിച്ച സംയുക്ത പ്രസ്താവനയാണ്. p , q എന്നീ രണ്ടു ലളിതമായ പ്രസ്താവനകളുടെ **വിച്ഛേദനം** ഇതിനെ $p\vee q$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇതിനെ p വിച്ഛേക്കിക്കൽ q അല്ലെങ്കിൽ p cup q എന്ന് വായിക്കുന്നു. $p\vee q$ ന്റെ വാസ്തവിക മൂല്യം F ആണ് p , q എന്നിവ രണ്ടും F ആകുന്നു. അല്ലെങ്കിൽ T ആണ്.

(14) p , q എന്നീ രണ്ടു പ്രസ്താവനകളുടെ **സോപാധിക പ്രസ്താവനയാണ്**. പ്രസ്താവന p എങ്കിൽ തുടർന്ന് q കൂടാതെ ഇതിനെ $p\to q$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു. p ശരിക്കും q തെറ്റുമായിരുന്നെങ്കിൽ മാത്രം $p\to q$ തെറ്റായിരിക്കും അല്ലെങ്കിൽ അത് ശരിയായിരിക്കും. F , F , T; ,T.

(15) p , q എന്നീ രണ്ടു പ്രസ്താവനകളുടെ **ദ്വി സോപാധിക പ്രസ്താവനയാണ്** പ്രസ്താവന p എങ്കിൽ q ആണെങ്കിൽ മാത്രം കൂടാതെ ഇതിനെ $p\leftrightarrow q$ എന്ന് സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു. p, q എന്നിവയ്ക്ക് ഒരേ വാസ്തവിക മൂല്യങ്ങളാണെങ്കിൽ ഇതിന്റെ വാസ്തവിക മൂല്യം T ആണ് അല്ലെങ്കിൽ അത് തെറ്റാണ് F.

(16) ഘടക പ്രസ്താവനയുടെ വാസ്തവി മൂല്യങ്ങൾ പരിഗണിക്കാതെ ഒരു പ്രസ്താവന അതിന്റെ വാസ്തവിക മൂല്യം എല്ലായ്പ്പോഴും T ആണെങ്കിൽ അത് **പുനരുക്തി** എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ $\mathbb{T}$ എന്ന അക്ഷരം കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 252 15-02-2023 15:32:02

(17) ഘടക പ്രസ്താവനകളുടെ വാസ്തവിക മൂല്യങ്ങൾ പരിഗണിക്കാതെ ഒരു പ്രസ്താവന അതിന്റെ വാസ്തവിക മൂല്യം എല്ലായ്പ്പോഴും F ആണെങ്കിൽ അത് ഒരു **വൈരുദ്ധ്യമാണെന്നു** പറയുന്നു. ഇതിനെ $\mathbb{F}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

(18) ഒരു പ്രസ്താവന പുന രുക്തിയോ വൈരുദ്ധ്യമോ അല്ലാതിരുന്നാൽ അതിനെ **ആകസ്മികത** എന്നു പറയുന്നു.

(19) A , B എന്നീ രണ്ടു സംയുക്ത പ്രസ്താവനകളെ **യുക്താനുസ്യൂത തുല്യത** അല്ലെങ്കിൽ **കേവത കുല്യത** എന്നു പറയണമെങ്കിൽ വാസ്തവിക പട്ടികയിൽ A യും B യുമായി ബന്ധപ്പെട്ട നിരകൾക്ക് സമാനമായ **വാസ്തവിക മൂല്യങ്ങളുണ്ടായിരിക്കണം**. A , B എന്നീ പ്രസ്താവനകളുടെ യുക്തിപരമായ തുല്യതയെ $A \equiv B$ അല്ലെങ്കിൽ $A \Leftrightarrow B$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. A , B എന്നിവ യുക്തിപരമായ തുല്യമാണെങ്കിൽ $A \leftrightarrow B$ ഒരു **പുനരുക്തി** ആയിരിക്കണം.

(20) **തുല്യതയ്ക്കുള്ള ചില നിയമങ്ങൾ:**

വിവേക ശൂന്യമായ നിയമങ്ങൾ : (i) $p \vee p \equiv p$ (ii) $p \wedge p \equiv p$.

ക്രമവിനിമേയ നിയമങ്ങൾ : (i) $p \vee q \equiv q \vee p$ (ii) $p \wedge q \equiv q \wedge p$.

സംയോജന നിയമങ്ങൾ : (i) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$ (ii) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$.

വിതരണ നിയമങ്ങൾ : (i) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

(ii) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

അനന്യത നിയമങ്ങൾ : (i) $p \vee \mathbb{T} \equiv \mathbb{T}$ കൂടാതെ $p \vee \mathbb{F} \equiv p$

(ii) $p \wedge \mathbb{T} \equiv p$ കൂടാതെ $p \wedge \mathbb{F} \equiv \mathbb{F}$

പൂരക നിയമങ്ങൾ : (i) $p \vee \neg p \equiv \mathbb{T}$ കൂടാതെ $p \wedge \neg p \equiv \mathbb{F}$

(ii) $\neg \mathbb{T} \equiv \mathbb{F}$ കൂടാതെ $\neg \mathbb{F} \equiv \mathbb{T}$

കടന്നു കയറ്റ നിയമം അല്ലെങ്കിൽ ഇരട്ട നിർദ്ദേശ നിയമം: $\neg(\neg p) \neg p$

ഡി മോർഗൻസ് നിയമങ്ങൾ : (i) $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$ (ii) $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \vee \neg q$

ആഗിരണ നിയമങ്ങൾ : (i) $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ (ii) $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

ICT കോർണർ

https://ggbm.at/dy9kwgbt അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക

ബ്രൗസർ ഓപ്പൺ ചെയ്യുക. കൊടുത്തിരിക്കുന്ന URL ലിങ്ക് ടൈപ്പ് ചെയ്യുക. അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക. ജിയോ ജീബ്രാ വർക്ക് ബുക്കിൽ "**12ാം സ്റ്റാൻഡേർഡ് മാത്തമാറ്റിക്സ് വാല്യം** -2" ഓപ്പണാകും. നിങ്ങളുടെ പുസ്തകവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട അധ്യായങ്ങൾ വർക്ക്ബുക്കിന്റെ ഇടതു വശത്ത് കാണും **"വ്യതിരിക്തമായ ഗണിതശാസ്ത്രം"** എന്ന അധ്യായം ക്ലിക്ക് ചെയ്യുക. അപ്പോൾ ഈ അധ്യായവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ധാരാളം വർക്ക്ഷീറ്റുകൾ നിങ്ങൾക്ക് കാണാൻ കഴിയും. അങ്ങനെ എല്ലാ വർക്ക് ഷീറ്റിലും എത്തുക.

12th Mathematics Vol 2 Chapter 12 Malayalam.indd 253 15-02-2023 15:32:06

ഉത്തരങ്ങൾ

അധ്യായം 7

അഭ്യാസം 7.1

(1) (i) 21 മീ/സെക്കന്റ്സ് (ii) 15 മീ/സെക്കന്റ്സ് 27 മീ/സെക്കന്റ്സ്

(2) (2)(i) 5 സെക്കന്റ്സ് (ii) 128 ഫീറ്റ്/സെക്കന്റ്സ് (iii) 160 ഫീറ്റ്/സെക്കന്റ്സ്

(3) (i) 1,2 സെക്കന്റ്സ് (ii) 34 മീ (iii) $-6\,m/s^2$, $6\,m/s^2$

(4) 75 മാത്രകൾ (5) $\frac{1}{2}$ കി.ഗ്രാം/മീ, $\frac{1}{6}$ കി.ഗ്രാം/മീ

(6) 20π ച.സെ.മീ/സെക്കൻസ് (7) 2π കി.മി/സെക്കൻസ് (8) $\frac{9}{10\pi}$ മീ/മിനിറ്റ്

(9) (i) $\frac{-8}{3}$ മീ/സെക്കന്റ്സ് (ii) 26.83 ച.സെ.മീ/സെക്കൻസ് (10) 70 കി.മി/മണിക്കൂർ

അഭ്യാസം 7.2

(1) (i) 7 (ii) ∞ (2) $(1,0)$

(3) $(0,3)$, $(4,-25)$ (4) $(2,-1)$, $(-2,1)$

(5) (i) $2x+y=2\,;x-2y=1$ (ii) $2x-y=-2\,;x+2y=4$

(iii) $x-y=0\,;x+y=\pi$ (iv) $4x+2y=5\;;2x-4y=-5$

(6) $12x-y=15\,;12x-y=-17$ (7) $x+2y=7\,;x+2y=-1$

(8) $(2\cos t)x+(7\sin t)y=14\,;\ (7\sin t)x-(2\cos t)y=45\sin t\cos t$ (9) $\tan^{-1}(3)$

അഭ്യാസം 7.3

(1) (i) $x=0$ ആകുമ്പോൾ തുടർച്ചയല്ല (ii) $x=\frac{\pi}{2}$ ആകുമ്പോൾ തുടർച്ചയല്ല (iii) $f(2)\neq f(7)$

(2) (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $-2+2\sqrt{2}$ (iii) $\frac{9}{4}$

(3) (i) $x=0$ ആകുമ്പോൾ തുടർച്ചയല്ല (ii) $x=\frac{-1}{3}$ ആകുമ്പോൾ വ്യത്യാസമില്ല

(4) (i) $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ (ii) 7

(6) 320 കി.മി (8) ഇല്ല, എന്തെന്നാൽ $f'(x)$ ന്റെ ഏതൊരു ബിന്ദുവിലും 2.5 ആകുകയില്ല $(0,2)$.

അഭ്യാസം 7.4

(1) (i) $e^x=1+\frac{x}{\lfloor 1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\cdots$ (ii) $\sin x=x-\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^5}{\lfloor 5}-\frac{x^7}{\lfloor 7}+\cdots$

(iii) $\cos x=1-\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^4}{\lfloor 4}-\frac{x^6}{\lfloor 6}+\cdots$

(iv) $\log(1-x)=-\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+\cdots\right)$

(v) $\tan^{-1}(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$ (vi) $\cos^2 x=1-\frac{2x^2}{\lfloor 2}+\frac{2^3x^4}{\lfloor 4}-\frac{2^5x^6}{\lfloor 6}+\cdots$

(2) $\log x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\frac{1}{4}(x-1)^4+\cdots$

12th Mathematics Vol 2 Answers Malayalam.indd 254 15-02-2023 14:53:16

(3) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{1}{\lfloor 1}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{\lfloor 2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\frac{1}{\lfloor 3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3+\cdots\right)$

(4) $f(x)=-(x-1)+(x-1)^2$

അഭ്യാസം 7.5

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 2 (3) ∞ (4) 1 (5) 0 (6) 0

(7) $\frac{-3}{2}$ (8) 1 (9) e (10) 1 (11) $\frac{1}{\sqrt{e}}$

അഭ്യാസം 7.6

(1) (i) പരമാവധി $=-1$, സമ്പൂർണ്ണ മിനിമം $=-26$

(ii) പരമാവധി $=16$, സമ്പൂർണ്ണ മിനിമം $=-1$

(iii) പരമാവധി $=9$, സമ്പൂർണ്ണ മിനിമം $=-\frac{9}{8}$

(iv) പരമാവധി $=\frac{3\sqrt{3}}{2}$, സമ്പൂർണ്ണ മിനിമം $=0$

(2) (i) കർശനമായി വർദ്ധിക്കുന്നു $(-\infty,-2)$, $(1,\infty)$, കർശനമായി കുറയുന്നു $(-2,1)$

ലോക്കൽ മിനിമം $=20$ ലോക്കൽ മിനിമം $=-7$

(ii) കർശനമായി കുറയുന്നു $(-\infty,5)$, $(5,\infty)$. ലോക്കൽ എസ്ട്രിം ഇല്ല.

(iii) കർശനമായി വർദ്ധിക്കുന്നു $(-\infty,\infty)$. ലോക്കൽ എസ്ട്രിം ഇല്ല.

(iv) കർശനമായി കുറയുന്നു $(0,1)$, കർശനമായി വർദ്ധിക്കുന്നു $(1,\infty)$. ലോക്കൽ മിനിമം $=\frac{1}{3}$

(v) കർശനമായി വർദ്ധിക്കുന്നു $\left(0,\frac{\pi}{4}\right),\left(\frac{3\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$, മറ്റും $\left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right)$.

കർശനമായി കുറയുന്നു $\left(\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right)$ലും $\left(\frac{5\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$. ലോക്കൽ മിനിമം$=\frac{11}{2}$, $x=\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ ൽ.

ലോക്കൽ മിനിമം$=\frac{9}{2}$, $x=\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$ ൽ.

അഭ്യാസം 7.7

(1) (i) മുകളിലേക്ക് കോൺകേവ് ചെയ്യുക $(-\infty,2)$, $(4,\infty)$ എന്നിവയിൽ താഴേക്ക് കോൺ കേവ് ചെയ്യുക $(2,4)$ പ്രതിഫലനത്തിന്റെ ബിന്ദുക്കൾ $(2,-16)$, $(4,0)$ എന്നിവയാണ്

(ii) മുകളിലേക്ക് കോൺകേവ് ചെയ്യുന്നു $\left(\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}\right)$. താഴേക്ക് കോൺകേവ് ചെയ്യുന്നു $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$, $\left(\frac{7\pi}{4},2\pi\right)$ എന്നിവയിൽ

പ്രതിഫലനത്തിന്റെ ബിന്ദുക്കൾ $\left(\frac{3\pi}{4},0\right)$ഉം $\left(\frac{7\pi}{4},0\right)$

(iii) മുകളിലേക്ക് കോൺകേവ് ചെയ്യുന്നു $(0,\infty)$. താഴേക്ക് കോൺകേവ് ചെയ്യുന്നു $(-\infty,0)$

പ്രതിഫലനത്തിന്റെ ബിന്ദുക്കൾ $(0,0)$

(2) (i) ലോക്കൽ മിനിമം $=-2$; ലോക്കൽ മിനിമം $=2$ (ii) ലോക്കൽ മിനിമം $=-\frac{1}{e}$

(iii) ലോക്കൽ മിനിമം $=0$; ലോക്കൽ മിനിമം $=\frac{1}{e^2}$

(3) കർശനമായി വർദ്ധിക്കുന്നു $(-\infty,-1)$, $\left(\frac{1}{2},\infty\right)$. കർശനമായി വർദ്ധിക്കുന്നു $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$

12th Mathematics Vol 2 Answers Malayalam.indd 255 15-02-2023 14:53:32

ലോക്കൽ മിനിമം $= 6$, ലോക്കൽ മിനിമം $= -\frac{3}{4}$

മുകളിലേക്ക് കോൺ കേവ് ചെയ്യുന്നു $\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$; താഴേക്ക് കോൺകേവ് ചെയ്യുന്നു $\left(-\frac{1}{4}, \infty\right)$.

പ്രതിഫലനത്തിന്റെ ബിന്ദുക്കൾ $\left(-\frac{1}{4}, \frac{21}{8}\right)$

അഭ്യാസം 7.8

(1) $6, 6$ (2) $2\sqrt{5}, 2\sqrt{5}$ (3) 50 (4) 100 മീ^{2} (5) 9 സെ.മീ, 6 സെ.മീ (6) 1200 മീ

(7) $10\sqrt{2}, 10\sqrt{2}$, (9) $\sqrt{2}r, \frac{r}{\sqrt{2}}$ (10) 6 സെ.മീ, 6 സെ.മീ, 3 സെ.മീ (11) $32\pi, 0$

അഭ്യാസം 7.9

(1) (i) $x = -1, x = 1, y = 1$ (ii) $x = -1, y = x - 1,$ (iii) $y = -3, y = 3$

(iv) $y = x - 9$, $x = -3$

അഭ്യാസം 7.10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(1)	(2)	(2)	(2)	(1)	(2)	(3)	(4)	(3)	(4)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(3)	(4)	(3)	(4)	(2)	(3)	(3)	(1)	(4)	(3)

അധ്യായം 8

അഭ്യാസം 8.1

1. (i) 3.0074 2. (i) 24.73 (ii) 1.9688 (iii) 2.963

3. (i) $7x - 4$ (ii) $\frac{9 - 4x}{5}$ (iii) $\frac{x + 1}{4}$

4. (i) 0.0225π സെ.മീ^{2}, (ii) 0.006 സെ.മീ^{2} (iii) 0.6%

5. (i) വ്യാപ്തം കുറയുന്നു 80π സെ.മീ^{3} (ii) വക്രതല വിസ്തീർണ്ണം കുറയുന്നു 16π സെ.മീ^{2} 6. 1%

അഭ്യാസം 8.2

1. (i) $\frac{2(1-2x)^2(8x-7)}{(3-4x)^2}dx$ (ii) $\frac{4}{3}\frac{\cos 2x}{(3+\sin 2x)^{\frac{1}{3}}}dx$ (iii) $e^{x^2-5x+7}[(2x-5)\cos(x^2-1) - 2x\sin(x^2-1)]dx$

2. (i) 0.7 (ii) 0.18 3. (i) $\Delta f = 3.125$, $df = 2.0$ (ii) $\Delta f = 0.11$, $df = 0.1$

4. 3.0013029 5. (i) $\frac{6}{\pi}$ സെ.മീ (ii) $\frac{40}{\pi}\%$ 6. 30π മി.മീ^{3} 7. 0.4π മി.മീ^{2} 8. 8000

9. (i) $\simeq 3$ പദങ്ങൾ (ii) $\simeq 1$ പദം 10. 5.25π, 4.76% 11. 60 സെ.മീ^{3}, 61.2 സെ.മീ^{3}

അഭ്യാസം 8.3

1. $\frac{1}{8}$ 2. 1 4. $\cos(1)$

അഭ്യാസം 8.4

1. (i) 27, -14 (ii) 11, -4 (iii) 2, 0, 4 (iv) $e^2\left((\log 2) - 1\right), e^2\left(1 + \log 8\right)$

12th Mathematics Vol 2 Answers Malayalam.indd 256 15-02-2023 14:53:47

3. $\frac{x^2-y^2}{x^2y}, \frac{y^2-x^2}{y^2x}+3z^2, 6yz$ 4. $\frac{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{\left(x^3+y^3+z^3\right)}$

5. (i) $e^y+6x,\ 6y,\ xe^y,\ e^y+6x$

(ii) $\frac{-15}{(5x+3y)^2}, \frac{-25}{(5x+3y)^2}, \frac{-9}{(5x+3y)^2}, \frac{-15}{(5x+3y)^2}$ (iii) $3,\ 2-25\cos 5x,\ 0,\ 3$

10. (i) $72x+84y+0.04xy-0.05x^2-0.05y^2-2000$ (ii) 24, -48, y യെ സ്ഥിരാങ്കമായി വച്ച് x ന്റെ ലാഭം വർദ്ധിപ്പിക്കുന്നു.

അഭ്യാസം 8.5

1. $6x-7y-7$ 2. $-(x+20y+16)$ 3. $(2x-y)dx+\left(-x+\frac{1}{2}y\right)dy$

4. $(y+z)dx+(x+z)dy+(y+x)dz$

അഭ്യാസം 8.6

1. $e^t\left(2e^t\sin t+3\sin^4 t+e^t\cos t+12\sin^3 t\cos t\right)$, 1

2. $\left(1+e^{2t}\right)^2\left[\cos^3 t\left(1+e^{2t}\right)-\sin t\sin 2t\left(1+e^{2t}\right)+6e^{2t}\sin t\cos^2 t\right]$

3. $4e^{2t}$ 4. $-e^{-2t}\left[\sin 2t-\cos 2t\right]$ 5. $18e^{3s}-3e^s\cos s+3e^s\sin s-4\sin s\cos s$, 15

6. $\frac{3e}{1+e^2}+2\tan^{-1}e, \frac{e}{1+e^2}$

7. $te^{st^2}\left[t\sin\left(s^2t\right)+2s\cos\left(s^2t\right)\right]$, $\frac{du}{dt}=se^{st^2}\left[2t\sin\left(s^2t\right)+s\cos\left(s^2t\right)\right]$, $e\left[\sin(1)+2\cos(1)\right]$, $e\left[2\sin(1)+\cos(1)\right]$

8. $3s^3(e^{3t}+s^2e^{-t})$, $3s^2e^t(e^{2t}-5e^{-2t}s^2)$ 9. $2u(1+2v)$, $2\left(u^2-v\right)$, 3, $\frac{-3}{2}$

അഭ്യാസം 8.7

1. (i) ഏകതാനമല്ല (ii) ഏകതാനമാണ്, ഘാതം.3
(iii) ഏകതാനമാണ്, ഘാതം.0 (iv) ഏകതാനമല്ല 6. 5

അഭ്യാസം 8.8

1	2	3	4	5	6	7	8
(2)	(2)	(2)	(4)	(3)	(2)	(4)	(2)
9	10	11	12	13	14	15	
(4)	(1)	(2)	(3)	(2)	(4)	(1)	

അധ്യായം 9

അഭ്യാസം 9.1

1. 0.6 2. 0.855 3. 0.375

അഭ്യാസം 9.2

1. (i) $\frac{13}{2}$ (ii) $\frac{25}{3}$

അഭ്യാസം 9.3

1. (i) $\frac{1}{4}\log\frac{5}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{8}$ (iii) $\frac{\pi}{2}-1$ (iv) $e^{\frac{\pi}{2}}$ (v) $\frac{8}{21}$ (vi) $\frac{1}{2}$

2. (i) 0 (ii) π (iii) $\frac{\pi-2}{4}$ (iv) 0 (v) 0 (vi) $\frac{13}{10}$ (vii) $\frac{\pi}{4}$

12th Mathematics Vol 2 Answers Malayalam.indd 257 15-02-2023 14:54:04

(viii) $\frac{\pi}{8}\log 2$ (ix) $\frac{\pi}{2}(\pi-2)$ (x) $\frac{\pi}{8}$ (xi) $\frac{\pi^2}{2}$

അഭ്യാസം 9.4

1. $\frac{3}{8}-\frac{19}{8}e^{-2}$ 2. $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\pi}{12}+\frac{1}{9}\right)$ 3. $1+e^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{\pi}{4}-1\right]$ 4. $-\frac{\pi}{4}$

അഭ്യാസം 9.5

1. (i) $\frac{\pi}{2\sqrt{6}}$ (ii). $\frac{\pi}{6\sqrt{5}}$

അഭ്യാസം 9.6

1. (i) $\frac{63\pi}{512}$ (ii) $\frac{16}{35}$ (iii) $\frac{5\pi}{64}$ (iv) $\frac{8}{45}$ (v) $\frac{\pi}{32}$ (vi) $\frac{64}{35}$ (vii) $\frac{1}{24}$ (viii) $\frac{1}{60}$

അഭ്യാസം 9.7

1. (i) $\frac{5!}{3^6}$ (ii) 29 (2) $\frac{1}{8}$

അഭ്യാസം 9.8

1. 7.5 2. 2 3. 15 4. 36 5. $2\sqrt{2}$ 6. $\log 2$ 7. $\frac{9}{2}$ 8. ശരി, $\frac{16}{3}$ 9. $\frac{4}{3}$ 10. $\frac{4}{3}\left(4\pi+\sqrt{3}\right)$

അഭ്യാസം 9.9

1. $\frac{4\pi}{5}$ 2. $\frac{\pi}{4}\left[1-e^{-4}\right]$ 3. 8π 4. $\frac{2\pi}{15}$ 5. $\frac{14}{3}\pi m^3$ 6. $\frac{1000}{3}\pi cm^3$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(1)	(3)	(3)	(1)	(4)	(3)	(3)	(1)	(2)	(1)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(4)	(2)	(2)	(4)	(2)	(4)	(3)	(4)	(2)	(1)

അധ്യായം 10

അഭ്യാസം 10.1

1. (i) 1,1 (ii) 3,2 (iii) 2, നിലവിലില്ല (iv) 1, 2 (v) 1,4
(vi) 2,2 (vii) 2,6 (viii) 2, നിലവിലില്ല (ix) 3,1 (x) 1, നിലവിലില്ല

അഭ്യാസം 10.2

1. (i) $\frac{dQ}{dt}=kQ$ (ii) $\frac{dP}{dt}=kP(500000-P)$ (iii) $\frac{dP}{dT}=\frac{kP}{T^2}$ (iv) $\frac{dx}{dt}=\frac{2x}{25}+400$ 2. $\frac{dr}{dt}=-k$

അഭ്യാസം 10.3

1. (i) $\frac{d^2y}{dx^2}=0$ (ii) $\frac{d^2x}{dy^2}=0$ 2. $r^2\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=\left(x\frac{dy}{dx}-y\right)^2$

3. $x^2+2xy\frac{dy}{dx}-y^2=0$ 4. $2ay''+y'^3=0$ 5. $xy'-2y-2=0$ 6. $xy'^2+xyy''-yy'=0$

7. $\frac{d^2y}{dx^2}=64y$ 8. $xy''+2y'+x^2-xy-2=0$

അഭ്യാസം 10.4

2. (i) $m=-2$ (ii) $m=2,3$ 3. $2y^2=x+48$

12th Mathematics Vol 2 Answers Malayalam.indd 258 15-02-2023 14:54:20

അഭ്യാസം 10.5

1. $F=(F-kV)e^{\frac{kt}{M}}$ 2. $k^2\left(1-e^{-\frac{2gx}{k^2}}\right)=v^2$ 3. $y=\frac{1-x}{1+x}$

4. (i) $\sin^{-1}y=\sin^{-1}x+C$ (ii) $y\tan^{-1}x=C$ (iii) $\sin\left(\frac{y-1}{x}\right)=a$ (iv) $e^x+e^{-y}+\frac{x^4}{4}=C$

(v) $\left(e^y+1\right)\sin x=C$ (vi) $\sin\left(\frac{x}{y}\right)=e^{nx+c}$ (vii) $3y=-\left(25-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+3C$ (viii) $\sin y=e^x\log x+C$

(ix) $\sec y=2\sin x+C$ (x) $\frac{1}{2}\left[(x+y)+\sin(x+y)\cos(x+y)\right]=x+C$

അഭ്യാസം 10.6

1. $\sin\left(\frac{y}{x}\right)=\log|Cx|$ 2. $y=Ce^{\frac{x^3}{3y^3}}$ 3. $e^{\frac{x}{y}}=\log|Cy|$ 4. $3x^2y+2y^3=C$

5. $xy^2-x^2y=C$ 6. $C=xe^{\tan\left(\frac{y}{x}\right)}$ 7. $y+3xe^{\frac{y}{x}}=3$ 8. $x_0=\pm\sqrt{3}e$

അഭ്യാസം 10.7

1. $y=\sin x+C\cos x$ 2. $y=\frac{\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}+C\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$ 3. $\left(y+\cos x\right)x=\sin x+C$

4. $y\left(x^2+1\right)=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+4}+\frac{1}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+C$ 5. $xy^2=2y^5+C$

6. $xy\sin x+\cos x=C$ 7. $ye^{\sin^{-1}x}=\frac{e^{2\sin^{-1}x}}{2}+C$ 8. $y\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)=x+\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$

9. $xy+\tan^{-1}y=C$ 10. $y\log x+\frac{\cos 2x}{2}=C$ 11. $2y=\left(x+a\right)^4+2C\left(x+a\right)^2$

12. $y\left(1+x^3\right)=\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$ 13. $4yx=2x^2\log x-x^2+4C$ 14. $x^2y=\frac{x^4}{4}\log x-\frac{x^4}{16}+C$

15. $2x^3y=x^2+3$

അഭ്യാസം 10.8

1. 10 മണിക്കൂറിനുശേഷം ബാക്ടീരിയകളുടെ എണ്ണം യഥാർത്ഥ ബാക്ടീരിയകളുടെ 9 ഇരട്ടിയാണ്.

2. $P=300000\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{t}{40}}$ 3. $i=Ce^{-\frac{Rt}{L}}$ 4. $v=\frac{10}{e^2}$ 5. $P=10000e^{0.075}$

6. $\frac{9^{10}}{10^8}$ % റേഡിയോ ആക്ടീവ് ഘടകം നിലനിൽക്കും 1000 വർഷങ്ങൾക്കു ശേഷവും.

7. (i) $65.33°C$ (ii) $53.46\ mts$

8. (i) $T\simeq 151°F$ (ii) $t=22.523$. ഏകദേശം 10.22 നും 10.30 നും ഇടയിൽ അവർ കോഫി കുടിച്ചു.

9. $20°$ 10. $x=100\left(1-e^{\frac{-3t}{50}}\right)$

അഭ്യാസം 10.9

Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	(1)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)	(3)	(2)	(2)	(3)
Q	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	(3)	(3)	(1)	(1)	(2)	(3)	(2)	(4)	(2)	(4)
Q	21	22	23	24	25					
A	(1)	(1)	(2)	(2)	(1)					

12th Mathematics Vol 2 Answers Malayalam.indd 259 15-02-2023 14:54:42

അധ്യായം 11

അഭ്യാസം 11.1

(1)

റാൻഡംവേരിയബിളുകളുടെ എണ്ണം	0	1	2	3	ആകെ
വിപരീത ഇമേജുകളുടെ ബിന്ദുക്കളുടെ എണ്ണം	1	3	3	1	8

(2)

റാൻഡം വേരിയബിളുടെ എണ്ണം	0	1	2	ആകെ
വിപരീത ഇമേജുകളുടെ ബിന്ദുക്കളുടെ മൂല്യങ്ങൾ	325	676	325	1326

(3)

റാൻഡം ഇമേജുകളുടെ ബിന്ദുക്കളുടെ എണ്ണം	0	1	2	3	ആകെ
വിപരീത ഇമേജുകളുടെ ബിന്ദുക്കളുടെ മൂല്യങ്ങൾ	4	30	40	10	84

(4)

റാൻഡം ഇമേജുകളുടെ ബിന്ദുക്കളുടെ എണ്ണം	–20	5	30	ആകെ
വിപരീത ഇമേജുകളുടെ ബിന്ദുക്കളുടെ മൂല്യങ്ങൾ	28	48	15	91

(5)

റാൻഡം ഇമേജുകളുടെ ബിന്ദുക്കളുടെ എണ്ണം	4	5	6	7	8	ആകെ
വിപരീത ഇമേജുകളുടെ ബിന്ദുക്കളുടെ മൂല്യങ്ങൾ	1	4	10	12	9	36

അഭ്യാസം 11.2

(1) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8} & ; \quad x=0,3\\ \frac{3}{8} & ; \quad x=1,2\end{cases}$

(2) (i)

x	2	4	6	8	10	ആകെ
$f(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{12}{36}$	$\frac{4}{25}$	1

(2) (ii) $F(x)=\begin{cases}0 & ; \quad x<2\\ \frac{1}{36} & ; \quad 2\le x<4\\ \frac{5}{36} & ; \quad 4\le x<6\\ \frac{15}{36} & ; \quad 6\le x<8\\ \frac{27}{36} & ; \quad 8\le x<10\\ 1 & ; \quad 10\le x<\infty\end{cases}$

(iii) $\frac{13}{18}$ (iv) $\frac{31}{36}$

(3) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{4} & ; \quad x=1,3\\ \frac{1}{16} & ; \quad x=0,4\\ \frac{3}{8} & ; \quad x=2\end{cases}$, $F(x)=\begin{cases}0 & ; \quad x<0\\ \frac{1}{16} & ; \quad 0\le x<1\\ \frac{5}{16} & ; \quad 1\le x<2\\ \frac{11}{16} & ; \quad 2\le x<3\\ \frac{15}{16} & ; \quad 3\le x<4\\ 1 & ; \quad 4\le x<\infty\end{cases}$

(4)(i) 8 (ii) $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{1}{8} & 0\le x<1\\ \frac{3}{8} & 1\le x<2\\ 1 & 2\le x<\infty\end{cases}$ (iii) $\frac{7}{8}$

12th Mathematics Vol 2 Answers Malayalam.indd 260 15-02-2023 14:54:48

(5) (i)

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.15	0.20	0.25	0.25	0.15

(ii) $P(X<1)=0.35$ (iii) $P(X\geq 2)=0.40$

(6) (i) $\frac{1}{6}$ (ii) $\frac{17}{36}$ (iii) $\frac{5}{6}$

(7) (a)

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$

(b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{2}{5}$

അഭ്യാസം 11.3

(1) 4

(2) (i)0.16 (ii) 0.3 (iii) 0.75

(3) (i) $\frac{1}{400}$

(ii) $F(x)=\begin{cases} 0 & ; \ x<200 \\ \frac{x}{400}-\frac{1}{2} & ; \ 200\leq x\leq 600 \\ 1 & ; \ x>600 \end{cases}$

(iii) $\frac{1}{2}$

(4) (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $1-e^{-\frac{x}{3}}$ (iii) $1-e^{-1}$ (iv) $e^{-\frac{5}{3}}$ (v) $1-e^{-\frac{4}{3}}$

(5) (i) $F(x)=\begin{cases} 0 & x\leq -1 \\ \frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2} & -1\leq x<0 \\ -\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2} & 0\leq x<1 \\ 1 & 1\leq x \end{cases}$ (ii) 0.75

(6) (i) $f(x)=F'(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{2}(2x+1) & 0\leq x<1 \\ 0 & 1\leq x \end{cases}$ (ii) 0.285

അഭ്യാസം 11.4

(1) (i) 2.3 , 2.81 (ii) 1.67 , 0.56 (iii) $\frac{5}{3}, \frac{1}{18}$ (iv) 2,4

(2) $\frac{8}{7}$

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$

(3) 7 , 16

(4) 2 , 1

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

12th Mathematics Vol 2 Answers Malayalam.indd 261 15-02-2023 14:55:00

(5) 15 മിനിറ്റ്സ് (6) $\frac{1}{3}$ (7) $\frac{1}{2}, \frac{1}{8}$ (8) നഷ്ടം ₹. 0.50

അഭ്യാസം 11.5

(1) (i) $\frac{160}{729}$ (ii) $210\left(\frac{1}{5}\right)^4\left(\frac{4}{5}\right)^6$ (iii) $\binom{9}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7\left(\frac{1}{2}\right)^2$ (2) (i) $\binom{10}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^6$ (ii) $1-\frac{3^{10}}{4^{10}}$

(3) (i) 50, 25 (ii) 40, $\frac{100}{3}$ (4) $\frac{270}{1024}$ (5) (i) $1-0.95^{10}$ (ii) $\binom{10}{2}(0.05)^2(0.95)^8$

(6) (i) $\binom{12}{10}(0.9)^{10}(0.1)^2$ (ii) $2.1(0.9)^{11}$ (iii) $1-\left[2.1(0.9)^{11}\right]$

(7) (i) $\binom{18}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{18-x}$ (ii) $\binom{18}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right)^{15}$ (iii) $1-\frac{20}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{17}$ (8) $\binom{6}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x\left(\frac{2}{3}\right)^{6-x}$, 2, $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (9) $1, \frac{4}{5}$

അഭ്യാസം 11.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(2)	(4)	(2)	(4)	(4)	(2)	(4)	(3)	(2)	(1)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(4)	(4)	(1)	(2)	(1)	(1)	(4)	(4)	(2)	(1)

അധ്യായം 12

അഭ്യാസം 12.1

1. (i) അതെ $\mathbb{R}$ ലെ ഒരു ബൈനറിയാണ്, $*$ (ii) അതെ A ലെ ഒരു ബൈനറിയാണ്, $*$
   (iii) അല്ല, $\mathbb{R}$ ലെ ബൈനറിയല്ല $*$
2. അല്ല, $\mathbb{Z}$ ലെ ബൈനറിയല്ല $\otimes$ 3. $\frac{-88}{15}$
4. അതെ, സാധാരണ ഗുണനം A യിലെ ബൈനറിയാണ്
5. (i) തന്നിരിക്കുന്ന പ്രവർത്തനം $*$ ക്ലോഷറും കമ്മ്യൂട്ടേറ്റീവ് എന്നിവയാണ്, പക്ഷേ $\mathbb{Q}$ ൽ സംയോജനമല്ല.
   (ii) ഐഡന്റിറ്റി നിലവിലില്ല, അതിനാൽ വിപരീതവും നിലവിലില്ല.

6.

$*$	a	b	c
a	b	c	a
b	c	b	a
c	a	a	c

7. ഇല്ല തന്നിട്ടുള്ള പ്രവർത്തനം കമ്മ്യൂട്ടേറ്റിവുമല്ല സംയോജകവുമല്ല

8. (i) $A \vee B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $A \wedge B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(iii) $(A \vee B) \wedge C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (iv) $(A \wedge B) \vee C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

12th Mathematics Vol 2 Answers Malayalam.indd 262 15-02-2023 14:55:14

10. (i) ഇത് കമ്മ്യൂട്ടേവുമാണ് സംയോജകവുമാണ്

(ii) ഐഡെന്റിറ്റിയും വിപരീതവും നിലവിലുണ്ട്.

അഭ്യാസം 12.2

1. (i) $\neg p$: വ്യാഴം ഒരു ഗ്രഹമല്ല (ii) $p \wedge \neg q$: വ്യാഴം ഒരു ഗ്രഹമല്ല, ഇന്ത്യ ഒരു ദ്വീപല്ല.

(iii) $\neg p \vee q$: വ്യാഴം ഒരു ഗ്രഹമല്ല, ഇന്ത്യ ഒരു ദ്വീപാണ്.

(iv) $p \rightarrow \neg q$: വ്യാഴം ഒരു ഗ്രഹമാണെങ്കിൽ ഇന്ത്യ ഒരു ദ്വീപല്ല.

(v) $p \leftrightarrow q$ ഇന്ത്യ ഒരു ദ്വീപാണെങ്കിൽ മാത്രം വ്യാഴം ഒരു ഗ്രഹമാണ്.

2. (i) $\neg p \wedge q$ (ii) $p \vee \neg q$ (iii) $p \wedge q$ (iv) $\neg p$

3. (i) $p \rightarrow q$ is $\mathbb{T}$ (ii) $p \vee q$ is $\mathbb{F}$ (iii) $\neg p \vee q$ is $\mathbb{T}$ (iv) $p \wedge q$ is $\mathbb{F}$

4. (i), (iii), (iv) എന്നിവ നിർദ്ദേശങ്ങളാണ്

5. (i) **സംഭാഷണം:** x, y എന്നിവ $x^2 = y^2$ ലെ അംഗങ്ങളെങ്കിൽ $x = y$.

വിപരീതം: x, y എന്നിവ $x \neq y$ ലെ അംഗങ്ങളെങ്കിൽ $x^2 \neq y^2$.

കോൺട്ര പോസിറ്റീവ്: x, y എന്നിവ $x^2 \neq y^2$ ലെ അംഗങ്ങളാണെങ്കിൽ $x \neq y$.

(ii) **സംഭാഷണം:** ഒരു സതുർഭുജം ദീർഘ ചതുരമാണെങ്കിൽ അത് ചതുരവുമാണ്.

വിപരീതം: ഒരു ചതുർഭുജം ചതുരമല്ലെങ്കിൽ അത് ദീർഘ ചതുരവുമല്ല.

കോൺട്രാ പോസിറ്റീവ് : ഒരു ചതുർഭുജം ദീർഘചതുരമല്ലെങ്കിൽ അത് ഒരു സതുരവുമല്ല.

6. (i) ശരിയായ പട്ടിക $\neg p \wedge \neg q$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	F	F	F
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

(ii) ശരിയായ പട്ടിക $\neg(\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
T	T	F	F	T
T	F	T	T	F
F	T	F	F	T
F	F	T	F	T

(iii) ശരിയായ പട്ടിക $(p \vee q) \vee \neg q$

p	q	$\neg q$	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee \neg q$
T	T	F	T	T
T	F	T	T	T
F	T	F	T	T
F	F	T	F	T

12th Mathematics Vol 2 Answers Malayalam.indd 263 15-02-2023 14:55:21

(iv) ശരിയായ പട്ടിക $(\neg p \rightarrow r) \wedge (p \leftrightarrow q)$

p	q	r	$\neg p$	$(\neg p \rightarrow r)$	$p \leftrightarrow q$	$(\neg p \rightarrow r) \wedge (p \leftrightarrow q)$
T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	F	F	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	F

7. (i) കോൺട്രഡിക്ഷൻ (ii) ടാറ്റോളജി (iii) കൺടിജെൻസ് (iv) ടാറ്റോളജി

12. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ ഒരു ടാറ്റോളജി.

13. അതെ, ഈ പ്രസ്താവന ലോജിക്കലി തുല്യമാണ്.

അഭ്യാസം 12.3

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പട്ടികയിൽ നിന്ന് ശരിയായ ഡിസ്ട്രാക്ടറ്റേഴ്സ് തെരഞ്ഞെടുക്കുക.

Q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	(2)	(3)	(2)	(4)	(2)	(2)	(3)	(4)	(3)	(2)
Q	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
A	(4)	(1)	(3)	(3)	(3)	(2)	(4)	(3)	(1)	(4)

12th Mathematics Vol 2 Answers Malayalam.indd 264 15-02-2023 14:55:22

പദപരിചയം

അധ്യായം 7
ഡിഫറൻഷ്യൽ കാൽക്കുലസിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ

related rates	ബന്ധപ്പെട്ട നിരക്കുകൾ
mean value theorem	ശരാശരി മൂല്യ സിദ്ധാന്തം
indeterminate forms	അനിശ്ചിത രൂപങ്ങൾ
stationary points	സ്റ്റേജനറി ബിന്ദുക്കൾ
critical points	നിർണ്ണായക ബിന്ദുക്കൾ
monotonicity of functions	ഫംഗ്ഷനുകളുടെ ഏകതാനത
absolute extremum	തികച്ചും അങ്ങേയറ്റം
relative extremum	താരതമ്യേന അങ്ങേയറ്റം
Concave	കോൺകേവ്
Convex	കോൺവെക്സ്
point of inflection	വ്യതിയാനത്തിന്റെ പോയിന്റ്
Symmetry	സമമിതി

അധ്യായം 8
അവകലനവും ഭാഗീക അവകലനവും

Differential	അവകലനം
Partial Derivatives	ഭാഗീക അവകലജം
Harmonic	ക്രമമായ
Homogeneous	സമഘാതം
Absolute error	സംപൂർണ്ണപിശക്
Relative error	ആപേക്ഷിക പിശക്
Percentage error	ശതമാന പിശക്

അധ്യായം 9
സമാകലനത്തിന്റെ പ്രയോഗങ്ങൾ

Definite integral	പൂർണ്ണമായും നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു
Reduction formula	റിഡക്ഷൻ സൂത്രം
Gamma integral	ഗാമ അപഗ്രഥനം
Bounded region	തിട്ടപ്പെടുത്തിയ ഭാഗം

അധ്യായം 10
സാധാരണ അവകലന സമീകരണങ്ങൾ

order	ക്രമം
Linear	രേഖീയ
Degree	ഘാതം
arbitrary constant	ആർബിറ്ററി സ്ഥിരാങ്കം
dependent variable	ആശ്രിത ചരങ്ങൾ
independent variable	സ്വതന്ത്ര ചരങ്ങൾ
integrating factor	സംയോജിപ്പിക്കുന്ന ഘടകം
homogeneous function	ഏകതാനമായ പ്രവർത്തനം

12th Mathematics Vol 2 Glossary Malayalam.indd 265 15-02-2023 15:33:15

അധ്യായം 11

സംഭാവ്യത വിതരണങ്ങൾ

bernoulli random variable	ബെർണോലി യാദൃശ്ചിക ചരം
binomial distribution	ദ്വിമാന വിതരണം
binomial random variable	ദ്വിമാന യാദൃശ്ചിക ചരങ്ങൾ
continuous random variable	തുടർച്ചയായ യാദൃശ്ചിക ചരങ്ങൾ
cumulative distribution function	സഞ്ചിത വിതരണ ഫലനം
discrete random variable	വ്യതിരിക്ത റാൻഡം വേരിയബിൾ
mathematical expectation	ഗണിത ശാസ്ത്രപ്രതീക്ഷ
probability density function	സംഭാവ്യത സാന്ദ്രത ഫലനം
probability mass function	സംഭാവ്യത മാസ്സ് ഫലനം
random variable	യാദൃശ്ചിക ചരം

അധ്യായം 12

വ്യതിരിക്തമായ ഗണിതം

Absorption law	ആഗിരണനിയമം
Algebraic structure	ബീജഗണിത ഘടന
Biconditional statement	ദ്വിസോപാധിക പ്രസ്താവന
Binary Operation	ദ്വയാങ്ക ക്രിയ
Boolean Algebra	ബൂളിയൻ ബീജഗണിതം
Boolean Matrix	ബൂളിയൻ മാട്രിക്സ്
Coding theory	കോഡിംഗ് സിദ്ധാന്തം
Compound statement	സംയുക്ത പ്രസ്താവന
Conditional statement	സോപാധിക പ്രസ്താവന
Conjunction	സംയോജനം
Contradiction	വൈരുദ്ധ്യം
Contra positive	നിശ്ചിത എതിർ പ്രസ്താവന
Disjunction	വിച്ഛേദിക്കൽ
Duality	ദ്വൈതത
Hypothesis	പരികല്പന
Involution law	കടന്നു കയറ്റ നിയമം
Logical connectives	യുക്തിപരമായ യോജിപ്പുകൾ
Logical equivalent	യുക്തിപരമായ തുല്യത
Negation	നിഷേധം (നിരസിക്കൽ)
Paradox	വിരോധാഭാസം
Simple statement	ലഘുപ്രസ്താവന
Tautology	പുനരുക്സി
Truth table	വാസ്തവിക പട്ടിക

12th Mathematics Vol 2 Glossary Malayalam.indd 266 15-02-2023 15:33:15

പരിശോധന പുസ്തകങ്ങൾ

(1) Larson R.E. Larson, B.H. Edwards, and R.P. Hostetle. *Calculus with Analytical Geometry, Fifth Edition.* D.C. Heath and Company, (1994).

(2) Smith R.T. Smith and R.B. Miltons. *Calculus concepts and connections*. McGraw Hill Company, (2006).

(3) Courant R. Courant and F. John. *Introduction to Calculus and Analysis; Volume One.* Inter Science Publishers, a Division of John Wiley and Sons, (1965).

(4) G.B. Thomas, et.al., *Thoma's Calculus,* Addison Wesley (2004).

(5) G.F. Simmons, *Calculus and Analytic Geometry.*

(6) Ulrich L.Rohde, G.C.Jain & Ajay K.Poddar. *Introduction to Integral Calculus.*

(7) Adrian Banner. *The Calculus,* Princeton University Press.

(8) Jerry Farlow, James E. Hall. Jean Marie McDill, and Beverly H. West, *Differential Equations and Linear Algebra*, (2nd Edition) Pearson Education, Inc, New York, (2007).

(9) Dennis G. Zill, *A First Course in Differential Equations with modeling Applications* (9th Edition), Brooks/Cole. Cengage Learning, Belmont, C.A, 2009.

(10) Shepley L.Ross, *Introduction to Ordinary Differential Equations*, Fourth Edition.

(11) William Feller ,John Wiley and sons., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications,* Vol. 1, 3rd Edition.

(12) Paul G. Hoel, Sidney C. Port, Charles J. Stone. *Introduction to Probability Theory*, (**1st Edition**) Published by Houghtion Mifflin.

(13) Bernard Kolman & Robert C. Busby; *Discrete Mathematics structured for Computer Science,* Second Edition Prentice hall of India Pvt. Ltd, New Delhi.

(14) Kenneth H.Rosen, *Discrete Mathematics and the Applications*, seventh Edition. Tata McGraw Hill Education Pvt ltd, New Delhi(2011).

(15) Trembly J.P.& Manohar, *Discrete Mathematical Structure with Applications to Computer Science(1st edition)*. Published by Mcgraw Hill.

CLASS 12 VOL-2 — MATHEMATICS
MALAYALAM MEDIUM

Academic Coordinator

K. Chandrasekaran,
Lecturer, DIET, Chennai.

Reviewer

S. Sree Latha, P.G.T
TCK H.S.S., Padanthalumoodu.
M. Abilash , P.G.T
Arunachalam H.S.S., Thiruvattar.

List of Translators

S.R. Sheeba Rani, B.T. Asst
St. Mary's H.S.S., Melpalai.
S.R. Monibun, B.T. Asst
St.Ephrem's M.S.C.H.S.S., Sooriacode.
N. Bindhu, B.T. Asst
St.Ephrem's H.S.S., Sooriacode.
A. Kumari Salma, B.T. Asst
Aided H.S.S., Arumanai.
L. Deepa Gopal, P.G.T
PPM H.S.S., Anducode.
V.P. Priya, B.T. Asst
PPM H.S.S., Anducode.
S. Chinchu, B.T. Asst
G.H.S.S., Kollemcode.
T.S. Ajith Singh, B.T. Asst
G.H.S.S., Palukal.

EMIS Technology Team

R.M. Satheesh
State Coordinator Technical,
TN EMIS, Samagra Shiksha.

K.P. Sathya Narayana
IT Consultant,
TN EMIS, Samagra Shikaha

R. Arun Maruthi Selvan
Technical Project Consultant,
TN EMIS, Samagra Shiksha

Layout & Illustrations

Ranjith, Pixels Print Media,
Parasale, Kerala.

In-House QC

V Sridhar,
Manohar,
S. Ashok,
Manik P
John Smith

Coordination

Ramesh Munisamy

This book has been printed on 80 G.S.M.
Elegant Maplitho paper.

Printed by Web Offset at :

12th Mathematics Vol 2 Text Book Dev Team Malayalam.indd 268 19-03-2022 21:14:58