GOVERNMENT OF TAMIL NADU

పన్నెండవ తరగతి

HIGHER SECONDARY SECOND YEAR

గణితశాస్త్రము

MATHEMATICS

భాగము –I

VOLUME –I

TELUGU MEDIUM

Department of School Education

Untouchability is Inhuman and a Crime

12th_Maths_Telugu_Medium_0_Index.indd 1 25-02-2023 10:24:49

Government of Tamil Nadu

First Edition - 2021

Revised Edition - 2022, 2023

Reprint - 2024

(Published under New Syllabus)

Content Creation

State Council of Educational Research and Training

© SCERT 2021

Printing & Publishing

Tamil NaduTextbook and Educational Services Corporation

www.textbooksonline.tn.nic.in

12th_Maths_Telugu_Medium_0_Index.indd 2 25-02-2023 10:24:49

HOW TO USE THE BOOK ?

Scope of Mathematics

- Awareness on the scope of higher educational opportunities; courses, institutions and required competitive examinations.
- Possible financial assistance to help students climb academic ladder.

Learning Objectives

- Overview of the unit
- Give clarity on the intended learning outcomes of the unit.



- Visual representation of concepts with illustrations
- Videos, animations, and tutorials.

ICT

- To increase the span of attention of concepts
- To visualize the concepts for strengthening and understanding
- To link concepts related to one unit with other units.
- To utilize the digital skills in classroom learning and providing students experimental learning.

Summary

- Recapitulation of the salient points of each chapter for recalling the concepts learnt.

Evaluation

- Assessing student's understanding of concepts and get them acquainted with solving exercise problems.

Books for Reference

- List of relevant books for further reading.

Scope for Higher Order Thinking

- To motivate students aspiring to take up competitive examinations such as JEE, KVPY, Math olympiad, etc., the concepts and questions based on Higher Order Thinking are incorporated in the content of this book.

Glossary

- Frequently used Mathematical terms have been given with their Tamil equivalents.

Mathematics Learning

The correct way to learn is to understand the concepts throughly. Each chapter opens with an Introduction, Learning Objectives, Various Definitions, Theorems, Results and Illustrations. These in turn are followed by solved examples and exercise problems which have been classified in to various types for quick and effective revision. One can develop the skill of solving mathematical problems only by doing them. So the teacher's role is to teach the basic concepts and problems related to it and to scaffold students to try the other problems on their own. Since the second year of Higher Secondary is considered to be the foundation for learning higher mathematics, the students must be given more attention to each and every concept mentioned in this book.

12th_Maths_Telugu_Medium_0_Index.indd 3 10-03-2022 12:49:12

విషయసూచిక

గణితశాస్త్రము

అధ్యాయము	పాఠ్యశీర్షిక	పుట సంఖ్య	నెల
1	**మాత్రికలు మరియు నిర్ధారకముల అనువర్తనాలు**	**1**	జూన్
1.1	పరిచయం	1	
1.2	సాధారణ విలోమ చతురస్ర మాత్రిక	2	
1.3	ఒక మాత్రికపై ప్రాథమిక పరివర్తనములు	18	
1.4	మాత్రికల అనువర్తనాలు: రేఖీయ సరళసమీకరణముల వ్యవస్థకు సాధనను కనుగొనుట	31	
1.5	మాత్రికల అనువర్తనాలు: రేఖాయ సమీకరణముల వ్యవస్థ యొక్క స్థిరత్వమును కోటి (శేణి) పద్ధతిని ఉపయోగించి కనుగొనుట	44	
2	**సంకీర్ణ సంఖ్యలు**	**60**	జూలై
2.1	సంకీర్ణ సంఖ్యల పరిచయం	60	
2.2	సంకీర్ణ సంఖ్యలు	63	
2.3	సంకీర్ణ సంఖ్యలపై ప్రాథమిక బీజగణిత లక్షణాలు లేదా ధర్మములు	67	
2.4	సంకీర్ణ సంఖ్యల సంయుగ్మము	70	
2.5	సంకీర్ణ సంఖ్యల మాపము	76	
2.6	సంకీర్ణ సంఖ్యల జ్యామితి మరియు బిందుపథము	83	
2.7	సంకీర్ణ సంఖ్యల ధృవ మరియు ఆయిలర్స్ రూపము	86	
2.8	డిమోయర్స్ సిద్ధాంతము మరియు దాని అనువర్తనాలు	95	
3	**సమీకరణముల సిద్ధాంతం**	**110**	జూలై
3.1	పరిచయం	110	
3.2	బహుపద సమీకరణముల యొక్క ప్రాథమిక అంశాలు	112	
3.3	వియట్టా యొక్క సూత్రములు మరియు బహుపద సమీకరణములను రూపొందించుట	114	
3.4	బహుపద సమీకరణముల యొక్క గుణకముల స్వభావము మరియు మూలముల స్వభావము	122	
3.5	రేఖాగణితములు బహుపద సమీకరణముల ఉపయోగములు	128	
3.6	ఉన్నత అంతస్థు గల బహుపద సమీకరణపు మూలములు	129	
3.7	మరిన్ని విషయములతో కూడిన బహుపద సమాసములు	131	
3.8	అధిక వివరములేని బహుపద సమీకరణములు	137	
3.9	డెస్కార్టెస్ నియమము	144	
4	**విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు**	**150**	జూలై / ఆగష్టు
4.1	పరిచయం	150	
4.2	కొన్ని ప్రాథమిక అంశాలు	151	
4.3	సైన్ ప్రమేయం మరియు విలోమ సైన్ ప్రమేయం	154	
4.4	కొసైన్ ప్రమేయం మరియు విలోమ కొసైన్ ప్రమేయం	160	

12th_Maths_Telugu_Medium_0_Index.indd 4 10-03-2022 12:49:12

4.5	టాంజెన్ట్ ప్రమేయం మరియు విలోమ టాంజెన్ట్ ప్రమేయం	166	
4.6	కొసీకెంట్ ప్రమేయం మరియు విలోమ కొసీకెంట్ ప్రమేయం	172	
4.7	సీకెంట్ ప్రమేయం మరియు విలోమ సీకెంట్ ప్రమేయం	173	
4.8	కొటాంజెంట్ ప్రమేయం మరియు విలోమ కొటాంజెంట్ ప్రమేయం	175	
4.9	విలోమ త్రికోణమితి ప్రమేయముల యొక్క ప్రధాన విలువ	177	
4.10	విలోమ త్రికోణమితి ప్రమేయము యొక్క ధర్మములు	179	
5	**ద్విపరిమాణ రేఖాగణితము-II**	**197**	ఆగష్టు
5.1	పరిచయము	197	
5.2	వృత్తము	198	
5.3	శాంకవాలు	210	
5.4	శాంకవచ్ఛేదన విభాగములు	227	
5.5	శాంకవాలు పరామితీయ రూపము	229	
5.6	శాంకవాలు స్పర్శరేఖలు మరియు అభిలంబములు	232	
5.7	నిత్యజీవితంలో శాంకవాలు అనువర్తనాలు	238	
6	**సదిశ బీజగణిత అనువర్తనములు**	**254**	ఆగష్టు / సెప్టెంబర్
6.1	పరిచయము	254	
6.2	సదిశల రేఖాగణిత పరిచయము	255	
6.3	అదిశా లబ్ధము మరియు సదిశా లబ్ధము	257	
6.4	అదిశా త్రిక లబ్ధము	265	
6.5	సదిశా త్రిక లబ్ధము	272	
6.6	జాకోబి యొక్క తత్సమము మరియు లాగ్రేంజ్ యొక్క తత్సమము	274	
6.7	త్రిపరిమాణ రేఖాగణితములో సదిశల ఉపయోగములు	277	
6.8	ఒక తలము యొక్క సమీకరణపు వివిధ రూపాలు	291	
6.9	ఒక తలములో ఒక బిందువు యొక్క ప్రతిబింబము	312	
6.10	ఒక సరళరేఖ మరియు తలము సంధించు బిందువు	313	
జవాబులు		**322**	
పదకోశములు		**332**	

GEK8O

అంతర్జాల పుస్తకము

N9UVC

మూల్యాంకనము

12th_Maths_Telugu_Medium_0_Index.indd 5 10-03-2022 12:49:12

12th_Maths_Telugu_Medium_0_Index.indd 6

Scope for students after completing Higher Secondary

EXAMS

Joint Entrance Examination (JEE) Main	
Purpose	For Admission in B. E./B. Tech., B. Arch., B. Planning
Eligibility	Class 12 pass (PCM)
Application Mode	Online
Source	http://jeemain.nic.in
JEE Advanced	
Purpose	Admission in UG programmes in IITs and ISM Dhanbad
Eligibility	Class 12 Pass (PCM)
Application Mode	Online
Source	http://jeeadv.iitd.ac.in/
Indian Maritime University Common Entrance Test	
Purpose	Admission in Diploma in Nautical Science (DNS) leading to BSc. (Nautical Science)
Eligibility	Class 12 (PCM)
Application Mode	By post
Source	www.imu.edu.in/index.php
Indian Navy B.Tech Entry Scheme	
Purpose	Admission in Indian Navy B.Tech course
Eligibility	Class 12 passed
Application Mode	Online
Source	www.nausena-bharti.nic.in/index.php

EXAMS

Indian Navy Sailors Recruitment	
Purpose	Admission in 24 weeks Basic training at INS Chilka followed by Professional training
Eligibility	Class 12 (Maths and Physics/Chem./Bio/Computer Sc.)
Application Mode	Online, By Post
Source	www.nausena-bharti.nic.in/index.php
Defence Indian Army Technical Entry Scheme (TES)	
Purpose	Technical Entry to Army
Eligibility	Class 12 PCM
Application Mode	Online
Source	www.joinindianarmy.nic.in/
National Defence Academy and Naval Academy Examination (I)	
Purpose	Admission to Army and Air Force wings of NDA and 4 years B. Tech course for the Indian Naval Academy Course (INAC)
Eligibility	Class 12 Passed
Application Mode	Online
Source	www.upsc.gov.in/

10-03-2022 12:49:12

12th_Maths_Telugu_Medium_0_Index.indd 7

Scope for students after completing Higher Secondary



EXAMS

- If you have aspiration to become a scientist/teacher, you can do degree course in mathematics in any college of your choice. Doing B.Sc., mathematics with your knowledge which acquired in XII standard mathematics will definitely elevate you to a better career.
- There are some institutions such as IIT's, IISc., ISI's and Anna University which admit students at XII Standard level for their Integrated Courses leading to the award of M.Sc., degree in mathematics/engineering/Statistics/ Computer Science .

In Mathematics, the following degrees programmes are offered:

- 3-year BSc	- 4-year Integrated B.Sc-B.Ed.
- 3-year B. Math	- 4-year BS
- 4-year B. Tech	- 5-year Integrated M.Sc /MS

BITSAT

Purpose- For admission to Integrated First Degree Programmes in BITS Pilani, Goa & Hyderabad campuses.

National Aptitude Test in Architecture (NATA)

Purpose- Admission to B.Arch. program

Kishore Vaigyanik Protsahan Yojana (KVPY)

Purpose- Fellowship and admission to IISc Banglore in 4 year BS Degree

Indian Statistical Institute (ISI) Admission

Purpose-Admission in B Stat (Hons), B Math (Hons)

Chennai Mathematical Institute

Purpose- Admission in BSc (Hons) in Mathematics and Computer Science, BSc (Hons) in Mathematics and Physics



Job Opportunities

- You have acquired sufficient analytical still to appear for competitive examinations conducted by various organizations such as TNPSC, UPSC, BSRB, RSB.
- You are placed with better opportunity to get recruitment directly into some of the top Multi National Companies.
- You can plan to take up engineering degree course to acquire BE/B.TECH in any of the leading Technical Institutions/Universities/Engineering colleges. Institutions such as IIT's , IISc, NIT's conduct All India Level Entrance Examinations to admit students.

• Indian Forest Services	• Scientist Jobs in ISRO, DRDO, CSIR labs
• Union Public Service Commission	• Staff Selection Commission
• Indian Defense Services	• Public Sector Bank
• Tax Assistant	• Statistical Investigator
• Combined Graduate Level Exam	• Tamil Nadu Public Service Commission
• Teaching Profession	

10-03-2022 12:49:12

12th_Maths_Telugu_Medium_0_Index.indd 8

Scholarship and Research Opportunities



FINANCIAL ASSISTANCE

- Scholarship for Graduate and Post – Graduate courses
- NTSE at the end of X (from class XI to Ph.D)
- International Olympiad: for getting stipend for Higher Education in Science and Mathematics
- DST – INSPIRE Scholarships (for UG and PG)
- DST – INSPIRE Fellowships (for Ph.D)
- UGC National Fellowships (for Ph.D)
- Indira Gandhi Fellowship for Single Girl Child (for UG and PG)
- Moulana Azad Fellowship for minorities (for Ph.D)
- In addition various fellowships for SC / ST / PWD / OBC etc are available. (Visit website of University Grants Commission (UGC) and Department of Science and Technology (DST))
- University Fellowships
- Tamil Nadu Collegiate Education fellowship.



RESEARCH INSTITUTIONS

NAME OF THE INSTITUTION	WEBSITE
Indian Institute of Science (IISc) Bangalore	www.iisc.ac.in
Chennai Mathematical Institute (CMI) Chennaie	www.cmi.ac.in
Tata Institue of Fundamental Research (TIFR) Mumbai	www.tifr.res.in
Indian Institute of Space Science and Technology (IIST) Trivandrum	www.iist.ac.in
National Institute of Science Education and Research (NIS-ER)	www.niser.ac.in
Birla Institute of Technology and Science, Pilani	www.bits-pilani.ac.in
Indian Institute of Science Education and Research	www.iiseradmission.in
Anna University	https://www.annauniv.edu/
Indian Institute of Technology in various places (IIT's)	www.iitm.ac.in
National Institute of Technology (NITs)	www.nitt.edu
Central Universities	www.cucet.ac.in
State Universities	www.ugc.ac.in
Tamil Nadu agricultural University (tnau.ac.in)	tnau.ac.in
International Institute of Information Technology	www.iiit.ac.in
The Institute of Mathematical Sciences (IMSC) Chennai.	www.imsc.res.in
Hyderabad Central university, Hyderabad.	www.uohyd.ac.in
Delhi University, Delhi	www.du.ac.in
Mumbai University, Mumbai	www.mu.ac.in
Savithiri Bai Phule Pune University, Pune	www.unipune.ac.in

10-03-2022 12:49:13

అధ్యాయము
1

మాత్రికలు మరియు నిర్ధారకముల అనువర్తనాలు

"ఆర్కిమెడిస్, న్యూటన్, గాస్ వంటి ప్రసిద్ధ గణితశాస్త్రవేత్తలు సిద్ధాంతాలు మరియు అనువర్తనాలు రెండింటిపై సమానంగా పనిచేశారు."

–ఫెలిక్స్ క్లాయిన్

1.1 పరిచయం



కార్ల్‌ఫ్రెడరిక్ గాస్
(1777-1855)
భౌతికశాస్త్రవేత్త

వాస్తవ ప్రపంచ సమస్యల గణిత నమూనాలుగా ఉత్పన్నమయ్యే సరళ సమీకరణాల నిర్వహణ వ్యవస్థలో మాత్రికలు చాలా ముఖ్యమైనవి మరియు అనివార్యమైనవి. గణితశాస్త్రవేత్తలు గాస్, జోర్డాన్, కేలే మరియు హామిల్టన్ మాత్రికల సిద్ధాంతాన్ని అభివృద్ధిపరిచారు. ఇవి సరళ సమీకరణ వ్యవస్థల పరిష్కారాలను పరిశోధించడంలో ఉపయోగించబడ్డాయి.

ఈ అధ్యాయంలో సరళ సమీకరణాల పరిష్కార వ్యవస్థలో మాత్రికల కొన్ని అనువర్తనాలను మనము ప్రదర్శిస్తాము. ప్రత్యేకంగా చెప్పాలంటే మనము నాలుగు పద్ధతులను అధ్యయనం చేస్తాము. అవి: (i) మాత్రికా విలోమ పద్ధతి (ii) క్రామర్స్ నియమము (iii) గాస్సియన్ తొలగించు పద్ధతి (iv) కోటి లేదా శ్రేణి పద్ధతి. ఈ పద్ధతులను తెలుసుకొనే ముందు మనము క్రింది వాటిని పరిచయం చేస్తాము. (i) సాధారణ విలోమచతురస్ర మాత్రిక, (ii) మాత్రిక తరగతి, (iii) ప్రాథమిక అడ్డువరుస మరియు నిలువ వరుస పరివర్తనాలు మరియు, (iv) సరళ సమీకరణాల వ్యవస్థ స్థిరత్వం

అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ అధ్యాయం పూర్తయిన పిదప, విద్యార్థులు చేయగలిగినవి

- సరళ సమీకరణాల వ్యవస్థలను పరిష్కరించడానికి కొన్ని ప్రాథమిక సాధనాలను ప్రదర్శించగలరు:
  - చతురస్ర మాత్రిక యొక్క అనుబంధం
  - అవిలక్షణ మాత్రిక లేదా సాధారణ మాత్రిక యొక్క విలోమం
  - ప్రాథమిక అడ్డు వరుస మరియు నిలువ వరుస కార్యకలాపాలు
  - రో–ఎక్‌లాన్ రూపం
  - మాత్రిక తరగతి
- సాధారణ విలోమ మాత్రికను కనుగొనడానికి అడ్డు వరుస కార్యకలాపాలను ఉపయోగించడం
- సరళ సమీకరణాల వ్యవస్థను పరిక్షించడంలో క్రింది పద్ధతులను ఉపయోగించడం
  - మాత్రిక విలోమ పద్ధతి
  - క్రామర్స్ నియమం
  - గాస్సియన్ తొలగించు పద్ధతి
- సజాతీయత లేని సరళ సమీకరణాల వ్యవస్థ స్థిరత్వాన్ని పరిక్షించడం
- సజాతీయ సరళ సమీకరణాల వ్యవస్థ యొక్క తృణప్రాయంకాని (non-trivial) సాధనలను పరిక్షించడం

GWEX7

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 1 10-03-2022 10:25:48

1.2 సాధారణ విలోమ చతురస్ర మాత్రిక

ఒక చతురస్ర మాత్రిక యొక్క నిర్ధారకం విలువ శూన్యేతరమైన ఆ మాత్రికను సాధారణ మాత్రిక అని మరియు ఒక చతురస్ర మాత్రిక నిర్ధారకం విలువ శూన్యమైన ఆ మాత్రికను అసాధారణ మాత్రిక అని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొందాము. మాత్రికను సదిశతో గుణకారం. ఒక మాత్రికను మరొక మాత్రికతో గుణకారం మరియు మాత్రికల కూడికలను గురించి ముందు తరగతిలో చదువుకొన్నాము. అయిన ఒక మాత్రికను మరొక మాత్రికతో భాగహార న్యాయమును రూపొందించుటకు వీలుకాదు. ఎందుకనగా మాత్రిక అనునది సంఖ్యలతో రూపొందించిన ఒక నిర్మాణం మరియు మాత్రికకు సంఖ్య విలువ లేదు. A అను మాత్రిక వరుస n అయిన ఆ మాత్రిక n నిలువు మరియు అడ్డు వరుసలను కలిగియుండును.

$x \neq 0$ అను వాస్తవ సంఖ్యకు $y\left(=\frac{1}{x}\right)$ అయిన ఒక వాస్తవ సంఖ్యను $xy = yx = 1$ అని చూడగలము. y అనునది x యొక్క విలోమము (లేదా x యొక్క విలోమము) అని చెప్పబడును. ఇదేవిధంగా, మాత్రిక A, B ల లబ్ధము AB మరియు BA గా గుర్తించిన $AB = BA = I$. ఇక్కడ I అనునది తత్సమ లేదా యూనిట్ మాత్రిక.

ఈ భాగంలో సాధారణ మాత్రిక కలిగిన చతురస్ర మాత్రిక విలోమమును నిర్వచించాము మరియు తత్సమము కాని చతురస్ర మాత్రికకు ప్రత్యేకమైన విలోమం ఉందని నిరూపిస్తాము. విలోమ మాత్రిక యొక్క కొన్ని లక్షణాలను అధ్యయనము చేస్తాము. వీటి గురించి తెలుసుకొనుటకు చతురస్ర మాత్రికకు అనుబంధ మాత్రిక కావలెను.

1.2.1 చతురస్ర మాత్రిక యొక్క అనుబంధం

ఒక చతురస్ర మాత్రికను అనుబంధ మాత్రికగా ఏర్పరచుటకు మునుపు ఒక చతురస్ర మాత్రికలో యుండు మూలకాల యొక్క లక్షణాలను జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొందాం. A అను చతురస్ర మాత్రిక యొక్క వరుసను n అనిన ఈ మాత్రికను నిర్ధారక మాత్రిక అంటారు. దీనిని $|A|$ లేదా $\det(A)$ అని సూచిస్తాము. A లో i అనునది అడ్డువరుసగాను j అనునది నిలువు వరుసగాను సంధించు స్థాన మూలకము a_{ij} అగును.

i అను అడ్డువరుసను j అను నిలువువరుసను తీసివేయగా లభించు $(n-1)$ వరుస ఒక ఉపమాత్రిక అగును. ఈ ఉపమాత్రిక నిర్ధారకం శూన్యేతర విలువ మూలకం a_{ij} కు లఘు నిర్ధారకం అగును. దీనిని M_{ij} అని గుర్తించెదము. M_{ij} మరియు $(-1)^{i+j}$ యొక్క లబ్ధము a_{ij} కు సహకారిణి అగును. దీనిని A_{ij} అని గుర్తించుతాము. ఈ విధంగా a_{ij} కు సహకారిణి $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

ఒక చతురస్ర మాత్రికలోని మూలకాలు, వాటి యొక్క సహకారిణి మూలకాలు కలిగిన ఒక ముఖ్య లక్షణము, ఆ మాత్రికలో ఏదేని ఒక అడ్డు వరుసలోని మూలకములను మరియు వాటి యొక్క ఏక సహకారణిల గుణక లబ్ధములను కూడిన ఫలితము. ఆ మాత్రిక నిర్ధారక విలువకు సమానమగును. మరియు ఏదేని ఒక అడ్డు వరుస మూలకములు మరియు వేరు ఏదైనా అడ్డువరుస మూలకముల ఏక సహకారిణి గుణకార లబ్ధములను కూడిన శూన్యమగును. అంటే,

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = \begin{cases} |A| & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j, \end{cases}$$

ఇక్కడ $|A|$ అనునది ఒక చతురస్ర మాత్రిక నిర్ధారకం శూన్యేతర విలువ అగును. దీనిని A యొక్క మాత్రిక నిర్ధారకం అని పిలిచెదరు. $|A|$ అనునది ఒక వాస్తవ సంఖ్య. ఇది ఋణాత్మకసంఖ్యగాను ఉండవచ్చు. ఉదా:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(1-2) - 1(1-2) + 1(2-2) = -2 + 1 + 0 = -1.$$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 2 10-03-2022 10:25:52

నిర్వచనము 1.1

A అనునది nవ తరగతి కలిగిన ఒక చతురస్ర మాత్రిక అనుకొందాము. A లో గల ఒక్కొక్క a_{ij} కు దానికి తగిన సహకారిణి A_{ij} వలన లభించు మాత్రికను A యొక్క సహకారిణి మాత్రిక అంటారు. A యొక్క సహకారిణి మాత్రిక అడ్డు, నిలువువరుసలను మార్చిన వచ్చు మాత్రికను A యొక్క అనుబంధ మాత్రిక అని అంటారు. దీనిని $adj\,A$ అని గుర్తించెదరు.

గమనిక

ఇచ్చట $adj\,A$ అనునది nవ తరగతి కలిగిన ఒక చతురస్ర మాత్రిక మరియు
$\text{adj } A = \left[A_{ij}\right]^T = \left[(-1)^{i+j} M_{ij}\right]^T$.

ముఖ్యంగా 3వ తరగతి కలిగిన ఒక చతురస్ర మాత్రిక $adj\,A$ యొక్క అనుబంధ మాత్రిక అయినది

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} +M_{11} & -M_{12} & +M_{13} \\ -M_{21} & +M_{22} & -M_{23} \\ +M_{31} & -M_{32} & +M_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

సిద్ధాంతము 1.1

ఒక్కొక్క nవ తరగతి కలిగిన చతురస్ర మాత్రిక A నకు $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_n$.

నిరూపణ

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ అని తీసుకొనిన ఈ సిద్ధాంతమును ఒక $n=3$ చతురస్ర మాత్రికతో నిరూపించెదము.

సహకారిణి లక్షణాలు అనుసరించి

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = |A|, \quad a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0, \quad a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33} = 0;$$
$$a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{23}A_{13} = 0, \quad a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = |A|, \quad a_{21}A_{31} + a_{22}A_{32} + a_{23}A_{33} = 0;$$
$$a_{31}A_{11} + a_{32}A_{12} + a_{33}A_{13} = 0, \quad a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} = 0, \quad a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = |A|.$$

పై సమీకరణమును ఉపయోగించిన లభించునది

$$A(\text{adj}A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| I_3 \qquad \ldots (1)$$

$$(\text{adj}A)A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix} = |A| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| I_3, \qquad \ldots (2)$$

ఇచ్చట I_3 అనునది మూడువ తరగతి కలిగిన ఒక యూనిట్ మాత్రిక అగును.

సమీకరణము (1) మరియు (2)ల నుండి వచ్చునది $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_3$. ■

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 3 10-03-2022 10:26:00

గమనిక

A అనునది nవ తరగతి కలిగిన శూన్య మాత్రిక అనిన, $|A| = 0$ కనుక $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = O_n$,

ఇక్కడ O_n అనునది nవ తరగతి కలిగిన శూన్య మాత్రిక అగును.

ఉదాహరణ 1.1

$A = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ అయిన $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_3$ ను సరిచూడుము.

సాధన

$$|A| = \begin{vmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 8(21-16) + 6(-18+8) + 2(24-14) = 40 - 60 + 20 = 0.$$

అనుబంధ మాత్రిక నిర్వచనమును అనుసరించి లభించునది

$$\text{adj } A = \begin{bmatrix} (21-16) & -(-18+8) & (24-14) \\ -(-18+8) & (24-4) & -(-32+12) \\ (24-14) & -(-32+12) & (56-36) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 20 \end{bmatrix}.$$

కావున

$$A(\text{adj } A) = \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 20 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 40-60+20 & 80-120+40 & 80-120+40 \\ -30+70-40 & -60+140-80 & -60+140-80 \\ 10-40+30 & 20-80+60 & 20-80+60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0I_3 = |A| I_3,$$

అదేవిధంగా మనకు లభించునది

$$(\text{adj } A)A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 20 \\ 10 & 20 & 20 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & -6 & 2 \\ -6 & 7 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 40-60+20 & -30+70-40 & 10-40+30 \\ 80-120+40 & -60+140-80 & 20-80+60 \\ 80-120+40 & -60+140-80 & 20-80+60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0I_3 = |A| I_3.$$

కావున $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_3$ అనునది సరిచూడబడినది. ■

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 4 10-03-2022 10:26:06

1.2.2 ఒక చతురస్ర మాత్రిక యొక్క విలోమ మాత్రిక

ఇప్పుడు విలోమ చతురస్ర మాత్రికను నిర్వచించెదము.

నిర్వచనము 1.2

A అనునది nవ తరగతి కలిగిన చతురస్ర మాత్రిక అనుకొనుము. $AB = BA = I_n$, అయ్యేటట్లుగా B అనే చతురస్ర మాత్రిక ఉంటే B ని A యొక్క విలోమ మాత్రిక అంటారు.

సిద్ధాంతము 1.2

ఒక చతురస్ర మాత్రికకు విలోమము ఉంటే అది ఏకైకము అగును.

నిరూపణ:

A అనునది nవ తరగతి కలిగి ఉంటూ విలోమము కలిగిన ఒక చతురస్ర మాత్రిక. వీలైన B మరియు C అను రెండు మాత్రికలు A యొక్క విలోమ మాత్రికలు అనుకొందాము. నిర్వచనమును అనుసరించి $AB = BA = I_n$ మరియు $AC = CA = I_n$ అగును.

ఈ సమీకరణమును ఉపయోగించినచో

$$C = CI_n = C(AB) = (CA)B = I_nB = B.$$

కావున విలోమము ఏకైకముగా ఉండును.

సంకేతము A విలోమము A^{-1} అని గుర్తించబడినది. ■

గమనిక

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

సిద్ధాంతము 1.3

A అనునది nవ తరగతి కలిగిన చతురస్ర మాత్రిక అనుకొందాము. అప్పుడు A^{-1} అనేది సాధారణ మాత్రిక అయితేనే A కు విలోమము తథ్యం.

నిరూపణ

A^{-1} వ్యవస్థితము అయితే $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. కావున

నిర్ధారక మాత్రికల గుణకార నియమము ఉపయోగించిన

$\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(A^{-1})\det(A) = \det(I_n) = 1$. కావున, $|A| = \det(A) \neq 0$.

కావున A అనునది సాధారణ మాత్రికగా ఉండును.

మరొక విధంగా A అనునది సాధారణ మాత్రిక.

కావున $|A| \neq 0$. సిద్ధాంతం 1.1 మూలంగా లభించునది

$$A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_n.$$

ఈ సమీకరణమును $|A|$, చే భాగించగా లభించునది.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 5 10-03-2022 10:26:10

$$A\left(\frac{1}{|A|}\text{adj } A\right)=\left(\frac{1}{|A|}\text{adj } A\right)A=I_n.$$

దీని నుండి $AB=BA=I_n$ అనిన $B=\frac{1}{|A|}\text{adj } A$ అను మాత్రికను కనుగొనవచ్చును.

కావున A విలోమం $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{adj } A$ అగును. ■

సూచన

అసాధారణ మాత్రిక నిర్ధారక విలువ 0. కావున అసాధారణ మాత్రికకు విలోమము కనుగొనుటకు వీలుకాదు.

ఉదాహరణ 1.2

$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ అను సాధారణ మాత్రికకు A^{-1} ను కనుగొనుము.

సాధన

అనుబంధ మాత్రికను కనుగొందుము.

నిర్వచనమును బట్టి $\text{adj } A=\begin{bmatrix} +M_{11} & -M_{12} \\ -M_{21} & +M_{22} \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$.

A అనునది సాధారణ మాత్రిక, కావున $|A|=ad-bc\neq 0$.

$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\text{adj } A$, అయిన $A^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$. ■

ఉదాహరణ 1.3

$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ అను మాత్రికకు విలోమమును కనుగొనండి.

సాధన $A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. $|A|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -5 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \end{vmatrix}=2(7)+(-12)+3(-1)=-1\neq 0.$

కావున A^{-1} ను కనుగొనవచ్చును.

$$\text{adj } A=\begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} 7 & 12 & -1 \\ 9 & 15 & -1 \\ -10 & -17 & 1 \end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix} 7 & 9 & -10 \\ 12 & 15 & -17 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

కావున, $A^{-1}=\frac{1}{|A|}(\text{adj } A)=\frac{1}{(-1)}\begin{bmatrix} 7 & 9 & -10 \\ 12 & 15 & -17 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -7 & -9 & 10 \\ -12 & -15 & 17 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. ■

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 6 10-03-2022 10:26:17

1.2.3 విలోమ మాత్రిక యొక్క లక్షణాలు

విలోమము కనుగొనుటకు వీలగు మాత్రికల లక్షణాలు కొన్నింటిని మరియు అందులో కొన్ని లక్షణాలను నిరూపించెదము.

సిద్ధాంతము 1.4

A సాధారణ మాత్రిక అయిన

(i) $\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}$ (ii) $\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$ (iii) $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$, ఇక్కడ λ అనునది శూన్యేతర సదిశ.

నిరూపణ

A సాధారణ మాత్రిక కావున $|A|\neq 0$ మరియు A^{-1} కనుగొనుటకు వీలగును. నిర్వచనమును బట్టి

$$AA^{-1}=A^{-1}A=I_n. \qquad \ldots(1)$$

(i) సమీకరణము (1) మూలంగా లభించునది $\left|AA^{-1}\right|=\left|A^{-1}A\right|=\left|I_n\right|$.

నిర్ధారక గుణకార నియమమును ఉపయోగించి $|A|\left|A^{-1}\right|=\left|I_n\right|=1$.

కావున, $\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}$.

(ii) సమీకరణము (1) నుండి, $\left(AA^{-1}\right)^{T}=\left(A^{-1}A\right)^{T}=\left(I_n\right)^{T}$.

వ్యత్యయ నియమమును బట్టి $\left(A^{-1}\right)^{T}A^{T}=A^{T}\left(A^{-1}\right)^{T}=I_n$.

కావున, $\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$.

(iii) λ అనునది శూన్యేతర సదిశ కావున సమీకరణము (1) నుండి $(\lambda A)\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right)=\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right)(\lambda A)=I_n$.

కావున, $(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$. ■

సిద్ధాంతం 1.5 ఎడమవైపు తొలగించు నియమము (Left Cancellation Law)

A,B మరియు C అనునవి nవ వరుస క్రమము గల చతురస్ర మాత్రిక అనుకొనుము. A అనునది సాధారణ మాత్రిక మరియు $AB=AC$, అయితే $B=C$. అగును.

నిరూపణ

A అనునది సాధారణ మాత్రిక, కావున A^{-1} ను సాధించుటకు వీలగును. మరియు $AA^{-1}=A^{-1}A=I_n$. $AB=AC$ అని తీసుకొని మరియు ఇరువైపులా ఎడమవైపున A^{-1} చే గుణించగా $A^{-1}(AB)=A^{-1}(AC)$. మాత్రికల గుణకారం మరియు సహచర ధర్మమును ఉపయోగించడం వలన మనకు $B=C$ లభించును. ■

సిద్ధాంతం 1.6 (కుడివైపు తొలగించు నియమం) (Right Cancellation Law)

A,B మరియు C అనునవి nవ తరగతి గల చతురస్ర మాత్రిక అనుకొందాము. అయిన A అనునది సాధారణ మాత్రిక మరియు $BA=CA$ అయితే $B=C$ అగును.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 7 10-03-2022 10:26:24

నిరూపణ

A అనునది సాధారణ మాత్రిక కావున A^{-1} సాధించుటకు వీలగును. మరియు $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. $BA = CA$ ను ఇరువైపుల కుడివైపున A^{-1} చే గుణించగా $(BA)A^{-1} = (CA)A^{-1}$ మాత్రికల గుణకారం మరియు సహచర ధర్మమును ఉపయోగించడం వలన మనకు $B = C$ లభించును. ■

గమనిక

A అనునది అసాధారణ మాత్రిక మరియు $AB = AC$ లేదా $BA = CA$, అయిన B ను, C ను సమానముగా ఉండనవసరం లేదు. ఉదాహరణకు

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ మరియు $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. గా తీసుకొనిన

ఇక్కడ $|A| = 0$ మరియు $AB = AC$ అయితే $B \neq C$ అనునది గుర్తించదగును.

సిద్ధాంతం 1.7 విలోమముల వ్యతిరేఖ నియమం (Reversal Law for Inverses)

A మరియు B అనునవి ఒకే వరుసలో ఉండే సాధారణ మాత్రికలు అయిన వాటి గుణకార ఫలితము AB కూడా సాధారణ మాత్రిక అగును. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

నిరూపణ

A మరియు B అనునవి n వరుస క్రమము గల సాధారణ మాత్రికలు అగును. కావున $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$, అయితే A^{-1} మరియు B^{-1} సాధించుటకు వీలగును. మరియు అవి nవ తరగతిగా కల్గియుండును. AB మరియు $B^{-1}A^{-1}$ ల గుణకార ఫలితములు n తరగతిగా ఉండును. నిర్ధారక మాత్రికల గుణకార ఫలితము న్యాయము నుండి లభించునది $|AB| = |A||B| \neq 0$. కావున AB సాధారణ మాత్రిక అగును మరియు

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (A(BB^{-1}))A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n;$$
$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = (B^{-1}(A^{-1}A))B = (B^{-1}I_n)B = B^{-1}B = I_n.$$

కావున $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. ■

సిద్ధాంతము 1.8 రెట్టింపు విలోమ న్యాయము (Law of Double Inverse)

A అనునది సాధారణ నిర్ధారక మాత్రిక అయిన A^{-1} సాధారణ మాత్రిక మరియు $(A^{-1})^{-1} = A$.

నిరూపణ

A అనునది సాధారణ మాత్రిక అనుకొందాము. కావున $|A| \neq 0$ మరియు A^{-1} ను సాధించగలము.

$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \neq 0 \Rightarrow A^{-1}$ అనునది సాధారణ మాత్రిక మరియు $AA^{-1} = A^{-1}A = I$.

ఇప్పుడు, $AA^{-1} = I \Rightarrow \left(AA^{-1}\right)^{-1} = I \Rightarrow \left(A^{-1}\right)^{-1} A^{-1} = I$. ... (1)

సమీకరణము (1)ని ఇరువైపులా A తో ఎడమ ప్రక్కన గుణించగా $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$. ■

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 8 10-03-2022 10:26:34

సిద్ధాంతము 1.9

A అనునది n తరగతిగా కలిగిన సాధారణ చతురస్ర మాత్రిక అయిన

(i) $(\text{adj } A)^{-1} = \text{adj}\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{|A|} A$ (ii) $|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$

(iii) $\text{adj}(\text{adj } A) = |A|^{n-2} A$ (iv) $\text{adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1}\text{adj}(A)$, λ అనునది శూన్యేతర సదిశ

(v) $|\text{adj}(\text{adj}A)| = |A|^{(n-1)^2}$ (vi) $(\text{adj } A)^T = \text{adj}\left(A^T\right)$

నిరూపణ

A అనునది సాధారణ చతురస్ర మాత్రిక అయినందున $|A| \neq 0$. కావున

(i) $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}(\text{adj } A) \Rightarrow \text{adj } A = |A| A^{-1} \Rightarrow (\text{adj } A)^{-1} = \left(|A| A^{-1}\right)^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\left(A^{-1}\right)^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A$.

A కు బదులుగా A^{-1} ను $\text{adj } A = |A| A^{-1}$, ప్రతిక్షేపించగా $\text{adj}\left(A^{-1}\right) = \left|A^{-1}\right|\left(A^{-1}\right)^{-1} = \dfrac{1}{|A|} A$.

కావున లభించునది $(\text{adj } A)^{-1} = \text{adj}\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{|A|} A$.

(ii) $A(\text{adj } A) = (\text{adj } A)A = |A| I_n \Rightarrow \det\left(A(\text{adj } A)\right) = \det\left((\text{adj } A)A\right) = \det\left(|A| I_n\right)$

$\Rightarrow |A||\text{adj } A| = |A|^n \Rightarrow |\text{adj } A| = |A|^{n-1}$.

(iii) B అనునది n, తరగతిగా కలిగిన సాధారణ మాత్రిక అయిన $B(\text{adj } B) = (\text{adj } B)B = |B| I_n$.

$B = \text{adj } A$. ప్రతిక్షేపించగా లభించునది, $(\text{adj } A)(\text{adj}(\text{adj } A)) = |\text{adj } A| I_n$.

$|\text{adj } A| = |A|^{n-1}$ దానివలన, $(\text{adj } A)(\text{adj}(\text{adj } A)) = |A|^{n-1} I_n$.

ఇరుప్రక్కల A, చే ముందువైపుగా గుణించగా $A\left((\text{adj } A)(\text{adj } (\text{adj } A))\right) = A\left(|A|^{n-1} I_n\right)$.

మాత్రికల గుణకార సహచర్య నియమం ఉపయోగించిన

$\left(A(\text{adj } A)\right)\text{adj}(\text{adj } A) = A\left(|A|^{n-1} I_n\right)$.

కావున $\left(|A| I_n\right)\left(\text{adj}(\text{adj } A)\right) = |A|^{n-1} A$. అప్పుడు, $\text{adj}(\text{adj } A) = |A|^{n-2} A$.

(iv) A కు λA అని $\text{adj}(A) = |A| A^{-1}$ ఇందులో λ అనునది శూన్యేతర సదిశ ప్రతిక్షేపించగా లభించునది

$\text{adj}(\lambda A) = |\lambda A|(\lambda A)^{-1} = \lambda^n |A| \dfrac{1}{\lambda} A^{-1} = \lambda^{n-1} |A| A^{-1} = \lambda^{n-1}\text{adj}(A)$.

(v) (iii) వ సమీకరణము ఆధారంగా $\text{adj}(\text{adj } A) = |A|^{n-2} A$. ఇరువైపులా నిర్ధారక మాత్రికను సాధించిన

$|\text{adj}(\text{adj}A)| = \left||A|^{n-2} A\right| = \left(|A|^{(n-2)}\right)^n |A| = |A|^{n^2-2n+1} = |A|^{(n-1)^2}$.

(vi) A కు బదులుగా A^T ని $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\text{adj } A$, ప్రతిక్షేపించగా లభించునది $\left(A^T\right)^{-1} = \dfrac{1}{|A^T|}\text{adj}\left(A^T\right)$,

అయిన $\text{adj}\left(A^T\right) = |A^T|\left(A^T\right)^{-1} = |A|\left(A^{-1}\right)^T = \left(|A| A^{-1}\right)^T = \left(|A| \dfrac{1}{|A|}\text{adj } A\right)^T = (\text{adj } A)^T$. ■

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 9 10-03-2022 10:26:49

గమనిక

A అనునది 3వ తరగతి కలిగిన సాధారణ మాత్రిక అయిన $|A| \neq 0$. సిద్ధాంతం 1.9 (ii) నుండి $|\text{adj}A| = |A|^2$ లభించును. మరియు $|\text{adj } A|$ అనునది ధనాత్మకం. కావున $|A| = \pm\sqrt{|\text{adj } A|}$.

కావున $A^{-1} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{|\text{adj } A|}}\text{adj } A.$

మరియు సిద్ధాంతం (iii) నుండి $A = \dfrac{1}{|A|}\text{adj}(\text{adj } A)$ లభించును.

కావున A అనునది 3వ తరగతి కలిగిన సాధారణ మాత్రిక అయిన $A = \pm\dfrac{1}{\sqrt{|\text{adj } A|}}\text{adj}(\text{adj } A).$

ఉదాహరణ 1.4

A అనునది బేసిసంఖ్య తరగతిగా గల సాధారణ మాత్రిక అయిన $|\text{adj } A|$ అనునది ధనాత్మకం అని నిరూపించుము.

సాధన

A అనునది $2m+1$ తరగతి యందు సాధారణ మాత్రిక అనిన ఇచ్చట $m = 0, 1, 2, \cdots$. అయితే మరియు సిద్ధాంతం 1.9 (ii) నుండి $|\text{adj } A| = |A|^{(2m+1)-1} = |A|^{2m}$ లభించును.

$|A|^{2m}$ అనునది ఎల్లప్పుడూ ధనాత్మకము, కావున $|\text{adj } A|$ అనునది ధనాత్మకం. ■

ఉదాహరణ 1.5

$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 7 & 7 & -7 \\ -1 & 11 & 7 \\ 11 & 5 & 7 \end{bmatrix}$. అయిన A ను కనుగొనుము.

సాధన

$$|\text{adj}(A)| = \begin{vmatrix} 7 & 7 & -7 \\ -1 & 11 & 7 \\ 11 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 7(77-35) - 7(-7-77) - 7(-5-121) = 1764 > 0.$$

కావున

$$A = \pm\frac{1}{\sqrt{|\text{adj } A|}}\text{adj}(\text{adj } A) = \pm\frac{1}{\sqrt{1764}}\begin{bmatrix} +(77-35) & -(-7-77) & +(-5-121) \\ -(49+35) & +(49+77) & -(35-77) \\ +(49+77) & -(49-7) & +(77+7) \end{bmatrix}^T$$

$$= \pm\frac{1}{42}\begin{bmatrix} 42 & 84 & -126 \\ -84 & 126 & 42 \\ 126 & -42 & 84 \end{bmatrix}^T = \pm\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$ ■

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 10 10-03-2022 10:26:56

ఉదాహరణ 1.6

$\text{adj } A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, అయిన A^{-1} ను కనుగొనుము.

సాధన

$$|\text{adj } A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 .$$

కావున $A^{-1} = \pm\frac{1}{\sqrt{|\text{adj}(A)|}}\text{adj}(A) = \pm\frac{1}{\sqrt{9}}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \pm\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. ■

ఉదాహరణ 1.7

A అనునది సౌష్ఠవ మాత్రిక అయిన $\text{adj } A$ సౌష్ఠవ మాత్రిక అని నిరూపించుము.

సాధన

A అనునది సౌష్ఠవ మాత్రిక అని అనుకొనుము. కావున $A^T = A$ మరియు సిద్ధాంతం 1.9 (vi) నుండి

$\text{adj}\left(A^T\right) = \left(\text{adj } A\right)^T \Rightarrow \text{adj } A = \left(\text{adj } A\right)^T \Rightarrow \text{adj } A$ లభించును.

$\therefore$ $\text{adj } A$ అనునది సౌష్ఠవము. ■

సిద్ధాంతం 1.10

A మరియు B అనునవి n తరగతి కలిగిన సాధారణ చతురస్ర మాత్రికలు అయిన

$$\text{adj}(AB) = (\text{adj } B)(\text{adj } A).$$

నిరూపణ

A కు బదులుగా AB ని $\text{adj}(A) = |A|A^{-1}$ లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\text{adj}(AB) = |AB|(AB)^{-1} = \left(|B|B^{-1}\right)\left(|A|A^{-1}\right) = \text{adj}(B)\,\text{adj}(A) .$$ ■

ఉదాహరణ 1.8

$A = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$. అయిన $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$ అను నియమమును సరిచూడుము.

సాధన

$|A| = (2)(7) - (9)(1) = 14 - 9 = 5$ కావున $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{9}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$.

$$\left(A^{-1}\right)^T = \begin{bmatrix} \frac{7}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{9}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -9 & 2 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 11 10-03-2022 10:27:02

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}.$$ మరి $\left|A^T\right| = (2)(7) - (1)(9) = 5.$

$$\left(A^T\right)^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -9 & 2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

(1) మరియు (2)ల నుండి $\left(A^{-1}\right)^T = \left(A^T\right)^{-1}$ నియమము సరిచూడబడినది. ■

ఉదాహరణ 1.9

$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ వీటి ఆధారంగా $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ను సరిచూడుము.

సాధన

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0+0 & 0+3 \\ -2+0 & -3-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -7 \end{bmatrix}$$

$$\left(AB\right)^{-1} = \frac{1}{(0+6)}\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad \ldots (1)$$

$$A^{-1} = \frac{1}{(0+3)}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{(2-0)}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}. \quad \ldots (2)$$

మాత్రిక (1) మరియు (2)లు సమానం కావున $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ సరిచూడబడినది. ■

ఉదాహరణ 1.10

$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ అగునట్లు x మరియు y లను కనుగొనుము. దీని నుండి A^{-1} కనుగొనుము.

సాధన

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 & 27 \\ 18 & 31 \end{bmatrix},$$

$$A^2 + xA + yI_2 = O_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 22 & 27 \\ 18 & 31 \end{bmatrix} + x\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 22+4x+y & 27+3x \\ 18+2x & 31+5x+y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 12 10-03-2022 10:27:09

దీని నుండి మనకు లభించునవి $22+4x+y=0, 31+5x+y=0, 27+3x=0$ మరియు $18+2x=0$.

కావున $x=-9$ మరియు $y=14$. తర్వాత మనకు లభించునది . $A-9I_2+14A^{-1}=O_2$.

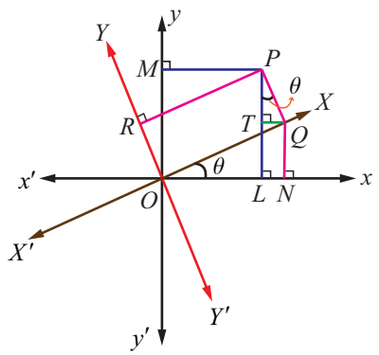
ఈ సమీకరణమును ఇరువైపుల A^{-1}, చే గుణించగా లభించునది $A-9I_2+14A^{-1}=O_2$. దీని నుండి లభించునది

$$A^{-1}=\frac{1}{14}(9I_2-A)=\frac{1}{14}\left(9\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4&3\\2&5\end{bmatrix}\right)=\frac{1}{14}\begin{bmatrix}5&-3\\-2&4\end{bmatrix}.$$

1.2.4 రేఖాగణితంలో మాత్రికల అనువర్తనం

రేఖాగణితంలో మాత్రికల ఉపయోగములలో ఒక ప్రత్యేకరకమైన సాధారణ మాత్రికలు విస్తృతంగా ఉపయోగపడుచున్నవి. సులభముగా ఉండు ద్విపరిమాణ రేఖాగణిత లెక్కను మాత్రము మనము ఇచ్చట తీసుకొందుము.

ఆది బిందువు O గాను, $x'Ox$ మరియు $y'Oy$ అనునవి క్రమముగా x- అక్షము, y- అక్షముగా అనుకొనిన తలములో P అనునది (x,y) లను నిరూపక అక్షములుగా గల బిందువుగా తీసుకొనుము. x-అక్షము, y-అక్షము ఆది బిందువుననుసరించి θ కోణమునకు పటంలో చూపినట్లు భ్రమణము చేయునని అనుకొనుము. $X'OX$ మరియు $Y'OY$ అనునవి క్రమముగా క్రొత్తగా ఏర్పడిన X-అక్షము మరియు Y-అక్షము అనుకొనుము. (X,Y) ను క్రొత్త అక్షములో P యొక్క నిరూపక అక్షములు అని అనుకొనుము. పటము 1.1 నుండి మనము పొందునది



పటము.1.1

$$x = OL = ON - LN = X\cos\theta - QT = X\cos\theta - Y\sin\theta,$$

$$y = PL = PT + TL = QN + PT = X\sin\theta + Y\cos\theta.$$

ఈ సమీకరణములు ఒక నిరూపక అక్షమును మరియొక నిరూపక అక్షముగా రూపాంతరము చెందుటకు ఉపయోగపడుచున్నవి. పైన చూపబడిన రెండు సమీకరణములను క్రింద ఇవ్వబడిన మాత్రిక రూపములో వ్రాయవచ్చును.

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}.$$

$W = \begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$. అయిన తరువాత $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=W\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix}$ మరియు $|W|=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ అగును.

కావున W కు విలోమ మాత్రిక ఉన్నది. మరియు $W^{-1}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$. $W^{-1}=W^T$ గా ఉండుటను గమనించగలము. విలోమ పరివర్తనను క్రింది విధంగా పొందవచ్చును

$$\begin{bmatrix}X\\Y\end{bmatrix} = W^{-1}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\cos\theta - y\sin\theta\\ x\sin\theta + y\cos\theta\end{bmatrix}.$$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 13 10-03-2022 10:27:18

ఈ విధంగా $X = x\cos\theta - y\sin\theta$, $Y = x\sin\theta + y\cos\theta$. అను పరివర్తినను పొందవచ్చును.

మాత్రికలు $W = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ నిర్ధారకము మరియు కంప్యూటర్ గ్రాపిక్స్‌లోను పరివర్తన ఉపయోగపడుతుంది. మాత్రికలు W అయినది $W^{-1} = W^T$; ఏమంటే $WW^T = W^TW = I$.అను ప్రత్యేక ధర్మమును పొందియున్నది.

నిర్వచనము 1.3

ఒక చతురస్ర మాత్రిక A కు $AA^T = A^TA = I$. అయిన A ను లంబ మాత్రిక అంటారు.

గమనిక

A అనునది లంబ మాత్రికగా ఉండుటకు సరిపోవు మరియు కావలసిన నిబంధన ఏమనగా A సాధారణ మాత్రికగాను మరియు $A^{-1} = A^T$ గాను ఉండవలయును.

ఉదాహరణ 1.11

$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ లంబ మాత్రిక అని నిరూపించుము.

సాధన

$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. అయిన, $A^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

$$AA^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta + \cos^2\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 .$$

ఇదేవిధంగా $A^TA = I_2$. కావున $AA^T = A^TA = I_2 \Rightarrow$ A అనునది లంబ మాత్రిక అగును. ■

ఉదాహరణ 1.12

$A = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -3 & a \\ b & -2 & 6 \\ 2 & c & 3 \end{bmatrix}$ అనునది లంబ మాత్రిక అయిన a, b మరియు c, లను కనుగొని దీని నుండి A^{-1} ను కనుగొనుము.

సాధన

A అనునది లంబ మాత్రిక కావున $AA^T = A^TA = I_3$. కావున మనము పొందునది

$$AA^T = I_3 \Rightarrow \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -3 & a \\ b & -2 & 6 \\ 2 & c & 3 \end{bmatrix}\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & b & 2 \\ -3 & -2 & c \\ a & 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 14 10-03-2022 10:27:25

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 45+a^2 & 6b+6+6a & 12-3c+3a \\ 6b+6+6a & b^2+40 & 2b-2c+18 \\ 12-3c+3a & 2b-2c+18 & c^2+13 \end{bmatrix} = 49\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 45+a^2=49 \\ b^2+40=49 \\ c^2+13=49 \\ 6b+6+6a=0 \\ 12-3c+3a=0 \\ 2b-2c+18=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} a^2=4, b^2=9, c^2=36, \\ a+b=-1, a-c=-4, b-c=-9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a=2, b=-3, c=6$$

కావున మనకు లభించునది $A=\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$ మరియు $A^{-1}=A^T=\frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -3 & 2 \\ -3 & -2 & 6 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

1.2.5 గుప్త శాస్త్రంలో మాత్రికల అనువర్తనము లేదా సంకేత లిపిని విశ్లేషించి రాయడం (Cryptography) లో మాత్రికల ఉపయోగాలు



సాధారణ విలోమ చతురస్ర మాత్రిక యొక్క ఒక ముఖ్యమైన ఉపయోగము సంకేత లిపిని విశ్లేషించి రాయడంలో ఉన్నది. సంకేత లిపిని విశ్లేషించి రాయడం అనునది ఇద్దరు వ్యక్తుల మధ్య ఇతరులకు అర్థంకాని విధంగా జరుగు విషయ మార్పిడి అగును. ఇది గుప్తీకరణ మరియు గుప్తలేఖనం అను రెండు కారకముల మీద ఆధారపడియుండును. **గుప్తీకరణ (Encryption)** అనునది అర్థమయ్యే భాషలో ఉన్న విషయాలను సులభముగా అర్థముకాని (సాంకేత భాష) భాషా రూపము అగును. మరొక విధంగా సాంకేత భాషగా చేయబడ్డ విషయాలను మరల అందరికి అర్థమయ్యే భాషలోకి మార్చుటను **గుప్తలేఖనం (Decryption)** అగును. గుప్తీకరణకు మరియు గుప్తలేఖనమునకు విషయాలను పంపువారికి, పొందేవారికి మధ్య ఒక రహస్య పద్ధతి అవసరమగుచున్నది. ఈ రహస్య పద్ధతిని సాంకేతిక వివరాల సూచిక అంటారు.

ఈ రహస్యాన్ని **'కీ'** అంటారు. వివరములను పంపువారు గుప్తీకరణ చేయుటకు సాధారణ మాత్రికను ఉపయోగించుట ఒక పద్ధతి అగును. వివరములను పొందు వారు వివరములను గుప్తలేఖనం చేయుటకు విలోమ మాత్రికను ఉపయోగించుచున్నారు. గుప్తీకరణ చేయుటకు ఉపయోగపడు మాత్రికను **సాంకేతిక భాష మాత్రిక (encoding matrix)** అని గుప్తలేఖనం చేయుటకు ఉపయోగపడు మాత్రికను **సాంకేతిక భాషను మార్చు మాత్రిక (decoding matrix)** అని పిలుతురు.

గుప్తీకరణను, గుప్తలేఖనమును వివరించుటను ఒక ఉదాహరణ ద్వారా చూచెదము.

పంపినవారు మరియు పొందువారు విషయసేకరణకు A నుండి Z వరకు గల ఆంగ్ల అక్షరములను ఉపయోగించుదురు అని అనుకొనుము. ఆంగ్ల అక్షరాలకు క్రమముగా 1 నుండి 26 సంఖ్యలను కేటాయించునట్లు; ఖాళీని పూర్తిచేయుటకు 0 ను ఉపయోగించునట్లు అనుకొనెదము. పంపువారు తరగతి 3వ తరగతి గల సాధారణ మాత్రికను సంకేత భాషకు ఉత్తర గుణకారం (post-multiplication) ను 'కీ'గా ఉపయోగించాడు. మాత్రిక యొక్క విలోమ మాత్రిక ఉత్తర గుణకారం చేసి గ్రహీత ఉపయోగిస్తాడు.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 15 10-03-2022 10:27:29

సాంకేతిక భాషకు ఉపయోగపడు మాత్రిక

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$ అనుకొనుము.



పంపబడిన సమాచారం '**WELCOME**' అనుకొనుము.

3వ తరగతి కలిగిన సాధారణ చతురస్ర మాత్రికను post-multiplication కు ఉపయోగించుట వలన పంపబడు సమాచారం మూడు విధానాలు **(WEL), (COM), (E)** అని విభజించి తరగతి 1×3 ఉన్న అడ్డు వరుస క్రమము గల మాత్రికలుగా **[23 5 12],[3 15 13],[5 0 0]** మార్పు చేయబడినవి.

చివరగా లభించిన అడ్డువరుస మాత్రికలో రెండు సున్నాలను చేర్చబడినది అని గమనించుము. 5ను మొదటి మూలకముగా ఉన్న ఒక అడ్డువరుస మాత్రికను పొందవలెను అనునదే దీనికి కారణమగును.

ఒక్కొక్క అడ్డువరుస మాత్రికలో సాంకేతిక భాష మాత్రికను ఉత్తర గుణకారం చేయుట ద్వారా సమాచారమును క్రింది విధంగా సంకేత అడ్డువరుస మాత్రికలుగా సూచించడం జరిగినది.:

సాంకేతిక భాషకాని అడ్డువరుస మాత్రిక		సాంకేతిక భాష మాత్రిక		సాంకేతిక భాషగా గుర్తించిన అడ్డువరుస

$$[23\ 5\ 12]\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=[45\ \ -28\ \ 23];$$

$$[3\ 15\ 13]\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=[46\ \ -18\ \ 3];$$

$$[5\ 0\ 0]\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=[5\ \ -5\ \ 5].$$

కనుక గుప్తీకరణ సమాచారం [45 −28 23] [46 −18 3] [5 −5 5] అగును.

గ్రహీత విలోమ 'కీ' తో A యొక్క విలోమములో ఉత్తర గుణకారం చేరి గుప్తలేఖనం చేయును.

గుప్తలేఖనమునకు ఉపయోగపడు మాత్రిక

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\operatorname{adj}A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}.$$

గ్రహీత గుప్తీకరణ సమాచారమును క్రింది విధంగా గుప్తలేఖనం చేయును.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 16 10-03-2022 10:27:31

సాంకేతిక భాషగా అడ్డువరుస మాత్రిక	సాంకేతిక భాషకాని మాత్రిక	సాంకేతిక భాషకాని అడ్డువరుస

$$[45\ \ -28\ \ 23]\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix} = [23\ \ 5\ \ 12];$$

$$[46\ \ -18\ \ 3]\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix} = [3\ 15\ 13];$$

$$[5\ \ -5\ \ 5]\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix} = [5\ 0\ 0].$$

సాంకేత భాషగా మార్చిన అడ్డువరుస మాత్రిక శ్రేణి క్రింది విధంగా ఉండును. $[23\ 5\ 12],[3\ 15\ 13],[5\ 0\ 0]$

కావున 1-26 లకు సరిపడు ఆంగ్ల అక్షరములను ప్రతిక్షేపించిన సమాచారమును పొందువారికి సమాచారమును **"WELCOME"** అని చదువును.

అభ్యాసము 1.1

1. క్రింద ఇవ్వబడిన మాత్రికలకు అనుబంధ మాత్రికలను కనుగొనుము.

(i) $\begin{bmatrix}-3 & 4\\ 6 & 2\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 1\\ 3 & 7 & 2\end{bmatrix}$ (iii) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 2\\ 1 & -2 & 2\end{bmatrix}$

2. క్రింద ఇవ్వబడిన మాత్రికలకు విలోమము కనుగొనుటకు వీలైతే, వాటిని కనుగొనుము.

(i) $\begin{bmatrix}-2 & 4\\ 1 & -3\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}5 & 1 & 1\\ 1 & 5 & 1\\ 1 & 1 & 5\end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix}2 & 3 & 1\\ 3 & 4 & 1\\ 3 & 7 & 2\end{bmatrix}$

3. $F(\alpha)=\begin{bmatrix}\cos\alpha & 0 & \sin\alpha\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha\end{bmatrix}$ అయిన $[F(\alpha)]^{-1}=F(-\alpha)$ అని నిరూపించుము.

4. $A=\begin{bmatrix}5 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}$ అయిన $A^2-3A-7I_2=O_2$. అని నిరూపించుము. దీని ఆధారంగా A^{-1} కనుగొనుము.

5. $A=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}-8 & 1 & 4\\ 4 & 4 & 7\\ 1 & -8 & 4\end{bmatrix}$ అయిన $A^{-1}=A^T$ అని నిరూపించుము.

6. $A=\begin{bmatrix}8 & -4\\ -5 & 3\end{bmatrix}$ అయిన $A(\text{adj } A)=(\text{adj } A)A=|A|I_2$ ను సరిచూడుము.

7. $A=\begin{bmatrix}3 & 2\\ 7 & 5\end{bmatrix}$ మరియు $B=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 5 & 2\end{bmatrix}$ అయిన $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ ను సరిచూడుము.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 17 10-03-2022 10:27:38

8. $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -3 & 12 & -7 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, అయిన A. ను కనుగొనుము.

9. $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, అయిన A^{-1}. ను కనుగొనుము.

10. $\text{adj}(\text{adj}(A))$ అయిన $\text{adj}\, A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ను కనుగొనుము.

11. $A = \begin{bmatrix} 1 & \tan x \\ -\tan x & 1 \end{bmatrix}$ అయిన $A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 2x & -\sin 2x \\ \sin 2x & \cos 2x \end{bmatrix}$ ను నిరూపించుము.

12. $A\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$ అయిన A ను కనుగొనుము.

13. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ మరియు $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, $AXB = C$ అయిన మాత్రిక X ను కనుగొనుము.

14. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ అయిన $A^{-1} = \frac{1}{2}\left(A^2 - 3I\right)$ అని చూపుము.

15. $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ అను మాత్రికను post-multiplication ను గుప్తీకరణ మాత్రికగా చేసుకొని $[2 \quad -3][20 \quad 4]$ అని పొందిన సమాచారమును $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ యొక్క విలోమ మాత్రిక post-multiplication ను 'కీ' గా చేసుకొని గుప్తలేఖనం చేయుము. ఇక్కడ ఆంగ్ల అక్షరములు $A-Z$ కు క్రమముగా సంఖ్యలు 1–26 ను ఖాళీ స్థలంలో సంఖ్య 0 ను ప్రతిక్షేపించి గుప్తీకరణ మరియు గుప్తలేఖనం చేయుము.

1.3 ఒక మాత్రికపై ప్రాథమిక పరివర్తనములు (Elementary Transformations of a Matrix)

ప్రాథమిక అడ్డువరుస ప్రక్రియ మరియు ప్రాథమిక నిలువు వరుస ప్రక్రియ అని పిలువబడు కొన్ని ప్రక్రియలు చేయడం మూలంగా ఒక మాత్రికను మరియొక మాత్రికగా మార్చవచ్చును.

1.3.1 ప్రాథమిక అడ్డు మరియు నిలువు వరుసల ప్రక్రియలు

ఒక మాత్రికలో ప్రాథమిక అడ్డు వరుస (నిలువు) ప్రక్రియలు:

(i) రెండు అడ్డు వరుసలను (నిలువు వరుసలను) పరస్పరం మార్చడం

(ii) ఒక అడ్డు వరుసలోని (నిలువు వరుసలోని) మూలకాలన్నింటిని ఒక శూన్యేతర సంఖ్యతో గుణించడం.

(iii) ఒక అడ్డు వరుస (నిలువు వరుస) మూలకాలను ఒక సంఖ్యతో గుణించి వేరొక అడ్డువరుస (నిలువు వరుస)లోని సంబంధిత మూలకాలకు కూడడం.

ఒక మాత్రిక యొక్క ప్రాథమిక అడ్డు వరుస ప్రక్రియలు మరియు నిలువు వరుస ప్రక్రియలను ప్రాథమిక పరివర్తనలు అంటారు.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 18 10-03-2022 10:27:44

ఈ క్రింద ఇవ్వబడినవి ఒక మాత్రికలో ఉపయోగించు ప్రాథమిక అడ్డువరుస పరివర్తనల గుర్తులు అగును:

(i) i వ మరియు j వ వరుసలను పరస్పరం మార్చుచేసిన $R_i \leftrightarrow R_j$ అని గుర్తించెదము.

(ii) i వ అడ్డువరుసలో ఉండు ఒక్కొక్క మూలకమును శూన్యేతర స్థిరరాశి λ తో గుణించిన $R_i \to \lambda R_i$ అని గుర్తించెదము.

(iii) i వ అడ్డువరుసను శూన్యేతర స్థిరరాశి λ తో గుణించి, j వ అడ్డువరుసతో కూడిన $R_i \to R_i + \lambda R_j$ అని గుర్తించెదము.

ఇదే విధంగా గుర్తులను ప్రాథమిక నిలువు వరుస పరివర్తనలో కూడా ఉపయోగించవచ్చును.

నిర్వచనం 1.4

A, B అను రెండు ఒకేవిధమైన తరగతులు గల మాత్రికలలో ఏదైనా ఒక మాత్రికను ప్రాథమిక పరివర్తన మూలముగా మరొక మాత్రికను పొందుటకు వీలైన A, B లు సమానత్వ మాత్రికలు (Equivalent matrices). A అనునది B కు సమానత్వ మాత్రిక. దీనిని $A \sim B$ అని గుర్తించెదము.

ఉదాహరణ, $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$ మాత్రికను తీసుకొందుము.

A మాత్రికలో $R_2 \to R_2 + R_1$ అను ప్రాథమిక అడ్డువరుస ప్రక్రియ మూలంగా లభించు మాత్రిక B అనుకొనుము. B లో రెండవ అడ్డువరుస A యొక్క రెండవ మరియు మొదటి అడ్డువరుసల మొత్తమగును.

కావున $A \sim B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}$.

పైన గల ప్రాథమిక అడ్డువరుస పరివర్తనను క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

గమనిక

ఇవ్వబడిన మాత్రికను ప్రాథమిక పరివర్తన చేసిన పిదప లభించు మాత్రిక అనునది ఇవ్వబడిన మాత్రికకు సమానముగా ఉండనవసరం లేదు.

1.3.2 అడ్డువరుస – ఎకలాన్ రూపము (Row-Echelon form)

ప్రాథమిక అడ్డువరుస ప్రక్రియలను ఉపయోగించి ఇవ్వబడిన శూన్యేతర మాత్రిక యొక్క సరళ రూపమే **అడ్డువరుస – ఎకలాన్ రూపము** అను సులభ పద్ధతిలోకి మార్చగలము. ఈ రూపంలో అన్ని మూలకాలను **సున్నాలుగా కలిగిన అడ్డువరుసలు** ఉండవచ్చును. ఈ విధంగా అన్ని మూలకాలు సున్నాలుగా ఉండు అడ్డువరుసను సున్నా అడ్డు వరుస అంటారు. ఒక అడ్డువరుసలో ఏదేని ఒక మూలకము శూన్యముకానిది అయిన ఆ అడ్డు వరుసను శూన్యేతర అడ్డువరుస అంటాము. ఉదాహరణకు $\begin{bmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ మాత్రికలో R_1 మరియు R_2 అనునవి సున్నా కాని అడ్డువరుసలు, R_3 సున్నా అడ్డు వరుస అగును.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 19 10-03-2022 10:27:47

ణవటఅఅత్అశీఅ 1.5

E అను శూన్యేతర మాత్రిక అనునది **అడ్డువరుస – ఎకలాన్ రూపంలో** ఉండవలయునన్నా

(i) E యొక్క సున్నా అడ్డువరుసలన్నియూ E సున్నాకాని అడ్డువరుసలకు క్రింద ఉండవలెను.

(ii) E లో ఏదైనా i వ అడ్డువరుసలో మొదటి సున్నాకాని మూలకము j వ నిలువు వరుసలో ఉండిన i వ అడ్డువరుసలో ఉండు మొదటి సున్నాకాని మూలకమునకు క్రింద వచ్చు j వ నిలువు వరుసలో ఉండు అన్ని మూలకములు సున్నాలుగా ఉండవలెను.

(iii) i యొక్క $(i+1)^{th}$ వ అడ్డువరుసలో మొదటి శూన్యముకాని మూలకమైనది E వ అడ్డువరుసలో ఉండు మొదటి శూన్యముకాని మూలకములకు ఎడమ ప్రక్క అమర్చవలెను.

గమనిక

ఒక శూన్యేతర మాత్రికలో అన్ని సున్నా అడ్డువరుసలు మాత్రిక యొక్క క్రింది భాగ అడ్డువరుసలుగా అమరియుండును, ఏ ఒక క్రింది అడ్డువరుసలో మొదటి శూన్యముకాని మూలకము ఆ అడ్డువరుసకు పైన ఉండు అడ్డువరుసలలో ఉండు మొదటి శూన్యముకాని మూలకమునకు కుడిప్రక్కన ఉండిన ఆ మాత్రిక అడ్డువరుస – ఎకలాన్ రూపంలో ఉండును.

క్రింది మాత్రికలు అడ్డువరుస – ఎకలాన్ రూపంలో ఉన్నవి:(i) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,(ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

మాత్రిక (i) ను గుర్తుపెట్టుకొనుము. చివరి అడ్డువరుస నుండి ఒక్కొక్క అడ్డువరుసకు పై అడ్డువరుసకు వెళ్ళుము. మూడవ అడ్డువరుస అనునది సున్నా అడ్డువరుస అగును. రెండవ అడ్డువరుసలో మొదటి శూన్యంకాని మూలకం అనునది మూడవ నిలువు వరుసలో అమరియుండును. మరియు ఈ మూలకము అనునది మొదటి అడ్డువరుసలో రెండవ నిలువువరుసలో ఉండు మొదటి శూన్యంకాని మూలకమునకు కుడివైపున ఉన్నది. కావున ఈ మాత్రిక అనునది అడ్డువరుస – ఎకలాన్ రూపంలో ఉన్నది.

మాత్రిక (ii) గుర్తుకు తెచ్చుకొందాం. చివర అడ్డువరుస నుండి ఒక్కొక్క అడ్డువరుసగా పై అడ్డువరుసకు వెళ్ళెదము. అన్ని అడ్డువరుసలు శూన్యంకాని అడ్డువరుస అగును. 3వ అడ్డువరుసలో మొదటి శూన్యంకాని మూలకము అనునది 4వ నిలువు వరుసలో ఉండును. ఈ శూన్యముకాని మూలకం అనునది రెండవ అడ్డువరుసలో మూడవ నిలువు వరుసలో గల మొదటి శూన్యంకాని మూలకమునకు కుడివైపు ఉండును. రెండవ అడ్డువరుసలో గల మొదటి సున్నాకాని మూలకము అనునది మూడవ నిలువువరుసలో ఉండును. ఈ శూన్యముకాని మూలకము మొదటి అడ్డువరుసలో మొదటి నిలువు వరుసలో గల మొదటి శూన్యంకాని మూలకమునకు కుడివైపున ఉండును. కావున, ఇది అడ్డువరుస–ఎకలాన్ రూపంలో ఉన్నది.

క్రింద ఇవ్వబడిన మాత్రికలు అడ్డువరుస– ఎకలాన్ రూపంలో లేదు:

(i) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 20 10-03-2022 10:27:49

మాత్రిక (i) గుర్తుకు తెచ్చుకొందాం. 3వ అడ్డువరుసలో మొదటి శూన్యంకాని మూలకము అనునది రెండవ నిలువు వరుసలో ఉండును. మరియు శూన్యముకాని మూలకము అనునది రెండవ అడ్డువరుసలో మూడవ నిలువు వరుసలో గల మొదటి శూన్యంకాని మూలకమునకు ఎడమవైపు కలదు. కావున ఈ మాత్రిక – ఎకలాన్ రూపంలో లేదు.

మాత్రిక (ii) ను తీసుకొనిన, రెండవ అడ్డువరుస మొదటి నిలువు వరుసలో గల శూన్యంకాని మూలకం అనునది మొదటి అడ్డువరుసలో రెండవ నిలువు వరుసలో గల శూన్యముకాని మూలకమునకు ఎడమవైపున ఉన్నది కావున ఈ మాత్రిక ఎకలాన్ రూపంలో లేదు.

$\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ అను మాత్రికను అడ్డువరుస – ఎకలాన్ మాత్రికగా మార్చు పద్ధతి.

మెట్టు 1

మొదటి అడ్డువరుసను పరిశీలించుము. మొదటి అడ్డువరుస అనునది సున్నా అడ్డువరుస అయిన మొదటి అడ్డువరుసను క్రింది గల శూన్యంకాని అడ్డువరుసలో స్థానమార్పు చేయవలెను. $a_{11} \neq 0$ అయిన మెట్టు 2 ను అనుసరించుము. అలా లేకుండిన మొదటి అడ్డువరుసను మొదటి నిలువు వరుసలో శూన్యముకాని మూలకముగా గల క్రింద అడ్డువరుసను స్థాన మార్పు చేయవలెను. మొదటి అడ్డువరుసకు క్రిందగల అడ్డు వరుసలో, మొదటి నిలువు వరుసలో శూన్యముకాని మూలకంలేనిచో a_{12}. ను తీసుకొనుము. a_{12} శూన్యంకాని మూలకం అయిన మెట్టు2కు ఉపయోగించవలెను. అట్లుకాని యెడల మొదటి అడ్డువరుసను వాటికి క్రింద గల అడ్డువరుసల రెండవ నిలువు వరుసలో శూన్యంకాని మూలకము గల అడ్డువరుసతో స్థానమార్పిడి చేయవలెను. మొదటి అడ్డువరుసకు క్రింది విధంగా ఏ ఒక అడ్డువరుసను రెండవ నిలువు వరుసను శూన్యముకాని మూలకము లేనిచో a_{13} శూన్యము కానిదా అని పరిశోధించవలయును. ఈ పద్ధతిని అనుసరించి మొదటి అడ్డువరుసలో శూన్యముకాని మూలకము లభించు వరకు ప్రయత్నించవలెను. ఈ పద్ధతిని పిఓటింగ్ **pivoting** అనెదము. మొదటి అడ్డువరుసలో గల సున్నాకాని మూలకాలను మొదటి అడ్డువరుస పిఓట్ **pivot** అంటారు.

మెట్టు 2

మొదటి అడ్డువరుసలో ఉండు పిఓటింగ్‌కు క్రింద వచ్చు అన్ని మూలకాలను ప్రాథమిక ప్రక్రియల నుండి సున్నాగా మార్చవలెను.

మెట్టు 3

Cమరొక అడ్డువరుసను మొదటి అడ్డువరుసగా తీసుకొని మెట్టు 1 మరియు మెట్టు 2 వీటిని క్రింద గల అడ్డువరుసలలో ప్రయత్నించుము. అన్ని అడ్డువరుసలు పూర్తియగు వరకు ఈ పద్ధతిని మరల మరలా ప్రయత్నిస్తూ ఉండవలెను.

ఉదాహరణ 1.13

$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ మాత్రికను అడ్డువరుస–ఎకలాన్ రూపంలో మార్చుము.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 21 10-03-2022 10:27:51

సాధన

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -6 & 2 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 + R_1]{R_2 \to R_2 + 2R_1,} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{1}{2}R_2} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

గమనిక

$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2/8} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. ఇది ఇచ్చిన మాత్రికకు అడ్డువరుస ఎకలాన్ రూపం అగును.

కావున అడ్డువరుస ఎకలాన్ రూపం అనునది ఏకైకము **కానవసరం లేదు**.

ఉదాహరణ 1.14

$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ మాత్రికను అడ్డువరుస ఎకలాన్ రూపంలోకి మార్చుము.

సాధన

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 6 \\ -1 & 0 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + 4R_1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 8 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - \frac{2}{3}R_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & \frac{22}{3} & 16 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to 3R_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 22 & 48 \end{bmatrix}.$$

1.3.3 మాత్రిక కోటి లేదా మాత్రిక యొక్క శ్రేణి (Rank of a Matrix)

ఒక మాత్రిక యొక్క కోటి నిర్వచించడానికి ఉపమాత్రికలు మరియు లఘు మాత్రికను గురించి తెలుసుకోవడం అవసరం.

A అనునది ఏదైనా ఒక మాత్రిక అనుకొనుము. దీనినుండి కొన్ని అడ్డువరుసలు, కొన్ని నిలువు వరుసలను తొలగించిన వచ్చు మాత్రిక A. కు ఉపమాత్రిక అగును. ఒక మాత్రిక దానికదే ఒక ఉపమాత్రిక అగును. ఎందుకనగా ఆ మాత్రిక సున్నా అడ్డువరుసలను మరియు సున్నా నిలువు వరుసలను తొలగించుట వలన లభించును.

ఒక మాత్రిక యొక్క చతురస్ర ఉపమాత్రికను లఘుమాత్రిక అంటారు.

నిర్వచనము 1.6

ఒక మాత్రిక A యొక్క కోటి అనునది శూన్యంకాని లఘుమాత్రికల గరిష్ఠ వరుస క్రమము అగును. A యొక్క కోటిని $\rho(A)$. అని సూచిస్తారు. ఒక శూన్య మాత్రిక యొక్క కోటి సున్నాగా నిర్వచింపబడును.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 22 10-03-2022 10:27:52

గమనిక

(i) ఒక మాత్రికలో కనీసం ఒక శూన్యంకాని మూలకం ఉంటే $\rho(A) \geq 1$.

(ii) తత్సమ మాత్రిక I_n కోటి n అగును.

(iii) A అను మాత్రిక కోటి r, అయిన A లో కనీసం r వరుసలు ఉన్న శూన్యంకాని లఘుమాత్రికలను కలిగియుండవలెను. మరియు A యొక్క ఒక్కొక్క $r+1$ వరుస మరియు దానికన్నా అధికమైన వరుసగల లఘుమాత్రిక విలువలు సున్నాలుగా ఉండవలయును.

(iv) A అనునది $m \times n$ మాత్రిక అయిన $\rho(A) \leq \min\{m,n\} = m,n$ లలో కనిష్ఠ సంఖ్య.

(v) n తరగతిగా గల చతురస్ర మాత్రిక A యొక్క శ్రేణి $\rho(A) = n$. అయిన A కు విలోమం ఉండును మరియు దాని విపర్యయము తథ్యం.

ఉదాహరణ 1.15

క్రింది మాత్రికలకు మాత్రిక యొక్క కోటి కనుగొనుము: (i) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -2 & 4 \\ 6 & 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

సాధన

(i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix}$. A అనునది 3×3 తరగతిగా గల మాత్రిక, కావున $\rho(A) \leq \min\{3,3\} = 3$

గరిష్ఠ లఘుమాత్రిక తరగతి 3. A కు ఒకేఒక 3 తరగతిగా గల లఘుమాత్రిక కలదు. దాని విలువ.

$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 3(6-6) - 2(6-6) + 5(3-3) = 0$. కావున, $\rho(A) < 3$.

తరువాత 2 తరగతిగా గల లఘుమాత్రికలను ఎన్నుకొందాము.

అందులో 2 తరగతిగా గల లఘుమాత్రిక $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \neq 0$. కావున $\rho(A) = 2$.

(ii) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & -2 \\ -3 & -1 & -2 & 4 \\ 6 & 7 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. A మాత్రిక యొక్క తరగతి 3×4. కావున $\rho(A) \leq \min\{3,4\} = 3$.

A యొక్క లఘు మాత్రికల గరిష్ట తరగతి 3. A యొక్క 3వ తరగతి శూన్యేతర లఘు మాత్రికలను శోధిస్తాము, కాని అవన్నియూ శూన్యము.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 6 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ -3 & -1 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0; \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 4 \\ 7 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

కావున $\rho(A) < 3$ తర్వాత A మాత్రిక యొక్క శూన్యంకాని 2వ తరగతి గల లఘు మాత్రికను అన్వేసిస్తాం.

ఎందుకనగా $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -4 + 9 = 5 \neq 0$. కావున, $\rho(A) = 2$. ■

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 23 10-03-2022 10:28:00

సూచన

ఒక మాత్రిక తరగతి అధికమైనప్పుడు, ఆ మాత్రిక యొక్క కోటి గరిష్ఠ తరగతిగా గల శూన్యంకాని లఘుమాత్రికలను శోధన ద్వారా కనుగొనుట కష్టం. మాత్రిక యొక్క కోటి కనుగొనుటకు వేరొక సులభమైన పద్ధతి ఉండును. ఈ పద్ధతిలో మాత్రిక తరగతి అధికంగా ఉండినను మాత్రిక కోటి కనుగొనుట సులభము. ఈ పద్ధతి ద్వారా ఒక మాత్రిక అడ్డువరుస –ఎకలాన్ రూపమునకు సమానమైన మాత్రిక యొక్క కోటి కనుగొనవచ్చును. ఒక మాత్రిక అడ్డువరుస –ఎకలాన్ రూపంలో ఉండిన దాని ప్రధాన వికర్ణ మూలకాలకు క్రింద గల అన్ని మూలకములు సున్నాలుగా ఉండును. (ఇది $a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots$ అను స్థాయిలో గల వికర్ణ మూలకములు చేర్చు రేఖ అగును.) కావున ఒక లఘుమాత్రిక విలువ సున్నా లేదా సున్నాకానిది అని కనుగొనుట సులభం. దీని మూలంగా మాత్రిక యొక్క కోటి కనుగొనడం సులభం.

ఉదాహరణ 1.16

క్రింద ఇవ్వబడిన ఎకలాన్ రూప మాత్రికలకు మాత్రిక యొక్క కోటి కనుగొనుము.

(i) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 6 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

సాధన

(i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ అనుకొనుము. A అనునది 3×3 తరగతి గల మాత్రిక మరియు $\rho(A) \le 3$.

మూడవ తరగతి యొక్క లఘుమాత్రిక సమాసము $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2)(3)(1) = 6 \neq 0$. కావున, $\rho(A) = 3$.

కావున ఇక్కడ మూడు శూన్యముకాని అడ్డువరుసలు ఉన్నదని గమనించుము.

(ii) $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ అనుకొనుము. A అనునది 3×3 తరగతి గల మాత్రిక కావున $\rho(A) \le 3$.

3వ తరగతి యొక్క లఘుమాత్రిక సమాసం $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-2)(5)(0) = 0$. కావున, $\rho(A) \le 2$.

పలు 2వ తరగతి గల లఘుమాత్రిక సమాసములు కలవు. వాటిలో ఒకటి, $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = (-2)(5) = -10 \neq 0$. కావున, $\rho(A) = 2$.

ఇచ్చట రెండు శూన్యంకాని అడ్డువరుసలు కలవు. మూడవ అడ్డువరుస సున్నా అడ్డువరుస అగును.

(iii) $A = \begin{bmatrix} 6 & 0 & -9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ అనుకొనిన A అనునది 4×3 వరుస క్రమములు గల మాత్రిక అగును మరియు $\rho(A) \le 3$.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 24 10-03-2022 10:28:05

చివర రెండు అడ్డువరుసలు సున్నా అడ్డువరుసలు అగును. ఇచ్చట రెండువ తరగతి గల లఘుమాత్రికల సమాసములు ఉన్నవి. వాటిలో ఒకటి $\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = (6)(2) = 12 \neq 0$ కావున $\rho(A) = 2$.

ఇచ్చట రెండు శూన్యంకాని అడ్డువరుసలు గలవు. మూడవ మరియు నాల్గవ అడ్డువరుసలు సున్నా అడ్డువరుసలు అగును అని గమనించుము.

పై ఉన్న ఉదాహరణముల నుండి ఎకలాన్ రూపంలో ఉన్న మాత్రిక యొక్క మాత్రిక కోటి శూన్యముకాని అడ్డువరుసల సంఖ్యకు సమానమని గమనిస్తాము. దీనిని నిరూపణ లేకుండా క్రింది సిద్ధాంతంలో చూడవచ్చును.

సిద్ధాంతం 1.11

అడ్డువరుస ఎకలాన్ రూపంలో గల మాత్రిక యొక్క కోటి శూన్యేతర అడ్డు వరుసల సంఖ్య అగును

దీనిని నిరూపణ లేకుండా క్రింది సిద్ధాంతంలో చూడవచ్చును.

సిద్ధాంతం 1.12

శూన్యేతర మాత్రిక యొక్క కోటి అనునది ఎకలాన్ రూపంలో గల శూన్యేతర అడ్డువరుసల సంఖ్యకు సమానమగును.

ఉదాహరణ 1.17

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ అను మాత్రికను ఎకలాన్ రూపమునకు మార్చి మాత్రిక యొక్క కోటి కనుగొనుము.

సాధన

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ అనుకొనిన, ప్రాథమిక అడ్డువరుస ప్రక్రియలను ఉపయోగించిన

$$A \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & -6 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

చివరి సమానత్వ మాత్రిక ఎకలాన్ నిర్మాణంలో కలదు మరియు రెండు శూన్యంకాని అడ్డువరుసలను కలిగియున్నది. కావున, $\rho(A) = 2$.

ఉదాహరణ 1.18

$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & -2 & -1 \\ 6 & 2 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ అను మాత్రికను ఎకలాన్ రూపంలో మార్చి మాత్రిక యొక్క కోటి కనుగొనుము.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 25 10-03-2022 10:28:07

సాధన

ఇచ్చిన మాత్రికను A అనుకొనిన ప్రాథమిక అడ్డువరుస ప్రక్రియలను ఉపయోగించిన

$$A=\begin{bmatrix}2&-2&4&3\\-3&4&-2&-1\\6&2&-1&7\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to 2R_2}\begin{bmatrix}2&-2&4&3\\-6&8&-4&-2\\6&2&-1&7\end{bmatrix}\xrightarrow[R_3\to R_3-3R_1]{R_2\to R_2+3R_1}\begin{bmatrix}2&-2&4&3\\0&2&8&7\\0&8&-13&-2\end{bmatrix}.$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-4R_2}\begin{bmatrix}2&-2&4&3\\0&2&8&7\\0&0&-45&-30\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\to R_3\div(-15)}\begin{bmatrix}2&-2&4&3\\0&2&8&7\\0&0&3&2\end{bmatrix}.$$

చివరి సమానత్వ మాత్రిక అనునది అడ్డువరుస ఎకలాన్ రూపంలో కలదు మరియు శూన్యంకాని అడ్డువరుసలు కలవు. కావున, $\rho(A)=3$.

ప్రాథమిక అడ్డువరుస ప్రక్రియలు ఒక మాత్రికపై ప్రదర్శించుట అనునది ఆ మాత్రికను ముందుగా ఒక ప్రత్యేక రకం (special class) మాత్రికల ద్వారా పూర్వ గుణకారము చేయవచ్చును. అట్టి మాత్రికలను ప్రాథమిక మాత్రికలు (Elementary matrices) అంటారు.

నిర్వచనం 1.7

ఒక యూనిట్ మాత్రికలో ఒకేఒక ప్రాథమిక పరివర్తనము ద్వారా లభించు మాత్రికను ప్రాథమిక మాత్రిక అని నిర్వచించబడును.

విశేషాంషణ

3వ తరగతి గల మాత్రికల యొక్క ప్రాథమిక మాత్రికలు అన్ని 3వ తరగతి గల చతురస్ర మాత్రికలు అగును. ఇట్టి మాత్రికలు ఒక యూనిట్ (తత్సమ) మాత్రికలో ఒకేఒక ప్రాథమిక అడ్డువరుస ప్రక్రియల పరివర్తనం చేయడం వలన లభించును. ఇవ్వబడిన మాత్రిక A లో ప్రదర్శించబడి ఒక్కొక్క ప్రాథమిక అడ్డువరుస ప్రక్రియలు A యొక్క ప్రాథమిక మాత్రికతో పూర్వ గుణకారం చేయుట వలన లభించును. ఇదేవిధంగా A లో ప్రదర్శించబడు ఒక్కొక్క ప్రాథమిక నిలువు వరుస ప్రక్రియలు A యొక్క తరువాత భాగంలో మాత్రికను ఉత్తర గుణకారం చేయుట వలన లభించును. ఈ అధ్యాయంలో ప్రాథమిక అడ్డువరుస ప్రక్రియలు మాత్రమే ఉపయోగించెదము.

ఉదాహరణకు $A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$ తీసుకొనిన.

A, పై $R_2\to R_2+\lambda R_3$ అను అడ్డువరుస పరివర్తనను ప్రదర్శించడము అనిన ఇచ్చట $\lambda\neq 0$ అనునది ఒక స్థిరరాశి.

$$A\xrightarrow{R_2\to R_2+\lambda R_3}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}+\lambda a_{31}&a_{22}+\lambda a_{32}&a_{23}+\lambda a_{33}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}. \qquad \ldots(1)$$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 26 10-03-2022 10:28:10

ఈ మార్పును క్రింది విధంగా ప్రాథమిక మాత్రికను ఉపయోగించి కూడా పొందవచ్చును. $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\lambda\\0&0&1\end{bmatrix}$ అనునది ప్రాథమిక మాత్రిక, ఎందుకంటే $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+\lambda R_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\lambda\\0&0&1\end{bmatrix}$.

A యొక్క ముందు భాగంగా $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\lambda\\0&0&1\end{bmatrix}$ తో గుణించినచో

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\lambda\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}+\lambda a_{31}&a_{22}+\lambda a_{32}&a_{23}+\lambda a_{33}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}. \quad \ldots (2)$$

(1) మరియు (2) లనుండి $A\xrightarrow{R_2\to R_2+\lambda R_3}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\lambda\\0&0&1\end{bmatrix}A$. అని తెలుసుకొంటిమి.

కావున A పై $R_2\to R_2+\lambda R_3$ అను ప్రాథమిక పరివర్తన మూలముగా ఏర్పడు ఫలితము అనునది A ను $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&\lambda\\0&0&1\end{bmatrix}$ అను ప్రాథమిక మాత్రికతో పూర్వగుణకారం చేయుట లభించు మాత్రికకు సమానము అగును.

అదేవిధంగా క్రింది వాటిని సూచించుటకు వీలగును.

(i) A పై $R_2\leftrightarrow R_3$ అను ప్రాథమిక పరివర్తన చేయుట వలన ఏర్పడు ఫలితం $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ అను ప్రాథమిక మాత్రికతో పూర్వ గుణకారం చేయుట వలన లభించు మాత్రికకు సమానం అగును.

(ii) A పై $R_2\to\lambda R_2$ అను ప్రాథమిక పరివర్తన వలన ఏర్పడు ఫలితం $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ ను ప్రాథమిక మాత్రికతో పూర్వ గుణకారం చేయుట వలన లభించు మాత్రికకు సమానం అగును.

నిరూపణ లేకుండా క్రింది సిద్ధాంతమును చూడవచ్చును.

సిద్ధాంతము 1.13

ప్రతి సాధారణ మాత్రికను ఒక వరుస క్రమమైన ప్రాథమిక అడ్డువరుస ప్రక్రియలను ఉపయోగించి తత్సమ మాత్రికగా పరివర్తన చేయవచ్చును.

పై సిద్ధాంతమును వివరించుటకు $A=\begin{bmatrix}2&-1\\3&4\end{bmatrix}$ మాత్రిక అనుకొనిన.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 27 10-03-2022 10:28:13

ఇచ్చట $|A| = 12 + 3 = 15 \neq 0$. కావున, A అనునది సాధారణ మాత్రిక అగును. A ను I_2 గా వరుస క్రమమైన ప్రాథమిక అడ్డువరుస (వ్యవస్థ) ప్రక్రియలను ఉపయోగించి మార్చెదము. మొదటగా A లో a_{11} ని 1 గా మార్చుటకు అడ్డువరుస ప్రక్రియలును తెలుసుకొందుము. దీనికి కావలసిన ప్రాథమిక అడ్డువరుస ప్రక్రియ $R_1 \to \left(\frac{1}{2}\right) R_1$ అగును. దీనికి తగిన ప్రాథమిక మాత్రిక $E_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ అగును. తరువాత మనకు లభించునది

$$E_1 A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

తరువాత $E_1 A$ మాత్రిక a_{11} నకు క్రింద ఉండు అన్ని మూలకములు సున్నాగా చేసెదము. ఈ వివరణ ఉదాహరణలో a_{21} అను మూలకము మాత్రమే ఉంది.

దీనికి సరిపడే ప్రాథమిక అడ్డువరుస ప్రక్రియ $R_2 \to R_2 + (-3) R_1$ అగును.

దీనికి తగిన ప్రాథమిక మాత్రిక $E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$. అగును.

తరువాత మనకు లభించునది $E_2 \left(E_1 A\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{11}{2} \end{bmatrix}$.

తరువాత $E_2 \left(E_1 A\right)$ లో ఉండు a_{22} ను 1గా మార్చవలెను. దీనికి కావలసిన ప్రాథమిక అడ్డువరుస ప్రక్రియ $R_2 \to \left(\frac{2}{11}\right) R_2$ అగును.

దీనికి తగిన ప్రాథమిక మాత్రిక అనునది $E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{11} \end{bmatrix}$ అగును.

తరువాత మనకు లభించునది $E_3 \left(E_2 \left(E_1 A\right)\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{11}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

చివరిగా $E_3 \left(E_2 \left(E_1 A\right)\right)$ యొక్క a_{12} ని సున్నాగా చేసెదము. దీనికి కావలసిన ప్రాథమిక అడ్డువరుస ప్రక్రియ. $R_1 \to R_1 + \left(\frac{1}{2}\right) R_2$ అగును. దీనికి తగిన ప్రాథమిక మాత్రిక $E_4 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ అగును.

తరువాత మనకు లభించునది $E_4 \left(E_3 \left(E_2 \left(E_1 A\right)\right)\right) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 28 10-03-2022 10:28:20

పై నుండి క్రమముగా గల ప్రాథమిక పరివర్తనలను క్రిందివిధంగా వ్రాసెదము:

$$A=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\to\left(\frac{1}{2}\right)R_1}\begin{bmatrix}1 & \frac{-1}{2}\\ 3 & 4\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2+(-3)R_1}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{11}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to\left(\frac{2}{11}\right)R_2}\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+\left(\frac{1}{2}\right)R_2}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

ఉదాహరణ 1.19

$\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & 0 & -1\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}$ అనునది సాధారణ మాత్రిక అని చూపుము. మరియు ఈ మాత్రికను ప్రాథమిక అడ్డువరుస పరివర్తనల ద్వారా తత్సమ మాత్రికగా మార్చుము.

సాధన

$A=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & 0 & -1\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}$. అనుకొనుము. $|A|=3(0+2)-1(2+5)+4(4-0)=6-7+16=15\neq 0$. కావున A అనునది సాధారణ మాత్రిక అగును.

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\ 2 & 0 & -1\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{3}R_1}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ 2 & 0 & -1\\ 5 & 2 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-2R_1,\ R_3\to R_3-5R_1}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{11}{3}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{17}{3}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_2\to\left(-\frac{3}{2}\right)R_2}\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3}\\ 0 & 1 & \frac{11}{2}\\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{17}{3}\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{1}{3}R_2,\ R_3\to R_3-\frac{1}{3}R_2}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{11}{2}\\ 0 & 0 & -\frac{15}{2}\end{bmatrix}\xrightarrow{R_3\to\left(-\frac{2}{15}\right)R_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & \frac{11}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+\frac{1}{2}R_3,R_2\to R_2-\frac{11}{2}R_3}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

1.3.4 గాస్ - జోర్డాన్ పద్ధతి

A అనునది n వరుస క్రమములు గల సాధారణ చతురస్ర మాత్రిక అనుకొనుము. B అనునది A. యొక్క విలోమం అనుకొనుము.

కావున $AB=BA=I_n$. తత్సమ మాత్రిక I_n లక్షణాలను అనుసరించి $A=I_nA=AI_n$.

$A=I_nA$ అని తీసుకొనుము. ...(1)

A అనునది సాధారణ మాత్రిక కావున సమీకరణము (1)కి ఇరువైపుల ప్రాథమిక మాత్రికల యొక్క శ్రేణితో (అడ్డువరుస ప్రక్రియ) పూర్వ గుణకారం చేసిన సమీకరణము (1)లో ఎడమవైపు గల A అనునది తత్సమ మాత్రిక I_n గా పరివర్తన చెందును. అదేప్రాథమిక మాత్రికల యొక్క శ్రేణిలో (అడ్డువరుస ప్రక్రియలు) ఈ సమీకరణము (1)లో కుడివైపున ఉండు I_n ను B అను మాత్రికగా మార్చును. కావున సమీకరణము (1) అనునది $I_n=BA$. అని పరివర్తన చెందును. కావున A యొక్క విలోమం B అగును. కావున $A^{-1}=B$.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 29 10-03-2022 10:28:25

గమనిక

$E_1, E_2, \cdots, E_k$ అను ప్రాథమిక మాత్రికల (అడ్డువరుస ప్రక్రియలు) శ్రేణి $(E_k \cdots E_2 E_1)A = I_n$, అగువిధంగా ఉండిన $A^{-1} = E_k \cdots E_2 E_1$. అగును.

ప్రాథమిక ప్రక్రియల మూలంగా A అను సాధారణ మాత్రికను I_n రూపమునకు పరివర్తన చేయుట గాస్-జోర్డాన్ పద్ధతి అగును. గాస్-జోర్డాన్ పద్ధతి మూలంగా A^{-1} ను కనుగొనుటకు సోపానాలు క్రింది విధంగా ఇవ్వబడినవి. :

సోపానం 1

మాత్రిక A కు కుడివైపున తత్సమ మాత్రిక I_n ను చేర్చి $[A \mid I_n]$ అను విస్తరించబడిన మాత్రికగా రూపొందించవలయును. .

సోపానం 2

$E_1, E_2, \cdots, E_k$ అను ప్రాథమిక మాత్రికలు (అడ్డువరుస ప్రక్రియలు) $(E_k \cdots E_2 E_1)A = I_n$ అను విధంగా పొందవచ్చును.

$E_1, E_2, \cdots, E_k$ అనువాటిని $[A \mid I_n]$ పై ప్రదర్శించవలెను. తర్వాత $[(E_k \cdots E_2 E_1)A \mid (E_k \cdots E_2 E_1)I_n]$ అని లభించును. కావున $[I_n \mid A^{-1}]$.

ఉదాహరణ 1.20

$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$ అను సాధారణ మాత్రికకు గాస్-జోర్డాన్ తొలగించు పద్ధతిలో విలోమమును కనుగొనుము.

సాధన

విస్తరించబడిన మాత్రికపై గాస్-జోర్డాన్ పద్ధతిని ఉపయోగించిన

$$[A \mid I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} -1 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to (-1)R_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \to \frac{1}{5}R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & (1/5) & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \to R_1 + 6R_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & (6/5) & -1 \\ 0 & 1 & (1/5) & 0 \end{array}\right].$$

కావున $A^{-1} = \begin{bmatrix} (6/5) & -1 \\ (1/5) & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

ఉదాహరణ 1.21

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ అను మాత్రికను గాస్-జోర్డాన్ తొలగించు పద్ధతిని ఉపయోగించి విలోమమును కనుగొనుము.

సాధన

వివరించబడిన మాత్రిక పై గాస్-జోర్డాన్ పద్ధతిని ఉపయోగించిన

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 30 10-03-2022 10:28:31

$$[A\,|\,I_3]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}2&1&1&1&0&0\\3&2&1&0&1&0\\2&1&2&0&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\to\frac{1}{2}R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&(1/2)&(1/2)&(1/2)&0&0\\3&2&1&0&1&0\\2&1&2&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3\to R_3-2R_1]{R_2\to R_2-3R_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&(1/2)&(1/2)&(1/2)&0&0\\0&(1/2)&-(1/2)&-(3/2)&1&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow{R_2\to 2R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&(1/2)&(1/2)&(1/2)&0&0\\0&1&-1&-3&2&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_1\to R_1-\frac{1}{2}R_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&2&-1&0\\0&1&-1&-3&2&0\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right]\xrightarrow[R_2\to R_2+R_3]{R_1\to R_1-R_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3&-1&-1\\0&1&0&-4&2&1\\0&0&1&-1&0&1\end{array}\right].$$

కావున, $A^{-1}=\begin{bmatrix}3&-1&-1\\-4&2&1\\-1&0&1\end{bmatrix}$.

అభ్యాసము 1.2

1. క్రింది మాత్రికలకు లఘు మాత్రిక సమానమును ఉపయోగించి మాత్రిక యొక్క కోటి కనుగొనుము.

(i) $\begin{bmatrix}2&-4\\-1&2\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}-1&3\\4&-7\\3&-4\end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix}1&-2&-1&0\\3&-6&-3&1\end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix}1&-2&3\\2&4&-6\\5&1&-1\end{bmatrix}$ (v) $\begin{bmatrix}0&1&2&1\\0&2&4&3\\8&1&0&2\end{bmatrix}$

2. క్రింద గల మాత్రికలకు అడ్డువరుస ఎకలాన్ రూపమును ఉపయోగించి మాత్రిక యొక్క కోటి కనుగొనుము.

(i) $\begin{bmatrix}1&1&1&3\\2&-1&3&4\\5&-1&7&11\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}1&2&-1\\3&-1&2\\1&-2&3\\1&-1&1\end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix}3&-8&5&2\\2&-5&1&4\\-1&2&3&-2\end{bmatrix}$

3. ఈ క్రింద గల మాత్రికలకు గాస్-జోర్డాన్ తొలగించు పద్ధతిని ఉపయోగించి విలోమమును కనుగొనుము.

(i) $\begin{bmatrix}2&-1\\5&-2\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&0&-1\\6&-2&-3\end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{bmatrix}$

1.4 మాత్రికల అనువర్తనాలు: రేఖీయ సరళ సమీకరణముల వ్యవస్థకు సాధనను కనుగొనుట

మాత్రికలు మరియు నిర్ధారకాల ఒక ముఖ్యమైన ఉపయోగము ఏదనిన రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థకు సాధనను కనుగొనుట. జీవశాస్త్రము, రసాయనశాస్త్రము, వాణిజ్యశాస్త్రము, అర్థశాస్త్రము, భౌతికశాస్త్రము మరియు ఇంజనీరింగ్ మొదలగువాటిలో జరుగు పలు సంభవముల నమూనాలను రేఖీయ సమీకరణముల ద్వారా రూపొందించవచ్చు. ఉదాహరణకు వలయ సిద్ధాంత (circuit theory) విశ్లేషణనకు ఉత్పాదకాలు – నిర్గమన నమూనాల విశ్లేషణకు మరియు రసాయనిక ప్రక్రియలో ప్రతిచర్యలు పరిశోదించుటకు రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థల యొక్క సాధనలు అవసరమగును.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 31 10-03-2022 10:28:36

1.4.1 రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థను అమర్చడం

ఒక సులభ పద్ధతిలో గల గణితము యొక్క గణిత నమూనాను రూపొందించడం ద్వారా రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థను అర్థం చేసుకొనవచ్చును.

A, B, C అను ముగ్గురు వ్యక్తులు సూపర్‌మార్కెట్టునకు ఒకే వాణిజ్య చిహ్నము (brand) గల బియ్యము మరియు చక్కెర కొనుటకు వెళ్ళిరి. A అనే వ్యక్తి 5కి.గ్రా బియ్యం మరియు 3కి.గ్రా చక్కెరను కొని రూ॥ ₹440 చెల్లించెను. B అనే వ్యక్తి 6కి.గ్రా బియ్యం మరియు 2కి.గ్రా చక్కెర కొని రూ॥ 400 చెల్లించెను. C అనే వ్యక్తి 8కి.గ్రా బియ్యం మరియు 5కి.గ్రా చక్కెర కొని రూ॥ 720 చెల్లించెను. ఒక కి.గ్రా బియ్యపు ధర, 1కి.గ్రా చక్కెర ధరను కనుగొనుటకుగాను గణిత నమూనాను రూపొందించెదము. 1కి.గ్రా బియ్యం ధర x అనుకొనుము. 1కి.గ్రా చక్కెర ధర y అనుకొనుము. A అనే వ్యక్తి 5కి.గ్రా బియ్యం మరియు 3కి.గ్రా చక్కెర కొని ₹440 చెల్లించినచో మనకు $5x+3y=440$ అను సమీకరణం లభించును. ఇదేవిధంగా B అనే వ్యక్తి మరియు C అనే వ్యక్తులకు క్రమముగా $6x+2y=400$ మరియు $8x+5y=720$. అను సమీకరణములు లభించును. కావున x మరియు y లను కనుగొనుటకు గణితశాస్త్ర నమూనా

$$5x+3y=440,\ 6x+2y=400,\ 8x+5y=720.$$

గమనిక

పైనున్న ఉదాహరణలో ఒక సమీకరణమును తృప్తిపరచు x మరియు y విలువలు వేరొక సమీకరణమును కూడా తృప్తిపరచవలయును. వేరేవిధంగా తెలియపరచిన x మరియు y ల విలువలు ఒకే సమయంలో అన్ని సమీకరణములను తృప్తిపరచవలయును. ఈ x మరియు y విలువలు రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థ యొక్క సాధనలగును. ఈ సమీకరణములు x మరియు y లో అమరిన ఒక ఏక పరిమాణము అగును. కావున ఈ సమీకరణములను మూల్యాంకనము చేయవలసిన చరరాశులు x మరియు y లు అమరిన రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థ అని పిలుతురు. ఇవి ఒకే సమయంలో అమర్చిన రేఖీయ సమీకరణములు అగును. వ్యవస్థ అనునది మూడు రేఖీయ సమీకరణములను x మరియు y అను మూల్యాంకనము చేయవలసిన చరరాశులను కలిగియుండును.

ఈ సమీకరణములు ద్విపరిమాణ రేఖాగణితములో సరళ రేఖలను గుర్తించును.

ఈ భాగంలో మాత్రికల ఆధారంగా రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థలకు సాధనను కనుగొను పద్ధతిని రూపొందించెదము.

1.4.2 రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థల యొక్క మాత్రిక రూపం (System of Linear Equations in Matrix Form)

m సమీకరణాలు మరియు n చరరాశులు వలన అమర్చిన రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థ రూపం:

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\cdots+a_{1n}x_n=b_1,\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\cdots+a_{2n}x_n=b_2,\\
&\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\cdots+a_{mn}x_n=b_m,
\end{aligned}\qquad \ldots (1)$$

ఇచ్చట $a_{ij}, i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n$ అనునవి గుణకములు మరియు $b_k, k=1,2,\cdots,m$ అనునవి స్థిరరాశులు. అన్ని b_k's శూన్యములు అయిన పైన గల వ్యవస్థను సజాతీయ రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థ (**homogeneous system**) అంటారు. ఆవిధంగా లేకపోతే ఏదైనా ఒక b_k's అనునది శూన్యంకానిచో ఆ

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 32 10-03-2022 10:28:41

వ్యవస్థను విజాతీయ రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థ (**non-homogeneous system**) అంటారు. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ క్రమముగా $x_1, x_2, \cdots, x_n$ వీటి విలువలుగా సమీకరణ వ్యవస్థ (1)లో గల ఒక్కొక్క సమీకరణమును తృప్తిపరచిన $(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ అను $n-$వరుస క్రమము (1) యొక్క సాధన అగును. ఈ సమీకరణము వ్యవస్థ (1)ను క్రింది విధంగా మాత్రిక రూపంలో వ్రాయవచ్చును.:

$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ యొక్క గుణకములతో $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ అను $m \times n$ మాత్రికను రూపొందించెదము. A యొక్క మొదటి అడ్డువరుస అనునది సమీ॥ వ్యవస్థలో గల మొదటి సమీ॥ $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ అను గుణకములతో అమరియున్నది. ఇదేవిధంగా మరొక అడ్డువరుసలు అమరియున్నవి. మొదటి నిలువు వరుసలో గల మూలకాలు అన్నియూ m సమీకరణము యొక్క వరుసను అనుసరించి x_1 గుణకములుగా అమరియున్నవి.

$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ అనునవి $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ అను చరరాశులతో రూపొందిన $n \times 1$ మరియు $m \times 1$ అను స్థిరరాశులతో రూపొందించబడ్డ $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_m$ నిలువు వరుస మాత్రికలు అగును.

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} = B.$$

$AX = B$ అనునది మాత్రికలు కలిగిన మాత్రికా సమీకరణము అగును. మరియు ఇది రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థ (1) యొక్క మాత్రికా రూపం అని పిలువబడును. మాత్రిక A ను వ్యవస్థ యొక్క గుణక మాత్రిక అంటారు. మరియు $\left[\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$ అనునవి వ్యవస్థ యొక్క విస్తరించబడ్డ మాత్రిక (**augmented matrix**) అంటారు. ఈ విస్తరించబడ్డ మాత్రికను $[A \mid B]$ అని గుర్తించెదము.

ఉదాహరణకు

$2x + 3y - 5z + 7 = 0, 7y + 2z - 3x = 17, 6x - 3y - 8z + 24 = 0$ అను రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థ యొక్క మాత్రికా రూపము $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -3 & 7 & 2 \\ 6 & -3 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ 17 \\ -24 \end{bmatrix}$.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 33 10-03-2022 10:28:49

1.4.3 రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థ యొక్క సాధనలు (Solution to a System of Linear equations)

రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థ యొక్క సాధన యొక్క సహజత్వమును ఈ క్రింది విధంగా తెలుసుకొందుము.

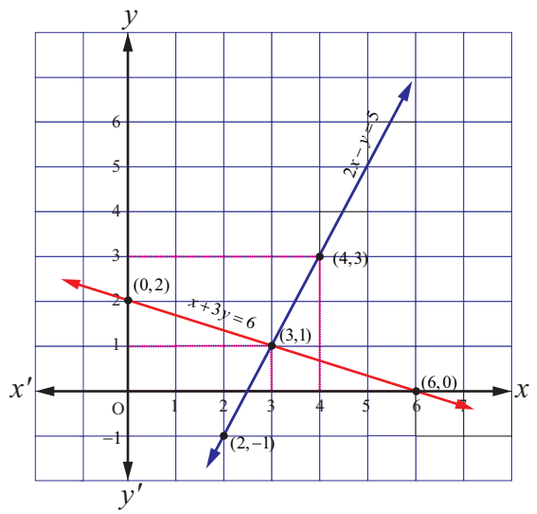
స్థితి (i)

క్రింది విధంగా రేఖీయ వ్యవస్థను తీసుకొందాము.

$$2x - y = 5, \quad \ldots (1)$$
$$x + 3y = 6. \quad \ldots (2)$$

ఈ రెండు సమీకరణములు ద్విపరిమాణ నిరూపక రేఖా గణితములో రెండు రేఖలను గుర్తించును. (పటము 1.2 ను చూడుము) (1) నుండి మనకు లభించునది

$$x = \frac{5+y}{2}. \quad \ldots (3)$$



పటము.1.2

(3) ను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా $y = 1$ వచ్చును.

$y = 1$ ను (1)లో ప్రతిక్షేపించగా $x = 3$ వచ్చును.

$x = 3$ మరియు $y = 1$ సమీకరణము (1) మరియు (2) ను తృప్తిచేయును.

సమీకరణము (1) యొక్క సాధన (2)కు సాధన అగును.

కావున ఈ వ్యవస్థ స్థిరమైనది మరియు వ్యవస్థకు ఒకేఒక సాధన (3,1) అగును.

బిందువు (3,1) అనునది రేఖలు $2x - y = 5$ మరియు $x + 3y = 6$ ఖండన బిందువు అగును.

స్థితి (ii)

క్రింది రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థను తీసుకొందాము.

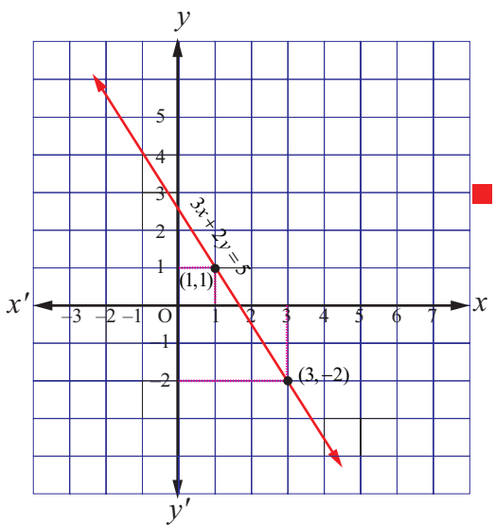
$$3x + 2y = 5, \quad \ldots (1)$$
$$6x + 4y = 10 \quad \ldots (2)$$

సమీకరణము (1) నుండ

$$x = \frac{5-2y}{3} \quad \ldots (3)$$

(3) ను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా $0 = 0$ వచ్చును.

ఇందులో మనము తెలుసుకొన్నది సమీకరణము (2) అనునది సమీకరణము (1) కు ప్రాథమిక పరివర్తన అగును. సమీకరణము (2)ను 2చే భాగించిన లభించునది సమీకరణము (1) అగును. కావున ఒకేఒక సమీకరణము (1)ని ఆధారంగా x మరియు y లకు ఒకేఒక సాధన కనుగొనుటకు వీలుకాదు.



పటము.1.3

కావున $y = t$ ను నిర్బంధముతో తీసుకొనవలసి వస్తుంది. తరువాత $x = \frac{5-2t}{3}$, ఇక్కడ t అనునది ఒక వాస్తవ సంఖ్య. సమీకరణములు (1) మరియు (2) ఒకేఒక రేఖ (ఒకదానిపై ఒకటి అమరు రేఖ)ను ద్విపరిమాణ నిరూపక రేఖ గణితములో గుర్తించును. (పటం 1.3ను చూడుము). కావున వ్యవస్థ స్థిరమైనది మరియు (1)

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 34 10-03-2022 10:28:56

యొక్క సాధనలు (2)కు సాధనలు అగును. t ఏ ఒక్క వాస్తవ సంఖ్య విలువను పొందుట వలన వ్యవస్థకు ఎనలేని సాధనలు కలవు.

స్థితి (iii)

క్రింది విధంగా రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థను తీసుకొందాము.

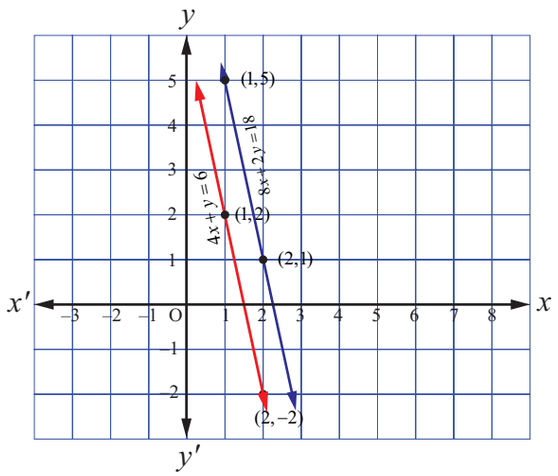
$$4x + y = 6, \quad \ldots (1)$$

$$8x + 2y = 18. \quad \ldots (2)$$

సమీకరణము (1) నుండ

$$x = \frac{6 - y}{4} \quad \ldots (3)$$

సమీకరణము (3)ను (2)లో ప్రతిక్షేపించి సూక్ష్మీకరించగా లభించునది $12 = 18$.



పటము.1.4

ఇది విరుద్ధమైన ఫలితము అగును. దీని నుండి మనము తెలుసుకొనునది ఏమనగా సమీకరణము (2), సమీకరణము (1)తో అస్థిరమైనదిగా ఉండును. కావున (1) యొక్క సాధనలు (2)కు సాధనలు కావు.

కావున వ్యవస్థ అస్థిరమైనది అగును. మరియు వ్యవస్థకు ఫలితము లేదు. ఈ సమీకరణములు ద్విపరిమాణ నిరూపక జ్యామితిలో రెండు సమాంతర రేఖలను (ఒకదానిపై ఒకటి అమరియుండదు) గుర్తించును. (పటము 1.4) ఒక దానిపై ఒకటి అమరని రెండు సమాంతర రేఖలు ఎప్పుడు వాస్తవ బిందువులో కలియుట లేదని మనము తెలుసుకొందుము.

గమనిక

(1) వ్యవస్థలో ఉండు ఏదైనా రెండు సమీకరణములను స్థానమార్పిడి చేసిన వ్యవస్థ యొక్క సాధనలో మార్పు ఉండదు.

(2) ఒక శూన్యంకాని స్థిరాంకముచే వ్యవస్థలో ఉండు ఒక సమీకరణమును గుణించి మార్చి ఏర్పరచిన వ్యవస్థ యొక్క సాధనలో మార్పురాదు.

(3) ఒక రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థ యొక్క ఒక సమీకరణము, ఆ సమీకరణముతో ఆ వ్యవస్థలో యుండు మరొక సమీకరణము యొక్క సున్నాకాని సంఖ్య యొక్క గుణకార ఫలితమును కూడి ప్రతిక్షేపించిన ఆ వ్యవస్థ యొక్క సాధన మారదు.

నిర్వచనము 1.8

ఒక రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థ కనీసము ఒక సాధన కలిగియుండిన, ఆ వ్యవస్థ స్థిరమైనది అగును. ఒక సాధన కూడా లేనిచో ఆ వ్యవస్థను అస్థిరమైనది అంటారు.

సూచన

రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థలో గల సమీకరణముల సంఖ్యకు మూల్యాంకనము చేయవలసిన చరరాశుల సంఖ్య సమానము అయిన ఆ వ్యవస్థ యొక్క గుణక మాత్రిక A అనునది చతురస్ర మాత్రికగా ఉండును.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 35 10-03-2022 10:28:58

కావున A అనునది సాధారణ మాత్రికగా ఉండిన రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థకు క్రింది పద్ధతులలో ఏదైనా ఒక పద్ధతిలో సాధనను కనుగొనవచ్చు. (i) విలోమ మాత్రిక పద్ధతి (ii) క్రామర్స్ విధి (iii) గాషియన్ తొలగించు పద్ధతి

1.4.3 (i) విలోమ మాత్రిక పద్ధతి

రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థలో గల గుణక మాత్రిక అనునది చతురస్ర మాత్రికగాను మరియు సాధారణ మాత్రికగా ఉండిన ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించుటకు వీలగును.

$$AX = B, \qquad \ldots (1)$$

అను సమీకరణమును గుర్తించెదము. ఇచ్చట A అనునది చతురస్ర మరియు సాధారణ మాత్రిక అగును. A అనునది సాధారణ మాత్రిక అందువలన A^{-1} ను కనుగొనుటకు వీలగును మరియు $A^{-1}A = AA^{-1} = I$.

(1) ని ఇరువైపుల ముందు (పూర్వ) భాగంలో A^{-1} తో గుణించిన $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. కావున $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$.

కావున మనకు లభించునది $X = A^{-1}B$.

ఉదాహరణ 1.22

క్రింది రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థను విలోమ మాత్రిక పద్ధతిని ఉపయోగించి సాధించుము.

$5x + 2y = 3,\ 3x + 2y = 5$.

సాధన

వ్యవస్థ మాత్రిక రూపం $AX = B$, ఇచ్చట $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

$|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 6 = 4 \neq 0$. కావున, A^{-1} కనుగొనవచ్చును మరియు $A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$.

$X = A^{-1}B$, అను సూత్రమును ఉపయోగించినచో

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 6-10 \\ -9+25 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -4 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-4}{4} \\ \frac{16}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

కావున సాధన $(x = -1, y = 4)$.

ఉదాహరణ 1.23

క్రింది రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థను విలోమ మాత్రిక పద్ధతిని ఉపయోగించి సాధించుము.

$2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 5,\ \ x_1 - 2x_2 + x_3 = -4,\ \ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3.$

సాధన

వ్యవస్థ యొక్క మాత్రిక రూపము $AX = B$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 36 10-03-2022 10:29:05

ఇచ్చట $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2(4+1)-3(-2-3)+3(-1+6) = 10+15+15 = 40 \neq 0$.

కావున, A^{-1} కనుగొనవచ్చును.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(\text{adj } A) = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} +(4+1) & -(-2-3) & +(-1+6) \\ -(-6+3) & +(-4-9) & -(-2-9) \\ +(3+6) & -(2-3) & +(-4-3) \end{bmatrix}^T = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}B$, అను సూత్రమును ఉపయోగించగా లభించునది

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 \\ 5 & -13 & 1 \\ 5 & 11 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 25-12+27 \\ 25+52+3 \\ 25-44-21 \end{bmatrix} = \frac{1}{40}\begin{bmatrix} 40 \\ 80 \\ -40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

సాధన $(x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1)$.

ఉదాహరణ 1.24

$A = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ మరియు $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, అయిన లబ్ధ (గుణకార) ఫలితము AB మరియు BA లను కనుగొనము. దీని మూలముగా $x-y+z=4, x-2y-2z=9, 2x+y+3z=1$ అను రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థను సాధించుము.

సాధన

$$AB = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+4+8 & 4-8+4 & -4-8+12 \\ -7+1+6 & 7-2+3 & -7-2+9 \\ 5-3-2 & -5+6-1 & 5+6-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = 8I_3$$

మరియు $BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4+7+5 & 4-1-3 & 4-3-1 \\ -4+14-10 & 4-2+6 & 4-6+2 \\ -8-7+15 & 8+1-9 & 8+3-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = 8I_3$.

కావున మనకు లభించునది $AB = BA = 8I_3$, $\left(\frac{1}{8}A\right)B = B\left(\frac{1}{8}A\right) = I_3$. కావున $B^{-1} = \frac{1}{8}A$.

ఇవ్వబడిన రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థను మాత్రిక రూపంలో వ్రాసిన వచ్చునది

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$. అనగా $B\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix}$.

కావున, $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = B^{-1}\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{8}A\right)\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -16+36+4 \\ -28+9+3 \\ 20-27-1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 24 \\ -16 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$.

కావున సాధన $(x = 3, y = -2, z = -1)$.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 37 10-03-2022 10:29:15

అభ్యాసము 1.3

1. క్రింద ఇవ్వబడిన రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థలను విలోమ మాత్రిక రూపంలో సాధించుము.

   (i) $2x+5y=-2,\ x+2y=-3$ (ii) $2x-y=8,\ 3x+2y=-2$

   (iii) $2x+3y-z=9,\ x+y+z=9,\ 3x-y-z=-1$

   (iv) $x+y+z-2=0,\ 6x-4y+5z-31=0,\ 5x+2y+2z=13$

2. $A=\begin{bmatrix}-5 & 1 & 3\\ 7 & 1 & -5\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$ మరియు $B=\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}$, అయిన లబ్ధ ఫలితము AB మరియు BA కనుగొనుము. దీని మూలంగా $x+y+2z=1, 3x+2y+z=7, 2x+y+3z=2$ అను సమీకరణ వ్యవస్థను సాధించుము.

3. గుర్తించదగిన నెల జీతం ఉన్న ఒక పనిలో ఒక వ్యక్తిని చేర్చినారు. ఒక్కొక్క సంవత్సరము అతనికి నిర్ణీత జీతము పెరుగుదల ఇవ్వబడుచున్నది. 3 సంవత్సరముల తర్వాత ఆయన పొందు నెల జీతము ₹19,800 మరియు 9 సంవత్సరముల తర్వాత ఆయన పొందు నెల జీతము ₹23,400 అయిన అతని యొక్క ప్రారంభ జీతము మరియు సంవత్సర జీతము వృద్ధి ఎంత అనునది కనుగొనుము. (విలోమ మాత్రిక పద్ధతిని ఉపయోగించి సాధించుము)

4. నలుగురు పురుషులు మరియు నలుగురు స్త్రీలు కలిసి కేటాయించిన ఒక పనిని 3 రోజులలో పూర్తిచేయును. అదే పనిని ఇద్దరు పురుషులు, 5 మంది స్త్రీలు కలిసి 4 రోజులలో పూర్తిచేయుదురు. అయిన ఈ పనిని ఒక పురుషుడు మరియు ఒక స్త్రీ విడివిడిగా పూర్తిచేయుటకు ఎన్ని రోజులు అవసరమగునని విలోమ మాత్రికను ఉపయోగించి సాధించుము.

5. A, B మరియు C వస్తువుల వెల ఒక యూనిట్ క్రమముగా ₹ x, y మరియు z అగును. P అను వ్యక్తి B లో 4 యూనిట్‌లు తీసి , A లో 2 యూనిట్‌లను C లో 5 యూనిట్‌లు అమ్మెను. Q అనువ్యక్తి C లో 2 యూనిట్‌లు తీసి A లో 3 యూనిట్‌లు మరియు B లో 1 యూనిట్ అమ్మెను. R అను వ్యక్తి A లో 1 యూనిట్ తీసి, B లో 3 యూనిట్‌లు, C లో 1 యూనిట్‌ని అమ్మెను. ఈ వాణిజ్యంలో P, Q మరియు R క్రమంగా ₹ 15,000, ₹ 1,000 మరియు ₹ 4,000 లాభము పొందెను. అయిన A, B మరియు C వస్తువుల యొక్క ఒక యూనిట్ వెలను కనుగొనుము. (విలోమ మాత్రిక రూపంలో ఈ సమస్యను సాధించుము)

1.4.3 (ii) క్రామర్స్ విధి (Cramer's Rule)

రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థలో గల గుణక మాత్రిక అనునది చతురస్ర మాత్రికగాను మరియు సాధారణ మాత్రికగాను ఉన్నప్పుడు మాత్రమే ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించవచ్చును. ఈ పద్ధతిని క్రింది విధంగా సమీకరణ వ్యవస్థ మూలంగా వివరించవచ్చును

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,$$
$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3,$$

ఇక్కడ గుణక మాత్రిక అనునది $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ సాధారణ మాత్రిక. కావున $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\neq 0.$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 38 10-03-2022 10:29:21

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$ అనుకొనిన

$$x_1\Delta = x_1\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta_1$$

$\Delta \neq 0$, కావున $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$.

ఇదేవిధంగా $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$, ఇక్కడ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$.

ఈవిధంగా, క్రామర్స్ విధి అనునది $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}, x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$,

ఇక్కడ $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$

గమనిక

Δ లో గల మొదటి నిలువు వరుసలో ఉండు మూలకములు a_{11}, a_{21}, a_{31} లకు బదులుగా క్రమముగా b_1, b_2, b_3 లను ప్రతిక్షేపించగా లభించునది Δ_1.

Δ లో గల రెండవ నిలువు వరుసలో ఉండు మూలకములు a_{12}, a_{22}, a_{32} లకు బదులుగా క్రమముగా b_1, b_2, b_3 లను ప్రతిక్షేపించగా లభించునది Δ_2.

Δ లో గల మూడవ నిలువు వరుసలో ఉండు మూలకాలు a_{13}, a_{23}, a_{33} లకు బదులుగా క్రమముగా b_1, b_2, b_3 లను ప్రతిక్షేపించగా లభించునది Δ_3.

$\Delta = 0$, అయిన క్రామర్స్ విధిని ఉపయోగించుట వీలుకాదు.

ఉదాహరణ 1.25

$x_1 - x_2 = 3, 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 17, x_2 + 2x_3 = 7$ అను సరళరేఖా సమీకరణ వ్యవస్థను క్రామర్స్ విధిని ఉపయోగించి సాధించుము.

సాధన

క్రింద వచ్చు మాత్రికల నిర్ధారకములను కనుగొనుము.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 17 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 17 & 4 \\ 0 & 7 & 2 \end{vmatrix} = -6, \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 17 \\ 0 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 24.$$

క్రామర్స్ విధి ప్రకారం $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{12}{6} = 2,\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-6}{6} = -1,\ x_3 = \dfrac{24}{6} = 4.$

కావున సాధన $(x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 4)$.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 39 10-03-2022 10:29:29

ఉదాహరణ 1.26



T20 ఆటలో చివరి ఓవర్లో 1 బంతి మాత్రమే వేయవలసిన తరుణంలో చెన్నై సూపర్‌కింగ్స్ జట్టు 6 పరుగులు పొందితే మాత్రమే విజయం సాధించే స్థాయిలో ఉన్నది. చివరి బంతి బ్యాటింగ్ చేయువారికి వేయబడినది అతను ఆ బంతిని ఎక్కువ ఎత్తుకు వెళ్ళే విధంగా కొట్టెను. ఆ బంతి లంబ తలంలో ఒక మార్గం వెంబడి ప్రయాణించినది. ఆ తలంలో xy-నిరూపక వ్యవస్థ ప్రకారం ఆ బంతి ప్రయాణించు మార్గము యొక్క సమీకరణం $y = ax^2 + bx + c$. ఆ బంతి $(10,8),(20,16),(40,22)$ అను బిందువులు ద్వారా పోవును. అయిన చెన్నై సూపర్‌కింగ్స్ జట్టు అనునది ఆటను గెలిచినదా అని నిర్ణయం తీసుకోగలమా?

నీ యొక్క సమాధానమును క్రామర్స్ విధిని బట్టి నిర్ణయించుము. (అన్ని దూరములు మీటర్ల ప్రమాణాలలో కలదు.) బంతి ప్రయాణించిన స్థలము అనునది చాలా దూరంలో గల సరిహద్దును $(70,0)$ బిందువు వద్ద సంధించును.

సాధన

$y = ax^2 + bx + c$ అను దారి సమీకరణము $(10,8),(20,16),(40,22)$ అను బిందువుల ద్వారా పోవును. అందువలన $100a+10b+c=8, 400a+20b+c=16, 1600a+40b+c=22$ అను సమీకరణములు లభించును. క్రామర్స్ విధిని ఉపయోగించుటకు క్రింది వాటిని కనుగొనుము.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 100 & 10 & 1 \\ 400 & 20 & 1 \\ 1600 & 40 & 1 \end{vmatrix} = 1000 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 1000[-2+12-16] = -6000,$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 10 & 1 \\ 16 & 20 & 1 \\ 22 & 40 & 1 \end{vmatrix} = 20 \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 8 & 2 & 1 \\ 11 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 20[-8+3+10] = 100,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 100 & 8 & 1 \\ 400 & 16 & 1 \\ 1600 & 22 & 1 \end{vmatrix} = 200 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 1 \\ 16 & 11 & 1 \end{vmatrix} = 200[-3+48-84] = -7800,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 100 & 10 & 8 \\ 400 & 20 & 16 \\ 1600 & 40 & 22 \end{vmatrix} = 2000 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \\ 16 & 4 & 11 \end{vmatrix} = 2000[-10+84-64] = 20000.$$

క్రామర్స్ విధి ప్రకారం $a = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{60}, b = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{7800}{6000} = \frac{78}{60} = \frac{13}{10}, c = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -\frac{20000}{6000} = -\frac{20}{6} = -\frac{10}{3}$.

కావున దారి యొక్క సమీకరణము $y = -\frac{1}{60}x^2 + \frac{13}{10}x - \frac{10}{3}$.

$x = 70$, అయిన $y = 6$. అని లభించుచున్నది. కావున బంతి అనునది సరిహద్దునకు పై భాగంలో 6 మీటర్ల ఎత్తులోకి వెళ్ళును మరియు సరిహద్దు దగ్గరలో గల క్రీడాకారుడు ఎగిరి దూకి పట్టుటకు ప్రయత్నించినా అతను ఆ బంతిని పట్టుకొనుటకు వీలుకాదు. కావున ఆ బంతి అతిపెద్ద సిక్సర్‌గా వెళ్ళినది మరియు చెన్నై సూపర్‌కింగ్స్ జట్టు ఆటను గెలిచింది.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 40 10-03-2022 10:29:34

అభ్యాసము 1.4

1. క్రింది రేఖీయ సమీకరణము యొక్క వ్యవస్థను క్రామర్స్ విధిని ఉపయోగించి సాధించుము.

   (i) $5x-2y+16=0, x+3y-7=0$

   (ii) $\frac{3}{x}+2y=12, \frac{2}{x}+3y=13$

   (iii) $3x+3y-z=11,\ 2x-y+2z=9,\ 4x+3y+2z=25$

   (iv) $\frac{3}{x}-\frac{4}{y}-\frac{2}{z}-1=0, \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}-2=0, \frac{2}{x}-\frac{5}{y}-\frac{4}{z}+1=0$

2. ఒక పోటీ పరీక్షలో ఒక్కొక్క సరియైన జవాబునకు 1 మార్కు ఇవ్వబడును. ప్రతి తప్పైన జవాబునకు $\frac{1}{4}$ మార్కులు తగ్గించబడును. ఒక విద్యార్థి 100 ప్రశ్నలకు జవాబులిచ్చి 80 మార్కులు మాత్రమే పొందెను. అతను ఎన్ని ప్రశ్నలకు సరియైన జవాబులిచ్చి యుండును? క్రామర్స్ విధిని ఉపయోగించి సమస్యను సాధించుము.

3. రసాయనవేత్త ఒకరి వద్ద 50% ఆమ్లత్వము గల ద్రావణము మరియు 25% ఆమ్లత్వము కలిగిన మరొక ద్రావణము ఉన్నది. అతను 10 లీటర్ల ద్రావణమును 40% ఆమ్లత్వము ఉండునట్లు ఒక ద్రావణమును తయారుచేయుటకు రెండు రకముల ద్రావణములు ఒక్కొక్క దాని నుండి ఎన్ని లీటర్లు చేర్చవలయును? (ఈ సమస్యను క్రామర్స్ విధిని ఉపయోగించి సాధించుము.)

4. ఒక చేప తొట్టిని A పంపు మరియు B పంపును ఒకటిగా చేర్చి 10 నిమిషాలలో నీరు నింపబడును. పంపు B నుండి నీరు బయటకు మరియు లోపలకి ఒకే వేగముతో పంపబడును. అకస్మాత్తుగా పంపు B నుండి నీరు బయటకు పంపిన, ఆ తొట్టిని నింపుటకు 30 నిమిషాలు పట్టును. ఒక్కొక్క పంపు వేరువేరుగా తొట్టిని నింపుటకు ఎంత సమయం పట్టును? (క్రామర్స్ విధిని అనుసరించి సాధించుము.)

5. ఒక కుటుంబములో ముగ్గురు వ్యక్తులు రాత్రి భోజనము చేయుటకు ఒక భోజనశాలకు వెళ్ళిరి. రెండు దోసలు, మూడు ఇడ్లీలు మరియు రెండు వడలు ధర ₹ 150. రెండు దోసలు, రెండు ఇడ్లీలు మరియు నాలుగు వడల ధర ₹ 200. ఐదు దోసలు, నాలుగు ఇడ్లీలు మరియు రెండు వడల ధర ₹ 250 . ఆ కుటుంబ వ్యక్తుల వద్ద ₹ 350 ఉన్నది. మరియు వాళ్ళు మూడు దోసలు, ఆరు ఇడ్లీలు మరియు ఆరు వడలు తిన్నారు. ఆ కుటుంబ వ్యక్తులు తినిన ఖర్చుల మొత్తమును వారి వద్ద గల నగదుతో చెల్లించుటకు వీలగునా? (నీ జవాబును క్రామర్స్ విధిని అనుసరించి నిరూపించుము)

1.4.3 (iii) గాస్సియన్ తొలగించు పద్ధతి (Gaussian Elimination Method)

రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థలో గల గుణకముల మాత్రిక సాధారణ మాత్రికగాను మరియు దీర్ఘచతురస్ర మాత్రికగా ఉన్నాకూడా ఈ పద్ధతిని ఉపయోగించి సాధించవచ్చును. ఇది మనము ముందుగా తెలుసుకొనియున్న ప్రతిక్షేపణ పద్ధతిలో సాధించుట అగును. ఈ పద్ధతిలో రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థ యొక్క విస్తరించబడిన మాత్రికను ఎకలాన్‌రూపంలో మార్చిన తరువాత వెనుక ప్రతిక్షేపణ పద్ధతిని ఉపయోగించి సాధించవచ్చును.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 41 10-03-2022 10:29:37

ఉదాహరణ 1.27

ఈ క్రింది రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థను గాస్సియన్ తొలగించు పద్ధతిని ఉపయోగించి సాధించుము.

$4x+3y+6z=25,\ x+5y+7z=13,\ 2x+9y+z=1.$

సాధన

విస్తరించబడిన మాత్రికను ఎకలాన్ రూపంలోకి మార్చిన, మనము పొందునది

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 3 & 6 & 25 \\ 1 & 5 & 7 & 13 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 4 & 3 & 6 & 25 \\ 2 & 9 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 - 4R_1, \\ R_3 \to R_3 - 2R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & -17 & -22 & -27 \\ 0 & -1 & -13 & -25 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 \div (-1), \\ R_3 \to R_3 \div (-1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & 17 & 22 & 27 \\ 0 & 1 & 13 & 25 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to 17R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 7 & 13 \\ 0 & 17 & 22 & 27 \\ 0 & 0 & 199 & 398 \end{array}\right].$$

ఎకలాన్ రూపము నుండి సమానమైన సమీకరణముల వ్యవస్థ:

$$x+5y+7z = 13, \quad \ldots (1)$$

$$17y+22z = 27, \quad \ldots (2)$$

$$199z = 398. \quad \ldots (3)$$

(3) నుండి $z=\dfrac{398}{199}=2$.

$z=2$ ను (2)లో ప్రతిక్షేపించిన $y=\dfrac{27-22\times 2}{17}=\dfrac{-17}{17}=-1$.

$z=2$, మరియు $y=-1$ $x=13-5\times(-1)-7\times 2=4$ ను (1)లో ప్రతిక్షేపించిన.

కావున సాధన $(x=4, y=-1, z=2)$.

గమనిక

చివరి సమీకరణము నుండి మొదటి సమీకరణమునకు పైన ఉన్న పద్ధతి అనునది వెనుక ప్రతిక్షేపణ పద్ధతి అని పిలువబడును.

ఉదాహరణ 1.28



ఒక రాకెట్ పైకి పోవు వేగము t సమయంలో సుమారుగా $v(t)=at^2+bt+c$, అగునట్లు ఉన్నది. ఇచ్చట $0\le t\le 100$ మరియు a, b, c అనునవి స్థిరరాశులు. రాకెట్ యొక్క వేగము $t=3, t=6$ మరియు $t=9$ సెకండ్లలో క్రమముగా 64, 133 మరియు 208 మైళ్ళు/సెకను అయిన, $t=15$ సెకనులలో దాని వేగమును కనుగొనుము. (గాస్సియన్ తొలగించు పద్ధతిని ఉపయోగించుము)

సాధన

$v(3)=64,\ v(6)=133,$ మరియు $v(9)=208$. అయిన క్రింద గల రేఖీయ సమీకరణములను పొందెదము.

$$9a+3b+c = 64,$$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 42 10-03-2022 10:29:45

$$36a+6b+c = 133,$$
$$81a+9b+c = 208.$$

పైన ఉన్న రేఖీయ సమీకరణములను గాస్సియన్ తొలగించు పద్ధతిని ఉపయోగించి సాధించెదము.

విస్తరించబడ్డ మాత్రికను అడ్డువరుస ఎకలాన్ రూపమునకు ప్రాథమిక అడ్డువరుస ప్రక్రియల మూలంగా మనకు లభించునది

$$[A\,|\,B]=\left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 64 \\ 36 & 6 & 1 & 133 \\ 81 & 9 & 1 & 208 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2\to R_2-4R_1,\,R_3\to R_3-9R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 64 \\ 0 & -6 & -3 & -123 \\ 0 & -18 & -8 & -368 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2\to R_2\div(-3),\,R_3\to R_3\div(-2)} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 64 \\ 0 & 2 & 1 & 41 \\ 0 & 9 & 4 & 184 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\to 2R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 64 \\ 0 & 2 & 1 & 41 \\ 0 & 18 & 8 & 368 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3\to R_3-9R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 64 \\ 0 & 2 & 1 & 41 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3\to(-1)R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 9 & 3 & 1 & 64 \\ 0 & 2 & 1 & 41 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right].$$

ఎకలాన్ రూపము నుండి వచ్చు సమీకరణములు

$9a+3b+c=64,\ 2b+c=41,\ c=1.$

వెనుక ప్రతిక్షేపణ మూలంగా మనకు లభించునది

$$c=1,\ b=\frac{(41-c)}{2}=\frac{(41-1)}{2}=20,\ a=\frac{64-3b-c}{9}=\frac{64-60-1}{9}=\frac{1}{3}.$$

కావున $v(t)=\frac{1}{3}t^2+20t+1.$ $v(15)=\frac{1}{3}(225)+20(15)+1=75+300+1=376.$ మైళ్ళు/సెకను. ■

అభ్యాసము 1.5

1. క్రింద గల రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థను గాస్సియన్ తొలగించు పద్ధతి ద్వారా సాధించుము.:
   (i) $2x-2y+3z=2,\ \ x+2y-z=3,\ \ 3x-y+2z=1$
   (ii) $2x+4y+6z=22,\ \ 3x+8y+5z=27,\ \ -x+y+2z=2$



2. ax^2+bx+c ను $x+3, x-5$ మరియు $x-1,$ తో భాగించునపుడు శేషములు క్రమముగా 21, 61 మరియు 9 అయిన a, b మరియు $c.$ లను కనుగొనుము. (గాస్సియన్ తొలగించు పద్ధతిని ఉపయోగించుము)
3. ఒక మొత్తము ₹ 65,000 సం॥నకు క్రమముగా 6%, 8% మరియు 9% అను వడ్డీరేటుతో మూడు పత్రములలో పెట్టుబడి చేయుదురు. సంవత్సర ఆదాయము ₹ 4,800. మూడవ పత్రములో లభించు ఆదాయము రెండవ పత్రములో లభించు ఆదాయము కన్నా ₹ 600 అధికమైన ఒక్కొక్క పత్రములోను పెట్టుబడి చేయు మొత్తమును కనుగొనుము. (గాస్సియన్ తొలగించు పద్ధతిని ఉపయోగించుము)
4. ఒక బాలుడు $y=ax^2+bx+c$ అను మార్గములో $(-6,8), (-2,-12),$ మరియు $(3,8)$ అను బిందువు ద్వారా వెళ్ళెను. $P(7,60)$ అను బిందువులో ఉండు అతని యొక్క స్నేహితుని సంధించుటకు ఇష్టపడెను. అతను తన స్నేహితుని సంధించగలడా? (గాస్సియన్ తొలగించు పద్ధతిని ఉపయోగించుము)

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 43 10-03-2022 10:29:53

1.5 మాత్రికల అనువర్తనాలు (రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థ యొక్క స్థిరత్వమును కోటి (శేణి) పద్ధతిని ఉపయోగించి కనుగొనుట)

విభాగం 1.3.3 లో మనము రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థ యొక్క స్థిరత్వాన్ని గురించి నిర్వచించాము. ఈ పాఠ్యవిభాగంలో దీనిని మాత్రిక యొక్క కోటి ఉపయోగించి పరిశీలించెదము. క్రింది సిద్ధాంతమును నిరూపణ లేకుండా నేర్చుకొనెదము.

సిద్ధాంతము 1.14 రౌచ్-కాపెల్లి సిద్ధాంతం

$AX = B$, అను మాత్రిక రూపంలో గల సరళ రేఖ సమీకరణముల వ్యవస్థ అనునది స్థిరత్వాన్ని పొందుటకు కావలసిన మరియు సరిపోవు నిబంధన, గుణక మాత్రిక యొక్క కోటి మరియు విస్తరించబడిన మాత్రిక కోటి సమానముగా ఉండవలెను. కావున $\rho(A) = \rho([A \mid B])$.

పై సిద్ధాంతమును క్రింద ఇవ్వబడిన ఉదాహరణములలో ఉపయోగించెదము.

1.5.1 విజాతీయ (సజాతీయత లేని) సరళ సమీకరణాలు (Non-homogeneous Linear Equations)

ఉదాహరణ 1.29

క్రింద గల రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థ అనునది స్థిరత్వాన్ని కలిగినదా అని పరిశీలించుము. స్థిరత్వాన్ని కలిగియున్న దానిని సాధించుము. $x+2y-z=3,\ 3x-y+2z=1,\ x-2y+3z=3,\ x-y+z+1=0$.

సాధన

ఇచ్చట చలరాశుల సంఖ్య 3

వ్యవస్థ యొక్క మాత్రిక రూపము $AX = B$, ఇచ్చట

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

విస్తరించబడిన మాత్రిక అనునది $[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$.

$[A \mid B]$, లో గాస్సియన్ తొలగించు పద్ధతిని ఉపయోగించిన లభించునది

$$[A \mid B] \xrightarrow[R_4 \to R_4 - R_1,]{\substack{R_2 \to R_2 - 3R_1, \\ R_3 \to R_3 - R_1,}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 5 & -8 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -4 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 \to (-1)R_4]{\substack{R_2 \to (-1)R_2, \\ R_3 \to (-1)R_3,}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 4 \end{array}\right]$$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 44 10-03-2022 10:29:57

$$\xrightarrow[R_4 \to 7R_4 - 3R_2]{R_3 \to 7R_3 - 4R_2,} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & -8 & -32 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 \div (-8)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 7 & -5 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

విస్తరించబడిన మాత్రిక $[A\,|\,B]$ లో మూడు శూన్యంకాని అడ్డువరుసలు కలవు. కావున $\rho([A\,|\,B]) = 3$.

A యొక్క అడ్డువరుస ఎకలాన్ రూపమనునది $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 7 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ఇందులో మూడు శూన్యంకాని అడ్డువరుసలు కలవు. కావున $\rho(A) = 3$.

$\rho(A) = \rho([A\,|\,B]) = 3$.

ఎకలాన్ రూపములో గల మాత్రిక నుండి లభించు సమాన సమీకరణముల వ్యవస్థ అనునది

$x + 2y - z = 3,\ 7y - 5z = 8,\ z = 4,\ 0 = 0.$

చివరి సమీకరణము $0 = 0$ అనునది అర్థమగును. వెనుక ప్రతిక్షేపించు పద్ధతి ద్వారా లభించునది

$$\begin{aligned} z &= 4 \\ 7y - 20 &= 8 \quad \Rightarrow \quad y = 4, \\ x &= 3 - 8 + 4 \quad \Rightarrow \quad x = -1. \end{aligned}$$

కావున సాధన $(x = -1, y = 4, z = 4)$. (ఇచ్చట A అనునది చతురస్ర మాత్రిక కాదు అని గుర్తించగలము)

ఇచ్చిన వ్యవస్థ స్థిరత్వంలో ఉండును. మరియు ఒకేఒక సాధన ఉండును. ■

ఉదాహరణ 1.30

క్రింది రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థ అనునది స్థిరత్వాన్ని కలిగియున్నదా అని పరిశీలించుము. స్థిరత్వమును కలిగియున్నదనిన వాటిని సాధించుము.

$4x - 2y + 6z = 8,\ x + y - 3z = -1,\ 15x - 3y + 9z = 21.$

సాధన

ఇచ్చట చలరాశుల సంఖ్య 3.

వ్యవస్థ యొక్క మాత్రిక రూపము $AX = B$, ఇచ్చట

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & -3 \\ 15 & -3 & 9 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 21 \end{bmatrix}.$$

$[A\,|\,B]$, అను విస్తరించబడిన మాత్రికలో ప్రాథమిక అడ్డువరుస ప్రక్రియలను ఉపయోగించిన

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 45 10-03-2022 10:30:03

$$[A\,|\,B]=\left[\begin{array}{ccc|c}4&-2&6&8\\1&1&-3&-1\\15&-3&9&21\end{array}\right]\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&-1\\4&-2&6&8\\15&-3&9&21\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-4R_1,\\R_3\to R_3-15R_1}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&-1\\0&-6&18&12\\0&-18&54&36\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2\div(-6),\\R_3\to R_3\div(-18)}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&-1\\0&1&-3&-2\\0&1&-3&-2\end{array}\right]\xrightarrow{R_3\to R_3-R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&-3&-1\\0&1&-3&-2\\0&0&0&0\end{array}\right].$$

కావున, $\rho(A)=\rho([A\,|\,B])=2<3$. ఎకలాన్ రూపములో గల మాత్రిక నుండి లభించు సమాన సమీకరణముల వ్యవస్థ అనునది

$$x+y-3z\ =\ -1,\ y-3z=-2,\ 0=0\,.$$

ఇందులో చివరి సమీకరణము $0=0$ అల్పమైనది. కావున అల్పము కాని రెండు సమీకరణములు కలవు. మూడు చలరాశులు కలవు. కావున చలరాశులలో ఒకటిని మనము ఎంచుకొని ఇతర రెండు చలరాశుల సమీకరణాలను పొందవచ్చును. కావున z కి t అను వాస్తవ సంఖ్యను తీసుకొనవచ్చును. కావున మనకు లభించునది $y=3t-2,\ x=-1-(3t-2)+3t=1$ కావున సాధన $\left(x=1,\ y=3t-2,\ z=t\right)$, అగును. ఇచ్చట t అనునది వాస్తవసంఖ్య అగును. పైన వున్న సాధన సమితి ఒక పరామితి కుటుంబ సాధన అగును. కావున ఇవ్వబడిన వ్యవస్థ స్థిరత్వము మరియు అంతముకాని సాధనలు కలిగియుండును. ఈ అనంత సాధనలు ఒక పరామితి కుటుంబ సాధన అగును. ■

గమనిక

పైనవున్న ఉదాహరణలో చతురస్ర మాత్రిక A అనునది సాధారణ మాత్రిక అగును. అందువలన విలోమ మాత్రిక పద్ధతిలో లేదా క్రామర్స్ విధిని ఉపయోగించి వ్యవస్థలో గల సమీకరణాలను సాధించుటకు వీలుకాదు. ఉండిననూ గాస్సియన్ తొలగించు పద్ధతిని ఉపయోగించవచ్చును. మరియు వ్యవస్థ అనునది స్థిరత్వము కానిదా అని నిర్ణయించవచ్చును. క్రింది ఉదాహరణ మిగిలిన పద్ధతులపై గాస్సియన్ తొలగించు పద్ధతి యొక్క ఆధిపత్యాన్ని నిర్ధారిస్తుంది.

ఉదాహరణ 1.31

క్రింద గల రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థ స్థిరత్వమును పరిశీలించుము మరియు వీలైతే సాధించుము. $x-y+z=-9,\ 2x-2y+2z=-18,\ 3x-3y+3z+27=0.$

సాధన

ఇచ్చట చలరాశుల సంఖ్య = 3.

వ్యవస్థ యొక్క మాత్రిక రూపము $AX=B$,

$$A\ =\ \begin{bmatrix}1&-1&1\\2&-2&2\\3&-3&3\end{bmatrix},\ X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-9\\-18\\-27\end{bmatrix}.$$

$[A\,|\,B]$, అను విస్తరించబడిన మాత్రికలో ప్రాథమిక అడ్డువరుస ప్రక్రియలను ఉపయోగించినచో

$$[A\,|\,B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-9\\2&-2&2&-18\\3&-3&3&-27\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-2R_1,\\R_3\to R_3-3R_1}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-1&1&-9\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right].$$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 46 10-03-2022 10:30:09

కావున, $\rho(A) = \rho([A \mid B]) = 1 < 3.$

ఎకలాన్ రూపములో గల మాత్రిక యందు లభించు సమాన సమీకరణము యొక్క వ్యవస్థ అనునది $x - y + z = -9,\ 0 = 0,\ 0 = 0.$

సమానమైన సమీకరణ వ్యవస్థ ఒక అల్పము కాని non-trivial సమీకరణమును మరియు మూడు చలరాశులను కలిగియున్నది.

$y = s, z = t$ అని ఏకపక్షంగా తీసుకొనిన వచ్చునది $x - s + t = -9$; లేదా $x = -9 + s - t.$

కావున సాధన అనునది $(x = -9 + s - t, y = s, z = t)$, ఇచ్చట s మరియు t పరామితులు అగును.

పై సాధించిన రెండు పరామితి కుటుంబం సాధనలుగా అమరియుండును.

ఇచ్చట వ్యవస్థ స్థిరత్వము కలిగినది మరియు అనంత సాధనలు కలిగియున్నది. ఈ సాధనలు రెండు పరామితి కుటుంబ సాధనలుగా ఉండును. ■

ఉదాహరణ 1.32

క్రింద గల రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థ స్థిరత్వము కలిగియున్నదా అని పరిశీలించుము.

$x - y + z = -9,\ 2x - y + z = 4,\ 3x - y + z = 6, 4x - y + 2z = 7.$

సాధన

ఇచ్చట చలరాశుల సంఖ్య 3.

వ్యవస్థ యొక్క మాత్రిక రూపము $AX = B,$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} -9 \\ 4 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

$[A \mid B]$, అను విస్తరించబడిన మాత్రికలో ప్రాథమిక అడ్డువరుస ప్రక్రియలను ఉపయోగించినచో

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -9 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 2 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1, \\ R_3 \to R_3 - 3R_1, \\ R_4 \to R_4 - 4R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 22 \\ 0 & 2 & -2 & 33 \\ 0 & 3 & -2 & 43 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 \to R_3 - 2R_2, \\ R_4 \to R_4 - 3R_2}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 22 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -23 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & -1 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -23 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{array}\right]$$

కావున, $\rho(A) = 3$ మరియు $\rho([A \mid B]) = 4.$ అయిన $\rho(A) \neq \rho([A \mid B]).$

ఎకలాన్ రూపములో గల మాత్రిక నుండి లభించు సమాన సమీకరణముల వ్యవస్థ అనునది

$x - y + z = -9,\quad y - z = 22,\ z = -23,\quad 0 = -11.$

చివరి సమీకరణము విరుద్ధముగా ఉన్నది.

కావున ఇవ్వబడిన సమీకరణముల వ్యవస్థ అస్థిరత్వము మరియు వ్యవస్థకు సాధన లేదు. ■

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 47 10-03-2022 10:30:15

రౌచ్–కాపెల్లి సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి క్రింది నియమములను పొందవచ్చును.

- వ్యవస్థలో గల సమీకరణములలో చలరాశుల సంఖ్య n మరియు $\rho(A)=\rho([A\,|\,B])=n$, అయిన $AX=B$, అను వ్యవస్థ స్థిరత్వము కలిగినది మరియు వ్యవస్థకు ఒకే ఒక సాధన కలదు.
- $AX=B$ అను వ్యవస్థలో చలరాశుల సంఖ్య n మరియు $\rho(A)=\rho([A\,|\,B])=n-k, k\neq 0$ అయిన వ్యవస్థకు స్థిరత్వము కలదు మరియు అనంత సాధనలు కలిగియుండును. ఈ సాధనలు $k-$ పరామితి కుటుంబముగా ఉండును. ఉదాహరణకు వ్యవస్థలో ఉండు సమీకరణములలో చలరాశుల సంఖ్య 3 మరియు $\rho(A)=\rho([A\,|\,B])=2$, అయిన వ్యవస్థ అనంత సాధనలు కలిగియుండును మరియు ఈ సాధనలు ఒక పరామితి కుటుంబముగా ఉండును. ఇదేవిధంగా వ్యవస్థలో ఉండు సమీకరణములలో చలరాశుల సంఖ్య 3గాను మరియు $\rho(A)=\rho([A\,|\,B])=1$, అయిన వ్యవస్థకు స్థిరత్వము కలదు. మరియు అనంత సాధనలు కలిగియుండును. ఈ సాధనలు రెండు పరామితి కుటుంబముగా ఉండును.
- $\rho(A)\neq\rho([A\,|\,B])$, అయిన $AX=B$ అను వ్యవస్థ అస్థిరత్వము మరియు వ్యవస్థకు సాధనలు లేవు.

ఉదాహరణ 1.33

$x+y+z=a,\ x+2y+3z=b,\ 3x+5y+7z=c.$ అను రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థ సాధనలు ఒక పరామితి కుటుంబముగా ఉండుటకు a,b మరియు c లో రూపొందు నిబంధనలను కనుగొనుము.

సాధన

ఇచ్చట చలరాశుల సంఖ్య 3.

వ్యవస్థ యొక్కమాత్రిక రూపం $AX=B$, ఇచ్చట $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&3\\3&5&7\end{bmatrix}, X=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}$.

$[A\,|\,B]$, అను విస్తరించబడిన మాత్రికలో ప్రాథమిక అడ్డువరుస ప్రక్రియలను ఉపయోగించినచో

$$[A\,|\,B]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\1&2&3&b\\3&5&7&c\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{R_2\to R_2-R_1,\\ R_3\to R_3-3R_1}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&1&2&b-a\\0&2&4&c-3a\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3\to R_3-2R_2}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&1&2&b-a\\0&0&0&(c-3a)-2(b-a)\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&1&2&b-a\\0&0&0&(c-2b-a)\end{array}\right].$$

వ్యవస్థ యొక్క సాధనలు ఒక పరామితి కుటుంబముగా ఉండుటకు $\rho(A)=\rho([A,B])=2$. కావున ఎకలాన్ రూపములో గల మూడవ అడ్డువరుస అనునది సున్నా అడ్డువరుసగా ఉండవలయును.

కావున, $c-2b-a=0\ \Rightarrow\ c=a+2b.$ ■

ఉదాహరణ 1.34

λ , μ విలువలకు $x+2y+z=7,\ x+y+\lambda z=\mu, x+3y-5z=5$ అను సమీకరణముల (i) సాధనలేదు. (ii) ఒకే ఒక సాధన ఉండును. (iii) అనంత సాధనలు కలిగియుండును అని పరిశీలించుము.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 48 10-03-2022 10:30:23

సాధన

ఇచ్చట చలరాశుల సంఖ్య 3.

వ్యవస్థ యొక్క మాత్రిక రూపం $AX = B$, ఇచ్చట $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ 1 & 3 & -5 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 \\ \mu \\ 5 \end{bmatrix}$.

$[A \mid B]$, అను విస్తరించబడిన మాత్రికలో ప్రాథమిక అడ్డువరుస ప్రక్రియలను ఉపయోగించినచో

$$[A \mid B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & \lambda & \mu \\ 1 & 3 & -5 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & \lambda & \mu \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1,} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & -1 & \lambda - 1 & \mu - 7 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda - 7 & \mu - 9 \end{array}\right].$$

(i) $\lambda = 7$ మరియు $\mu \neq 9$ అయిన $\rho(A) = 2$ మరియు $\rho([A \mid B]) = 3$. కావున $\rho(A) \neq \rho([A \mid B])$. వ్యవస్థ అస్థిరత్వము కావున వ్యవస్థకు సాధనలేదు.

(ii) $\lambda \neq 7$ మరియు μ అనునది ఏదైనా ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయిన $\rho(A) = 3$ మరియు $\rho([A \mid B]) = 3$. కావున $\rho(A) = \rho([A \mid B]) = 3 =$ చలరాశుల సంఖ్య. కావున ఇవ్వబడిన వ్యవస్థకు స్థిరత్వము కలదు మరియు ఒకే ఒక సాధన ఉండును.

(iii) $\lambda = 7$ మరియు $\mu = 9$, అయిన $\rho(A) = 2$ మరియు $\rho([A \mid B]) = 2$.

కావున $\rho(A) = \rho([A \mid B]) = 2 <$ చలరాశుల సంఖ్య 3. కావున వ్యవస్థ స్థిరత్వమగును మరియు అనంత సాధనలు ఉండును. ఈ సాధనలు ఒక పరామితి కుటుంబ సాధనలుగా అమరియుండును. ■

అభ్యాసము 1.6

1. క్రింద సమీకరణాల వ్యవస్థ స్థిరత్వము కలదా అని పరిశీలించుము. స్థిరత్వము కలదనిన వాటిని కోటి పద్ధతిలో సాధించుము.
   (i) $x - y + 2z = 2, \quad 2x + y + 4z = 7, \quad 4x - y + z = 4$
   (ii) $3x + y + z = 2, \quad x - 3y + 2z = 1, \quad 7x - y + 4z = 5$
   (iii) $2x + 2y + z = 5, \quad x - y + z = 1, \quad 3x + y + 2z = 4$
   (iv) $2x - y + z = 2, \quad 6x - 3y + 3z = 6, \quad 4x - 2y + 2z = 4$
2. k యొక్క విలువకు క్రింది సమీకరణాల వ్యవస్థ $kx - 2y + z = 1, \quad x - 2ky + z = -2, \quad x - 2y + kz = 1$
   (i) సాధన లేదు (ii)ఒకేఒక సాధన ఉండును (iii)అనంత సాధనలు ఉండునని పరిశీలించుము.
3. λ, μ విలువలకు $2x + 3y + 5z = 9$, $7x + 3y - 5z = 8$, $2x + 3y + \lambda z = \mu$, అను సమీకరణాల వ్యవస్థ
   (i) సాధనలేదు (ii) ఒకే ఒక సాధన ఉండును (iii) అనంత సాధనలు ఉండునని పరిశీలించుము

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 49 10-03-2022 10:30:32

1.5.2 సజాతీయ రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థ

సజాతీయ రేఖీయ సమీకరణాల వ్యవస్థ

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0, \end{aligned} \qquad \ldots (1)$$

అనునది జ్ఞప్తికి తెచ్చుకొనెదము. ఇచ్చట గుణకాలు $a_{ij}, i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n$ అనునవి స్థిరరాశులు. ఈ వ్యవస్థలో గల సమీకరణములు $x_1 = 0, x_2 = 0, \cdots, x_n = 0.$ అను విలువలకు సంతృప్తి చెందును. ఈ సాధనను అల్ప సాధన అని అంటారు. ఈవ్యవస్థ ఎల్లప్పుడూ స్థిరత్వమును కలిగి ఉండును.

పైన ఉన్న వ్యవస్థను $AX = O_{m \times 1}$, అను మాత్రిక రూపంలో వ్రాయవచ్చును. ఇచ్చట

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, O_{m \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$O_{m \times 1}$ అను ఆంగ్ల అక్షరముతో గుర్తించెదము. O అనునది సున్నా నిలువు వరుస మాత్రిక అగుట వలన $\rho(A) = \rho([A \mid O]) \leq m.$ అనునది ఎల్లప్పుడు సత్యమగును. కావున రౌచ్–కాపెల్లి సిద్ధాంతము ద్వారా రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థ ఎల్లప్పుడూ స్థిరత్వమును కలిగియుండును.

$m < n,$ అయిన చలరాశుల సంఖ్య, సమీకరణాల సంఖ్యకు అధికంగా ఉండును. కావున $\rho(A) = \rho([A \mid O]) < n.$ వ్యవస్థ (1) అనునది అల్పముకాని non-trivial సాధనను కలిగియుండును.

$m = n,$ అయిన చలరాశుల సంఖ్య అనునది సమీకరణము సంఖ్యకు సమానం. కావున వ్యవస్థ:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0, \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_n &= 0, \end{aligned} \qquad \ldots (2)$$

గా మారును. ఇందులో రెండు రకాలు కలవు.

స్థితి (i)

$\rho(A) = \rho([A \mid O]) = n,$ అయిన వ్యవస్థ (2) అనునది ఒకే ఒక సాధన కలిగియుండును. అట్టి సాధన అల్పమైన సాధన అగును. ఇచ్చట $\rho(A) = n,$ అయినందువలన $|A| \neq 0.$ కావున అల్పమైన సాధనకు $|A| \neq 0.$

స్థితి (ii)

$\rho(A) = \rho([A \mid O]) < n,$ అయిన వ్యవస్థ (2) అల్పముకాని **non-trivial** సాధనను కలిగియుండును. ఇచ్చట $\rho(A) = n,$ అయినందువలన $|A| \neq 0.$ కావున సజాతీయ సరళ రేఖ సమీకరణ వ్యవస్థ అల్పముకాని సాధనను కలిగియుండిను మరియు దాని యొక్క మాత్రిక నిర్ధారకము సున్నగా ఉండును.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 50 10-03-2022 10:30:39

$m > n$, అయిన చలరాశుల సంఖ్య కన్నా సమీకరణముల సంఖ్య అధికంగా ఉండును. ఈ సమయములో ప్రాథమిక పరివర్తన ద్వారా $\rho(A) = \rho([A \mid O]) \leq n$. పొందవచ్చును.

ఉదాహరణ 1.35

క్రింది సమీకరణముల వ్యవస్థను సాధించుము.

$x + 2y + 3z = 0,\ 3x + 4y + 4z = 0,\ 7x + 10y + 12z = 0.$

సాధన

ఇచ్చట సమీకరణముల సంఖ్య, చలరాశుల సంఖ్య సమానం. విస్తరించబడిన మాత్రికను ఎకలాన్ రూపమునకు మార్చిన (గాస్సియన్ తొలగించు పద్ధతి) లభించునది.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \\ 7 & 10 & 12 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 - 3R_1, \\ R_3 \to R_3 - 7R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \\ 0 & -4 & -9 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 \div (-1), \\ R_3 \to R_3 \div (-1)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & 9 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 \div (-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

$\rho(A) = \rho([A \mid O]) = 3 =$ చలరాశుల సంఖ్య.

కావున వ్యవస్థ స్థిరమైనది మరియు $x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ అను ఒకేఒక అల్పమైన సాధన మాత్రమే ఉండును. ■

గమనిక

పైన ఉన్న ఉదాహరణములో

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 4 \\ 7 & 10 & 12 \end{vmatrix} = 1(48 - 40) - 2(36 - 28) + 3(30 - 28) = 8 - 16 + 6 = -2 \neq 0$$ అని చూచెదము.

ఉదాహరణ 1.36

$x + 3y - 2z = 0,\ 2x - y + 4z = 0,\ x - 11y + 14z = 0$. అను సమీకరణ వ్యవస్థను సాధించుము.

సాధన

చలరాశుల సంఖ్య 3.

విస్తరించబడిన మాత్రికను ఎకలాన్ రూపమునకు మార్చిన (గాస్సియన్ తొలగించు పద్ధతి) లభించునది.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 \\ 1 & -11 & 14 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1, \\ R_3 \to R_3 - R_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 8 & 0 \\ 0 & -14 & 16 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{R_2 \to R_2 \div (-1), \\ R_3 \to R_3 \div (-2)}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -8 & 0 \\ 0 & 7 & -8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 51 10-03-2022 10:30:43

$\rho(A) = \rho([A\,|\,O]) = 2 < 3 =$ చలరాశుల సంఖ్య.

వ్యవస్థ అనునది ఒక పరామితి కుటుంబ సాధనలు పొందియుండును.

ఎకలాన్ రూపంలో మనకు లభించిన సమీకరణములు

$x + 3y - 2z = 0, \quad 7y - 8z = 0, \quad 0 = 0.$

$z = t$, అనుకొనుము. ఇచ్చట t అనునది ఏకపక్ష వాస్తవ సంఖ్య. వెనుక ప్రతిక్షేపణ పద్ధతిలో లభించునది

$$z = t,$$

$$7y - 8t = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{8t}{7},$$

$$x + 3\left(\frac{8t}{7}\right) - 2t = 0 \;\Rightarrow\; x + \frac{24t - 14t}{7} = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{10t}{7}.$$

కావున సాధన $\left(x = -\frac{10t}{7}, y = \frac{8t}{7}, z = t\right)$, ఇచ్చట t అనునది ఒక వాస్తవ సంఖ్య.

ఉదాహరణ 1.37

క్రింది వ్యవస్థను సాధించుము: $x + y - 2z = 0, 2x - 3y + z = 0, 3x - 7y + 10z = 0, 6x - 9y + 10z = 0.$

సాధన

ఇచ్చట సమీకరణముల సంఖ్య 4 మరియు చలరాశుల సంఖ్య 3 విస్తరించబడిన మాత్రికను ఎకలాన్ రూపమునకు మార్చినచో

$$[A\,|\,O] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -7 & 10 & 0 \\ 6 & -9 & 10 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 \to R_4 - 6R_1]{\substack{R_2 \to R_2 - 2R_1, \\ R_3 \to R_3 - 3R_1,}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & -10 & 16 & 0 \\ 0 & -15 & 22 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3 \to R_3 \div (-2)]{\substack{R_2 \to R_2 \div (-5), \\ }} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 0 \\ 0 & -15 & 22 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[R_4 \to R_4 + 15R_2]{\substack{R_3 \to R_3 - 5R_2, \\ }} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_4 \to R_4 \div 7]{\substack{R_3 \to R_3 \div (-3), \\ }} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_4 \to R_4 - R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

కావున $\rho(A) = \rho([A\,|\,O]) = 3 =$ చలరాశుల సంఖ్య. కావున వ్యవస్థలో అల్పమైన సాధన మాత్రం ఉండును.

ఉదాహరణ 1.38

క్రింది వ్యవస్థ అల్పము కాని సాధన కలిగియుండిన λ విలువను కనుగొనుము.

$(3\lambda - 8)x + 3y + 3z = 0,\; 3x + (3\lambda - 8)y + 3z = 0,\; 3x + 3y + (3\lambda - 8)z = 0$

సాధన

వ్యవస్థ అల్పముకాని సాధన కలిగియుండిన గుణక మాత్రిక నిర్ధారకము సున్నా అగును. కావున.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 52 10-03-2022 10:30:48

$$\begin{vmatrix} 3\lambda-8 & 3 & 3 \\ 3 & 3\lambda-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3\lambda-8 \end{vmatrix} = 0 \text{ లేదా } \begin{vmatrix} 3\lambda-2 & 3\lambda-2 & 3\lambda-2 \\ 3 & 3\lambda-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3\lambda-8 \end{vmatrix} = 0 \ (R_1 \to R_1+R_2+R_3 \text{ ఉపయోగించినచో})$$

$$\text{లేదా } (3\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3\lambda-8 & 3 \\ 3 & 3 & 3\lambda-8 \end{vmatrix} = 0 \ ((3\lambda-2) \text{ ను } R_1 \text{ నుండి వెలుపలికి తీసిన})$$

$$\text{లేదా } (3\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3\lambda-11 & 0 \\ 0 & 0 & 3\lambda-11 \end{vmatrix} = 0 \ (R_2 \to R_2-3R_1, R_3 \to R_3-3R_1 \text{ ఉపయోగించిన})$$

$$\text{లేదా } (3\lambda-2)(3\lambda-11)^2\ 0 \text{ . కావున } \lambda = \frac{2}{3} \text{ మరియు } \lambda = \frac{11}{3}.$$

ఇప్పుడు మనము రసాయనశాస్త్రానికి సజాతీయ సరళరేఖ సమీకరణ వ్యవస్థను ఉపయోగించెదము. రసాయన సమీకరణము ఇరువైపుల ఉండు అణువుల సంఖ్యను పరిశోధన చేయుట వలన రసాయన ప్రతిచర్య సమీకరణములను సమతుల్యము చేయుటను ఇంతకు ముందే తెలుసుకొనియున్నాము. దీనికి ఒక క్రమమైన పద్ధతులను క్రింది ఉదాహరణ మూలముగా వివరించెదము.

ఉదాహరణ 1.39

గాస్సియన్ తొలగించు పద్ధతిని ఉపయోగించి రసాయనిక ప్రతిచర్య సమీకరణమును సమతుల్యము చేయుట.

$C_5H_8 + O_2 \to CO_2 + H_2O.$

(పై నుండు ప్రతిచర్య, ఐసోప్రీన్ అను సేంద్రీయ సమ్మేళన పదార్థమును మండించుట వలన సంభవించును.)

సాధన

మనము x_1, x_2, x_3 మరియు x_4 అను ధనాత్మక పూర్ణాంకములను

$x_1C_5H_8 + x_2O_2 = x_3CO_2 + x_4H_2O$ అని అమరు విధంగా పరిశీలించెదము. .. (1)

(1) నుండి ఎడమవైపు ఉన్న కార్బన్ అణువుల సంఖ్య కుడివైపు ఉన్న సంఖ్య సమానముగా ఉండవలెను. కావున

$5x_1 = x_3 \Rightarrow 5x_1 - x_3 = 0$ . ... (2)

అదేవిధంగా హైడ్రోజన్ మరియు ఆక్సిజన్ అణువులను పరిశీలిస్తే మనకు వరుసగా

$8x_1 = 2x_4 \Rightarrow 4x_1 - x_4 = 0$, ... (3)

$2x_2 = 2x_3 + x_4 \Rightarrow 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0$. ... (4)

సమీకరణము (2) , (3) మరియు (4) అను 4 చలరాశులు గల సజాతీయ సరళ రేఖ సమీకరణములను ఏర్పరచును.

విస్తరించబడిన మాత్రిక $[A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right]$.

గాస్సియన్ తొలగించు పద్ధతిని ఉపయోగించినచో

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 53 10-03-2022 10:30:55

$$[A\,|\,B] \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 5 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \to 4R_3 - 5R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 5 & 0 \end{array}\right].$$

కావున $\rho(A) = \rho([A\,|\,B]) = 3 < 4 =$ చలరాశుల సంఖ్య

వ్యవస్థకు స్థిరత్వము కలదు మరియు అనంత సాధనలు కలిగియుండును. ఎకలాన్ రూపంలో మనకు లభించు సమీకరణములు.

$4x_1 - x_4 = 0, 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, -4x_3 + 5x_4 = 0$ కావున ఒక చలరాశిని, సున్నా కాని వాస్తవ సంఖ్య కలిగిన ఏకపక్ష చలరాశులుగా తీసుకొనవలయును.

$x_4 = t, t \neq 0.$ అనుకొనుము. వెనుక ప్రతిక్షేపణ పద్ధతిలో $x_3 = \frac{5t}{4}, x_2 = \frac{7t}{4}, x_1 = \frac{t}{4}$ ను పొందగలము.

$x_1, x_2, x_3,$ మరియు x_4 అనునవి ధనాత్మక పూర్ణాంకములు. కావున

$t = 4.$ ఎన్నుకొనిన $x_1 = 1, x_2 = 7, x_3 = 5$ మరియు $x_4 = 4.$ లభించును.

కావున సమతుల్య సమీకరణము $C_5H_8 + 7O_2 \to 5CO_2 + 4H_2O$ అగును. ■

ఉదాహరణ 1.40

$px + by + cz = 0,\ ax + qy + cz = 0,\ ax + by + rz = 0$ అను సమీకరణముల వ్యవస్థ అల్పముకాని సాధనను కలిగియున్నది మరియు non-trivial $p \neq a, q \neq b, r \neq c,$ అయిన $\frac{p}{p-a} + \frac{q}{q-b} + \frac{r}{r-c} = 2.$ అని నిరూపించుము.

సాధన

$px + by + cz = 0, ax + qy + cz = 0, ax + by + rz = 0$ అను సమీకరణముల వ్యవస్థ అల్పముకాని సాధన కలిగియున్నది అనుకొనిన

$\begin{vmatrix} p & b & c \\ a & q & c \\ a & b & r \end{vmatrix} = 0.$ $R_2 \to R_2 - R_1$ మరియు $R_3 \to R_3 - R_1$ అని పై ఉన్న సమీకరణములో ఉపయోగించినచో లభించునది

$$\begin{vmatrix} p & b & c \\ a-p & q-b & 0 \\ a-p & 0 & r-c \end{vmatrix} = 0. \text{ కనుక } \begin{vmatrix} p & b & c \\ -(p-a) & q-b & 0 \\ -(p-a) & 0 & r-c \end{vmatrix} = 0.$$

$p \neq a, q \neq b, r \neq c,$ కావున మనకు లభించునది $(p-a)(q-b)(r-c)\begin{vmatrix} \frac{p}{p-a} & \frac{b}{q-b} & \frac{c}{r-c} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 54 10-03-2022 10:31:03

కావున $\begin{vmatrix} \frac{p}{p-a} & \frac{b}{q-b} & \frac{c}{r-c} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

స్థిరాంకమును విస్తరించగా లభించునది $\frac{p}{p-a}+\frac{b}{q-b}+\frac{c}{r-c}=0.$

దీనివలన, $\frac{p}{p-a}+\frac{q-(q-b)}{q-b}+\frac{r-(r-c)}{r-c}=0 \Rightarrow \frac{p}{p-a}+\frac{q}{q-b}+\frac{r}{r-c}=2.$

అభ్యాసము 1.7

1. ఈ క్రింది సజాతీయ సమీకరణముల వ్యవస్థను సాధించుము.
   (i) $3x+2y+7z=0,\quad 4x-3y-2z=0,\quad 5x+9y+23z=0$
   (ii) $2x+3y-z=0,\quad x-y-2z=0,\quad 3x+y+3z=0$
2. λ విలువనకు క్రింది సమీకరణము వ్యవస్థ $x+y+3z=0,\ 4x+3y+\lambda z=0,\ 2x+y+2z=0$
   (i) ఒకేఒక సాధన (ii) అల్పము కాని సాధనలను ఇచ్చునని నిర్ధారించుము.
3. గాస్సియన్ తొలగించు పద్ధతిని ఉపయోగించి $C_2H_6+O_2 \rightarrow H_2O+CO_2$ అను రసాయనిక ప్రతిచర్య సమీకరణమును సమతుల్యము చేయుము.

అభ్యాసము 1.8

క్రింద ఇవ్వబడిన నాలుగు జవాబులనుండి సరియైన లేదా సరిపోవు జవాబును ఎన్నుకొనుము:

1. $|\text{adj}(\text{adj}\, A)| = |A|^9$, అయిన చతురస్ర మాత్రిక A యొక్క తరగతి
   (1) 3 (2) 4 (3) 2 (4) 5
2. A అను 3×3 సాధారణ మాత్రికకు $AA^T = A^TA$ మరియు $B = A^{-1}A^T$ గా ఉండినచో $BB^T =$
   (1) A (2) B (3) I_3 (4) B^T
3. $A=\begin{bmatrix}3 & 5\\ 1 & 2\end{bmatrix}$, $B=\text{adj}\, A$ మరియు $C=3A$, అయిన $\frac{|\text{adj}\, B|}{|C|} =$
   (1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{9}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) 1
4. $A\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & 6\end{bmatrix}$, అయిన $A=$
   (1) $\begin{bmatrix}1 & -2\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 1\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}4 & -1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$
5. $A=\begin{bmatrix}7 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$, అయిన $9I_2 - A =$
   (1) A^{-1} (2) $\frac{A^{-1}}{2}$ (3) $3A^{-1}$ (4) $2A^{-1}$

G7MSC

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 55 10-03-2022 10:31:13

6. $A=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 5\end{bmatrix}$ మరియు $B=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ అయిన $|\text{adj}(AB)|=$

(1) -40 (2) -80 (3) -60 (4) -20

7. $P=\begin{bmatrix}1 & x & 0\\ 1 & 3 & 0\\ 2 & 4 & -2\end{bmatrix}$ అనునది 3×3 తరగతిగా గల మాత్రిక A కు అనుబంధ మాత్రిక $|A|=4$ అయిన x అనునది

(1) 15 (2) 12 (3) 14 (4) 11

8. If $A=\begin{bmatrix}3 & 1 & -1\\ 2 & -2 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$ మరియు $A^{-1}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$ అయిన a_{23} యొక్క విలువ

(1) 0 (2) -2 (3) -3 (4) -1

9. If A, B మరియు C అనునవి ఎదో ఒక తరగతిలో విలోమ మాత్రికలు అయిన క్రింది వాటిలో ఏది సరియైనది కాదు

(1) $\text{adj}\, A=|A|A^{-1}$ (2) $\text{adj}(AB)=(\text{adj}\, A)(\text{adj}\, B)$

(3) $\det A^{-1}=(\det A)^{-1}$ (4) $(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

10. If $(AB)^{-1}=\begin{bmatrix}12 & -17\\ -19 & 27\end{bmatrix}$ మరియు $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 3\end{bmatrix}$, అయిన $B^{-1}=$

(1) $\begin{bmatrix}2 & -5\\ -3 & 8\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}8 & 5\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}8 & -5\\ -3 & 2\end{bmatrix}$

11. A^TA^{-1} అనునది సౌష్ఠవము అయిన $A^2=$

(1) A^{-1} (2) $(A^T)^2$ (3) A^T (4) $(A^{-1})^2$

12. A అనునది సాధారణ మాత్రిక మరియు $A^{-1}=\begin{bmatrix}5 & 3\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ అయిన $(A^T)^{-1}=$

(1) $\begin{bmatrix}-5 & 3\\ 2 & 1\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}5 & 3\\ -2 & -1\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}5 & -2\\ 3 & -1\end{bmatrix}$

13. $A=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & \frac{4}{5}\\ x & \frac{3}{5}\end{bmatrix}$ మరియు $A^T=A^{-1}$, అయిన x యొక్క విలువ

(1) $\frac{-4}{5}$ (2) $\frac{-3}{5}$ (3) $\frac{3}{5}$ (4) $\frac{4}{5}$

14. If $A=\begin{bmatrix}1 & \tan\frac{\theta}{2}\\ -\tan\frac{\theta}{2} & 1\end{bmatrix}$ మరియు $AB=I_2$, అయిన $B=$

(1) $\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)A$ (2) $\left(\cos^2\frac{\theta}{2}\right)A^T$ (3) $(\cos^2\theta)I$ (4) $\left(\sin^2\frac{\theta}{2}\right)A$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 56 10-03-2022 10:31:30

15. $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ మరియు $A(\text{adj}\,A)=\begin{bmatrix}k & 0\\ 0 & k\end{bmatrix}$, అయిన $k=$

(1) 0 (2) $\sin\theta$ (3) $\cos\theta$ (4) 1

16. $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & -2\end{bmatrix}$ మరియు $\lambda A^{-1}=A$, అయిన λ యొక్క విలువ

(1) 17 (2) 14 (3) 19 (4) 21

17. $\text{adj}\,A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & -1\end{bmatrix}$ మరియు $\text{adj}\,B=\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}$ అయిన $\text{adj}(AB)$ అనునది

(1) $\begin{bmatrix}-7 & -1\\ 7 & -9\end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix}-6 & 5\\ -2 & -10\end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix}-7 & 7\\ -1 & -9\end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix}-6 & -2\\ 5 & -10\end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 4 & 6 & 8\\ -1 & -2 & -3 & -4\end{bmatrix}$ యొక్క కోటి

(1) 1 (2) 2 (3) 4 (4) 3

19. $x^a y^b=e^m, x^c y^d=e^n, \Delta_1=\begin{vmatrix}m & b\\ n & d\end{vmatrix}, \Delta_2=\begin{vmatrix}a & m\\ c & n\end{vmatrix}, \Delta_3=\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}$, అయిన x మరియు y యొక్క విలువలు క్రమముగా,

(1) $e^{(\Delta_2/\Delta_1)}, e^{(\Delta_3/\Delta_1)}$ (2) $\log(\Delta_1/\Delta_3), \log(\Delta_2/\Delta_3)$

(3) $\log(\Delta_2/\Delta_1), \log(\Delta_3/\Delta_1)$ (4)) $e^{(\Delta_1/\Delta_3)}, e^{(\Delta_2/\Delta_3)}$

20. క్రింది వాటిలో సరియైనవి ఎన్నుకొనుము.

(i) సౌష్ఠవ మాత్రిక యొక్క అనుబంధ మాత్రిక సౌష్ఠవ మాత్రిక అగును.

(ii) వికర్ణ మాత్రిక యొక్క అనుబంధ మాత్రిక ఒక వికర్ణ మాత్రిక

(iii) A అనునది nవ తరగతి గల ఒక చతురస్ర మాత్రిక మరియు λ ఒక సదిశ అనిన $\text{adj}(\lambda A)=\lambda^n\,\text{adj}(A)$.

(iv) $A(\text{adj}A)=(\text{adj}A)A=|A|I$

(1) (i) మాత్రం (2) (ii) మరియు (iii) (3) (iii) మరియు (iv) (4) (i), (ii) మరియు (iv)

21. $\rho(A)=\rho([A\,|\,B])$ అయిన $AX=B$ అను రేఖీయ సమీకరణముల వ్యవస్థ అనునది

(1) స్థిరత్వము కలదు మరియు ఒకేఒక సాధన కలిగియుండును. (2) స్థిరత్వము కలదు

(3) స్థిరత్వము మరియు అనంత సాధనలు కలిగియుండును (4) అస్థిరమైనది

22. $0\le\theta\le\pi$ మరియు $x+(\sin\theta)y-(\cos\theta)z=0, (\cos\theta)x-y+z=0, (\sin\theta)x+y-z=0$ వ్యవస్థ అల్పముకాని సాధన కలిగియుండిన θ యొక్క విలువ

(1) $\frac{2\pi}{3}$ (2) $\frac{3\pi}{4}$ (3) $\frac{5\pi}{6}$ (4) $\frac{\pi}{4}$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 57 10-03-2022 10:31:41

23. ఒక రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థ యొక్క విస్తరించబడిన మాత్రిక $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & \lambda-7 & \mu+5 \end{bmatrix}$ మరియు వ్యవస్థ అనంత సాధనలు కలిగియుండిన

(1) $\lambda = 7, \mu \neq -5$ (2) $\lambda = -7, \mu = 5$ (3) $\lambda \neq 7, \mu \neq -5$ (4) $\lambda = 7, \mu = -5$

24. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ మరియు $4B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & x \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. అనిన B యొక్క విలోమము A అయిన x యొక్క విలువ

(1) 2 (2) 4 (3) 3 (4) 1

25. $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ అయిన $\text{adj}(\text{adj}\, A)$ యొక్క విలువ

(1) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 6 & -6 & 8 \\ 4 & -6 & 8 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} -3 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

పాఠ్యాంశములు

(1) $A =$ అను చతురస్ర మాత్రిక యొక్క అనుబంధం A సహకారక మాత్రిక యొక్క వ్యత్యయ మాత్రిక.

(2) $A(\text{adj}\, A) = (\text{adj}\, A)A = |A| I_n$.

(3) $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{adj}\, A$.

(4) (i) $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ (ii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ (iii) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1}$, λ అనునది శూన్యముకాని సదిశ

(5) (i) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. (ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

(6) A అనునది nవ తరగతి గల సాధారణ చతురస్ర మాత్రిక అయిన

(i) $(\text{adj}\, A)^{-1} = \text{adj}(A^{-1}) = \frac{1}{|A|} A$ (ii) $|\text{adj}\, A| = |A|^{n-1}$

(iii) $\text{adj}\,(\text{adj}\, A) = |A|^{n-2} A$ (iv) $\text{adj}(\lambda A) = \lambda^{n-1} \text{adj}(A)$, λ అనునది శూన్యేతర సదిశ

(v) $|\text{adj}\,(\text{adj}\, A)| = |A|^{(n-1)^2}$ (vi) $(\text{adj}\, A)^T = \text{adj}(A^T)$

(vii) $\text{adj}(AB) = (\text{adj}\, B)(\text{adj}\, A)$

(7) (i) $A^{-1} = \pm \frac{1}{\sqrt{|\text{adj}\, A|}} \text{adj}\, A$. (ii) $A = \pm \frac{1}{\sqrt{|\text{adj}\, A|}} \text{adj}\,(\text{adj}\, A)$.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 58 10-03-2022 10:31:52

(8) (i) $AA^T = A^T A = I$ అయిన A అను మాత్రిక లంబకోణీయ మాత్రిక అగును.

(ii) A అను మాత్రిక లంబకోణీయ మాత్రికగా ఉండుటకు కావలసిన మరియు సరిపోవు నిబంధన A సాధారణ మాత్రికగా మరియు $A^{-1} = A^T$ అని ఉండవలయును.

(9) $AX = B$ అను రేఖీయ సమీకరణ వ్యవస్థకు సాధన కనుగొను పద్ధతులు

(i) విలోమ మాత్రిక పద్ధతి $X = A^{-1}B, |A| \neq 0$

(ii) క్రామర్స్ విధి $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, z = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \Delta \neq 0$.

(iii) గాస్సియన్ తొలగించు పద్ధతి

(10) (i) $\rho(A) = \rho([A|B]) =$ చలరాశుల సంఖ్య అయిన వ్యవస్థ ఒకేఒక సాధన కలిగియుండును.

(ii) $\rho(A) = \rho([A|B]) <$ చలరాశుల సంఖ్య అయిన వ్యవస్థ అనంత సాధనలు కలిగియుండును.

(iii) $\rho(A) \neq \rho([A|B])$ అయిన వ్యవస్థ అస్థిరత్వము మరియు వ్యవస్థకు సాధనలు లేవు.

(11) $AX = 0$ అను సజాతీయ రేఖీయ సమీకరణము యొక్క వ్యవస్థ

(i) $|A| \neq 0$ అయిన, అల్పమైన సాధన కలిగియుండును.

(ii) $|A| = 0$ అయిన అల్పముకాని సాధన కలిగియుండును..

అంతర్జాల కృత్యము

https://ggbm.at/vchq92pg or Scan the QR Code

బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్ చేసి పైన ఇవ్వబడిన URL లింక్‌ను టైపు చేయుము లేదా QR సంకేతమును స్కాన్ చేయుము. జియోజీబ్రా యొక్క "12th Standard Mathematics" పేజీ వచ్చును. ఈ వర్క్‌బుక్ ఎడన ప్రక్కన పాఠ్యపుస్తకమునకు సంబంధించిన అధ్యాయములు కనబడును. వాటిలో "work book" అను అధ్యాయమును ఎన్నుకొనుము. ఇప్పుడు ఈ పాఠ్యాంశమునకు సంబంధించిన కొన్ని వర్క్‌షీట్ పేజీలను చూడవచ్చును. "Application Matrices−Problem" అను వర్క్‌షీట్‌ను ఎన్నుకొనుము.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 1_Matrices.indd 59 10-03-2022 10:31:56

అధ్యాయము
2

సంకీర్ణ సంఖ్యలు

"ఉన్నదిగాను లేనిదిగాను గోచరించు పరమాత్మ యొక్క అద్భుత
శరణాలయమే కల్పిత సంఖ్యలగును."

– గాట్‌ఫ్రైడ్ లెబెన్జి



రాఫెల్ బొంబెల్లీ
(1526-1572)

సంకీర్ణ సంఖ్యల అభివృద్ధికి పలువురు గణితశాస్త్రవేత్తలు తోడ్పడ్డారు. సంకీర్ణ సంఖ్యల సంకలనం, వ్యవకలనం, గుణకారం మరియు భాగహార నియమాలను ఇటలీ గణితశాస్త్రవేత్త రాఫెల్ బొంబెల్లీ అభివృద్ధి చేశారు. సంకీర్ణ సంఖ్యలలో బీజగణితాన్ని నిర్వహించిన మొట్టమొదటి వ్యక్తిగా ఇతన్ని పరిగణిస్తారు. ఇతని సాధనలను గుర్తించు విధంగా ఒక చంద్రబిలానికి బొంబెల్లి అని పేరు పెట్టబడినది.

నిత్యజీవితములో సంకీర్ణ సంఖ్యలు (Real Life Context)

ఒకే సమయములో రెండు భాగాలలో వేర్వేరుగా ఉండే దృగ్విషయాన్ని (పరిస్థితిని) సూచించడంలో సంకీర్ణ సంఖ్యలు ఉపయోగపడుతాయి. ఉదాహరణకు ప్రత్యామ్నాయ ప్రవాహం, విద్యుదయస్కాంత సంకేతాలను ఉపయోగించే ఇంజనీర్లు, వైద్యులు, శాస్త్రవేత్తలు, వాహన డిజైనర్లు మరియు ఇతరులు దాని గమ్యాన్ని చేరుకోవడానికి బలమైన సిగ్నల్ ప్రాససింగ్ కోసం సంకీర్ణ సంఖ్యలను ఉపయోగించాలి. సిగ్నల్ ప్రాససింగ్, (నియంత్రణ సిద్ధాంతము) కంట్రోల్ థియరీ, విద్యుదయస్కాంతత్వం, ద్రవ యాంత్రికము, క్వాంటం మెకానిక్స్, రేఖాచిత్రం (cartography), కంపన విశ్లేషణలలో సంకీర్ణ సంఖ్యలను ఉపయోగించకుండా వుండుటకు వీలుకాదు.

అభ్యసన లక్ష్యాలు

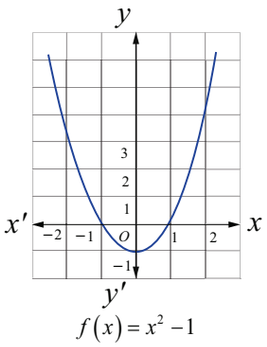
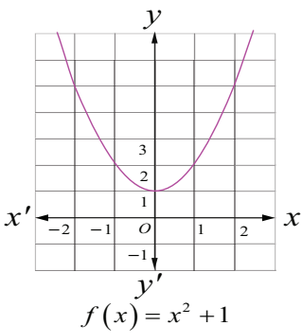
ప్రస్తుత పాఠ్యభాగము ముగించిన తర్వాత విద్యార్థులు నేర్చుకొనునవి

- సంకీర్ణ సంఖ్యలపై బీజగణిత ప్రక్రియలు
- అర్గాండ్ సమతలంనందు సంకీర్ణ సంఖ్యలను గుర్తించుట
- సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క సంయుగ్మము మరియు మాపమును కనుగొనుట
- సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క ధ్రువ రూపము మరియు ఆయిలర్స్ రూపమును కనుగొనుట
- డిమోయర్స్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క n వ మూలకమును కనుగొనుట

2.1 సంకీర్ణ సంఖ్యల పరిచయం

సంకీర్ణ సంఖ్యలను పరిచయం చేయుటకు ముందుగా "వర్గము చేయునపుడు ఋణసంఖ్య లభించు విధంగా ఏదేని ఒక వాస్తవ సంఖ్య ఉన్నదా?" అను ప్రశ్నకు జవాబు చెప్పుటకు ప్రయత్నించెదము. దీనికి జవాబు చెప్పుటకు క్రింద ఇవ్వబడిన 1,2 సమీకరణములను ప్రయత్నించెదము.

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 60 10-03-2022 10:37:08

సమీకరణము 1	సమీకరణము 2
$x^2-1=0$ $x=\pm\sqrt{1}$ $x=\pm1$	$x^2+1=0$ $x=\pm\sqrt{-1}$ $x=\pm?$
	
పటము 2.1	పటము 2.2
సమీకరణము 1 కి $x=-1$ మరియు $x=1$ అను రెండు వాస్తవ విలువలు కలవు. ఈ సమీకరణమును సాధించుట అనునది $f(x)=x^2-1$ అను రేఖాచిత్రము యొక్క x-అంతర ఖండములను కనుగొనుటకు సమానము అని మనకు తెలుసు. ఈ రేఖా పటము x అక్షమును $(-1, 0)$ మరియు $(1, 0)$ అను బిందువులలో ఖండించును.	అదే తర్కము ప్రకారము, **సమీకరణము 2** కు వాస్తవ ఫలితము లేదు. ఎందుకనగా, పటము నుండి $f(x)=x^2+1$ అను రేఖాచిత్రము x- అక్షమును ఖండించదని మనకు తెలియును.

ఎందుకనగా ఒక వాస్తవసంఖ్యను వర్గము చేసినపుడు మనము ఋణసంఖ్యను పొందుటకు వీలుకాదు. సమీకరణము 2కు ఫలితము లభించవలనన్నా, వర్గము చేసినపుడు -1 వచ్చునట్లు ఒక కల్పిత సంఖ్యను రూపొందించవలెను. $\sqrt{-1}$ అనునది కల్పిత ప్రమాణమగును. దీనిని i అను గుర్తుతో సూచించుదుము. దీని నుండి $i^2=-1$. ను పొందవచ్చును. ఈ వాస్తవాన్ని ఉపయోగించి కల్పితసంఖ్య i యొక్క ఘాత విలువలను పొందవచ్చును.

2.1.1 కల్పిత ప్రమాణము i యొక్క ఘాతములు

$i^0=1,\ i^1=i$	$i^2=-1$	$i^3=i^2i=-i$	$i^4=i^2i^2=1$
$(i)^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{i}{(i)^2}=-i$	$(i)^{-2}=-1$	$(i)^{-3}=i$	$(i)^{-4}=1=i^4$

దీని నుండి n ఒక పూర్ణసంఖ్య అయిన, i^n నకు నాలుగు వేర్వేరు విలువలు మాత్రమే ఉన్నవని మనకు తెలియును. ఈ విలువలు n ను 4చే భాగించిన వచ్చు శేషములు $0,1,2$ మరియు 3 మొదలగువాటిని అనుసరించి అమరును. పూర్ణసంఖ్య n అనునది $n\le-4$ లేదా $n\ge4$ గా ఉన్నప్పుడు భాగహార శేషవిధి ప్రకారము $n=4q+k,\ \ 0\le k<4,$ అగును. ఇచ్చట k మరియు q అనునవి పూర్ణసంఖ్యలగును. దీని నుండి

$$(i)^n=(i)^{4q+k}=(i)^{4q}(i)^k=\left((i)^4\right)^q(i)^k=(1)^q(i)^k=(i)^k$$

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 61 10-03-2022 10:37:14

ఉదాహరణ 2.1

క్రింది వాటిని సూక్ష్మీకరించుము

(i) i^{7} (ii) i^{1729} (iii) $i^{-1924}+i^{2018}$ (iv) $\sum_{n=1}^{102} i^{n}$ (v) $i\, i^{2}\, i^{3}\cdots i^{40}$

సాధన

(i) $(i)^{7}=(i)^{4+3}=(i)^{3}=-i$; (ii) $i^{1729}=i^{1728}\,i^{1}=i$

(iii) $(i)^{-1924}+(i)^{2018}=(i)^{-1924+0}+(i)^{2016+2}=(i)^{0}+(i)^{2}=1-1=0$

(iv) $\sum_{n=1}^{102} i^{n}=\left(i^{1}+i^{2}+i^{3}+i^{4}\right)+\left(i^{5}+i^{6}+i^{7}+i^{8}\right)+\cdots+\left(i^{97}+i^{98}+i^{99}+i^{100}\right)+i^{101}+i^{102}$

$=\left(i^{1}+i^{2}+i^{3}+i^{4}\right)+\left(i^{1}+i^{2}+i^{3}+i^{4}\right)+\cdots+\left(i^{1}+i^{2}+i^{3}+i^{4}\right)+i^{1}+i^{2}$

$=\{i+(-1)+(-i)+1\}+\{i+(-1)+(-i)+1\}+\cdots\ldots+\{i+(-1)+(-i)+1\}+i+(-1)$

$=0+0+\cdots 0+i-1$

$=-1+i$ (ఈ సంఖ్య ఏది?)

(v) $i\, i^{2}\, i^{3}\cdots i^{40}=i^{1+2+3+\cdots+40}=i^{\frac{40\times 41}{2}}=i^{820}=i^{0}=1$.

ఫలితము: i యొక్క నాలుగు వరుస ఘాతాల మొత్తము సున్న. అనగా $i^{n}+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0 \quad \forall n\in\mathbb{Z}$

గమనిక

(i) $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ అనునవి a, b లలో కనీసము ఒకటైనా ఋణాత్మకముకానిదిగా ఉన్నప్పుడే ఇది సత్యమగును.

ఉదాహరణమునకు $6=\sqrt{36}=\sqrt{(-4)(-9)}=\sqrt{(-4)}\sqrt{(-9)}=(2i)(3i)=6i^{2}=-6$, ఇది ఒక విరుద్ధమగును.

$\sqrt{(-4)(-9)}=\sqrt{(-4)}\sqrt{(-9)}$, అని తీసుకొన్నందు వలన మనము విరుద్ధాన్ని పొందగలుగుతున్నాము.

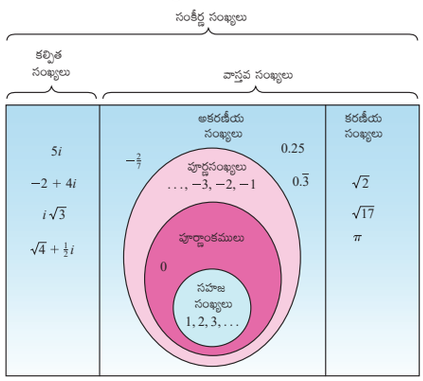
కావున $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ అనునవి a, b లలో కనీసము ఏదైనా ఒకటి ఋణాత్మకముకానిదిగా ఉన్నప్పుడే సత్యమగును.

(ii) $y\in\mathbb{R}$, $y^{2}\geq 0$

$$\sqrt{(-1)(y^{2})}=\sqrt{(y^{2})(-1)}$$

$$\sqrt{(-1)}\sqrt{(y^{2})}=\sqrt{(y^{2})}\sqrt{(-1)}$$

$$iy=yi.$$



అభ్యాసము 2.1

క్రింది వాటిని సూక్ష్మీకరించుము:

1. $i^{1947}+i^{1950}$
2. $i^{1948}-i^{-1869}$
3. $\sum_{n=1}^{12} i^{n}$
4. $i^{59}+\frac{1}{i^{59}}$
5. $i\, i^{2} i^{3}\cdots i^{2000}$
6. $\sum_{n=1}^{10} i^{n+50}$

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 62 10-03-2022 10:37:25

2.2 సంకీర్ణ సంఖ్యలు (Complex Numbers)

మనము $x^2+1=0$ అను సమీకరణమునకు వాస్తవ సంఖ్యావ్యవస్థలో సాధన లేదని చూశాము. సాధారణంగా సాధనలు లేని వాస్తవ గుణకములను కలిగిన బహుపద సమాసముల సమీకరణములు కలవు. ఈ విధమైన బహుపద సమీకరణములకు పరిష్కారమును పొందుటకు వాస్తవ సంఖ్య వ్యవస్థను విస్తరించిరి. ఈ కారణము చేత గణితశాస్త్రజ్ఞులు సంకీర్ణ సంఖ్యల యొక్క వ్యవస్థను అభివృద్ధి చేయుటకు ప్రేరేపించబడిరి.

కావున ఈ విభాగంలో క్రింది వాటిని నిర్వచించెదము.

(i) దీర్ఘచతురస్రాకార రూపంలో సంకీర్ణ సంఖ్యలు

(ii) ఆర్గాండ్ తలము

(iii) సంకీర్ణ సంఖ్యలపై బీజగణిత కార్యకలాపాలు లేదా పరిక్రియలు

సంకీర్ణ సంఖ్యల వ్యవస్థ అనునది కల్పిత ప్రమాణము i ను ఉపయోగించి విస్తరింపబడిన వాస్తవ సంఖ్య యొక్క వివరణ అగును.

వాస్తవ సంఖ్యలు x మరియు y, $i^2=-1$ అను ధర్మమును కలిగిన కల్పిత ప్రమాణము i తో సంకలన మరియు గుణకార పరిక్రియల సహాయముతో $x+iy$. అను సంకీర్ణ సంఖ్యను పొందవచ్చును. ఇందులో "+" అను గుర్తును సదిశల సంకలనముగా గుర్తించవలెను. దీనిని కార్ల్ ఫ్రెడ్రిక్ గాస్ (1777–1855) పరిచయం చేశారు.

2.2.1 లంబరూపము లేదా దీర్ఘచతురస్రాకార రూపము (Rectangular form)

నిర్వచనము 2.1 సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క లంబరూపము లేదా దీర్ఘచతురస్రాకార రూపము

సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క లంబరూపమనునది $x+iy$ (లేదా $x+yi$) అగును. ఇందులో x మరియు y అనునవి వాస్తవ సంఖ్యలగును. దీనిలో x అనునది వాస్తవ భాగముగాను, y అనునది కల్పిత భాగముగాను గుర్తించుదురు.

$x=0$, అయిన సంకీర్ణ సంఖ్య అనునది శుద్ధ కల్పితసంఖ్య అగును. $y=0$, అయిన సంకీర్ణ సంఖ్య అనునది శుద్ధ వాస్తవసంఖ్య అగును. సున్నా మాత్రము ఒకే సమయంలో వాస్తవసంఖ్యగాను మరియు శుద్ధ కల్పితసంఖ్యగా ఉండును. ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క నిర్ధిష్ట లంబ రూపము $x+iy$ ని z తో సూచించడం పరిపాటి. మరియు $x=\mathrm{Re}(z)$ గాను, $y=\mathrm{Im}(z)$ గాను గుర్తించవచ్చును. ఉదాహరణకు $\mathrm{Re}(5-i7)=5$ మరియు $\mathrm{Im}(5-i7)=-7$ అగును.

$\alpha+i\beta,\ \beta\neq 0$ అను రూపములో ఉన్న సంఖ్యలను కల్పిత సంఖ్యలు (వాస్తవము కాని కల్పిత సంఖ్యలు) అని పిలిచెదరు.

సంకీర్ణ సంఖ్యల సమానత్వమును క్రింది విధంగా నిర్వచించవచ్చును.

నిర్వచనం 2.2

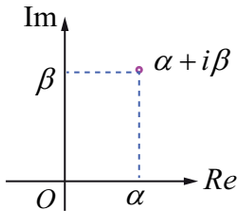
రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యలు $z_1=x_1+iy_1$ మరియు $z_2=x_2+iy_2$ అనునవి సమానముగా ఉండుటకు కావలసిన నిబంధన $\mathrm{Re}(z_1)=\mathrm{Re}(z_2)$ మరియు $\mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)$ అనగా $x_1=x_2$. మరియు $y_1=y_2$

ఉదాహరణమునకు $\alpha+i\beta=-7+3i$, అనిన $\alpha=-7$ మరియు $\beta=3$ అగును.

2.2.2 ఆర్గాండ్ తలము (Argand plane)

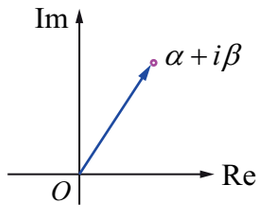
ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య $z = x + iy$ ని ఏకైకంగా వాస్తవసంఖ్యల యొక్క క్రమయుగ్మం (x, y) ద్వారా నిర్ణయించబడుతుంది. $3-8i$, 6 మరియు $-4i$ మొదలగు సంకీర్ణ సంఖ్యలు. $(3,-8), (6,0),$ మరియు $(0,-4)$ అను వరుస జతలకు సమానము. ఈ విధంగా $z = x + iy$ అను సంకీర్ణ సంఖ్యను (x, y) అను బిందువు ద్వారా నిరూపకతలంలో అన్వయించవచ్చును. మనము x అక్షమును వాస్తవ అక్షముగాను y అక్షమును కల్పిత అక్షముగాను తీసుకొని సంకీర్ణ సంఖ్యను సూచించిన దాని xy-తలమును సంకీర్ణ తలం లేదా ఆర్గాండ్ తలము అంటారు. ఆర్గాండ్ తలము అను పేరు స్విట్జర్లాండ్‌కు చెందిన గణితశాస్త్రవేత్త జెన్‌ఆర్గాండ్ (Jean Argand) (1768–1822) జ్ఞాపకార్థముగా పేరు పెట్టబడినది.

ఒక సంకీర్ణ సంఖ్యను ఒక బిందువుతో మాత్రమే కాకుండా ఆది బిందువు నుండి బిందువును గుర్తించే స్థానసదిశగా కూడా సూచిస్తారు. ఆ సంఖ్య, ఆ బిందువు మరియు ఆ సదిశ మొదలగువన్నియు z అనే ఒకే అక్షరముతో గుర్తించాలి. ఎప్పటిలాగా అన్ని సదిశలను ఒకదానికొకటి సమాంతర స్థానభ్రంశం ద్వారా పొందినట్లు మనము గుర్తిస్తాము. ఈ పాఠ్యభాగములో $\mathbb{C}$ అనునది సంకీర్ణ సంఖ్యల సమితిని సూచించును. జ్యామితీయంగా ద్వారా ఒక సంకీర్ణ సంఖ్యను $\mathbb{R}^2$ లో ఒక బిందువుగాను లేదా ఆర్గాండ్ తలములో ఒక సదిశగా చూడవచ్చును.



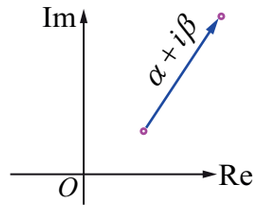
ఒక బిందువుగా సంకీర్ణసంఖ్య

పటము 2.3



మూల బిందువు నుండి స్థానసదిశగా ఆ బిందువును గుర్తించు సంకీర్ణసంఖ్య

పటము 2.4

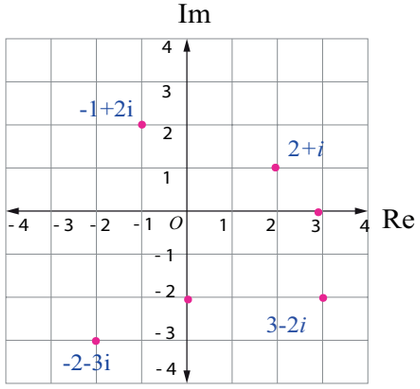


ఒక సదిశగా సంకీర్ణసంఖ్య

పటము 2.5

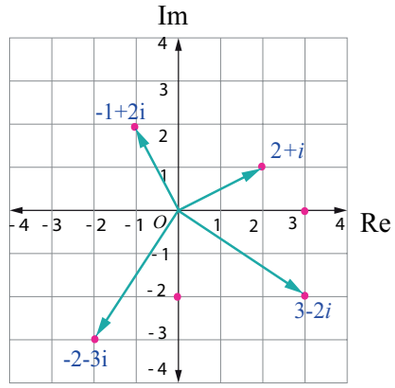
వివరణ 2.1

$2+i, -1+2i,\ 3-2i,\ 0-2i, 3+\sqrt{-2}, -2-3i,\ \cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$ మరియు $3+0i$. మొదలగువాటిలో కొన్ని ఆర్గాండ్ తలములో గుర్తించబడియున్నవి.



బిందువులుగా సంకీర్ణసంఖ్యలు

పటము 2.6



స్థానసదిశల సంకీర్ణసంఖ్యలు

పటము 2.7

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 64 10-03-2022 10:37:38

2.2.3 సంకీర్ణ సంఖ్యలపై బీజీయ పరిక్రియలు

ఈ పాఠ్యభాగములో వాస్తవసంఖ్యల లక్షణములనుండి సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క బీజగణిత లక్షణములను వాటి రేఖాగణిత నిర్మాణాన్ని మనము చూసెదము.

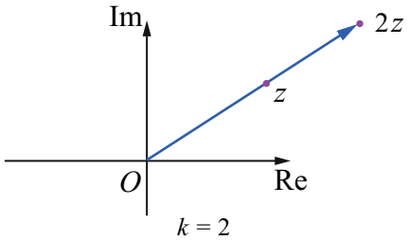
(i) సంకీర్ణ సంఖ్యల అదిశా గుణకారము:

$z = x + iy$ మరియు $k \in \mathbb{R}$ అయిన

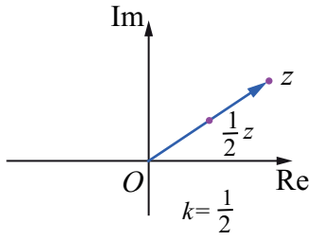
$k\,z = (kx) + (ky)\,i$ అని నిర్వచించెదము.

ప్రత్యేకంగా $0\,z = 0$, $1z = z$ మరియు $(-1)z = -z$ అగును.

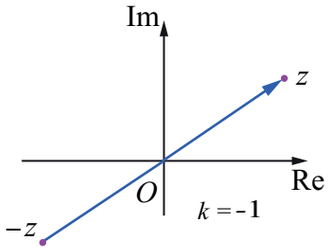
$k = 2, \frac{1}{2}, -1$ మొదలగువాటికి $k\,z$ యొక్క రేఖాచిత్రములు క్రింద ఇవ్వబడినవి.



పటము 2.8



పటము 2.9



పటము 2.10

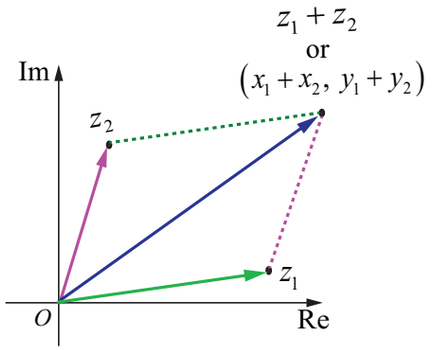
(ii) సంకీర్ణ సంఖ్యల సంకలనము:

$z_1 = x_1 + iy_1$ మరియు $z_2 = x_2 + iy_2$, ఇచ్చట x_1, x_2, y_1 మరియు $y_2 \in \mathbb{R}$ అనిన

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) \\ &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \end{aligned}$$

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ అగును.

ఒక సదిశను సమాంతర స్థానభ్రంశము చేసిన దాని పొడవు మరియు దిశ మార్పుచెందదని మనము ఇంతకు ముందుపే తెలుసుకొనియున్నాము. $z_1 = x_1 + iy_1$ మరియు $z_2 = x_2 + iy_2$ గా ఉన్నప్పుడు, సమాంతర చతుర్భుజ సంకలన న్యాయము ప్రకారము వాటి మొత్తము $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ అనునది $(x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$. అను బిందువుచే గుర్తించబడుచున్నది. ఈ $z_1 + z_2$ ను పై బిందు నిరూపకాలను అంశములుగా కలిగిన సదిశగా కూడా చూడవచ్చును. కావున z_1, z_2, మరియు $z_1 + z_2$ మొదలగువాటిని సంకీర్ణ తలములో సదిశా రూపంలో పటము 2.11లో ఉన్నట్లు గమనించెదము.

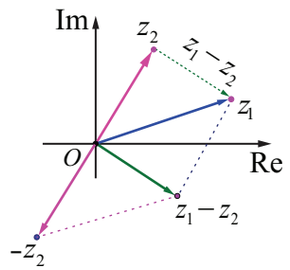


పటము 2.11

(iii) సంకీర్ణ సంఖ్యల వ్యవకలనము

ఇదేవిధంగా $z_1 - z_2$ అను సంకీర్ణ సంఖ్య ఆది బిందువును ప్రారంభ బిందువుగాను, $(x_1 - x_2,\ y_1 - y_2)$ ను చివరి (దత్త) బిందువుగాను గల స్థానసదిశగా చూడవచ్చును.

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$



పటము 2.12

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 65 10-03-2022 10:37:49

$$= (x_1 + iy_1) + (-x_2 - iy_2)$$

$$= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ అగును.

$z_1 - z_2$ అను సదిశా వ్యవకలనమును z_2 యొక్క అంత్యబిందువును, ఆది బిందువుకు బదులుగా z_1 యొక్క కొనకు కలిపి కూడా గీయగలమనే ముఖ్యమైన విషయమును గమనించగలరు. ఈ రకమైన సూచన వ్యవకలన పరిక్రియ యొక్క అర్థమును లేదా వివరణను మార్పు చేయదు. వ్యవకలన సదిశను పటములో (ఆకుపచ్చ) చుక్కల గీతతో చూపినట్లు z_1 మరియు z_2 కొనలను కలుపవలెను.

(iv) సంకీర్ణ సంఖ్యల గుణకారము

z_1 మరియు z_2 అను సంకీర్ణ సంఖ్యల గుణకారమును

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$ అని నిర్వచిస్తాము.

z_1 మరియు z_2 లను గుణించుట వలన లభించు సంకీర్ణ సంఖ్యయును ఒక సదిశచే సూచించవచ్చును. ఆ సదిశ అనునది z_1 మరియు z_2 అను సదిశలు అమరిన తలములోనే అమరును. దీని నుండి ఈ సంకీర్ణ సంఖ్యల లబ్ధము సదిశ బీజగణితములో ఉపయోగించు అదిశా లబ్ధము మరియు సదిశా లబ్ధము కాదని స్పష్టముగా తెలియును.

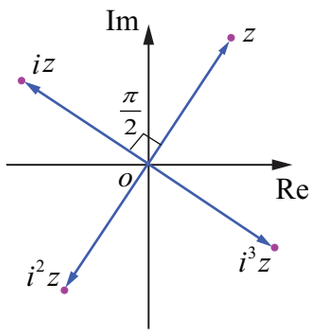
విశేషాంశాలు

సంకీర్ణ సంఖ్య z ను i చే గుణించుట

$$z = x + iy, \text{ అనిన}$$

$$iz = i(x + iy)$$

$$= -y + ix.$$



పటము 2.13

సంకీర్ణ సంఖ్య iz అనునది 90° లేదా $\frac{\pi}{2}$ రేడియన్లు ఆదిబిందువును కేంద్రంగా అపసవ్యదిశలో z యొక్క భ్రమణం అగును. సాధారణముగా ఏ సంకీర్ణ సంఖ్య z ను i చే గుణించుట అనేది z ను ఎల్లప్పుడు 90° అపసవ్యదిశలో మూల బిందువు కేంద్రముగా భ్రమణము చేయుట అగును.

వివరణ 2.2

$z_1 = 6 + 7i$ మరియు $z_2 = 3 - 5i$. అనిన $z_1 + z_2$ మరియు $z_1 - z_2$ అనునవి

(i) $(3 - 5i) + (6 + 7i) = (3 + 6) + (-5 + 7)i = 9 + 2i$

$(6 + 7i) - (3 - 5i) = (6 - 3) + (7 - (-5))i = 3 + 12i$.

$z_1 = 2 + 3i$ మరియు $z_2 = 4 + 7i$. అనిన $z_1 z_2$ అనునది

(ii) $(2 + 3i)(4 + 7i) = (2 \times 4 - 3 \times 7) + i(2 \times 7 + 3 \times 4)$

$= (8 - 21) + (14 + 12)i = -13 + 26i$.

ఉదాహరణ 2.2

$(2 + i)x + (1 - i)y + 2i - 3$ మరియు $x + (-1 + 2i)y + 1 + i$ మొదలగు సంకీర్ణ సంఖ్యలు సమానమైన x మరియు y ల వాస్తవ విలువలను కనుగొనుము.

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 66 10-03-2022 10:38:04

సాధన

$$z_1 = (2+i)x+(1-i)y+2i-3=(2x+y-3)+i(x-y+2)$$

$$z_2 = x+(-1+2i)y+1+i=(x-y+1)+i(2y+1).$$

ఇవ్వబడినది $z_1 = z_2$.

కావున $(2x+y-3)+i(x-y+2)=(x-y+1)+i(2y+1)$.

వాస్తవ మరియు కల్పిత భాగమును సమానం చేస్తే

$$2x+y-3 = x-y+1 \quad \Rightarrow \quad x+2y=4.$$

$$x-y+2 = 2y+1 \quad \Rightarrow \quad x-3y=-1.$$

పై సమీకరణములను సాధించగా

$x=2$ మరియు $y=1$ లభించును.

అభ్యాసము 2.2

1. $z=5-2i$ మరియు $w=-1+3i$ అనిన ఈ క్రింది విలువలను కనుగొనుము.

   (i) $z+w$ (ii) $z-iw$ (iii) $2z+3w$

   (iv) zw (v) $z^2+2zw+w^2$ (vi) $(z+w)^2$.

2. $z=2+3i$ ను క్రింద ఇవ్వబడిన సంకీర్ణ సంఖ్యలను ఆర్గాండ్ తలములో గుర్తించుము.

   (i) z, iz మరియు $z+iz$ (ii) $z, -iz$ మరియు $z-iz$.

3. $(3-i)x-(2-i)y+2i+5$ మరియు $2x+(-1+2i)y+3+2i$ అను సంకీర్ణ సంఖ్యలు సమానమైన x మరియు y ల వాస్తవ విలువలను కనుగొనుము.

2.3 సంకీర్ణ సంఖ్యలపై ప్రాథమిక బీజగణిత లక్షణాలు లేదా ధర్మములు

సంకీర్ణ సంఖ్యల సంకలనము మరియు గుణకార ధర్మములు వాస్తవసంఖ్యల ధర్మములను పోలియుండును. క్రింద కొన్ని ప్రాథమిక బీజగణిత ధర్మములను జాబితా చేయబడింది. వాటిలో కొన్నింటిని సరిచూస్తాము.

2.3.1 సంకీర్ణ సంఖ్యల ధర్మములు

సంకీర్ణ సంఖ్యలు సంకలనముపై క్రింది ధర్మములను సంతృప్తపరుచును.	సంకీర్ణ సంఖ్యలు గుణకారముపై క్రింది ధర్మములను సంతృప్తపరుచును.
(i) **సంవృత ధర్మము (Closure property)** z_1 మరియు z_2, అను ఏవేని రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యల సంకలనము z_1+z_2 కూడా ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య అగును.	(i) **సంవృత ధర్మము (Closure property)** z_1 మరియు z_2 అను ఏవేని రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యల గుణకారము $z_1 z_2$ కూడా ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య అగును.

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 67 10-03-2022 10:38:14

(ii) **వ్యత్యయ ధర్మము (The commutative property)** z_1 మరియు z_2 అను ఏవేని రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యలకు $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ అగును.	(ii) **వ్యత్యయ ధర్మము (The commutative property)** z_1 మరియు z_2 అను ఏవేని రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యలకు $z_1 z_2 = z_2 z_1$ అగును.
(iii) **సహచర్య ధర్మము (The associative property)** $z_1, z_2,$ మరియు z_3 అను ఏవేని మూడు సంకీర్ణ సంఖ్యలకు $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ అగును.	(iii) **సహచర్య ధర్మము (The associative property)** $z_1, z_2,$ మరియు z_3 అను ఏవేని మూడు సంకీర్ణ సంఖ్యలకు $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ అగును.
(iv) **సంకలన తత్సమము (The additive identity)** ప్రతి సంకీర్ణ సంఖ్య z కు $z + 0 = 0 + z = z$ అగునట్లు $0 = 0 + 0i$ అను ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య వ్యవస్థితము. $0 = 0 + 0i$ అను సంకీర్ణ సంఖ్యను సంకలన తత్సమ సంఖ్య అంటాము.	(iv) **గుణకార తత్సమము (The multiplicative identity)** ప్రతి సంకీర్ణ సంఖ్య z కు $1 = 1 + 0i$ అను ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య $z1 = 1z = z$ అగునట్లు వ్యవస్థితము. $1 = 1 + 0i$ అను సంకీర్ణ సంఖ్యను గుణకార తత్సమ సంఖ్య అని అంటాము.
(v) **సంకలన విలోమము (The additive inverse)** ప్రతి సంకీర్ణ సంఖ్య z కు $-z$ అను సంకీర్ణ సంఖ్య $z + (-z) = (-z) + z = 0.$ అగునట్లు వ్యవస్థితము. z యొక్క సంకలన విలోమము $-z$ అగును.	(v) **గుణకార విలోమము (The multiplicative inverse)** ప్రతి శూన్యేతర సంకీర్ణ సంఖ్య z కు w అను సంకీర్ణ సంఖ్య $zw = wz = 1$ అగునట్లు వ్యవస్థితము. z యొక్క గుణకార విలోమము w అగును. w ను z^{-1} అని వ్రాయవచ్చును..
(vi) **విభజించు ధర్మము (సంకలనముపై గుణకార విభజించు ధర్మము) (Distributive property)** $z_1, z_2,$ మరియు z_3 అను ఏవేని మూడు సంకీర్ణ సంఖ్యలకు $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ మరియు $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$ అగును.	

వీటిలో కొన్నింటిని నిరూపించెదము.

ధర్మము

సంకలన వ్యత్యయ ధర్మము

ఏవేని రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యలు z_1 మరియు z_2 లు అయిన $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ అగును.

నిరూపణ:

$z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, మరియు x_1, x_2, y_1 మరియు $y_2 \in \mathbb{R}$

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 68 10-03-2022 10:38:21

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$= (x_2 + x_1) + i(y_2 + y_1) \qquad (\because\ x_1, x_2, y_1, \text{మరియు}\ y_2 \in \mathbb{R})$$

$$= (x_2 + iy_2) + (x_1 + iy_1) = z_2 + z_1 .$$

ధర్మము

గుణకారముపై విలోమ ధర్మము

ఒక శూన్యేతర సంకీర్ణ సంఖ్య $z = x + iy$ నకు గుణకార విలోమము $\frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$ అని అగును.

నిరూపణ:

గుణకార విలోమము, సంకలన విలోమము వలె స్పష్టముగా నిరూపించుటకు వీలుకాదు.

$z^{-1} = u + iv$ అనునది $z = x + iy$ యొక్క విలోమమనిన

$$z\,z^{-1} = 1 \text{ కావున}$$

$$(x + iy)(u + iv) = 1$$

$$(xu - yv) + i(xv + uy) = 1 + i0$$

వాస్తవ మరియు కల్పిత భాగాలను సమానము చేయగా

$$xu - yv = 1 \text{ మరియు } xv + uy = 0 \text{ అగును.}$$

పై తెలిపిన సమకాలిక సమీకరణ వ్యవస్థ ద్వారా u మరియు v లను సాధించిన మనము

$u = \frac{x}{x^2+y^2}$ మరియు $v = \frac{-y}{x^2+y^2}$ పొందవచ్చును. $(\because z$ శూన్యేతరమైన $\Rightarrow x^2 + y^2 > 0)$

$z = x + iy$ అయిన $z^{-1} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}$. $(\because z = 0$ అయినపుడు z^{-1} నిర్వచించబడలేదు).

పై ఉదాహరణ ద్వారా z అను సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క విలోమము z^{-1} వ్యవస్థితమును సూచించునని గమనించుము. z అను సంకీర్ణ సంఖ్య విలోమము సులభముగా ఉండుటకు $z^{-1} = \frac{1}{z}$ గా ఉపయోగించవచ్చును. z_1 మరియు z_2 అను రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యలలో $z_2 \neq 0$ అయిన z_1 మరియు $\frac{1}{z_2}$ ల లబ్ధమును $\frac{z_1}{z_2}$ గా గుర్తించవచ్చును. ఇదేవిధంగా మిగిలిన ధర్మములను కూడా సరిచూడగలము. తరువాత విభాగంలో మనము ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క సంయుగ్మమును నిర్వచించెదము. ఇది సంకీర్ణ విలోమమును సులభముగా కనుగొనుటకు మనకు ఉపయోగపడును.

సంకీర్ణ సంఖ్యలు ఘాతాంక నియమములను తృప్తిపరుచును

(i) $z^m z^n = z^{m+n}$ (ii) $\frac{z^m}{z^n} = z^{m-n}$, $z \neq 0$ (iii) $(z^m)^n = z^{mn}$ (iv) $(z_1 z_2)^m = {z_1}^m {z_2}^m$

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 69 10-03-2022 10:38:31

అభ్యాసము 2.3

1. $z_1 = 1-3i$, $z_2 = -4i$ మరియు $z_3 = 5$, అయితే క్రిందివాటిని నిరూపించుము.

   (i) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (ii) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$.

2. $z_1 = 3$, $z_2 = -7i$, మరియు $z_3 = 5+4i$ అయితే క్రింది వాటిని నిరూపించుము.

   (i) $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (ii) $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

3. $z_1 = 2+5i$, $z_2 = -3-4i$, మరియు $z_3 = 1+i$ అయితే z_1, z_2, మరియు z_3 మొదలగువాటి సంకలన మరియు గుణకార విలోమములను కనుగొనుము.

2.4 సంకీర్ణ సంఖ్యల సంయుగ్మము (Conjugate of a Complex Number)

ఈ పాఠ్యభాగములో మనము ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క సంయుగ్మము, దానిని రేఖాచిత్రములో గుర్తించుట మరియు దాని ధర్మమును తగిన ఉదాహరణలతో చూచెదము.

నిర్వచనం 2.3

$x+iy$ అను సంకీర్ణ సంఖ్య సంయుగ్మము $x-iy$ అని నిర్వచించబడును.

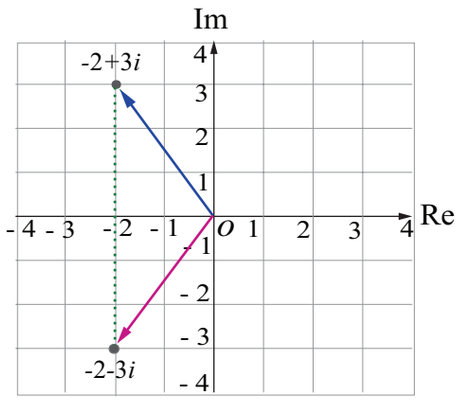
z అను సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క సంయుగ్మమును $\bar{z}$ గా సూచించెదము. z యొక్క సంయుగ్మమును పొందుటకు i కి బదులుగా $-i$ ని z లో ప్రతిక్షేపించవలెను. ఉదాహరణకు $2-5i$ అను సంకీర్ణ సంఖ్యకు $2+5i$ అనునది సంయుగ్మమగును. ఒక సంకీర్ణ సంఖ్యను దాని సంయుగ్మమును లబ్ధము చేసిన ఒక వాస్తవ సంఖ్య లభించును.

ఉదాహరణకు, (i) $(x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$

(ii) $(1+3i)(1-3i) = (1)^2 - (3i)^2 = 1+9 = 10$.

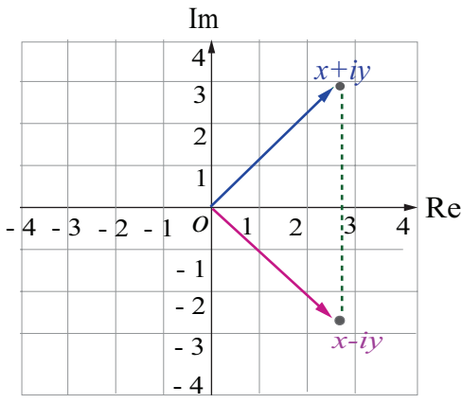
రేఖాచిత్రము ద్వారా ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య z యొక్క సంయుగ్మమును వాస్తవ అక్షముపై z యొక్క ప్రతిబింబమని తెలుపవచ్చును.

2.4.1 సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క సంయుగ్మము యొక్క రేఖా గణిత వివరణ



ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క సంయుగ్మము

పటము 2.14



ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క సంయుగ్మము

పటము 2.15

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 70 10-03-2022 10:38:37

గమనిక

$x+iy$ మరియు $x-iy$ అను రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యలు ఒకదానికొకటి సంయుగ్మమగును. ఈ సంయుగ్మములు సంకీర్ణ సంఖ్యలను భాగించునపుడు ఉపయోగపడును. ఒక సంకీర్ణ సంఖ్యను వాస్తవ సంఖ్యగా పొందుటకు సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క లవము, హారములను హారము యొక్క సంయుగ్మముచే గుణించవలెను. ఈ ప్రక్రియ కరణులను తొలగించుటకు హారములను అకరణీయకరించు పద్ధతిని పోలియుండును.

2.4.2 సంకీర్ణ సంయుగ్మముల ధర్మములు

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1\,z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(4) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z_2\neq 0$

(5) $\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\overline{z}}{2}$

(6) $\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\overline{z}}{2i}$

(7) $\overline{(z^n)}=(\overline{z})^n$, ఇచ్చట n ఒక పూర్ణాంకసంఖ్య

(8) $z=\overline{z}$ అయినపుడు మాత్రమే z వాస్తవ సంఖ్య అగును.

(9) $z=-\overline{z}$ అయినప్పుడు మాత్రమే z ఒక శుద్ధ కల్పిత సంఖ్య అగును.

(10) $\overline{\overline{z}}=z$

వీటిలో కొన్ని ధర్మములను సరిచూస్తాము.

ధర్మము

ఏవేని రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యలు z_1 మరియు z_2 కు, $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$ గా పొందవచ్చును.

నిరూపణ:

$z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$, మరియు x_1,x_2,y_1 మరియు $y_2\in\mathbb{R}$ అనుకొనిన

$$\begin{aligned}\overline{z_1+z_2} &= \overline{(x_1+iy_1)+(x_2+iy_2)}\\ &= \overline{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2)\\ &= (x_1-iy_1)+(x_2-iy_2)\\ &= \overline{z_1}+\overline{z_2}\ .\end{aligned}$$

దీనిని పరిమిత సంఖ్యలో గల పదాలకు గణితానుగమన నియమమును సంకలనములకు అనుసరించి క్రింది విధంగా సాధారణీకరించవచ్చును: $\overline{z_1+z_2+z_3+\cdots z_n}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}+\cdots+\overline{z_n}$.

ధర్మము

$\overline{z_1\,z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$ ఇచ్చట $x_1,x_2,y_1,$ మరియు $y_2\in\mathbb{R}$

నిరూపణ:

$z_1=x_1+iy_1$ మరియు $z_2=x_2+iy_2$ అనుకొనుము..

మరల, $z_1z_2=(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1)$.

కావున, $\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$,

మరియు $\bar{z}_1\bar{z}_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

కావున, $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1\bar{z}_2$.

ధర్మము

$z = -\bar{z}$ గా ఉంటే మాత్రమే z ఒక శుద్ధ కల్పిత సంఖ్య అగును.

నిరూపణ:

$z = x + iy$. అనుకొనిన పై నిర్వచనం ప్రకారం $\bar{z} = x - iy$ అగును.

కావున, $z = -\bar{z}$

$\Leftrightarrow \quad x + iy = -(x - iy)$

$\Leftrightarrow \quad 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\Leftrightarrow z$ ఒక శుద్ధ కల్పిత సంఖ్య

అదేవిధంగా సంకీర్ణ సంఖ్యల సంయుగ్మము యొక్క మిగిలిన ధర్మములను సరిచూడవచ్చును.

ఉదాహరణ 2.3

$\frac{3+4i}{5-12i}$ ని . $x + iy$ రూపంలో వ్రాయుము. దీని నుండి వాస్తవ మరియు కల్పిత భాగములను కనుగొనుము.

సాధన

$\frac{3+4i}{5-12i}$ యొక్క వాస్తవ మరియు కల్పిత భాగాలను కనుగొనుటకు దీనిని మొదట $x + iy$ అను దీర్ఘచతురస్రాకార రూపంలో వ్రాయాలి. ఈ భిన్నము సరళీకృతం చేయుటకు లవము మరియు హారమును, హారము యొక్క సంయుగ్మముతో లబ్దము చేసి i ని తొలగించవచ్చును.

$$\frac{3+4i}{5-12i} = \frac{(3+4i)(5+12i)}{(5-12i)(5+12i)}$$

$$= \frac{(15-48)+(20+36)i}{5^2+12^2}$$

$$= \frac{-33+56i}{169} = -\frac{33}{169} + i\frac{56}{169}.$$

కావున, $\frac{3+4i}{5-12i} = -\frac{33}{169} + i\frac{56}{169}$. అనునది $x + iy$ రూపంలో ఉన్నది.

కావున వాస్తవ భాగము $-\frac{33}{169}$ మరియు కల్పిత భాగము $\frac{56}{169}$.

ఉదాహరణ 2.4

$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$ ను లంబరూపంలో వ్రాయుము.

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 72 10-03-2022 10:38:53

సాధన

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i-1}{1+1} = \frac{2i}{2} = i,$$

$$\text{మరియు } \frac{1-i}{1+i} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{-1} = \frac{1}{i} = -i.$$

$$\text{కావున, } \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3 - \left(\frac{1-i}{1-i}\right)^3 = i^3 - (-i)^3 = -i - i = -2i.$$

ఉదాహరణ 2.5

$\frac{z+3}{z-5i} = \frac{1+4i}{2}$ అయిన, సంకీర్ణ సంఖ్య z ను లంబరూపంలో వ్రాయుము.

సాధన

$$\frac{z+3}{z-5i} = \frac{1+4i}{2} \text{ అయిన}$$

$$\Rightarrow 2(z+3) = (1+4i)(z-5i)$$

$$\Rightarrow 2z+6 = (1+4i)z + 20 - 5i$$

$$\Rightarrow (2-1-4i)z = 20 - 5i - 6$$

$$\Rightarrow z = \frac{14-5i}{1-4i} = \frac{(14-5i)(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)} = \frac{34+51i}{17} = 2+3i.$$

ఉదాహరణ 2.6

$z_1 = 3-2i$ మరియు $z_2 = 6+4i$, అయిన $\frac{z_1}{z_2}$ యొక్క లంబరూపమును కనుగొనుము.

సాధన

z_1 మరియు z_2 విలువలనుపయోగించి $\frac{z_1}{z_2} = \frac{3-2i}{6+4i} = \frac{3-2i}{6+4i} \times \frac{6-4i}{6-4i}$

$$= \frac{(18-8)+i(-12-12)}{6^2+4^2} = \frac{10-24i}{52} = \frac{10}{52} - \frac{24i}{52}$$

$$= \frac{5}{26} - \frac{6}{13}i.$$

ఉదాహరణ 2.7

$z = (2+3i)(1-i)$ అయిన z^{-1}ను కనుగొనుము..

సాధన

$$z = (2+3i)(1-i) = (2+3) + (3-2)i = 5+i$$

$$\Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{5+i}.$$

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 73 10-03-2022 10:39:02

లవహారములను హారము యొక్క సంయుగ్మముచే గుణించిన

$$z^{-1} = \frac{(5-i)}{(5+i)(5-i)} = \frac{5-i}{5^2+1^2} = \frac{5}{26} - i\frac{1}{26}$$

$$\Rightarrow \quad z^{-1} = \frac{5}{26} - i\frac{1}{26}.$$

ఉదాహరణ 2.8

(i) $\left(2+i\sqrt{3}\right)^{10} + \left(2-i\sqrt{3}\right)^{10}$ ఒక వాస్తవము మరియు

(ii) $\left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15} - \left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15}$ ఒక శుద్ధ కల్పితము అను చూపుము.

సాధన

(i) $z = \left(2+i\sqrt{3}\right)^{10} + \left(2-i\sqrt{3}\right)^{10}$ అనిన మరియు దీనినుండి

$$\begin{aligned}
\overline{z} &= \overline{\left(2+i\sqrt{3}\right)^{10} + \left(2-i\sqrt{3}\right)^{10}} \\
&= \overline{\left(2+i\sqrt{3}\right)^{10}} + \overline{\left(2-i\sqrt{3}\right)^{10}} \qquad \left(\because \overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}\right) \\
&= \left(\overline{2+i\sqrt{3}}\right)^{10} + \left(\overline{2-i\sqrt{3}}\right)^{10} \qquad \left(\because \overline{(z^n)} = \left(\overline{z}\right)^n\right) \\
&= \left(2-i\sqrt{3}\right)^{10} + \left(2+i\sqrt{3}\right)^{10} = z
\end{aligned}$$

$\overline{z} = z \Rightarrow z$ అనునది వాస్తవము అగును.

(ii) $z = \left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15} - \left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15}$ అనిన.

ఇక్కడ, $\frac{19+9i}{5-3i} = \frac{(19+9i)(5+3i)}{(5-3i)(5+3i)}$

$$= \frac{(95-27)+i(45+57)}{5^2+3^2} = \frac{68+102i}{34}$$

$$= 2+3i. \qquad (1)$$

మరియు $\frac{8+i}{1+2i} = \frac{(8+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$

$$= \frac{(8+2)+i(1-16)}{1^2+2^2} = \frac{10-15i}{5}$$

$$= 2-3i. \qquad (2)$$

ఇక్కడ $z = \left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15} - \left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15}$

$\Rightarrow \quad z = (2+3i)^{15} - (2-3i)^{15}$. (1) మరియు (2) ల నుండి

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 74 10-03-2022 10:39:10

పై నిర్వచనము నుండి, $\overline{z} = \left(\overline{(2+3i)^{15} - (2-3i)^{15}}\right)$

$= \left(\overline{2+3i}\right)^{15} - \left(\overline{2-3i}\right)^{15}$ (సంయుగ్మ ధర్మము నుండి)

$= (2-3i)^{15} - (2+3i)^{15} = -\left((2+3i)^{15} - (2-3i)^{15}\right)$

$\Rightarrow \overline{z} = -z$.

కావున, $z = \left(\frac{19+9i}{5-3i}\right)^{15} - \left(\frac{8+i}{1+2i}\right)^{15}$ అనునది శుద్ధ కల్పిత సంఖ్య అగును. ■

అభ్యాసము 2.4

1. క్రింది వాటిని లంబరూపంలో వ్రాయుము.

(i) $\overline{(5+9i)+(2-4i)}$ (ii) $\frac{10-5i}{6+2i}$ (iii) $\overline{3i} + \frac{1}{2-i}$

2. $z = x+iy$ అయిన క్రింది వాటిని లంబ రూపంలో వ్రాయుము.

(i) $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)$ (ii) $\mathrm{Re}(i\overline{z})$ (iii) $\mathrm{Im}(3z+4\overline{z}-4i)$

3. $z_1 = 2-i$ మరియు $z_2 = -4+3i$, అయిన $z_1 z_2$ మరియు $\frac{z_1}{z_2}$ యొక్క విలోమమును కనుగొనుము.

4. u, v మరియు w అను సంకీర్ణ సంఖ్యలు $\frac{1}{u} = \frac{1}{v} + \frac{1}{w}$ గా సంధించబడినవి.

$v = 3-4i$ మరియు $w = 4+3i$ అయిన u ని లంబరూపంలో వ్రాయుము.

5. క్రింది ధర్మములను నిరూపించుము.

(i) z అనునది వాస్తవముగా ఉన్నప్పుడు మాత్రమే $z = \overline{z}$ అగును.

(ii) $\mathrm{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$ మరియు $\mathrm{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

6. $\left(\sqrt{3}+i\right)^n$ అనునది n యొక్క ఏ కనిష్ట ధన పూర్ణసంఖ్య

(i) వాస్తవము (ii) శుద్ధ కల్పితసంఖ్యగా ఉండును?

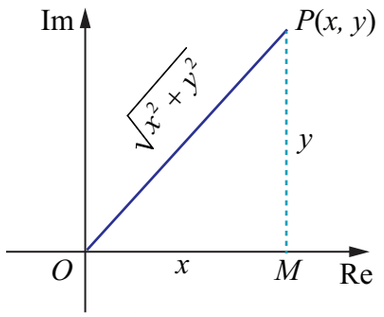
7. క్రింది వాటిని నిరూపించుము.

(i) $\left(2+i\sqrt{3}\right)^{10} - \left(2-i\sqrt{3}\right)^{10}$ అనునది శుద్ధ కల్పితము.

(ii) $\left(\frac{19-7i}{9+i}\right)^{12} + \left(\frac{20-5i}{7-6i}\right)^{12}$ అనునది వాస్తవము.

2.5 సంకీర్ణ సంఖ్యల మాపము (Modulus of a Complex Number)

వాస్తవ సంఖ్యారేఖలో పరమమూల్యం (absolute value) అనునది మూల బిందువుకు ఆ సంఖ్యకు ఉన్న దూరమును ఏ విధంగా గుర్తించునో అదేవిధంగా ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య మాపము అనునది సంకీర్ణ తలంలో మూలబిందువుకు ఆ సంఖ్యకు ఉన్న దూరమును సూచించును. ఆది బిందువు నుండి మూల రేఖలో $z = x + iy$ నకు ఉన్న దూరము అనునది ఒక భుజము పొడవు x మరియొక భుజము పొడవు y గా కలిగి అమర్చబడు లంబకోణ త్రిభుజములోని కర్ణము యొక్క పొడవునకు సమానమగును.



పటము. 2.16

నిర్వచనం 2.4

$z = x + iy$, అయిన z యొక్క మాపమును $|z|$ అని గుర్తించుము. దీనిని $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ అని నిర్వచిస్తాము.

ఉదాహరణకు (i) $|i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

(ii) $|-12i| = \sqrt{0^2 + (-12)^2} = 12$

(iii) $|12 - 5i| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13$

గమనిక

$z = x + iy$, అయిన $\bar{z} = x - iy$, మరియు $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = (x)^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$ అగును.

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

2.5.1 సంకీర్ణ సంఖ్య మాపముల ధర్మములు

(1) $|z| = |\bar{z}|$

(2) $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ (త్రిభుజ అసమానత)

(3) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(4) $|z_1 - z_2| \ge ||z_1| - |z_2||$

(5) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $z_2 \neq 0$

(6) $|z^n| = |z|^n$, ఇచ్చట n ఒక పూర్ణసంఖ్య.

(7) $\mathrm{Re}(z) \le |z|$

(8) $\mathrm{Im}(z) \le |z|$

వీటిలో కొన్ని ధర్మములను నిరూపించెదము.

ధర్మము (త్రిభుజ అసమానత)

z_1 మరియు z_2 అను ఏవేని రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యలు అయిన $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ అని పొందవచ్చును.

నిరూపణ:

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) \qquad (\because |z|^2 = z\bar{z})$$
$$= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \qquad (\because \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2)$$

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 76 10-03-2022 10:39:26

$$
\begin{aligned}
&= z_1\bar{z}_1 + (z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2) + z_2\bar{z}_2 \\
&= z_1\bar{z}_1 + \left(z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}\right) + z_2\bar{z}_2 && \left(\because \bar{\bar{z}} = z\right) \\
&= |z_1|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) + |z_2|^2 && \left(\because\ 2\,\mathrm{Re}(z) = z + \bar{z}\right) \\
&\le |z_1|^2 + 2\left|z_1\overline{z_2}\right| + |z_2|^2 && \left(\because\ \mathrm{Re}(z) \le |z|\right) \\
&= |z_1|^2 + 2|z_1|\,|z_2| + |z_2|^2 && \left(\because |z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|\right.
\end{aligned}
$$

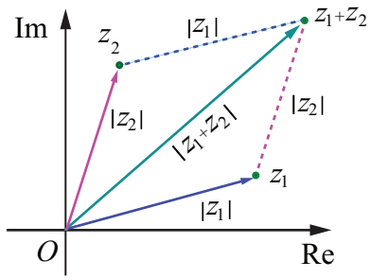
మరియు $|z| = |\bar{z}|$)

$$\Rightarrow |z_1 + z_2|^2 \le \left(|z_1| + |z_2|\right)^2$$

$$\Rightarrow |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|.$$

జ్యామితీయ వివరణ (Geometrical interpretation)

పటములో చూపినట్లు O, z_1 లేదా z_2, మరియు $z_1 + z_2$. అను వాటిని శీర్షములుగా గల త్రిభుజమును తీసుకొనుము. రేఖాగణితము ప్రకారము $z_1 + z_2$.కు సంబంధించిన త్రిభుజము యొక్క భుజము పొడవు మిగిలిన రెండు భుజముల పొడవుల మొత్తము కంటే అధికంగా ఉండదని మనకు తెలుసును. ఈ ధర్మమునే త్రిభుజ అసమానత అంటారు. దీనిని గణితానుగమన నియమముననుసరించి పరిమిత సంకీర్ణ సంఖ్యలలో విస్తరించెదము.



పటము. 2.17

$|z_1 + z_2 + z_3 + \cdots + z_n| \le |z_1| + |z_2| + |z_3| + \cdots + |z_n|$ ఇచ్చట $n = 2, 3, \cdots$.

ధర్మము సంకీర్ణ తలములో z_1 మరియు z_2 అను రెండు బిందువులకు మధ్య గల దూరము $|z_1 - z_2|$ అగును.

$z_1 = x_1 + iy_1$ మరియు $z_2 = x_2 + iy_2$, అనిన

$$
\begin{aligned}
|z_1 - z_2| &= \left|(x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)i\right| \\
&= \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\,.
\end{aligned}
$$

విశేషాంశాలు

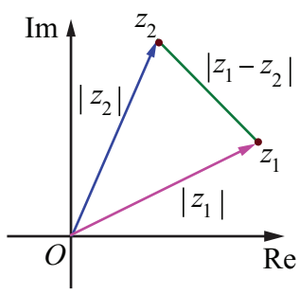
సంకీర్ణ తలములో z_1 . మరియు z_2 అను రెండు బిందువులకు మధ్య గల దూరము $|z_1 - z_2|$ అగును.

ఇదేవిధంగా ఆది, z_1 మరియు z_2 అను వాటిని శీర్షములుగా గల త్రిభుజములో పై తెల్పిన నిబంధన ప్రకారము

$|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$

$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ మరియు

$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$.



పటము. 2.18

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 77 10-03-2022 10:39:36

ధర్మము లబ్ధము యొక్క మాపము అనునది మాపముల లబ్ధమునకు సమానము.

z_1 మరియు z_2 అను ఏవేని రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యలు అయిన $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$ అని పొందవచ్చును.

నిరూపణ:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) \qquad (\because |z|^2 = z\,\overline{z})$$

$$= (z_1)(z_2)(\overline{z_1})(\overline{z_2}) \qquad (\because \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2})$$

$$= (z_1\overline{z_1})(z_2\overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2 \quad (z_2\overline{z_1} = \overline{z_1}z_2 \text{ అను వ్యత్యయము ప్రకారము})$$

కావున, $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$. ■

గమనిక

గణితానుగమన నియమమునుసరించి పరిమిత సంకీర్ణ సంఖ్యలలో దీనిని విస్తరిస్తాము:

$$|z_1 z_2 z_3 \cdots z_n| = |z_1||z_2||z_3|\cdots|z_n|$$

అనగా సంకీర్ణ సంఖ్యల గుణకార లబ్ధము యొక్క మాపము విలువ ఆ సంకీర్ణ సంఖ్యల మాపముల లబ్ధమునకు సమానమగును.

ఇదేవిధంగా సంకీర్ణ సంఖ్యల యొక్క మాపముపై మిగిలిన ధర్మములను సరిచూడవచ్చును.

ఉదాహరణ 2.9

$z_1 = 3+4i$, $z_2 = 5-12i$, మరియు $z_3 = 6+8i$, అనిన $|z_1|, |z_2|, |z_3|, |z_1+z_2|, |z_2-z_3|,$ and $|z_1+z_3|$.

సాధన

ఇవ్వబడిన z_1, z_2 మరియు z_3 విలువల నుండి $|z_1| = |3+4i| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

$$|z_2| = |5-12i| = \sqrt{5^2+(-12)^2} = 13$$

$$|z_3| = |6+8i| = \sqrt{6^2+8^2} = 10$$

$$|z_1+z_2| = |(3+4i)+(5-12i)| = |8-8i| = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$$

$$|z_2-z_3| = |(5-12i)-(6+8i)| = |-1-20i| = \sqrt{401}$$

$$|z_1+z_3| = |(3+4i)+(6+8i)| = |9+12i| = \sqrt{225} = 15$$

గమనిక అన్ని స్థితులలోను త్రిభుజ అసమానత సరిచూడడమైనది.

$|z_1+z_3| = |z_1| + |z_3| = 15$ (ఎందుకు?)

■

ఉదాహరణ 2.10

క్రింది వాటి విలువలను కనుగొనుము. (i) $\left|\frac{2+i}{-1+2i}\right|$ (ii) $\left|\overline{(1+i)}(2+3i)(4i-3)\right|$ (iii) $\left|\frac{i(2+i)^3}{(1+i)^2}\right|$

సాధన

(i) $$\left|\frac{2+i}{-1+2i}\right| = \frac{|2+i|}{|-1+2i|} = \frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{(-1)^2+2^2}} = 1. \qquad \left(\because \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2 \neq 0\right)$$

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 78 10-03-2022 10:39:46

(ii) $\left|\overline{(1+i)}(2+3i)(4i-3)\right| = \left|\overline{(1+i)}\right|\,|2+3i|\,|4i-3| \qquad \left(\because\ |z_1z_2z_3| = |z_1||z_2||z_3|\right)$

$= |1+i|\,|2+3i|\,|-3+4i| \qquad \left(\because\ |z| = |\bar{z}|\right)$

$= \left(\sqrt{1^2+1^2}\right)\left(\sqrt{2^2+3^2}\right)\left(\sqrt{(-3)^2+4^2}\right)$

$= \left(\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{13}\right)\left(\sqrt{25}\right) = 5\sqrt{26}\,.$

(iii) $\left|\dfrac{i(2+i)^3}{(1+i)^2}\right| = \dfrac{|i|\,|(2+i)^3|}{|(1+i)^2|} = \dfrac{1|2+i|^3}{|1+i|^2} = \dfrac{\left(\sqrt{4+1}\right)^3}{\left(\sqrt{2}\right)^2} \quad \left(\because\ \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2 \neq 0\right)$

$= \dfrac{\left(\sqrt{5}\right)^3}{2} = \dfrac{5\sqrt{5}}{2}\,.$

ఉదాహరణ 2.11

$i, -2+i,$ మరియు 3 మొదలగువాటిలో ఏ సంకీర్ణ సంఖ్య ఆది నుండి ఎక్కువ దూరంలో ఉన్నది?

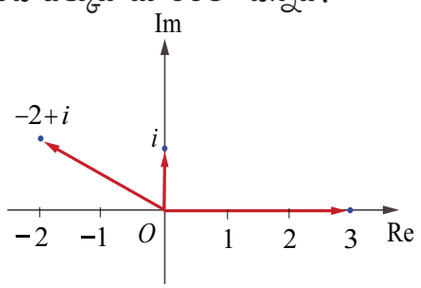
సాధన

$z = i, -2+i,$ మరియు 3 మొదలగువాటికి ఆదికి మధ్య ఉన్న దూరము

$|z| = |i| = 1$

$|z| = |-2+i| = \sqrt{(-2)^2+1^2} = \sqrt{5}$

$|z| = |3| = 3$



పటము. 2.19

$1 < \sqrt{5} < 3$, కావున ఆది నుండి అధిక దూరంలో ఉన్న సంకీర్ణ సంఖ్య 3 అగును.

ఉదాహరణ 2.12

z_1, z_2, మరియు z_3 మొదలగు సంకీర్ణ సంఖ్యలు $|z_1| = |z_2| = |z_3| = |z_1+z_2+z_3| = 1$, గా ఉండిన $\left|\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}\right|$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, అని ఇవ్వబడినది.

$|z_1|^2 = 1 \Rightarrow z_1\bar{z}_1 = 1, |z_2|^2 = 1 \Rightarrow z_2\bar{z}_2 = 1$, మరియు $|z_3|^3 = 1 \Rightarrow z_3\bar{z}_3 = 1$

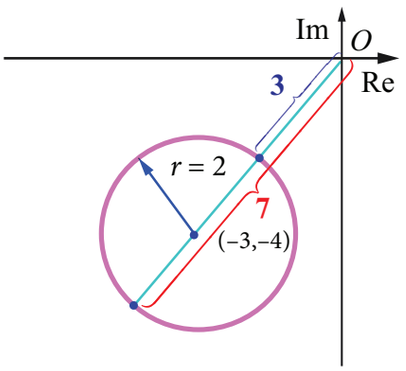
కావున, $\bar{z}_1 = \dfrac{1}{z_1}, \bar{z}_2 = \dfrac{1}{z_2}$, మరియు $\bar{z}_3 = \dfrac{1}{z_3}$

$\left|\dfrac{1}{z_1}+\dfrac{1}{z_2}+\dfrac{1}{z_3}\right| = \left|\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}\right|$

$= \overline{|z_1+z_2+z_3|} = |z_1+z_2+z_3| = 1\,.$

ఉదాహరణ 2.13

$|z|=2$ అయిన $3\le|z+3+4i|\le 7$ అని చూపుము.



పటము. 2.20

సాధన

$$|z+3+4i|\le|z|+|3+4i|=2+5=7$$

$$|z+3+4i|\le 7 \qquad (1)$$

$$|z+3+4i|\ge\big||z|-|3+4i|\big|=|2-5|=3$$

$$|z+3+4i|\ge 3 \qquad (2)$$

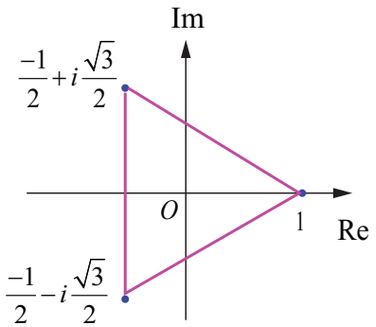
(1), (2)ల నుండి $3\le|z+3+4i|\le 7$ వచ్చును.

గమనిక

దిగువ అవధి మరియు ఎగువ అవధిని కనుగొనుటకు $\big||z_1|-|z_2|\big|\le|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$. అను ధర్మమును ఉపయోగించవలెను.

ఉదాహరణ 2.14

1, $\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, మరియు $\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ అను శీర్షములు ఒక సమభుజ త్రిభుజమును ఏర్పరచునని నిరూపించుము.



పటము. 2.21

సాధన

దీనికి మనము త్రిభుజములోని భుజముల పొడవులు సమానమని నిరూపించిన చాలును.

$z_1=1,\ z_2=\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, మరియు $z_3=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ అనుకొనుము.

త్రిభుజము యొక్క భుజముల పొడవులను కనుగొనెదము.

$$|z_1-z_2|=\left|1-\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\left|\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\frac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$$

$$|z_2-z_3|=\left|\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{3}$$

$$|z_3-z_1|=\left|\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-1\right|=\left|\frac{-3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$$

భుజముల పొడవులు సమానము కావున, ఇవ్వబడిన శీర్షములు ఒక సమభుజ త్రిభుజమును ఏర్పరచును.

ఉదాహరణ 2.15

z_1, z_2, మరియు z_3 అను సంకీర్ణ సంఖ్యలు $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r>0$ మరియు $z_1+z_2+z_3\ne 0$ అని ఉండిన $\left|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right|=r$ అని చూపుము.

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 80 10-03-2022 10:40:04

సాధన

ఇవ్వబడినది $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r \Rightarrow z_1\overline{z}_1 = z_2\overline{z}_2 = z_3\overline{z}_3 = r^2$

$$\Rightarrow z_1 = \frac{r^2}{\overline{z}_1},\quad z_2 = \frac{r^2}{\overline{z}_2},\quad z_3 = \frac{r^2}{\overline{z}_3}$$

కావున $z_1 + z_2 + z_3 = \frac{r^2}{\overline{z}_1} + \frac{r^2}{\overline{z}_2} + \frac{r^2}{\overline{z}_3}$

$$= r^2\left(\frac{\overline{z}_2\overline{z}_3 + \overline{z}_1\overline{z}_3 + \overline{z}_1\overline{z}_2}{\overline{z}_1\overline{z}_2\overline{z}_3}\right)$$

$$|z_1 + z_2 + z_3| = |r^2|\left|\frac{\overline{z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2}}{\overline{z_1z_2z_3}}\right| \qquad (\because \overline{z}_1 + \overline{z}_2 = \overline{z_1 + z_2})$$

$$= r^2\frac{|z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2|}{|z_1||z_2||z_3|} \quad (\because |z| = |\overline{z}| \text{ మరియు } |z_1z_2z_3| = |z_1||z_2||z_3|)$$

$$|z_1 + z_2 + z_3| = r^2\frac{|z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2|}{r^3} = \frac{|z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2|}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{|z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2|}{|z_1 + z_2 + z_3|} = r. \qquad (\text{ఇవ్వబడిన } z_1 + z_2 + z_3 \neq 0 \text{ ప్రకారము})$$

కావున, $\left|\frac{z_2z_3 + z_1z_3 + z_1z_2}{z_1 + z_2 + z_3}\right| = r.$

ఉదాహరణ 2.16

$z^2 = \overline{z}$ అను సమీకరణమునకు నాలుగు మూలములు కలవని నిరూపించుము.

సాధన

$z^2 = \overline{z}$ అని మనకు తెలుసును.

$\Rightarrow |z|^2 = |z|$

$\Rightarrow |z|(|z| - 1) = 0,$

$\Rightarrow |z| = 0, \text{ or } |z| = 1.$

$|z| = 0 \Rightarrow z = 0$ ఒక మూలము, $|z| = 1 \Rightarrow z\overline{z} = 1 \Rightarrow \overline{z} = \frac{1}{z}$

ధర్మము నుండి ఇవ్వబడినది $z^2 = \overline{z} \Rightarrow z^2 = \frac{1}{z} \Rightarrow z^3 = 1.$

ఇచ్చట 3 శూన్యేతర మూలములు కలవు. కావున పూజ్యము లేదా శూన్యంతో చేర్చి దీనికి నాలుగు మూలములు కలవు.

2.5.2 సంకీర్ణ సంఖ్యల యొక్క వర్గమూలము (Square roots of a complex number)

$a+ib$ యొక్క వర్గమూలమును $x+iy$ అనుకొనుము.

$$\text{అదేమనగా } \sqrt{a+ib} = x+iy \quad \text{ఇక్కడ } x, y \in \mathbb{R}$$
$$a+ib = (x+iy)^2 = x^2 - y^2 + i2xy$$

వాస్తవ మరియు కల్పిత భాగములను సమానము చేసిన

$$x^2 - y^2 = a \text{ మరియు } 2xy = b$$
$$(x^2+y^2)^2 = (x^2-y^2)^2 + 4x^2y^2 = a^2+b^2$$
$$x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}\ ,\ x^2+y^2 \text{ ఒక ధనాత్మకము కావున}$$
$$x^2 - y^2 = a \text{ మరియు } x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}\ , \text{వాటిని సాధించిన}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}\ ;\ y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\ .$$

$2xy = b$ అను దానినుండి b ధనాత్మకమైన x మరియు y మొదలగునవి ఒకే గుర్తును కలిగినవి గాను b ఋణాత్మకమైన x మరియు y వేర్వేరు గుర్తులను కలిగినవిగాను ఉండును.

కావున $\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right)$, ఇచ్చట $b \neq 0$. $\left(\because \text{Re}(z) \leq |z|\right)$

ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క వర్గమూలమును కనుగొను సూత్రము

$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right)$, ఇచ్చట $z = a+ib$ మరియు $b \neq 0$.

గమనిక

b ఋణాత్మకమైన $\frac{b}{|b|} = -1$, x మరియు y కి వేర్వేరు గుర్తులుండును.

b ధనాత్మకమైన $\frac{b}{|b|} = 1$ x మరియు y కి ఒకే గుర్తుండును.

ఉదాహరణ 2.17

$6-8i$ యొక్క వర్గమూలమును కనుగొనుము.

సాధన

$$|6-8i| = \sqrt{6^2+(-8)^2} = 10 \text{ మరియు వర్గమూలము కనుగొను}$$

సూత్రమును అనువర్తించిన

$$\sqrt{6-8i} = \pm\left(\sqrt{\frac{10+6}{2}} - i\sqrt{\frac{10-6}{2}}\right) \quad (\because b \text{ ఋణాత్మకమైన}, \frac{b}{|b|} = -1)$$
$$= \pm\left(\sqrt{8} - i\sqrt{2}\right)$$
$$= \pm\left(2\sqrt{2} - i\sqrt{2}\right).$$

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 82 10-03-2022 10:40:22

అభ్యాసము 2.5

1. ఈ క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యల మాపము విలువను కనుగొనుము.
   (i) $\frac{2i}{3+4i}$ (ii) $\frac{2-i}{1+i}+\frac{1-2i}{1-i}$ (iii) $(1-i)^{10}$ (iv) $2i(3-4i)(4-3i)$.

2. z_1 మరియు z_2, అను ఏవేని రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యలకు $|z_1|=|z_2|=1$ మరియు $z_1z_2\neq -1$ అయిన $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ ఒక ధనాత్మక సంఖ్య అని చూపుము.

3. $10-8i$, $11+6i$ అను బిందువులలో ఏ బిందువు $1+i$ కి మిక్కిలి దగ్గరగా ఉండును?

4. $|z|=3$, అయిన, $7\leq|z+6-8i|\leq 13$. అని చూపుము.

5. $|z|=1$, అయిన, $2\leq|z^2-3|\leq 4$ అని చూపుము.

6. $|z|=2$, అయిన, $8\leq|z+6+8i|\leq 12$ అని చూపుము.

7. z_1, z_2, మరియు z_3 అను మూడు సంకీర్ణ సంఖ్యలు $|z_1|=1, |z_2|=2, |z_3|=3$ మరియు $|z_1+z_2+z_3|=1$, అయిన $|9z_1z_2+4z_1z_3+z_2z_3|=6$ అని నిరూపించుము.

8. z, iz, మరియు $z+iz$ అను శీర్షములు గల త్రిభుజ వైశాల్యము 50 చ. ప్రమాణములు అయిన $|z|$ యొక్క విలువ కనుగొనుము.

9. $z^3+2\bar{z}=0$ అను సమీకరణమునకు 5 సాధనలు గలవని నిరూపించుము.

10. క్రింది వాటికి వర్గమూలము కనుగొనుము. (i) $4+3i$ (ii) $-6+8i$ (iii) $-5-12i$.

2.6 సంకీర్ణ సంఖ్యల జ్యామితి మరియు బిందుపథము (Geometry and Locus of Complex Numbers)

ఈ పాఠ్యభాగంలో మనము z అను సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క జామితీయ వివరణను కార్టీషియన్ రూపములో z యొక్క బిందుపథమును చూచెదము.

ఉదాహరణ 2.18

$z=3+2i$ ను ఉపయోగించి z, iz, మరియు $z+iz$ మొదలగువాటిని ఆర్గాండ్‌తలములో గుర్తించుము. ఈ సంకీర్ణ సంఖ్యలు ఒక సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజ భుజములుగా అమరును అని నిరూపింపుము.

సాధన

$z=3+2i$. అని ఇవ్వబడినది.

కావున, $iz=i(3+2i)=-2+3i$

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 83 10-03-2022 10:40:31

$$z+iz=(3+2i)+i(3+2i)=1+5i$$

$A, B,$ మరియు C ను క్రమముగా $z, z+iz,$ మరియు iz అనుకొనుము.

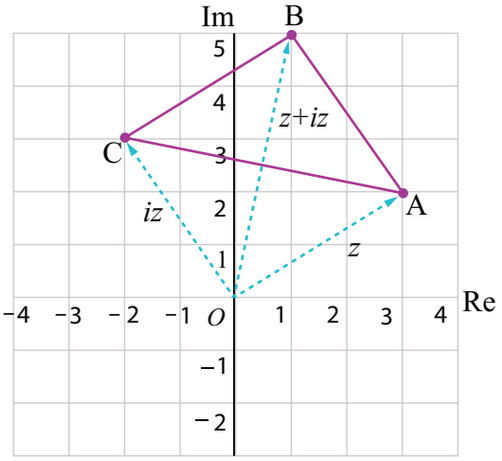
$$AB^2=\left|(z+iz)-z\right|^2=\left|-2+3i\right|^2=13$$

$$BC^2=\left|iz-(z+iz)\right|^2=\left|-3-2i\right|^2=13$$

$$CA^2=\left|z-iz\right|^2=\left|5-i\right|^2=26$$

$AB^2+BC^2=CA^2$ మరియు $AB=BC$,

కావున ΔABC ఒక సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజమగును.



పటము. 2.22

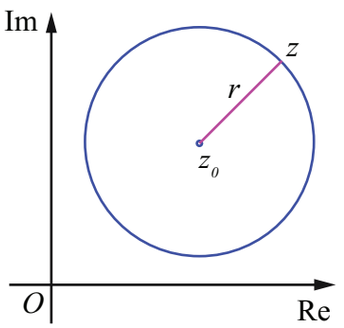
నిర్వచనము 2.5 (వృత్తము)

ఒకతలములో స్థిరబిందువుకు (fixed point), మరియు చలించు బిందువుకు మధ్యగల దూరము ఎల్లప్పుడూ స్థిరాంకముగా ఉన్నట్లు చలించు బిందువు యొక్క బిందుపథము ఒక వృత్తముగా నిర్వచించబడును. స్థిరబిందువును వృత్తకేంద్రము మరియు స్థిరదూరము వృత్తవ్యాసార్ధమగును.

సంకీర్ణసంఖ్య రూపములో వృత్తము యొక్క సమీకరణము (Equation of Complex Form of a Circle)

z యొక్క బిందుపథము $|z-z_0|=r$ అను సమీకరణమును తృప్తిపరచును. ఇచ్చట z_0 అనునది స్థిరబిందువు మరియు r అనునది ధన స్థిరాంకమగును. ఈ సమీకరణము z_0 నుండి z కు r దూరంలో ఉన్న అన్ని సంకీర్ణ సంఖ్యలను కల్గియుండును.

కావున $|z-z_0|=r$ అనునది సంకీర్ణ రూపంలో వృత్తసమీకరణము అగును (పటము 2.23 ని చూడుము)



పటము. 2.23

(i) $|z-z_0|<r$ అనునది వృత్తము యొక్క అంతర భాగములో ఉన్న బిందువులను గుర్తించును.

(ii) $|z-z_0|>r$ అనునది వృత్తము యొక్క బాహ్యభాగములో ఉన్న బిందువులను గుర్తించును.

వివరణ 2.3

$$|z|=r \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}=r$$

$\Rightarrow x^2+y^2=r^2$, అనునది ఆదిబిందువును కేంద్రముగాను, వ్యాసార్ధము r ప్రమాణము గల వృత్తమును గుర్తించును.

ఉదాహరణ 2.19

$|3z-5+i|=4$ అను సమీకరణము వృత్తమును ఏర్పరచునని మరియు దాని కేంద్రము మరియు వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము.

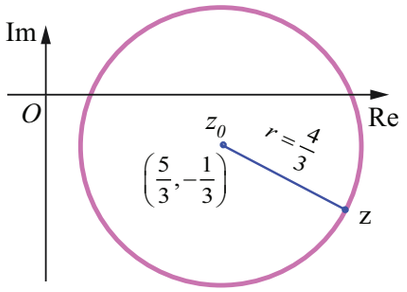
12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 84 10-03-2022 10:40:36

సాధన

$|3z-5+i|=4$ అను సమీకరణమును

$3\left|z-\frac{5-i}{3}\right| = 4 \Rightarrow \left|z-\left(\frac{5}{3}-\frac{i}{3}\right)\right| = \frac{4}{3}$. అని వ్రాయవచ్చును.

ఇది $|z-z_0|=r$ అను రూపంలో ఉన్నది. కావున ఇది వృత్తమును గుర్తించుచున్నది. దీని కేంద్రము మరియు వ్యాసార్ధము వరుసగా $\left(\frac{5}{3},-\frac{1}{3}\right)$ మరియు $\frac{4}{3}$ అగును.



పటము. 2.24

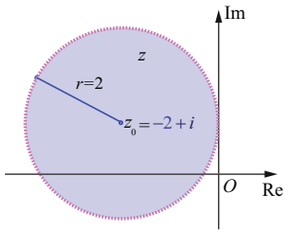
ఉదాహరణ 2.20

$|z+2-i|<2$ అనునది ఒక వృత్తము యొక్క అంతర భాగములో గల బిందువులను గుర్తించునని సరి చూపుము. ఆ వృత్తము యొక్క కేంద్రము మరియు వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము.

సాధన

$|z+2-i|=2$. అను సమీకరణమును తీసుకొనుము.

దీనిని $|z-(-2+i)|=2$ అని వ్రాయవచ్చును.



పటము. 2.25

ఈ సమీకరణము కేంద్రము $z_0=-2+i$ మరియు వ్యాసార్ధము $r=2$. గా గల వృత్తమును సూచించును.

కావున $|z+2-i|<2$ అనునది కేంద్రము $-2+i$ మరియు వ్యాసార్ధము 2 గల వృత్తము అంతర భాగములో గల బిందువులను పటంలో చూపినట్లు గుర్తించుము.

ఉదాహరణ 2.21

క్రింది ఇవ్వబడిన సమీకరణములకు z యొక్క బిందుపథమును కార్టీషియన్ రూపంలో వ్రాయుము.

(i) $|z|=|z-i|$ (ii) $|2z-3-i|=3$

సాధన

(i) $|z| = |z-i|$

$\Rightarrow |x+iy| = |x+iy-i|$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-1)^2}$

$\Rightarrow x^2+y^2 = x^2+y^2-2y+1$

$\Rightarrow 2y-1 = 0$.

(ii) $|2z-3-i| = 3$

$|2(x+iy)-3-i| = 3.$

ఇరువైపులా వర్గముచేసిన

$|(2x-3)+(2y-1)i|^2 = 9$

$\Rightarrow \quad (2x-3)^2+(2y-1)^2 = 9$

$\Rightarrow \quad 4x^2+4y^2-12x-4y+1 = 0$, అనునది కార్టీషియన్ రూపంలో గల z యొక్క బిందుపథమగును.

అభ్యాసము 2.6

1. $z = x+iy$ అను ఏదేని ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య $\left|\frac{z-4i}{z+4i}\right| = 1$ ఉండునట్లు అమరిన z యొక్క బిందుపథం వాస్తవ అక్షమని చూపుము.
2. $z = x+iy$ అను ఏదేని ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య $\text{Im}\left(\frac{2z+1}{iz+1}\right) = 0$ ఉండునట్లు అమరిన z యొక్క బిందుపథము $2x^2+2y^2+x-2y = 0.$ అని చూపుము.
3. క్రింది సమీకరణములలో $z = x+iy$ యొక్క బిందుపథమును కార్టీషియన్ రూపంలో వ్రాయుము.

   (i) $\left[\text{Re}(iz)\right]^2 = 3$ (ii) $\text{Im}[(1-i)z+1] = 0$ (iii) $|z+i| = |z-1|$ (iv) $\bar{z} = z^{-1}$.

4. ఈ క్రింది సమీకరణములు వృత్తమును గుర్తించునని చూపుము. మరియు దాని కేంద్రము మరియు వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము.

   (i) $|z-2-i| = 3$ (ii) $|2z+2-4i| = 2$ (iii) $|3z-6+12i| = 8$.

5. క్రింది సమీకరణములలో $z = x+iy$ యొక్క బిందుపథమును కార్టీషియన్ రూపంలో వ్రాయుము.

   (i) $|z-4| = 16$ (ii) $|z-4|^2-|z-1|^2 = 16$.

2.7 సంకీర్ణ సంఖ్యల ధ్రువ మరియు ఆయిలర్స్ రూపము (Polar and Euler form of a Complex Number)

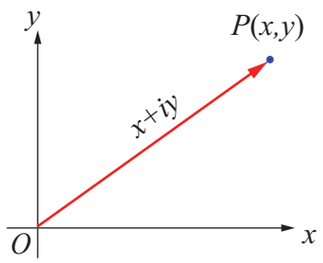
సంకీర్ణ సంఖ్యల సంకలనము మరియు వ్యవకలనము చేయునపుడు మనము దీర్ఘచతురస్రాకార రూపమును ఉపయోగిస్తాము. ఎందుకనగా ఇచ్చట వాస్తవ మరియు కల్పిత భాగాలను కూడిక మరియు తీసివేతను మాత్రమే చేయుదుము. సంకీర్ణ సంఖ్యలను గుణకారము చేయునపుడు లేదా సంకీర్ణ సంఖ్యల ఘాతములను కనుగొనునపుడు లేదా సంకీర్ణమూలములు కనుగొనునపుడు ధ్రువ రూపమును ఉపయోగిస్తాము. ఎందుకనగా వీటిని ధీర్ఘచతురస్రాకార రూపం కంటే ధ్రువరూపములో కనుగొనుటయే సులభమగును.

2.7.1 ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క ధ్రువ రూపము Polar form of a complex number

ధ్రువ నిరూపక రూపమునది ఆదినుండి $z = x+iy$ అను దత్తబిందువు వరకు ఉన్న సదిశను దాని పరిమాణము మరియు దిశను బట్టి వర్ణీకరించే మరొక రూపమగును. ధ్రువ నిరూపక రూపంలో O అను

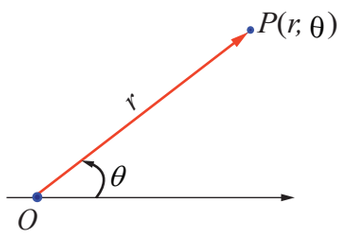
12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 86 10-03-2022 10:40:53

స్థిరబిందువును ధృవ బిందువనియు, ధృవ బిందువు నుండి ప్రారంభమైన క్షితిజరేఖ సగమును ధృవ అక్షముగా పిలువబడును. r అనునది ధృవ బిందువు నుండి P కి ఉన్న దూరము మరియు θ అనునది ప్రారంభ రేఖ నుండి OP యొక్క దిశలో అపసవ్యదిశలో కొలవబడిన వాలుకోణముగా తీసికొనిన, (r,θ) వరుస జంటను P యొక్క ధృవ నిరూపకాలుగా చెప్పవచ్చును. ధృవ నిరూపక రూప పద్ధతిని లంబ రూప పద్ధతిలో ఒకదానిపై ఒకటి పటములో చూపినట్లు అమర్చినచో



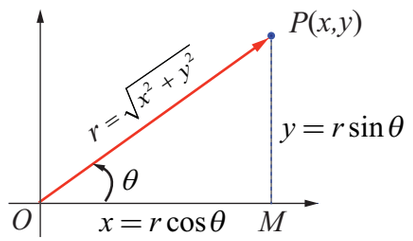
లంబ రూప నిరూపకాలు

పటము. 2.26



ధృవరూప నిరూపకాలు

పటము. 2.27



లంబ రూప మరియు ధృవ రూప నిరూపకాలను ఒక దానిపై ఒకటి అమర్చుట

పటము. 2.28

$$x = r\cos\theta \quad \ldots(1)$$

$$y = r\sin\theta. \quad \ldots(2)$$

ఏదేని ఒక శూన్యేతర సంకీర్ణ సంఖ్య $z = x + iy$ ని $z = r\cos\theta + i\, r\sin\theta.$ గా వ్రాయవచ్చును.

నిర్వచనము 2.6

r మరియు θ మొదలగునవి $P(x, y)$ అను శూన్యేతర సంకీర్ణ సంఖ్య $z = x + iy$ యొక్క ధృవనిరూపకాలు అనుకొనుము. P అను బిందువు యొక్క ధృవ లేదా త్రికోణమితి రూపము

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

మనము ధృవ రూపము సులభముగా ఉండుటకు $z = x + iy = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = r\,cis\,\theta.$ అని వ్రాయవచ్చును.

దీనిలో r అనునది సంకీర్ణ సంఖ్య z యొక్క వాస్తవ విలువ (పరమ మూల్యము) (absolute value) లేదా మాపము విలువ (modulus) అగును. θ అనునది సంకీర్ణ సంఖ్య z యొక్క ఆయామం (argument) లేదా కోణాంకము (amplitude) అగును. దీనిని $\theta = \arg(z)$. గా గుర్తించవచ్చును.

(i) $z = 0$ కు ఆయామం θ నిర్వచించబడలేదు. కావున ధృవ రూప పద్ధతిలో $z \neq 0$ అని జ్ఞాపకము ఉంచుకొనవలెను.

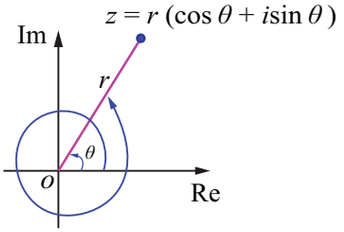
(ii) $z = x + iy$ అను సంకీర్ణ సంఖ్య ధృవరూపము (r,θ) అయిన దీని సంకీర్ణ సంయుగ్మము $\bar{z} = x - iy$ యొక్క ధృవరూపము $(r,-\theta)$ అగును.

(1)మరియు (2) ను వర్గముచేసి కూడి వర్గమూలము చేయగా $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. అగును.

2 ను 1 చే భాగించగా $\dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \dfrac{y}{x} \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{y}{x}$.

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 87 10-03-2022 10:41:00

స్థితి (1) z ను వ్యాసార్ధ సదిశగా తీసుకొన్నప్పుడు వాస్తవ సంఖ్య θ అనునది z ధనవాస్తవ అక్షముతో ఏర్పరచు కోణమును రేడియన్లలలో తెల్పును. కోణము θ కు బుణవిలువలతో కలిపి అనంత సాధనలు కల్గిన విలువలు ఉండును. ఇవి 2π యొక్క పూర్ణాంక గుణకారములతో విరుద్ధంగా ఉండును. ఈ విలువలను z కు అనుసంధానించి బిందువుకు పాదమును తప్పనిసరిగా పేర్కొన్నప్పుడు $\tan\theta = \frac{y}{x}$, అను సమీకరణముచే తీర్మానించగలము. ఈ θ యొక్క ఒక్కొక్క విలువ z, యొక్క ఆయామములని అందుము. పైగా θ కు 2π గుణకములను సంకలనము ద్వారా పొందు ఇట్టి విలువల సమితిని $\arg z$ గా గుర్తించెదము.

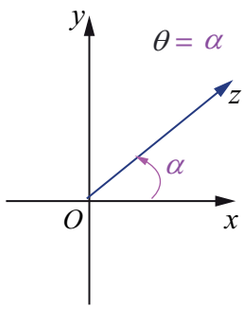
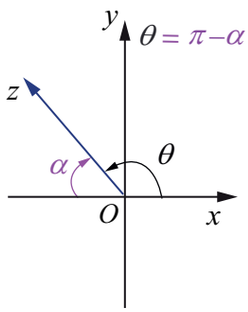
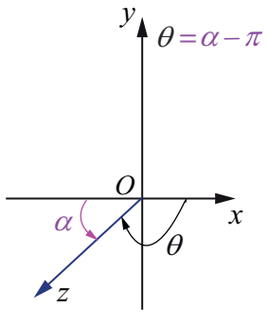
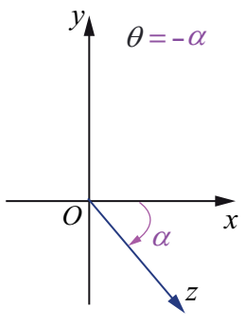


పటము. 2.29

స్థితి (2) $-\pi < \theta \leq \pi$ అను నిభంధనకు లోబడి θ కి ఒకే ఒక విలువ మాత్రమే ఉండును. ఈ విలువను z యొక్క ప్రధాన విలువ లేదా ప్రధాన ఆయామము అందురు. దీనిని $\text{Arg}\, z$ అని గుర్తిస్తాము.

ఇచ్చట, $-\pi < \text{Arg}(z) \leq \pi$ లేదా $-\pi < \theta \leq \pi$

సంకీర్ణసంఖ్యల ప్రధాన ఆయామం
Principal Argument of a complex number

1వ పాదము	2వ పాదము	3వ పాదము	4వ పాదము
			
$\theta = \alpha$	$\theta = \pi - \alpha$	$\theta = \alpha - \pi$	$\theta = -\alpha$

పటము. 2.30

పటము. 2.31

పటము. 2.32

పటము. 2.33

ఇచ్చట $\text{Arg}\, z$ లో ఉన్న A అనునది చాలా ముఖ్యమైనది. ఎందుకనగా ప్రధాన ఆయామముకు, సాధారణ ఆయామముకును గల భేదమును గుర్తించుటకు ఉపయోగపడును.

ప్రధాన ఆయామము θ, ను కనుగొనుటకు సాధారణముగా మనము $\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$ ను కనుగొని సంకీర్ణ సంఖ్య ఏ పాదములో అమరునో దానికి తగిన విధంగా α తో π ని సంకలనం లేదా వ్యవకలనం చేసి పొందవచ్చును.

$$\arg z = Arg\ z + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

ఆయామం యొక్క కొన్ని ధర్మములు

(1) $\arg(z_1\ z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 88 10-03-2022 10:41:03

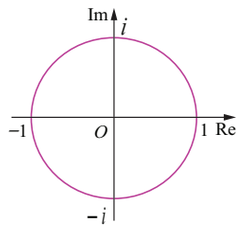
(2) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2$

(3) $\arg\left(z^n\right) = n \arg z$

(4) $\cos\theta + i\sin\theta$ యొక్క మరొక రూపము $\cos(2k\pi+\theta)+i\sin(2k\pi+\theta),\ k \in \mathbb{Z}$ అగును.

$1, i, -1$ మరియు $-i$ మొదలగువాటి ప్రధాన ఆయామం మరియు సాధారణ ఆయామం పట్టికలో పొందుపరచబడియున్నది.

z	1	i	-1	$-i$
$Arg(z)$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$-\frac{\pi}{2}$
$\arg z$	$2n\pi$	$2n\pi+\frac{\pi}{2}$	$2n\pi+\pi$	$2n\pi-\frac{\pi}{2}$



పటము. 2.34

వివరణ

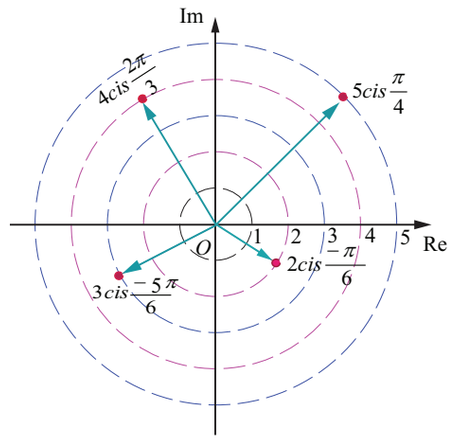
సంకీర్ణతలములో ఈ క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యలను గుర్తించుము.

(i) $5\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

(ii) $4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

(iii) $3\left(\cos\frac{-5\pi}{6}+i\sin\frac{-5\pi}{6}\right)$

(iv) $2\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.



పటము. 2.35

2.7.2 సంకీర్ణ సంఖ్యల యొక్క ఆయూలర్స్ రూపము (Euler's Form of the complex number)

ఆయూలర్స్ సూత్రము ఈ క్రిందివిధంగా నిర్వచించబడును.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ఆయూలర్స్ సూత్రమునుండి ధృవరూపము $z = re^{i\theta}$ అని పొందవచ్చును.

గమనిక

మనము సంకీర్ణ సంఖ్యల గుణకారము లేదా సంకీర్ణ సంఖ్యల ఘాతములను లేదా సంకీర్ణ సంఖ్యల యొక్క మూలాలు కనుగొనునపుడు ఆయూలర్స్ రూపమును ఉపయోగిస్తాము.

ఉదాహరణ 2.22

ఈ క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యలకు మాపం మరియు ప్రధాన ఆయామంను కనుగొనుము.

(i) $\sqrt{3}+i$ (ii) $-\sqrt{3}+i$ (iii) $-\sqrt{3}-i$ (iv) $\sqrt{3}-i$

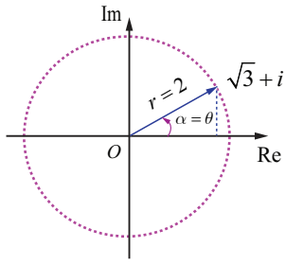
12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 89 10-03-2022 10:41:09

సాధన

(i) $\sqrt{3}+i$

$$\text{మాపము} = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$



పటము. 2.36

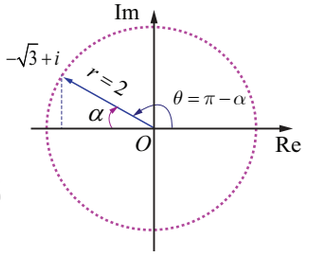
$\sqrt{3}+i$ అను సంకీర్ణ సంఖ్య మొదటి పాదంలో ఉండుటచే ప్రధాన ఆయామం

$$\theta = \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

కావున $\sqrt{3}+i$ యొక్క మాపం మరియు ప్రధాన ఆయామం వరుసగా 2 మరియు $\frac{\pi}{6}$ అగును.

(ii) $-\sqrt{3}+i$

$$\text{మాపము} = 2 \text{ మరియు } \alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$$



పటము. 2.37

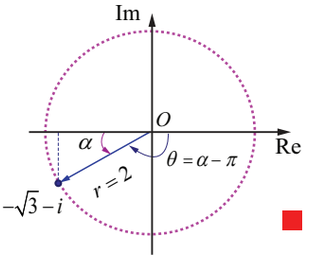
$-\sqrt{3}+i$ అను సంకీర్ణ సంఖ్య రెండవ పాదంలో ఉండుట వలన ప్రధాన ఆయామం

$$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}.$$

కావున $-\sqrt{3}+i$ యొక్క మాపం మరియు ప్రధాన ఆయామం వరుసగా 2 మరియు $\frac{5\pi}{6}$ అగును.

(iii) $-\sqrt{3}-i$

$$r = 2 \text{ మరియు } \alpha = \frac{\pi}{6}.$$



పటము. 2.38

$-\sqrt{3}-i$ అను సంకీర్ణ సంఖ్య మూడవ పాదంలో ఉండుటవలన ప్రధాన ఆయామం $\theta = \alpha - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$.

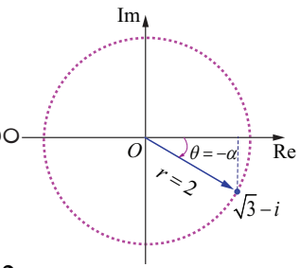
కావున $-\sqrt{3}-i$ యొక్క మాపం మరియు ప్రధాన ఆయామం వరుసగా 2 మరియు $-\frac{5\pi}{6}$ అగును.

(iv) $\sqrt{3}-i$

$$r = 2 \text{ మరియు } \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

$\sqrt{3}-i$ అను సంకీర్ణ సంఖ్య 4వ పాదములో ఉండుటవలన ప్రధాన ఆయామం

$$\theta = -\alpha = -\frac{\pi}{6}$$



పటము. 2.39

కావున $\sqrt{3}-i$ యొక్క మాపం మరియు ప్రధాన ఆయామం వరుసగా 2 మరియు $-\frac{\pi}{6}$ అగును.

పై నాల్గింటిలోను మాపము సమానముగా ఉన్నది కానీ దాని ఆయామం ఆ సంకీర్ణసంఖ్య అమరు పాదము నుండి తెలియును.

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 90 10-03-2022 10:41:15

ఉదాహరణ 2.23

(i) $-1-i$ (ii) $1+i\sqrt{3}$ అను సంకీర్ణ సంఖ్యలను ధృవరూపంలో వ్రాయుము.

సాధన

(i) $-1-i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ అనుకొనుము

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \text{ మరియు}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right| = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}.$$

$-1-i$ అను సంకీర్ణ సంఖ్య మూడవ పాదంలో అమరుట వలన దాని ప్రధాన ఆయామం

$$\theta = \alpha - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}$$

కావున, $-1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} - i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

$$-1-i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

గమనిక

k యొక్క వివిధ విలువల నుండి మనకు వేర్వేరు ధృవ రూపములు దొరుకును.

(ii) $1+i\sqrt{3}$

$$r = |z| = \sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2} = 2$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3}$$

అందువల్ల $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$.

కావున $1+i\sqrt{3}$ యొక్క ధృవరూపము

$$1+i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+2k\pi\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}.$$

ఉదాహరణ 2.24

$z = \frac{-2}{1+i\sqrt{3}}$ అయిన ప్రధాన ఆయామం $\operatorname{Arg} z$ ను కనుగొనుము.

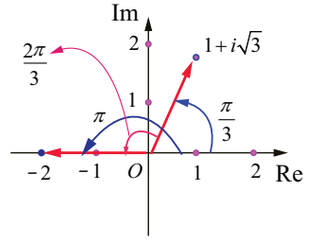
సాధన

$$\arg z = \arg\frac{-2}{1+i\sqrt{3}}$$

$$= \arg(-2) - \arg\left(1+i\sqrt{3}\right) \quad \left(\because \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2\right)$$

$$= \left(\pi - \tan^{-1}\left(\frac{0}{2}\right)\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)$$

$$= \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$



పటము. 2.40

దీనినుండి $\frac{2\pi}{3}$ అనునది $\arg z$ యొక్క విలువలలో ఒకటి.

$\frac{2\pi}{3}$ అనునది $-\pi$ మరియు π కు మధ్య అమరుట వలన ప్రధాన మాపం $\text{Arg}\, z$ is $\frac{2\pi}{3}$ అగును.

ధృవరూపముల ధర్మములు (Properties of polar form)

ధర్మము 1 If $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, అయిన $z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$ అగును.

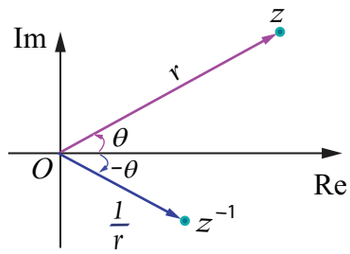
సాధన

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{r(\cos\theta + i\sin\theta)}$$

$$= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)}{r(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\theta - i\sin\theta)}$$

$$= \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)}{r(\cos^2\theta + \sin^2\theta)}$$

$$z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta).$$



పటము. 2.41

ధర్మము 2

If $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ మరియు $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

అయిన $z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$ అగును.

సాధన

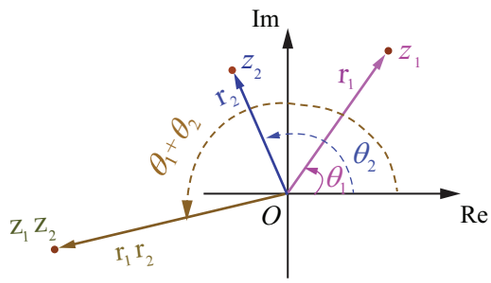
$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ మరియు

$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$

$$\Rightarrow z_1 z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2\left((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1)\right)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right).$$



పటము. 2.42

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 92 10-03-2022 10:41:33

గమనిక

$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg(z_1) + \arg(z_2).$$

ధర్మము 3

$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ మరియు $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, అయిన $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$

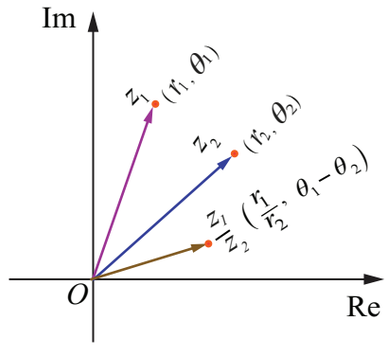
సాధన: z_1 మరియు z_2 యొక్క ధ్రువరూపమును ఉపయోగించిన

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}\frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_2\cos\theta_1)}{\cos^2\theta + \sin^2\theta}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right).$$



పటము. 2.43

గమనిక

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \theta_1 - \theta_2 = \arg(z_1) - \arg(z_2).$$

ఉదాహరణ 2.25

$\frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 6\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$ అను గుణకార లబ్ధమును లంబరూపంలో వ్రాయుము.

సాధన:

$$\frac{3}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 6\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2}\right)(6)\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 9\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 9\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$$= 9\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$= 9\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = -\frac{9\sqrt{3}}{2} - \frac{9i}{2}$, ఇది లంబ రూపంలో ఉన్నది.

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 93 10-03-2022 10:41:42

ఉదాహరణ 2.26

$\dfrac{2\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)}{4\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)}$ యొక్క భాగఫలమును లంబ రూపంలో వ్రాయుము

సాధన

$$\frac{2\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)}{4\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{4}-\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{4}-\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{9\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{4}+\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{15\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{15\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(4\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(4\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$\dfrac{2\left(\cos\frac{9\pi}{4}+i\sin\frac{9\pi}{4}\right)}{4\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}-i\dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}-i\dfrac{\sqrt{2}}{4}$. ఇది లంబ రూపంలో ఉన్నది.

ఉదాహరణ 2.27

$z=x+iy$ మరియు $\arg\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)=\dfrac{\pi}{2}$, అయిన $x^2+y^2=1$ అని చూపుము.

సాధన

$$\text{Now,}\quad \frac{z-1}{z+1} = \frac{x+iy-1}{x+iy+1} = \frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy} = \frac{\left[(x-1)+iy\right]\left[(x+1)-iy\right]}{\left[(x+1)+iy\right]\left[(x+1)-iy\right]}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z-1}{z+1} = \frac{(x^2+y^2-1)+i(2y)}{(x+1)^2+y^2}.$$

$$\text{Since, } \arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{2y}{x^2+y^2-1}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2y}{x^2+y^2-1} = \tan\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow x^2+y^2-1=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = 1.$$

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 94 10-03-2022 10:41:50

అభ్యాసము 2.7

1. ఈ క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యలను ధృవ రూపంలో వ్రాయుము.

(i) $2+i2\sqrt{3}$ (ii) $3-i\sqrt{3}$ (iii) $-2-i2$ (iv) $\dfrac{i-1}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$.

2. ఈ క్రింది సంకీర్ణ సంఖ్యలను లంబ రూపంలో వ్రాయుము.

(i) $\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ (ii) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}}{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}$.

3. $(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)(x_3+iy_3)\cdots(x_n+iy_n)=a+ib$, అయిన

(i) $\left(x_1^2+y_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2\right)\left(x_3^2+y_3^2\right)\cdots\left(x_n^2+y_n^2\right)=a^2+b^2$

(ii) $\sum_{r=1}^{n}\tan^{-1}\left(\frac{y_r}{x_r}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)+2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ అని చూపుము.

4. $\dfrac{1+z}{1-z}=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$, అయిన $z=i\tan\theta$ అని చూపుము.

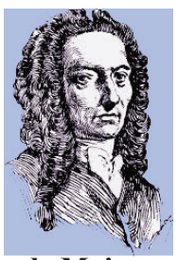
5. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$, అయిన

(i) $\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma=3\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ మరియు

(ii) $\sin 3\alpha+\sin 3\beta+\sin 3\gamma=3\sin(\alpha+\beta+\gamma)$ అని చూపుము.

6. $z=x+iy$ మరియు $\arg\left(\frac{z-i}{z+2}\right)=\frac{\pi}{4}$, అయిన $x^2+y^2+3x-3y+2=0$ అని చూపుము.

2.8 డిమోయర్స్ సిద్ధాంతము మరియు దాని అనువర్తనాలు (de Moivre's Theorem and its Applications)



de Moivre
1667–1754

అబ్రహామ్ డిమోయర్స్ (1667-1754) అను గణిత శాస్త్రవేత్త త్రికోణమితిలో సంకీర్ణ సంఖ్యలను ఉపయోగించెను.

త్రికోణమితిని జ్యామితియ రంగము నుండి విశ్లేషణ రంగములోనికి తీసుకోరావడానికి ఇతని పేరుతో పిలువబడు ఈ సూత్రము $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos n\theta+i\sin n\theta)$ సాధనముగా ఉన్నది.

2.8.1 డిమోయర్స్ సిద్ధాంతము (de Moivre's Theorem)

డిమోయర్స్ సిద్ధాంతము

ఇవ్వబడిన సంకీర్ణ సంఖ్య $\cos\theta+i\sin\theta$ మరియు n పూర్ణాంకమైతే

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$$

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 95 10-03-2022 10:41:58

ఉపసిద్ధాంతము (Corollary)

(1) $(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos n\theta - i\sin n\theta$ (2) $(\cos\theta + i\sin\theta)^{-n} = \cos n\theta - i\sin n\theta$

(3) $(\cos\theta - i\sin\theta)^{-n} = \cos n\theta + i\sin n\theta$ (4) $\sin\theta + i\cos\theta = i\left(\cos\theta - i\sin\theta\right)$.

మనము ఇప్పుడు డిమోయర్స్ సిద్ధాంతమును సంకీర్ణ సంఖ్యలను సూక్ష్మీకరించుటకు మరియు సమీకరణములను సాధించుటకు ఉపయోగిస్తాము.

ఉదాహరణ 2.28

If $z = \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$, అనిన $z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$ and $z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta$ అని చూపుము.

సాధన

$z = \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$ అనుకొనుము.

డిమోయర్స్ సిద్ధాంతము ప్రకారము

$$z^n = \left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

$$\frac{1}{z^n} = z^{-n} = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

కావున, $z^n + \frac{1}{z^n} = \left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right) + \left(\cos n\theta - i\sin n\theta\right)$

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2\cos n\theta\,.$$

అదేవిధంగా,

$$z^n - \frac{1}{z^n} = \left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right) - \left(\cos n\theta - i\sin n\theta\right)$$

$$z^n - \frac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta\,.$$

ఉదాహరణ 2.29

$\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)^{18}$ ను సూక్ష్మీకరించుము.

సాధన

$$\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6} = i\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$ గా వ్రాయవచ్చును.

ఇరువైపులా ఘాతము 18 కి పెంచిన

$$\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)^{18} = (i)^{18}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{18}$$

$$= (-1)\left(\cos\frac{18\pi}{6} - i\sin\frac{18\pi}{6}\right)$$

$$= -\left(\cos 3\pi - i\sin 3\pi\right) = 1 + 0i\,.$$

కావున, $\left(\sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}\right)^{18} = 1\,.$

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 96 10-03-2022 10:42:09

ఉదాహరణ 2.30

$\left(\frac{1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta - i\sin 2\theta}\right)^{30}$ ను సూక్ష్మీకరించుము..

సాధన

$$z = \cos 2\theta + i\sin 2\theta \text{ అనుకొనుము.}$$

$$|z| = |z|^2 = z\bar{z} = 1, \text{ అనుదాని నుండి } \bar{z} = \frac{1}{z} = \cos 2\theta - i\sin 2\theta .$$

కావున, $\frac{1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta - i\sin 2\theta} = \frac{1+z}{1+\frac{1}{z}} = \frac{(1+z)z}{z+1} = z .$

కావున, $\left(\frac{1+\cos 2\theta + i\sin 2\theta}{1+\cos 2\theta - i\sin 2\theta}\right)^{30} = z^{30} = (\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^{30}$

$$= \cos 60\theta + i\sin 60\theta .$$

ఉదాహరణ 2.31

(i) $(1+i)^{18}$ (ii) $(-\sqrt{3}+3i)^{31}$ ను సూక్ష్మీకరించుము.

సాధన

(i) $(1+i)^{18}$

$1+i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ అనుకొనుము

$r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$; $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$,

$\theta = \alpha = \frac{\pi}{4}$ ($\because 1+i$ అనునది మొదటిపాదములో ఉందుటవలన)

కావున $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ఇరువైపులా ఘాతము 18కి పెంచిన

$$(1+i)^{18} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{18} = \sqrt{2}^{18}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{18} .$$

డిమోయర్స్ సిద్ధాంతము ప్రకారము

$$(1+i)^{18} = 2^9\left(\cos\frac{18\pi}{4} + i\sin\frac{18\pi}{4}\right)$$

$$= 2^9\left(\cos\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) = 2^9\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$(1+i)^{18} = 2^9(i) = 512i .$$

(ii) $(-\sqrt{3}+3i)^{31}$

$-\sqrt{3}+3i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$. అనుకొనుము.

$$r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3},$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left|\frac{3}{-\sqrt{3}}\right| = \tan^{-1}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3},$$

$$\theta = \pi - \alpha = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} \quad (\because -\sqrt{3}+3i \text{ అనునది రెండవ పాదంలో ఉండిన})$$

కావున, $-\sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

ఇరువైపులా ఘాతము 31 కి పెంచిన

$$\begin{aligned}(-\sqrt{3}+3i)^{31} &= \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{31} \\ &= \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(\cos\left(20\pi + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(20\pi + \frac{2\pi}{3}\right)\right) \\ &= \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) \\ &= \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right) \\ &= \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \left(2\sqrt{3}\right)^{31}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).\end{aligned}$$

2.8.2 సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క n వ మూలమును కనుగొనుట
Finding n^{th} roots of a complex number

సంకీర్ణ సంఖ్యల యొక్క మూలములను కనుగొనుటకు డిమోయర్స్ సూత్రాన్ని ఉపయోగిస్తాము. n ఒక ధనాత్మక పూర్ణాంకము మరియు ω ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య అయిన z యొక్క n వ మూలము $z^{1/n}$ గా తీసుకొంటే

$$\omega^n = z. \qquad \ldots(1)$$

$\omega = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$ పొందవచ్చును

పైగా $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = r\left(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)\right),\ k \in \mathbb{Z}$

z యొక్క n వ మూలము w అయిన

$$\omega^n = z$$

$$\Rightarrow \rho^n(\cos\phi + i\sin\phi)^n = r\left(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

డిమోయర్స్ సిద్ధాంతము ప్రకారము

$$\rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) = r\left(\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)\right),\ k \in \mathbb{Z}$$

మాపములను మరియు ఆయామములను సమానము చేయగా

$\rho^n = r$ మరియు $n\phi = \theta + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\rho = r^{1/n}$ మరియు $\phi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$ అనిపొందవచ్చును.

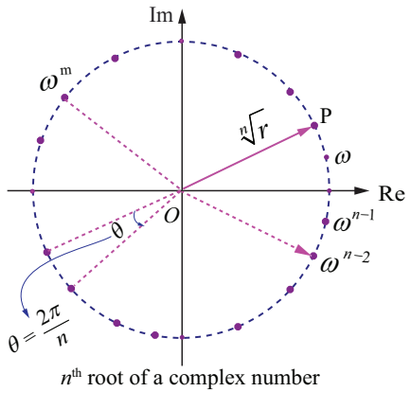
12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 98 10-03-2022 10:42:29

కావున ω యొక్క విలువలు $r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right),\ k\in\mathbb{Z}$.

k నకు అనేక అంతమొందని విలువలు ఉన్నప్పటికి ω నకు వేర్వేరు విలువలు పొందుటకు $k=0,1,2,3,\ldots,n-1$ అని ప్రతిక్షేపింపవలయును. $k=n,n+1,n+2,\ldots$ ప్రతిక్షేపించగా మనకు ఇదే మూలములు (చక్రీయ పద్ధతి) క్రమమైన వ్యవధిలో దొరుకును, కావున $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ అను సంకీర్ణ సంఖ్యయొక్క n వ మూలములు.

$$z^{1/n}=r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right),\ k=0,1,2,3,\ldots,n-1.$$

ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క n వ మూలములను $\omega=\sqrt[n]{r}e^{\frac{i(\theta+2k\pi)}{n}}$, అని అనుకొనుట ద్వారా పటములో చూపబడిన ఒక అద్భుత జామితీయ వివరణను పొందవచ్చును. కావున, ఈ n మూలములకు ఒకే మాప విలువ $|\omega|=\sqrt[n]{r}$ ఉంటుంది. ఈ n మూలములు ఆదిబిందువును కేంద్రముగా $\sqrt[n]{r}$ వ్యాసార్ధముగల వృత్తముపై అమరును. పైగా వరుస n మూలముల ఆయామములు $\sqrt[n]{r}$ అను భేదముచే వేరుపరుచుట వలన ఈ n మూలములు వృత్తముపై క్రమమైన వ్యవధిలో అమరును.



n^{th} root of a complex number

పటము. 2.44

విశేషాంశాలు (Remark)

(1) డిమోయర్స్ సిద్ధాంతము యొక్క సాధారణ రూపము (General form of de Moivre's Theorem)

x ఒక అకరణీయ సంఖ్య అనిన $\cos x\theta+i\sin x\theta$ అనునది $(\cos\theta+i\sin\theta)^x$ యొక్క విలువలలో ఒకటి అగును.

(2) యూనిట్ వృత్త ధృవ రూపము (Polar form of unit circle)

$$z = e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta\ .\ \text{అనుకొనుము.}$$
$$|z|^2 = |\cos\theta+i\sin\theta|^2$$
$$\Rightarrow\ |x+iy|^2 = \cos^2\theta+\sin^2\theta=1$$
$$\Rightarrow\ x^2+y^2 = 1.$$

కావున $|z|=1$ అనునది ఆది బిందువుని కేంద్రముగా గల యూనిట్ వృత్తము (1 ప్రమాణ వ్యాసార్ధము) ను గుర్తించును.

2.8.3 ఒకటి యొక్క n వ మూలములు (The nth roots of unity)

n ఒక ధనాత్మక పూర్ణాంకము, $z^n=1$ అను సమీకరణము సాధన విలువలే వలే ఒకటి యొక్క n వ మూలములగును $z^n=1$ అను సమీకరణము యొక్క ధృవ రూపమును క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 99 10-03-2022 10:42:37

$z^n = \cos(0+2k\pi)+i\sin(0+2k\pi)=e^{i2k\pi}$, $k=0, 1, 2,\ldots$.

డిమోయర్స్ సిద్ధాంతమునుపయోగించి ఒకటి యొక్క nవ మూలమును ఈ క్రింది విధంగా కనుగొనెదము.

$$z=\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)=e^{\frac{i2k\pi}{n}}, k=0,1,2,3,\ldots,n-1 . \quad \ldots (1)$$

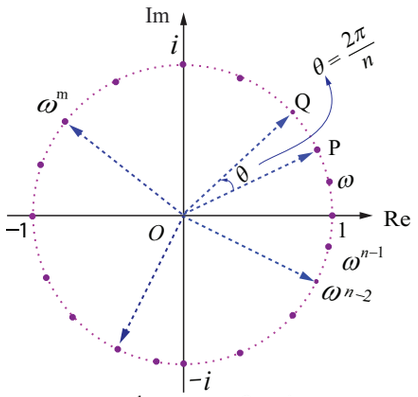
ఇవ్వబడిన ధన పూర్ణాంకము n నకు z అనునది ఒకటి యొక్క n వ మూలముగా ఉన్నట్లైతే $z^n=1$. గా ఉండవలెను.

దీనిని ω అను సంకీర్ణ సంఖ్యతో గుర్తించుటవలన

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{n}} = \cos\frac{2\pi i}{n}+i\sin\frac{2\pi i}{n}$$

$$\Rightarrow \quad \omega^n = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^n = e^{2\pi i}=1 \text{ అని పొందవచ్చును.}$$

అందువల్ల ఒకటి యొక్క n మూలములలో ω అనునది ఒక మూలము అగును. సమీకరణము (1) నుండి $1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}$ మొదలగునవి ఒకటి యొక్క n మూలములగును. $1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}$ అను ఈ సంకీర్ణ సంఖ్యలు సంకీర్ణతలములోని బిందువులు మరియు పటము2.45లో చూపినట్లు ఈ బిందువులు యూనిట్ వృత్తంలో చక్రీయమైన n భుజాలు గల క్రమ బహుభుజి శీర్షాలగును. ఈ అన్నీ n మూలముల మాప విలువలు 1 కావున ఇవి ఆది బిందువుని కేంద్రముగాను, వ్యాసార్ధము 1 (ప్రమాణము) గల వృత్తముపై అమరును. ఇంకా n మూలములు వృత్తం వెంట సమానముగా ఉంటాయి, ఎందుకంటే వరుస n మూలముల ఆయామములు $\frac{2\pi}{n}$ అను బేధంచే వేరుపడుట వలన n మూలములు వృత్తముపై క్రమమైన వ్యవధిలో అమరును.



n^{th} roots of unity

పటము. 2.45

ఒకటి యొక్క n వ మూలములు $1,\omega,\omega^2,\cdots,\omega^{n-1}$ మొదలగునవి ω ను సామాన్య నిష్పత్తిగా కల్గిన గుణశ్రేడిలో అమరును.

కావున $1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}=\frac{1-\omega^n}{1-\omega}=0$ ఇచ్చట $\omega^n=1$ మరియు $\omega\neq 1$.

ఒకటి యొక్క nవ మూలముల మొత్తము
$1+\omega+\omega^2+\cdots+\omega^{n-1}=0$ అగును.

ఒకటి యొక్క n, n వ మూలముల లబ్ధము

$$1\omega\omega^2\cdots\omega^{n-1} = \omega^{0+1+2+3+\cdots+(n-1)} = \omega^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

$$= \left(\omega^n\right)^{\frac{(n-1)}{2}} = \left(e^{i2\pi}\right)^{\frac{(n-1)}{2}} = \left(e^{i\pi}\right)^{n-1} = (-1)^{n-1}$$

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 100 10-03-2022 10:42:44

ఒకటి యొక్క nవ మూలముల లబ్ధము

$1\omega\omega^2\cdots\omega^{n-1} = (-1)^{n-1}$ అగును.

Since $|\omega|=1$, కావున $\omega\bar{\omega}=|\omega|^2=1$; కావున $\bar{\omega}=\omega^{-1}\Rightarrow(\bar{\omega})^k=\omega^{-k}$, $0\le k\le n-1$

$$\omega^{n-k}=\omega^n\omega^{-k}=\omega^{-k}=(\bar{\omega})^k,\ 0\le k\le n-1$$

కావున, $\omega^{n-k}=\omega^{-k}=(\bar{\omega})^k,\ 0\le k\le n-1.$

గమనిక

(1) ఒకటి యొక్క nవ మూలములన్నియూ గుణశ్రేడిని ఏర్పరచును.

(2) ఒకటి యొక్క nవ మూలముల మొత్తము ఎల్లప్పుడు శూన్యమగును.

(3) ఒకటి యొక్క nవ మూలముల లబ్ధము $(-1)^{n-1}$ అగును.

(4) ఒకటి యొక్క nవ మూలములన్నియు ఆది బిందువుని కేంద్రముగాను వ్యాసార్ధము 1 కల్గి వృత్తముపై అమరుటతో బాటు వృత్తమును n సమభాగములుగా విభజించును. పైగా ఇవి n భుజములుగల బహుభుజిని ఏర్పరచును.

ఉదాహరణ 2.32

ఒకటి యొక్క ఘనమూలములను (cube roots of unity) కనుగొనుము.

సాధన

మనము $1^{\frac{1}{3}}$ ని కనుగొనవలెను $z=1^{\frac{1}{3}}$ అనిన $z^3=1$ అగును.

$z^3=1$ అను సమీకరణమును ధ్రువరూపంలో వ్రాసిన

$z^3=\cos(0+2k\pi)+i\sin(0+2k\pi)=e^{i2k\pi},\ k=0,\ 1,\ 2,\cdots.$

కావున, $z=\cos\left(\frac{2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{3}\right)=e^{i\frac{2k\pi}{3}},\ k=0,\ 1,\ 2.$

$k=0,1,2$, అని ప్రతిక్షేపించిన

$k=0,\quad z=\cos 0+i\sin 0=1.$

$k=1,\quad z=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

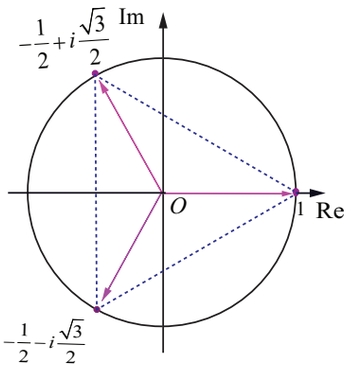
$$=-\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$k=2,\quad z=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$$=-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

కావున ఒకటి యొక్క ఘనమూలములు

$1,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\ \Rightarrow\ 1,\omega,$ మరియు ω^2, ఇచ్చట $\omega=e^{i\frac{2\pi}{3}}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.$



ఒకటి యొక్క ఘనమూలములను

పటము. 2.46

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 101 10-03-2022 10:42:54

ఉదాహరణ 2.33

ఒకటి యొక్క నాల్గవ మూలములను కనుగొనుము లేదా ఏకకపు నాలుగో మూలములను (fourth roots of unity) కనుగొనుము.

సాధన

మనము $1^{\frac{1}{4}}$ ను కనుగొనవలయును. $z=1^{\frac{1}{4}}$. అనిన $z^4=1$ అగును.

$z^4=1$ అను సమీకరణమును ధృవరూపంలో వ్రాసిన

$$z^4 = \cos(0+2k\pi)+i\sin(0+2k\pi)=e^{i2k\pi}, k=0,\ 1,\ 2,\ldots.$$

కావున, $z = \cos\left(\frac{2k\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{2k\pi}{4}\right)=e^{i\frac{2k\pi}{4}}$, $k=0,1,2,3.$

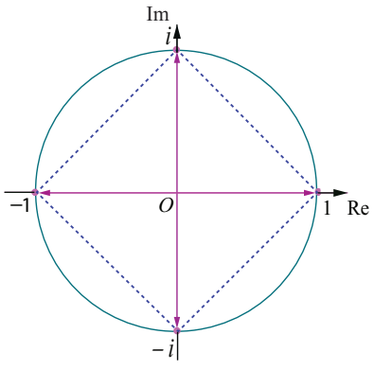
$k=0,1,2,3$, అని ప్రతిక్షేపించిన

$k=0,$ $\quad z = \cos 0+i\sin 0=1.$

$k=1,$ $\quad z = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=i.$

$k=2,$ $\quad z = \cos\pi+i\sin\pi=-1.$

$k=3,$ $\quad z = \cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}=-i.$



ఒకటి యొక్క నాల్గవ మూలము
పటము. 2.47

ఒకటి యొక్క నాలుగు మూలములు $1,\ i,\ -1,\ -i \quad \Rightarrow \quad 1,\ \omega,\ \omega^2,$ and ω^3, మరియు ఇచ్చట

$\omega = e^{i\frac{2\pi}{4}} = i$

గమనిక

(i) ఈ పాఠ్యభాగంలో ω అనునది ఏకకపు n వ మూలమగును. కావున ω అనునది n ను అనుసరించి ఏవిధంగా అమరునో క్రింది పట్టికలో తెలుపబడియున్నది.

n యొక్క విలువలు	2	3	4	5	⋯	k
ω యొక్క విలువల	$e^{i\frac{2\pi}{2}}$	$e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$e^{i\frac{2\pi}{4}}$	$e^{i\frac{2\pi}{5}}$	⋯	$e^{i\frac{2\pi}{k}}$

(ii) $z\,e^{i\theta}$ అనునది ఆదిబిందువును బట్టి z రేడియన్లు కోణములో అపసవ్యదిశలో θ యొక్క భ్రమణము అగును.

ఉదాహరణ 2.34

$z^3+8i=0$ అను సమీకరణమును సాధించుము. ఇచ్చట $z\in\mathbb{C}$

సాధన

Let $\quad z^3+8i=0$. అనుకొనుము.

$$z^3 = -8i$$

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 102 10-03-2022 10:43:05

$$= 8(-i) = 8\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right), k\in\mathbb{Z}.$$

కావున, $z = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{-\pi+4k\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi+4k\pi}{6}\right)\right),\ k=0,1,2.$

$k=0,1,2$, అని ప్రతిక్షేపించగా

$k=0,\quad z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}-i$

$k=1,\quad z = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=2=2(0+i)=0+2i=2i.$

$k=2,\quad z = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)=2\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)\right)$

$$= 2\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=-\sqrt{3}-i.$$

z యొక్క విలువలు $\sqrt{3}-i,\ 2i,$ మరియు $-\sqrt{3}-i$

ఉదాహరణ 2.35

$\sqrt{3}+i$ యొక్క అన్ని ఘనమూలములను కనుగొనుము.

సాధన

మనము $\left(\sqrt{3}+i\right)^{\frac{1}{3}}$ యొక్క విలువలను కనుగొనవలయును.

$z=\left(\sqrt{3}+i\right)^{\frac{1}{3}}$. అనిన, $z^3 = \sqrt{3}+i = r(\cos\theta+i\sin\theta)$ అగును.

$r = \sqrt{3+1}=2,$ మరియు $\alpha=\theta=\frac{\pi}{6}$ ($\because \sqrt{3}+i$ అనునది ఒకటవ పాదంలో అమరుట వలన)

కావున, $z^3 = \sqrt{3}+i = 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$\Rightarrow\quad z = \sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{\pi+12k\pi}{18}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+12k\pi}{18}\right)\right),\ k=0,1,2.$

$k=0,1,2$, అని ప్రతిక్షేపించిన

$k=0,\quad z = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{\pi}{18}+i\sin\frac{\pi}{18}\right);$

$k=1,\quad z = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{13\pi}{18}+i\sin\frac{13\pi}{18}\right);$

$k=2,\quad z = 2^{\frac{1}{3}}\left(\cos\frac{25\pi}{18}+i\sin\frac{25\pi}{18}\right)=2^{\frac{1}{3}}\left(-\cos\frac{7\pi}{18}-i\sin\frac{7\pi}{18}\right).$

ఉదాహరణ 2.36

$|z|=2$. అను వృత్తములో అమర్చబడిన సమబాహు త్రిభుజ శీర్షములు $z_1, z_2,$ మరియు z_3 అనుకొనుము. పైగా $z_1=1+i\sqrt{3}$ ఐతే z_2 మరియు z_3. ని కనుగొనుము.

సాధన

$|z|=2$ అనునది $(0,0)$ ను కేంద్రముగాను, 2ను వ్యాసార్ధముగా కల్గిన వృత్తమును తెలుపును.

త్రిభుజ శీర్షములు $A, B,$ మరియు C అనుకొనుము. $z_1, z_2,$ మరియు z_3 అనునవి $|z|=2$ అను వృత్తములో అమర్చిన సమబాహు త్రిభుజ శీర్ష బిందువులగును. కావున $AB, BC,$ మరియు CA భుజములు ఆదిబిందువు వద్ద (త్రిభుజ పరి వృత్తకేంద్రము) $\frac{2\pi}{3}$ రేడియన్లు (120^0) కోణము చేయును.

($z e^{i\theta}$ అనునది ఆదిబిందువు బట్టి θ రేడియన్ల కోణములో అపసవ్యదిశలో z యొక్క భ్రమణము అగును)

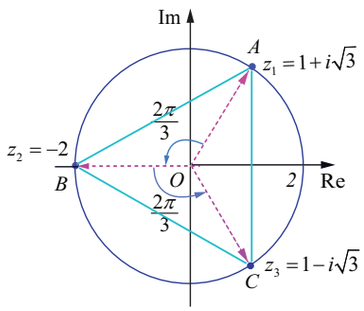
కావున z_1, ను వరుసగా $\frac{2\pi}{3}$ మరియు $\frac{4\pi}{3}$ కోణములతో భ్రమణము చేయుట వలన z_2 మరియు z_3 ని పొందవచ్చును.

$$\overrightarrow{OA} = z_1 = 1+i\sqrt{3} \text{ అనుకొనుము}$$

$$\overrightarrow{OB} = z_1 e^{i\frac{2\pi}{3}} = \left(1+i\sqrt{3}\right)e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$= \left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= \left(1+i\sqrt{3}\right)\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-2;$$



పటము. 2.48

$$\overrightarrow{OC} = z_1 e^{i\frac{4\pi}{3}} = z_2 e^{i\frac{2\pi}{3}} = -2e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$= -2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$= -2\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=1-i\sqrt{3}.$$

కావున, $z_2 = -2,$ మరియు $z_3=1-i\sqrt{3}$.

అభ్యాసము 2.8

1. $\omega\neq 1$ అనునది ఏకకపు ఘనమూలములు అయిన $\frac{a+b\omega+c\omega^2}{b+c\omega+a\omega^2}+\frac{a+b\omega+c\omega^2}{c+a\omega+b\omega^2}=-1$ అని చూపుము.

2. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^5+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^5=-\sqrt{3}$ అని చూపుము.

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 104 10-03-2022 10:43:26

3. $\left(\dfrac{1+\sin\frac{\pi}{10}+i\cos\frac{\pi}{10}}{1+\sin\frac{\pi}{10}-i\cos\frac{\pi}{10}}\right)^{10}$. యొక్క విలువను కనుగొనుము.

4. $2\cos\alpha = x+\dfrac{1}{x}$ మరియు $2\cos\beta = y+\dfrac{1}{y}$, అయిన క్రిందివాటిని నిరూపించుము.

(i) $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=2\cos(\alpha-\beta)$ (ii) $xy-\dfrac{1}{xy}=2i\sin(\alpha+\beta)$

(iii) $\dfrac{x^m}{y^n}-\dfrac{y^n}{x^m}=2i\sin(m\alpha-n\beta)$ (iv) $x^m y^n+\dfrac{1}{x^m y^n}=2\cos(m\alpha+n\beta)$.

5. $z^3+27=0$ అను సమీకరణమును సాధించుము.

6. $\omega\neq 1$ అనునది ఏకకపు ఘనమూలములైన $(z-1)^3+8=0$ అను సమీకరణమునకు వరుసగా $-1, 1-2\omega, 1-2\omega^2$ మూలములగునని చూపుము.

7. $\sum_{k=1}^{8}\left(\cos\dfrac{2k\pi}{9}+i\sin\dfrac{2k\pi}{9}\right)$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

8. $\omega\neq 1$ అనునది ఏకకపు ఘనమూలమైన క్రిందివాటిని నిరూపించుము.

(i) $(1-\omega+\omega^2)^6+(1+\omega-\omega^2)^6=128.$

(ii) $(1+\omega)(1+\omega^2)(1+\omega^4)(1+\omega^8)\cdots(1+\omega^{2^{11}})=1$.

9. $z=2-2i$ అయిన మూలబిందువు బట్టి z ను θ రేడియన్లు అపసవ్యదిశలో భ్రమణము చేసిన z యొక్క విలువలను క్రింది ఇవ్వబడిన θ విలువలకు కనుగొనుము.

(i) $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ (ii) $\theta=\dfrac{2\pi}{3}$ (iii) $\theta=\dfrac{3\pi}{2}$.

అభ్యాసము 2.9

క్రింది ఇవ్వబడిన నాలుగు జవాబులను నుండి సరియైన లేక బాగా సరిపోవు జవాబును ఎన్నుకొనుము:

1. $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}$ యొక్క విలువ

(1) 0 (2) 1 (3) -1 (4) i

2. $\sum_{n=1}^{13}(i^n+i^{n-1})$ యొక్క విలువ

(1) $1+i$ (2) i (3) 1 (4) 0

L593J

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 105 10-03-2022 10:43:33

3. z, iz, మరియు $z+iz$ అను సంకీర్ణ సంఖ్యలు ఆర్గాండ్ పటంలో ఏర్పరచు త్రిభుజ వైశాల్యము

(1) $\frac{1}{2}|z|^2$ (2) $|z|^2$ (3) $\frac{3}{2}|z|^2$ (4) $2|z|^2$

4. ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య సంయుగ్మము $\frac{1}{i-2}$ అయిన, ఆ సంకీర్ణ సంఖ్య

(1) $\frac{1}{i+2}$ (2) $\frac{-1}{i+2}$ (3) $\frac{-1}{i-2}$ (4) $\frac{1}{i-2}$

5. $z=\frac{\left(\sqrt{3}+i\right)^3(3i+4)^2}{(8+6i)^2}$ అయిన $|z|$ విలువ

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

6. z అనే శూన్యేతర సంకీర్ణ సంఖ్యకు $2iz^2=\bar{z}$ అయిన $|z|$ విలువ

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) 2 (4) 3

7. $|z-2+i|\le 2$ అయిన $|z|$ గరిష్ఠ విలువ

(1) $\sqrt{3}-2$ (2) $\sqrt{3}+2$ (3) $\sqrt{5}-2$ (4) $\sqrt{5}+2$

8. $\left|z-\frac{3}{z}\right|=2$ అయిన $|z|$ కనీసపు విలువ

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 5

9. $|z|=1$ అయిన $\frac{1+z}{1+\bar{z}}$ విలువ

(1) z (2) $\bar{z}$ (3) $\frac{1}{z}$ (4) 1

10. $|z|-z=1+2i$ అను సమీకరణమును సాధించుము.

(1) $\frac{3}{2}-2i$ (2) $-\frac{3}{2}+2i$ (3) $2-\frac{3}{2}i$ (4) $2+\frac{3}{2}i$

11. $|z_1|=1,\ |z_2|=2,\ |z_3|=3$ మరియు $|9z_1z_2+4z_1z_3+z_2z_3|=12$ అయిన $|z_1+z_2+z_3|$ విలువ.

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

12. z అను సంకీర్ణ సంఖ్య అనునది $z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ అయిన $z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$ గాను ఉండిన $|z|$ విలువ.

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

13. z_1, z_2, మరియు z_3 అను సంకీర్ణసంఖ్యలు $z_1+z_2+z_3=0$ గాను $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ గాను ఉండిన $z_1^{\,2}+z_2^{\,2}+z_3^{\,2}$ విలువ

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) 0

14. $\frac{z-1}{z+1}$ అనునది శుద్ధ కల్పితమైన $|z|$ విలువ

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 1 (3) 2 (4) 3

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 106 10-03-2022 10:43:47

15. $z = x + iy$ అను సంకీర్ణసంఖ్యకు $|z+2| = |z-2|$ అయిన z యొక్క బిందుపథము

(1) వాస్తవ అక్షము (2) కల్పిత అక్షము (3) ధీర్ఘవృత్తము (4) వృత్తము

16. $\frac{3}{-1+i}$ అను సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క ప్రధాన ఆయామం

(1) $\frac{-5\pi}{6}$ (2) $\frac{-2\pi}{3}$ (3) $\frac{-3\pi}{4}$ (4) $\frac{-\pi}{2}$

17. $(\sin 40^\circ + i\cos 40^\circ)^5$ యొక్క ప్రధాన ఆయామం

(1) -110° (2) -70° (3) 70° (4) 110°

18. $(1+i)(1+2i)(1+3i)\cdots(1+ni) = x+iy$ అయిన $2\cdot5\cdot10\cdots(1+n^2)$ విలువ

(1) 1 (2) i (3) x^2+y^2 (4) $1+n^2$

19. $\omega \neq 1$ అనునది ఏకకపు ఘన మూలమైన మరియు $(1+\omega)^7 = A + B\omega$ అయిన (A, B)కి సమమైనది

(1) $(1,0)$ (2) $(-1,1)$ (3) $(0,1)$ (4) $(1,1)$

20. $\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)^2}{4i\left(1-i\sqrt{3}\right)}$ అను సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క ప్రధాన ఆయామం

(1) $\frac{2\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{6}$ (3) $\frac{5\pi}{6}$ (4) $\frac{\pi}{2}$

21. $x^2+x+1=0$ అను సమీకరణ మూలములు α మరియు β అయిన $\alpha^{2020} + \beta^{2020}$ విలువ

(1) -2 (2) -1 (3) 1 (4) 2

22. $\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{3}{4}}$ యొక్క అన్ని నాలుగు విలువల లబ్ధము

(1) -2 (2) -1 (3) 1 (4) 2

23. $\omega \neq 1$ ఏకకపు ఘనమూలమైన $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\omega^2-1 & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega^7 \end{vmatrix} = 3k$ అయిన k విలువ

(1) 1 (2) -1 (3) $\sqrt{3}i$ (4) $-\sqrt{3}i$

24. $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$ విలువ

(1) $cis\frac{2\pi}{3}$ (2) $cis\frac{4\pi}{3}$ (3) $-cis\frac{2\pi}{3}$ (4) $-cis\frac{4\pi}{3}$

25. $\omega = cis\frac{2\pi}{3}$ అనిన $\begin{vmatrix} z+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & z+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & z+\omega \end{vmatrix} = 0$ అను సమీకరణము యొక్క వేర్వేరు మూలముల సంఖ్య

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

సారాంశము (SUMMARY)

ఈ పాఠ్యభాగంలో మనము నేర్చుకొన్నది

ఒక సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క లంబ రూపమునుది $x+iy\,(\text{or}\,x+yi)$ లేదా అగును. ఇచ్చట x మరియు y అనునవి వాస్తవ సంఖ్యలగును.

రెండు సంకీర్ణ సంఖ్యలు $z_1 = x_1 + iy_1$ మరియు $z_2 = x_2 + iy_2$ మొదలగునవి సమానంగా ఉంటేమాత్రమే నిబంధన $\text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2)$ మరియు $\text{Re}(z_1) = \text{Re}(z_2)$ అనగా $x_1 = x_2$ మరియు $y_1 = y_2$

$x+iy$ అను సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క సంకీర్ణసంయుగ్మము $x-iy$ అని నిర్వచించబడినది.

సంకీర్ణ సంయుగ్మము యొక్క ధర్మములు (Properties of complex conjugates)

(1) $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$

(2) $\overline{z_1-z_2} = \overline{z_1}-\overline{z_2}$

(3) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

(4) $\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},\ z_2 \neq 0$

(5) $\text{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$

(6) $\text{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

(7) $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$, ఇచ్చట n ఒక పూర్ణాంకము.

(8) z ఒక వాస్తమైతే, అయితేమాత్రమే $z = \overline{z}$

(9) z ఒక కల్పితమైతే, అయితేమాత్రమే $z = -\overline{z}$

(10) $\overline{\overline{z}} = z$

$z = x+iy$, అయిన z యొక్క మాపమును $|z|$ అని గుర్తించుదుము. దీనిని $|z|$ $\sqrt{x^2+y^2}$ అని నిర్వచించెదము.

సంకీర్ణ సంఖ్య మాప ధర్మములు (Properties of Modulus of a complex number)

(1) $|z| = |\overline{z}|$

(2) $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$ ((త్రిభుజ అసమానత)

(3) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

(4) $|z_1-z_2| \ge \big||z_1|-|z_2|\big|$

(5) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|},\ z_2 \neq 0$

(6) $|z^n| = |z|^n$, ఇచ్చట n ఒక పూర్ణాంకము

(7) $\text{Re}(z) \le |z|$

(8) $\text{Im}(z) \le |z|$

సంకీర్ణ సంఖ్యల వర్గమూలము కనుగొనుటకు సూత్రము.

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{|z|+a}{2}} + i\frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{|z|-a}{2}}\right),\quad z = a+ib \text{ మరియు } b \neq 0.$$

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 108 10-03-2022 10:44:03

r మరియు θ అనునవి ఒక శూన్యేతర సంకీర్ణ సంఖ్య $z = x + iy$ సంబంధించిన బిందువు యొక్క $P(x, y)$ ధృవ నిరూపకాలు అగును. P. అను బిందువు యొక్క ధృవ లేదా త్రికోణమితి రూపము .

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

ధృవ రూప ధర్మములు (Properties of polar form)

ధర్మము 1: If $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, అయిన $z^{-1} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta)$ అగును.

ధర్మము 2: If $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ మరియు $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$,
అయిన $z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2))$.

ధర్మము: If $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ మరియు $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$,
అయిన $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right]$.

డిమోయర్స్ సిద్ధాంతము (de Moivre's Theorem)

(a) ఇవ్వబడిన సంకీర్ణ సంఖ్య $\cos\theta + i\sin\theta$ మరియు n ఏదేని ఒక పూర్ణసంఖ్యకు

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

(b) x ఒక అకరణీయ సంఖ్య అనిన $\cos x\theta + i\sin x\theta$ అనునది $(\cos\theta + i\sin\theta)^x$ యొక్క విలువలలో ఒకటగును.

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ అను సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క nవ మూలము

$$z^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right),\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1.$$

అంతర్జాల కృత్యము (ICT CORNER)

https://ggbm.at/vchq92pg లేక QR Code ను స్కేన్ చేయుము.

Browser ని ఓపన్ చేయుము. ఇవ్వబడిన URL లింకు టైపుచేయుము లేదా QR code కోడును స్కేన్ చేయుము. జియోజిబ్రా అను వర్క్‌షీట్‌లో 12th Standard Mathematics భాగం−2 లో work book పేరు మీద ఓపెన్ అగును. ఈ "Complex Numbers" కు ఎడమవైపు ఉన్న పాఠ్యపుస్తక అధ్యాయములు కనబడును. అందులో work sheets అను అధ్యాయమును ఎంచుకొనుము. ఇప్పుడు ఈ అధ్యాయమునకు సంబందించిన లను చూడవచ్చును. అందులో "Geometrical Meaning" ను ఎంచుకొనుము.

12th_Maths_TM_Vol1_CH 2_Complex Numbers.indd 109 10-03-2022 10:44:10

అధ్యాయము
3

సమీకరణముల సిద్ధాంతం

ADFU5

సమీకరణాలలో అందం పొందే దృక్పథంతో ప్రయత్నించే ఒకరు,
నిజంగానే అంతర్‌దృష్టితో ప్రయత్నించినచో అతను సన్మార్గంలో
పురోగతి చెందుతున్నాడని చెప్పగలము.

– పాల్ డిరాక్

3.1 పరిచయం

బీజ గణితపు సమీకరణములు సాధించుట అనునది గణితశాస్త్రములో మిక్కిలి పురాతన సమస్యలలో ఒకటి అగును. అందులోనూ ముఖ్యముగా బహుపద సమీకరణముల మూలములను కనుగొనుటకు ప్రయత్నించుట అగును. సుమారుగా క్రీ.పూ. (BCE) 2000 సంవత్సరములకు ముందు కాలమునకు చెందిన సుమేరియన్లు మరియు బాబిలోనియన్ల నుండి ప్రారంభించి, ప్రపంచ దేశాల వివిధ ప్రాంతాలైన ఈజిప్టు, గ్రీసు, ఇండియా, అరేబియా, చైనా దేశాలకు చెందిన గణితశాస్త్రవేత్తలు మరియు తత్త్వవేత్తలు బహుపద సమీకరణములను సాధించుటకు ప్రయత్నించిరి.


Abel
(1802-1829)

ప్రాచీన కాలములో గణితశాస్త్రవేత్తలు సమస్యలను మరియు వాటి సాధనలను పూర్తిగా పదాల రూపములో వ్యక్తపరిచిరి. సాధారణ పద్ధతులకు భిన్నముగా నిర్దిష్ట సమస్యలను సాధించుటలో ఉత్సాహము చూపిరి. ఋణాత్మక సంఖ్యలను కలిగిన ద్విఘాత వర్గ సమీకరణముల సాధనలను బ్రహ్మగుప్త మొట్టమొదటగా కనుగొనిరి. బహుపద సమీకరణముల సాధనలను పరిశోధించిన గణితశాస్త్రవేత్తలలో కొందరు యూక్లిడ్, డయోపాంటస్, బ్రహ్మగుప్త, ఉమర్ కయామ్, ఫిబనోసి, డెస్కార్టెస్ మరియు రూఫిని అగుదురు. ఐదవ అంతస్థ కలిగిన సమీకరణాల సాధనను కనుగొనుటకు బీజగణిత పద్ధతిలో ఏదియును లేదని నిరూపించి అర్థం చేసుకొనుటకు శ్రమపడు విధముగా మిక్కిలి దీర్ఘవాదనను ముందించి రూఫిని నిరూపించారు. చివరిగా 1823న సంవత్సరములో నార్‌వేజియన్ గణితశాస్త్రవేత్త అయిన ఏబెల్ దానిని సులభ పద్ధతిలో నిరూపించారు.



ఒక ఉత్పత్తి సంస్థ తాను తయారుచేసిన ఉత్పత్తులను దీర్ఘచతురస్రాకార పెట్టెలో నింపాలని అనుకొన్నది. ఆ సంస్థ వెడల్పు కన్నా 6 యూనిట్లు ఎక్కువగా పొడవు ఉండునట్లు, ఆధార పొడవు మరియు వెడల్పు యొక్క సగటు ఆ పెట్టె యొక్క ఎత్తుగా ఉండు విధంగా తయారుచేయుటకు తీర్మానించిరి. కావున పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణమునకు సరిపడు వీలైన అన్ని కొలతలను తెలుసుకొనుటకు ఆ సంస్థ ప్రయత్నించినది.

ఆధార వెడల్పు x అయిన, పొడవు $x+6$ అయిన, ఎత్తు $x+3$ అయిన పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణము $x(x+3)(x+6)$ అగును. ఘనపరిమాణము 2618ఘ.ప్ర అయిన $x^3+9x^2+18x=2618$ పై సమీకరణములో సాధన x ను కనుగొనుటకు కావలసిన కొలతలతో ఆ పెట్టెను నిర్మించవచ్చును.

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 110 10-03-2022 10:52:36

ఒక వృత్తము మరియు ఒక సరళరేఖ రెండు బిందువుల కంటే ఎక్కువ బిందువుల వద్ద ఖండించుకోవని మనకు తెలుసు. అయితే దీనిని మనం ఎలా నిరూపించగలము? దీనిని నిరూపించుటకు గణిత సమీకరణములు ఉపయోగపడును. r తలములో ఆది బిందువును కేంద్రముగాను, $x^2+y^2=r^2$ ను వ్యాసార్ధముగా కలిగిన వృత్తపు సమీకరణము xy అగును. అదేవిధంగా ఇదే సమతలములో ఏర్పడు స్పర్శరేఖ సమీకరణము $ax+by+c=0$ అగును. ఈ వృత్తము మరియు సరళరేఖ ఖండించుకొను బిందువులు రెండు సమీకరణములను తృప్తిపరచును. మరో విధంగా చెప్పిన,

$$x^2+y^2=r^2 \text{ and } ax+by+c=0 \text{ మరియు}$$

పై తెలిపిన ఏకకాల సమీకరణముల సాధన ఖండన బిందువులను ఇచ్చును. దీని ద్వారా పై సమీకరణముల సాధన నుండి అవి ఒకదానికొకటి స్పృశించునా, రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించునా లేదా ఖండించుకొనవా అని మనకు తెలియును.

ప్రాచీన కాలంలో నిర్దిష్టమైన కొన్ని రేఖాగణిత ఆకారములను నిర్మించుటకు వృత్తలేఖిని మరియు కొలబద్ద (ప్రమాణములను గుర్తించని నిటారైన అంచు గల)ను ఉపయోగించేవారు. ఉదాహరణకు ఒక క్రమ షడ్భుజి మరియు 17 భుజములు కలిగిన క్రమ బహుభుజిని పై విధానములో నిర్మించవచ్చు. కాని క్రమ సప్తభుజి మరియు 18 భుజములు కలిగిన బహుభుజిని నిర్మించలేము. ముఖ్యంగా క్రింద ఇవ్వబడిన మూడు ముఖ్యమైన సమస్యలలో వృత్తలేఖిని మరియు కొలబద్దను రెండింటిని మాత్రం ఉపయోగించి నిర్మించుటకు వీలు కాదు. ఆ మూడు సమస్యలు:

- ఒక కోణము యొక్క త్రికరణ (ఇవ్వబడిన కోణమును మూడు సమకోణములుగా విభజించుట)
- వృత్తమును చతురస్రముగా మార్చుట (ఇవ్వబడిన వృత్తము యొక్క వైశాల్యమునకు సమ వైశాల్యము గల చతురస్రమును నిర్మించుట) (దీనికి గణిత మేధావి రామానుజన్ తన 'నోటు పుస్తకము'లో రమారమి సాధనను ఇచ్చారు)
- ఒక ఘనచతురస్రమును రెట్టింపు చేయుట (ఇవ్వబడిన ఘనచతురస్ర ఘనపరిమాణమునకు రెండురెట్లకు సమానమైన ఒక ఘనచతురస్రమును నిర్మించుట.)

ఇటువంటి ప్రాచీన సమస్యలను బహుపద సమీకరణముల సమస్యలుగా మార్చిన తరువాతనే సాధనను కనుగొనుటకు వీలైనది; వాస్తవంగా ఇటువంటి నిర్మాణములను నిర్మించుటకు వీలుకాదు. దీనిని నిరూపించుటకు గణితశాస్త్రము చాలా ఉపయోగపడును.

నిత్యజీవిత సమస్యలకు సాధన కనుగొనవలెననిన, వాటిని గణితశాస్త్రవేత్తలు గణిత సమస్యలుగా మార్చి, తెలిసిన గణిత పద్ధతులనుపయోగించి సాధనను కనుగొన్న తర్వాత నిత్యజీవితమునకు అనుకూలమైన సాధనను ఇస్తారు. ఇటువంటి మార్పులకు లోనగు వివిధ నిత్యజీవిత సమస్యలు గణితములో సమీకరణములుగా మారును. ఒక పెట్టె యొక్క కొలతలను తీర్మానించునపుడు, నిర్దిష్టమైన రేఖాగణిత ఫలితములను నిరూపించునపుడు, కొన్ని నిర్మాణములను నిర్మించలేమని నిరూపించు సమస్యల సందర్భంగా మనకు సమీకరణాలు ఉపయోగపడును.

ఈ అధ్యాయములో సమీకరణముల కొన్ని ధర్మములను అందులోను ముఖ్యముగా బహుపద సమీకరణముల గురించి, వాటి సాధనల గురించి తెలుసుకొనెదము. ఇంకా బహుపద సమీకరణముల కొన్ని ధర్మములను గురించి, ఇవ్వబడిన మూలముల నుండి బహుపద సమీకరణములను నిర్మించుట, ప్రాథమిక

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 111 10-03-2022 10:52:37

బీజగణిత సిద్ధాంతము తెలుసుకొనుట, బహుపద సమీకరణము యొక్క ధనాత్మక మరియు ఋణాత్మక మూలముల సంఖ్యను తెలుసుకొనుట వంటివి నేర్చుకొందుము. వీటి ద్వారా నిర్దిష్ట కొన్ని రకముల బహుపద సమీకరణముల మూలముల స్వభావమును తెలుసుకొనుట మన లక్ష్యమగును. బహుపద సమాసములుగా మార్చలేని కొన్ని సమీకరణముల సాధనను కొన్ని బహుపద సమీకరణముల ద్వారా కనుగొనుటకు తోడ్పడుపద్ధతులను గురించి నేర్చుకొందుము.

అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ అధ్యాయమును ముగించునపుడు విద్యార్థులు నేర్చుకోవలసినవి

- మూలముల ద్వారా ఇవ్వబడిన నిబంధనలతో బహుపద సమీకరణములను నిర్మించుట.
- అధిక అంతస్థు గల బహుపద సమీకరణములను సాధించుటకు క్రొత్త పద్ధతులను తెలుసుకొనుట.
- సంక్లిష్టమైన లేదా కరణి, కరణీయ మరియు అకరణీయ మూలములతో ఏర్పడు అధిక అంతస్థు గల బహుపద సమీకరణమును సాధించుట.
- విలోమ సమీకరణములను గుర్తించుట మరియు సాధించుట.
- బహుపద సమీకరణపు ధనాత్మక మరియు ఋణాత్మక మూలముల సంఖ్యను డెస్కార్టెస్ పద్ధతి ద్వారా కనుగొనుట.

3.2 బహుపద సమీకరణముల యొక్క ప్రాథమిక అంశాలు (Basics of Polynomial Equations)

3.2.1 బహుపద సమీకరణముల యొక్క వివిధ రకములు (Different types of Polynomial Equations)

ఏదేని ఒక ఋణాత్మకముకాని పూర్ణసంఖ్య n కు, n అను ఒక చలరాశి కలిగిన x అంతస్థు గల ఒక బహుపద సమాసమనునది

$$P \equiv P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \qquad \ldots (1)$$

ఇక్కడ $a_r \in \mathbb{C}$ అనునవి స్థిరాంకాలు, $r = 0,1,2,\ldots,n$ అయిన, ఇక్కడ $r = 0,1,2,\ldots,n$ అగును. x అను చలరాశి వాస్తవ సంఖ్య లేదా సంకీర్ణ సంఖ్య అగును.

P అను బహుపద సమాసము యొక్క అన్ని గుణకములు వాస్తవ సంఖ్యలైన, దీనిని " $\mathbb{R}$ – మీద ఏర్పడు బహుపద సమాసము P " అంటారు. ఇదేవిధంగా "$\mathbb{C}$ మీద ఏర్పడు బహుపద సమాసము P " అనియు, " $\mathbb{Q}$ మీద ఏర్పడు బహుపద సమాసముP" అనియు, "$\mathbb{Z}$ మీద ఏర్పడు బహుపద సమాసము P" అనియు పదజాలములను ఉపయోగించెదము.

P అను ప్రమేయము, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ను బహుపద ప్రమేయముగా నిర్వచింపబడినది.

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad \ldots (2)$$

ఈ సమీకరణమును బహుపద సమీకరణము అంటారు.

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 112 10-03-2022 10:52:40

ఏవేని కొన్ని $c \in \mathbb{C}$ కు, $a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0 = 0$ అయిన, c అనునది బహుపద సమాసము (1) – యొక్క ఒక శూన్యముగాను, బహుపద సమాసము (2) – యొక్క ఒక మూలము లేదా సాధనగాను పిలువబడును.

c అనునది x అను చలరాశిని కలిగిన సమీకరణపు మూలము అయిన, " $x = c$ ఒక మూలము" అని వ్రాయుదుము. a_r అను స్థిరాంకములను గుణకములందురు. a_n అను గుణకమును ప్రధాన గుణకముగాను మరియు, $a_n x^n$ అనునది ప్రధాన పదము అని పిలుతురు. గుణకములు వాస్తవ లేదా సంకీర్ణ సంఖ్యలుగా ఉండవచ్చు. ఇందులో ఉండు ఒకే నిబంధన ఏమనగా ప్రధాన గుణకము శూన్యేతర సంఖ్యగా ఉండవలెను. ప్రధాన గుణకము 1గా గల సమాసమును ఏకపద సమాసము అంటారు.

విశేషాంశాలు:

ఈ క్రింది విషయములను గుర్తించుకొనుము.

- x యొక్క అన్ని విలువలకు బహుపద సమాస ప్రమేయములు నిర్వచింపబడి ఉండును.
- ప్రతి శూన్యేతర స్థిరాంకము, 0ను అంతస్థుగా గల ఒక బహుపద సమాసము అగును.
- స్థిరాంకము 0 అనునది ఒక బహుపద సమాసము. దీనినే శూన్య బహుపద సమాసము అంటారు; దీని అంతస్థ నిర్వచించబడలేదు.
- ఒక బహుపద సమాసపు అంతస్థ అనునది ఋణాత్మకము కాని పూర్ణసంఖ్య అగును.
- శూన్య బహుపద సమాసములో మాత్రమే ప్రధాన గుణకము 0గా ఉండును.
- అంతస్థ 2గా గల బహుపద సమాసములను ద్విఘాత వర్గబహుపద సమాసములు అంటారు.
- అంతస్థ 3గా గల బహుపద సమాసములను త్రిఘాత ఘనబహుపద సమాసములు అంటారు.
- అంతస్థ 4గా గల బహుపద సమాసములను చతుర్ఘాత బహుపద సమాసములు అంటారు.

ఒక స్థిరాంకము x లో ఉన్న ఒక బహుపద సమాసమును, x ఘాతమును అనుసరించి అవరోహణ క్రమంలో ఉండువిధంగా వ్రాయుట పరిపాటి. అనగా మిక్కిలి ఎక్కువ ఘాతము కలిగిన పదము నుండి ప్రారంభించి స్థిరాంకము చివరి పదముగా ఉండునట్లు వ్రాయుట సహజం.

ఉదాహరణకు, $2x + 3y + 4z = 5$ మరియు $6x^2 + 7x^2y^3 + 8z = 9$ అనునవి x, y, z అను మూడు చలరాశులను కలిగిన సమీకరణములు అగును; $x^2 - 4x + 5 = 0$ అనునది x. అను ఒక చలరాశి కలిగిన సమీకరణము అగును. పూర్వ తరగతులలో త్రికోణమితి సమీకరణములు, సరళ సమీకరణములు మరియు కొన్ని బహుపద సమీకరణముల యొక్క సాధనను కనుగొంటిమి.

$x^2 - 5x + 6$ అను బహుపద సమాసము యొక్క శూన్యము 3 అయిన మరియు $x^2 - 5x + 6 = 0$ అను సమీకరణపు మూలము లేదా సాధన 3 అని తెలియును. ఇంకను $\cos x = \sin x$ మరియు $\cos x + \sin x = 1$ అనునవి x అను చలరాశి కలిగిన సమీకరణములగును. అయినను $\cos x - \sin x$ మరియు $\cos x + \sin x - 1$ అనునవి బహుపద సమాసములు కావు. కావున $\cos x = \sin x$ మరియు $\cos x + \sin x = 1$ అనునవి "బహుపద సమీకరణములు కావు". ఈ అధ్యాయములో "బహుపద సమీకరణములను" మాత్రమే పరిశీలించుదుము. ఇంకనూ, ఒకే ఒక చలరాశి కలిగిన బహుపద సమీకరణము ద్వారా సాధింపగల సమీకరణములను మాత్రమే గమనించుదుము.

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 113 10-03-2022 10:52:48

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ అనునది $\mathbb{R}$ లో గల సర్వసమీకరణము. అదే సమయంలో $\sin x + \cos x = 1$ మరియు $\sin^3 x + \cos^3 x = 1$ అనునవి సమీకరణములగును.

ముఖ్యంగా, బహుపద సమాసముల గుణకములు వాస్తవ సంఖ్యలుగానో లేదా సంకీర్ణ సంఖ్యలుగానో ఉండవచ్చును కాని వాటి ఘాతములు ఋణాత్మకముకాని పూర్ణాంకములుగా ఉండునని గుర్తించదగినది. ఉదాహరణకు, $3x^{-2}+1$ మరియు $5x^{\frac{1}{2}}+1$ అనునవి బహుపద సమాసములు కావు, బహుపద సమాసముల గురించి, బహుపద సమీకరణముల గురించి ముఖ్యంగా ద్విఘాత సమీకరణముల గురించి ఇదివరకే నేర్చుకొనియున్నాము. ఈ అధ్యాయములో వాటి గురించి గుర్తుచేసుకొని, మరికొన్ని అంశాలను నేర్చుకొందాము.

3.2.2 ద్విఘాత సమీకరణములు (Quadratic Equations)

ద్విఘాత సమీకరణము ax^2+bx+c కు b^2-4ac అనునది విచక్షణి అని పిలువబడి, Δ అని గుర్తించబడును. $ax^2+bx+c=0$ అను బహుపద సమీకరణపు మూలములు $\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ మరియు $\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ అగును. ఈ రెండు మూలములను చేర్చి $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ అని వ్రాయుదుము. ఇక్కడ $a\neq 0$ అని గుర్తించనవసరం లేదు. ఎందుకనగా ax^2+bx+c అనునది ద్విఘాత సమాసం అని చెప్పడం ద్వారా $a\neq 0$ అని తెలుస్తుంది.

మూలములు సమానంగా ఉండుటకు నిబంధన $\Delta=0$ అగునని మనకు తెలియును. a,b,c అనునవి వాస్తవ సంఖ్యలైన

- $\Delta>0$ అయినచో, మూలములు వాస్తవములు మరియు అసమానములు
- $\Delta<0$ అయినచో, వర్గ సమీకరణము యొక్క మూలములు అవాస్తవములు (కల్పిత మూలములు)

3.3 వియట్టా యొక్క సూత్రములు మరియు బహుపద సమీకరణములను రూపొందించుట
Vieta's Formulae and Formation of Polynomial Equations

ఒక బహుపద సమాసము యొక్క గుణకములు, వాటి మూలముల మొత్తము మరియు మూలముల లబ్ధములకు సంబంధించిన సూత్రమే వియట్టా సూత్రమగును. బహుపద సమాసములో ఫ్రెంచ్ గణితశాస్త్రవేత్త అయిన వియట్టా యొక్క పాత్ర నవీన బీజగణితమునకు దారితీసెను.

3.3.1 ద్విఘాత సమీకరణమునకు వియట్టా యొక్క సూత్రములు (Vieta's formula for Quadratic Equations)

HQF8L

$ax^2+bx+c=0$ అను ద్విఘాత సమీకరణము యొక్క మూలములు α మరియు β అనిన, తరువాత

$$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta) = ax^2-a(\alpha+\beta)x+a(\alpha\beta)=0$$

సజాతి ఘాతముల గుణకములను పోల్చగా,

$\alpha+\beta=\frac{-b}{a}$ and $\alpha\beta=\frac{c}{a}$. α మరియు β అని లభించును.

కావున α మరియు β అను మూలములు కలిగిన ఒక ద్విఘాత సమీకరణము $x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$ అగును. అంటే, ఇవ్వబడిన మూలములను కలిగిన ద్విఘాత సమీకరణము

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 114 10-03-2022 10:52:56

x^2 – (మూలముల మొత్తము) x + మూలముల లబ్ధము = 0 ... (1)

గమనిక

పై వాక్యములో, ఏకవచనమైన 'ఒక' అని ఉపయోగించబడింది. వాస్తవముగా $P(x)=0$ అను ద్విఘాత సమీకరణపు మూలములు α మరియు β అయిన ఏదేని c అను శూన్యేతర స్థిరాంకమునకు, $cP(x)$ అనునది α మరియు β అను మూలములను కలిగిన ద్విఘాత వర్గసమీకరణమగును.

గుణకములకు మరియు మూలములకు మధ్యగల సంబంధములను ఉపయోగించి పూర్వ తరగతులలో α మరియు β మూలములుగా కలిగిన సమీకరణములను రూపొందించితిమి. వాస్తవముగా అటువంటి సమీకరణము (1)లో ఇవ్వబడింది. ఉదాహరణగా, 3 మరియు 4 అను మూలములు గల ఒక ద్విఘాత సమీకరణము $x^2-7x+12=0$. అగును.

ఇవ్వబడిన బహుపద సమీకరణము యొక్క మూలముల ప్రమేయములను మూలములుగా గల నూతన బహుపద సమీకరణమును రూపొందించవచ్చును. ఈ పద్ధతిలో ఇవ్వబడిన బహుపద సమీకరణపు మూలములను కనుగొనకుండానే నూతన బహుపద సమీకరణమును రూపొందించవచ్చును. ఉదాహరణకు, ఇవ్వబడిన ఒక బహుపద సమీకరణము యొక్క మూలములతో 2ను కూడుట ద్వారా నూతన బహుపద సమీకరణమును ఈ క్రింది విధంగా రూపొందించవచ్చును.

ఉదాహరణ 3.1

$17x^2+43x-73=0$ అను ద్విఘాత సమీకరణపు మూలములు α మరియు β అయిన $\alpha+2$ మరియు $\beta+2$ అను మూలములను కలిగిన ఒక ద్విఘాత సమీకరణమును నిర్మించుము.

సాధన

$17x^2+43x-73=0$ అను ద్విఘాత సమీకరణపు మూలములు α మరియు β అయినచో $\alpha+\beta=\frac{-43}{17}$ మరియు $\alpha\beta=\frac{-73}{17}$ అగును.

కావలసిన ద్విఘాత సమీకరణపు మూలములు $\alpha+2$ మరియు $\beta+2$ అగును. కావున

$$\text{మూలముల మొత్తము} = \alpha+\beta+4 = \frac{-43}{17}+4 = \frac{25}{17} \quad \text{మరియు}$$

$$\text{మూలముల లబ్ధము} = \alpha\beta+2(\alpha+\beta)+4 = \frac{-73}{17}+2\left(\frac{-43}{17}\right)+4 = \frac{-91}{17}.$$

కావున, కావలసిన ద్విఘాత సమీకరణము $x^2-\frac{25}{17}x-\frac{91}{17}=0$ అగును.

ఈ సమీకరణమును 17చే గుణించిన, $\alpha+2$ మరియు $\beta+2$ మూలములను కలిగిన $17x^2-25x-91=0$ అను ద్విఘాత సమీకరణము లభించును.

ఉదాహరణ 3.2

$2x^2-7x+13=0$ అను ద్విఘాత సమీకరణము యొక్క మూలములు α మరియు β అయిన α^2 మరియు β^2 అను మూలములను కలిగిన ద్విఘాత సమీకరణమును నిర్మించుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన ద్విఘాత సమీకరణపు మూలములు α మరియు β అయినందున $\alpha+\beta=\frac{7}{2}$ మరియు $\alpha\beta=\frac{13}{2}$ అగును.

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 115 10-03-2022 10:53:03

కావున, కావలసిన ద్విఘాత సమీకరణమును పొందుటకు,

$$\text{మూలముల మొత్తము } = \alpha^2+\beta^2 = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{-3}{4}.$$

$$\text{మూలముల లబ్ధము } = \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = \frac{169}{4}$$

కావున కావలసిన ద్విఘాత సమీకరణము $x^2+\frac{3}{4}x+\frac{169}{4}=0$ అని లభించును.

$$4x^2+3x+169 = 0$$

ఇదియే α^2 మరియు β^2 మూలములుగా గల ద్విఘాత సమీకరణము అగును.

విశేషాంశాలు

ఉదాహరణ 3.1 మరియు 3.2 నుండి $\alpha+\beta$ మరియు $\alpha\beta$ విలువలను ఉపయోగించి మూలముల మొత్తము మరియు మూలముల లబ్ధమును గణించితిమి. ఇదేవిధంగా ఇవ్వబడిన ద్విఘాత సమీకరణపు మూలముల మొత్తము మరియు మూలముల లబ్ధములను ఉపయోగించి కావలసిన ద్విఘాత సమీకరణపు మూలముల మొత్తము మరియు మూలముల లబ్ధమును లెక్కించి కావలసిన ద్విఘాత సమీకరణను నిర్మించవచ్చును. ఇక్కడ మనము ఇవ్వబడిన సమీకరణపు సాధనను కనుగొనలేము. కావలసిన బహుపద సమీకరణములను నిర్మించిన తరువాత కూడా α మరియు β విలువ మనకు తెలియరాలేదు అని గమనించగలరు.

3.3.2 బహుపద సమీకరణమునకు వియట్టా యొక్క సూత్రములు (Vieta's formula for Polynomial Equations)

ద్విఘాత బహుపద సమీకరణముల గురించి తెలుసుకొన్నదానిని ఇంకనూ ఎక్కువ అంతస్థు గల బహుపద సమాసములకు పొడిగించవచ్చును. ఈ అధ్యాయములో ఉన్నత అంతస్థు గల బహుపద సమాసముల శూన్యములు వాటి గుణకములు మధ్యగల సంబంధము గురించి నేర్చుకొందము. బహుపద సమాసము యొక్క శూన్యముల గురించి కొన్ని విషయములు తెలిసిన, ఉన్నత బహుపద సమాసములను నిర్మించుట గురించి తెలుసుకొందుము. ఈ అధ్యాయములో అంతస్థు n కలిగిన బహుపద సమాసములను శూన్యములుగాను లేదా అంతస్థు n కలిగిన బహుపద సమీకరణముల మూలములుగాను ఉపయోగింతుము.

3.3.2 (అ) ప్రాథమిక బీజగణిత సిద్ధాంతము (The Fundamental Theorem of Algebra)

$P(x)=0$ అను బహుపద సమీకరణపు ఒక మూలము a అయిన $(x-a)$ అనునది $P(x)$ యొక్క ఒక కారణాంకము అగును. కావున $P(x)$ యొక్క అంతస్థు a అగును. b మరియు $P(x)=0$ అనునవి $(x-a)(x-b)$ యొక్క మూలములు అయిన, $P(x)$ అనునది $(P(x))\geq 2$. యొక్క కారణాంకము అగును. అందువలన, $P(x)=0$ యొక్క అంతస్థు n అని చెప్పవచ్చు. ఈ విధంగా n కు మూలములు ఉండినచో, దాని అంతస్థు n గానో లేదా దాని కన్నా ఎక్కువగానో ఉండవలెను. అంటే, అంతస్థు కలిగిన ఒక బహుపద సమీకరణము యొక్క మూలములు n కంటే ఎక్కువగా ఉండవు.

గడిచిన తరగతులలో "గుణిజము"ల గురించి చదివిన దానిని మరలా గుర్తుతెచ్చుకొందుము. $P(x)=0$ అను బహుపద సమీకరణమునకు $(x-a)^{k+1}$ అనునది ఒక కారణాంకముగాను, $(x-a)^{k+1}$ అనునది a కు కారణాంకము కాకుండా ఉండిన, k అను మూలకపు గుణిజము అని పిలువబడును. ఉదాహరణకు $x^2-6x+9=0$ మరియు $x^3-7x^2+159x-9=0$ అను బహుపద సమీకరణమునకు 3 అను మూలము యొక్క గుణిజము 2 అగును. ఇక్కడ సంకీర్ణసంఖ్యలను మనము గుణకములుగా ఉపయోగించనప్పటికీ $x^2-(4+2i)x+3+4i=0$ మరియు $x^4-8x^3+26x^2-40x+25=0$. $2+i$ అను బహుపద సమీకరణమునకు

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 116 10-03-2022 10:53:12

అను మూలపు గుణిజము 2 అగును. ఒక బహుపద సమీకరణపు a అను మూలపు గుణిజము 1 అయిన, a అనునది బహుపద సమీకరణపు సాధారణ మూలము అని పిలువబడును..

$P(x)=0$ కు గుణిజముతో చేర్చి n మూలములు ఉండినచో, అప్పుడు దీని అంతస్థు n కు సమానముగానో లేదా అంతకంటే ఎక్కువగా ఉండునని గమనింతుము. ఇంకో విధంగా చెప్పవలెనన్న n అంతస్థు గల ఒక బహుపద సమీకరణపు మూలములతో గుణిజమును చేర్చి లెక్కించిన ఆ సమీకరణమునకు n మూలముల కంటే ఎక్కువ మూలములు ఉండదు అని చెప్పవచ్చు.

సమీకరణములోనే మిక్కిలి ముఖ్యమైన సిద్ధాంతములలో ఒకటి ప్రాథమిక బీజగణిత సిద్ధాంతమగును. దీని నిరూపణ ఈ పాఠ్యాంశమునకు అవసరం లేనందు వలన సిద్ధాంతము యొక్క నిరూపణ ఇవ్వబడలేదు.

సిద్ధాంతము 3.1 ప్రాథమిక బీజగణిత సిద్ధాంతము (The Fundamental Theorem of Algebra)

అంతస్థు $n \geq 1$ అని ఉన్న ఒక్కొక్క బహుపద సమీకరణమునకు కనీసము ఒక మూలమైన $\mathbb{C}$ లో ఉండును.

ఈ సిద్ధాంతము ప్రకారము n అంతస్థు గల ఒక బహుపద సమీకరణము యొక్క మూలముల గుణిజములను పరిగణనలోనికి తీసుకొని కనీసము n మూలములు $\mathbb{C}$ లో ఉండునని నిరూపించవచ్చు. ఈ వాదనలో పై వివరణను చేర్చి చెప్పినచో

> n అంతస్థు గల ఒక బహుపద సమీకరణమునకు $\mathbb{C}$ లో సరిగ్గా n మూలములు వాటి గుణిజములను పరిగణనలోకి తీసుకొని ఏర్పడును.

కొందరు రచయితలు పై చెప్పబడిన వివరణను ప్రాథమిక బీజగణిత సిద్ధాంతము అని పేర్కొనిరి.

3.3.2 (ఆ) వియట్టా యొక్క సూత్రము (Vieta's Formula)

(i) అంతస్థు 3 కలిగిన బహుపద సమీకరణమునకు వియట్టా యొక్క సూత్రము
Vieta's Formula for Polynomial equation of degree 3

ఇప్పుడు ఈ విధమైన సంబంధము గల ఉన్నత అంతస్థు కలిగిన బహుపద సమాసములకు విస్తరించవచ్చును. క్రింద ఇవ్వబడిన సాధారణ త్రిఘాత బహుపద సమీకరణమును గమనించిన

$$ax^3+bx^2+cx+d = 0 .$$

ప్రాథమిక బీజగణిత సిద్ధాంతము ప్రకారము దీనికి 3 మూలములు ఉండును. అవి α, β మరియు γ అనుకొనుము. కావున

$$ax^3+bx^2+cx+d = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

కుడిచేతి ప్రక్కను విస్తరించగా,

$$ax^3-a(\alpha+\beta+\gamma)x^2+a(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x-a(\alpha\beta\gamma).$$

సజాతి ఘాత గుణకములను పోల్చగా,

$$\alpha+\beta+\gamma = \frac{-b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a} \text{ మరియు } \alpha\beta\gamma=\frac{-d}{a} \text{ లభించును.}$$

బహుపద సమీకరణపు అంతస్థు 3 కాబట్టి, $a \neq 0$ అని ఉండవలెను. కావున a చేత భాగింపబడుట అర్థవంతమగును. ఏకఘనపు బహుపద సమీకరణం మూలములు వరుసగా α, β, మరియు γ అనిన,

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 117 10-03-2022 10:53:16

x^2 యొక్క గుణకము $= -(\alpha+\beta+\gamma)$,

x యొక్క గుణకము $= \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$, మరియు

స్థిరాంకము $= -\alpha\beta\gamma$.

(ii) అంతస్థ $n > 3$ కలిగిన బహుపద సమీకరణమునకు వియట్టా యొక్క సూత్రము

(Vieta's Formula for Polynomial equation of degree $n > 3$)

పైన తెలిపిన విషయములు n ఉన్నత అంతస్థ గల ఏకఘాత బహుపద సమీకరణములకు వాస్తవమగును. ఒక అంతస్థ గల ఏకఘాత బహుపద సమీకరణపు మూలములు $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ అయిన

x^{n-1} యొక్క గుణకము $= \sum_1 = -\sum\alpha_1$

x^{n-2} యొక్క గుణకము $= \sum_2 = \sum\alpha_1\alpha_2$

x^{n-3} యొక్క గుణకము $= \sum_3 = -\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3$

x యొక్క గుణకము $= \sum_{n-1} = (-1)^{n-1}\sum\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}$

x^0 యొక్క గుణకము $=$ స్థిరాంకము $= \sum_n = (-1)^n\alpha_1\alpha_2...\alpha_n$

ఇక్కడ, $\sum\alpha_1$ అనునది అన్ని మూల ముల మొత్తము, $\sum\alpha_1\alpha_2$ అనునది అన్ని రెండేసి మూలముల లబ్ధముల మొత్తము, $\sum\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ అనునది అన్ని మూడేసి మూలముల లబ్ధముల మొత్తము, ఇదే క్రమముగా పై విధానములో చెప్పుకొంటూ వెళ్ళవచ్చు. ఉదాహరణకు, α, β, γ, మరియు δ అనునవి చతుర్ఘాత బహుపద సమీకరణపు మూలములు అయిన, $\sum\alpha_1$ అనునది $\sum\alpha$ గాను, $\sum\alpha_1\alpha_2$ అనునది $\sum\alpha\beta$ గాను వ్రాయవచ్చు. కావున

$$\begin{aligned}\sum\alpha &= \alpha+\beta+\gamma+\delta\\ \sum\alpha\beta &= \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta\\ \sum\alpha\beta\gamma &= \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta\\ \sum\alpha\beta\gamma\delta &= \alpha\beta\gamma\delta\end{aligned}$$

మూలములు సంఖ్యారూపంలో ఉండినను పై తెలిపిన చిహ్నములను అనుకూలమునకు ఉపయోగించుచున్నాము. ఎక్కువ గుణిజములను కలిగిన మూలములను వాడునపుడు జాగ్రత్త అవసరం. ఉదాహరణకు ఒక త్రిఘాత సమీకరణపు మూలములు $1, 2, 2$ అయిన $\sum\alpha = 5$ మరియు $\sum\alpha\beta = (1\times2)+(1\times2)+(2\times2) = 8$.

పై వాదన నుండి, ఒక ఏకఘాత బహుపద సమీకరణపు మూలముల మొత్తము అనునది x^{n-1} యొక్క గుణకమును (-1)చే గుణించుట ద్వారా లభించునది అగును. ఇంకను మూలముల లబ్ధము అనునది స్థిరాంకమును $(-1)^n$ చే గుణించగా వచ్చును.

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 118 10-03-2022 10:53:22

ఉదాహరణ 3.3

α, β, γ అనునవి $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ అను సమీకరణపు మూలములుగా ఉండిన గుణకముల ఆధారముగా $\sum \frac{1}{\beta\gamma}$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$x^3 + px^2 + qx + r = 0$ అను సమీకరణమునకు మూలములు α , β మరియు γ అనిన,

$$\sum_1 \alpha + \beta + \gamma = -p \text{ మరియు } \sum_3 \alpha\beta\gamma = -r .$$

కావున

$$\sum \frac{1}{\beta\gamma} = \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta} = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-p}{-r} = \frac{p}{r} .$$

3.3.2 (ఇ) ఇవ్వబడిన మూలములతో బహుపద సమీకరణములను నిర్మించుట
(Formation of Polynomial Equations with given Roots)

ద్విఘాత సమీకరణపు మూలములు తెలిసినచో, దాని సమీకరణమును నిర్మించితిమి. ఇప్పుడు, మూలములు తెలిసిన ఉన్నత అంతస్థు గల సమీకరణమును ఏవిధంగా నిర్మించవచ్చునని తెలుసుకొందుము. $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ అను మూలములను కలిగిన ఒక n అంతస్థు గల బహుపద సమీకరణమును రూపొందించుట ఎలా? కారణాంకముల లబ్ధముగా ఒక బహుపద సమీకరణమును వ్రాయుట ఒక పద్ధతి అగును. అంటే, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ అను మూలములను కలిగిన ఒక బహుపద సమీకరణము

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)(x-\alpha_3)\cdots(x-\alpha_n) = 0 \text{ అగును.}$$

కాని ఒక బహుపద సమీకరణమును ఈ విధంగా వ్రాయుట పద్ధతి కాదు. నిర్దిష్ట రూపంలో బహుపద సమీకరణమును వ్రాయుటకు ఎక్కువ గణాంకములు కావలెను. కాని గుణకములకు మరియు మూలములకు మధ్య గల సంబంధమును ఉపయోగించి మనము బహుపద సమీకరణమును నేరుగా, సులభముగా వ్రాయగలము. ఇంకను పూర్తిగా ఒక బహుపద సమీకరణమును నిర్మించకుండానే ఏక ఘాతము కలిగిన x గుణకమును వ్రాయగలము.

మూలములు α , β , మరియు γ గల ఒక త్రిఘాత బహుపద సమీకరణము

$$x^3 - (\alpha+\beta+\gamma)x^2 + (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0 . \text{ అగును.}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ మూలములు కలిగిన n అంతస్థు గల ఒక బహుపద సమీకరణమును

$$x^n - \left(\sum \alpha_1\right)x^{n-1} + \left(\sum \alpha_1\alpha_2\right)x^{n-2} - \left(\sum \alpha_1\alpha_2\alpha_3\right)x^{n-3} + \cdots + (-1)^n \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = 0 \text{ అని వ్రాయవచ్చును.}$$

ఇక్కడ, $\sum \alpha_1, \sum \alpha_1\alpha_2, \sum \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \ldots$ మొదలగునవి ఇదివరకే నిర్వచింపబడినవి.

ఉదాహరణకు, 1, −2 మరియు 3 అను మూలములను కలిగిన ఒక బహుపద సమీకరణము

$$x^3 - (1-2+3)x^2 + (1\times(-2) + (-2)\times 3 + 3\times 1)x - 1\times(-2)\times 3 = 0 \text{ అగును.}$$

దీనిని సూక్ష్మీకరించిన $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ లభించును. $(x-1)(x+2)(x-3) = 0$ యొక్క విస్తీర్ణం $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$ అని సరిచూచుట ఆసక్తికరమైనది.

ఉదాహరణ 3.4

$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ యొక్క మూలముల వర్గముల మొత్తమును కనుగొనుము. ఇక్కడ $a\neq 0$ అగును.

సాధన

$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0$ యొక్క మూలములు $\alpha,\beta,\gamma,$ మరియు δ అనుకొనుము. కావున,

$$\sum_1 = \alpha+\beta+\gamma+\delta = -\frac{b}{a},$$

$$\sum_2 = \alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta = \frac{c}{a},$$

$$\sum_3 = \alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta = -\frac{d}{a},$$

$$\sum_4 = \alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a}.$$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2$యొక్క విలువను కనుగొనవలననిన,.

అను బీజగణిత సర్వసమీకరణమును వాడవలెను. కావున

$$(a+b+c+d)^2 \equiv a^2+b^2+c^2+d^2+2(ab+ac+ad+bc+bd+cd),$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2 = (\alpha+\beta+\gamma+\delta)^2-2(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta)$$

$$= \left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)$$

$$= \frac{b^2-2ac}{a^2}.$$

■

ఉదాహరణ 3.5

$x^3+ax^2+bx+c=0$ అను త్రిఘాత సమీకరణపు మూలములు $p:q:r$ అను నిష్పత్తిలో ఉండుటకు నిబంధనలను కనుగొనుము.

సాధన

మూలములు $p:q:r$, అను నిష్పత్తిలో ఉన్నందున, మూలములు, $p\lambda, q\lambda$ మరియు $r\lambda$ అనుకొనుము. కావున

$$\sum_1 = p\lambda+q\lambda+r\lambda = -a, \quad \ldots.(1)$$

$$\sum_2 = (p\lambda)(q\lambda)+(q\lambda)(r\lambda)+(r\lambda)(p\lambda) = b, \quad \ldots.(2)$$

$$\sum_3 = (p\lambda)(q\lambda)(r\lambda) = -c, \quad \ldots.(3)$$

$$(1) \Rightarrow \lambda = -\frac{a}{p+q+r} \quad \ldots.(4)$$

$$(3) \Rightarrow \lambda^3 = -\frac{c}{pqr} \quad \ldots..(5)$$

(4) ను (5)లో ప్రతిక్షేపించగా

$$\left(-\frac{a}{p+q+r}\right)^3 = -\frac{c}{pqr} \Rightarrow pqra^3 = c(p+q+r)^3 \text{ అని లభించును.}$$

■

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 120 10-03-2022 10:53:36

ఉదాహరణ 3.6

$x^3+ax^2+bx+c = 0$ అను త్రిఘాత సమీకరణపు మూలముల వర్గములను మూలములుగా కలిగిన ఒక సమీకరణమును నిర్మించుము.

సాధన

$x^3+ax^2+bx+c = 0$. అను త్రిఘాత సమీకరణపు మూలములు α, β, మరియు γ అనుకొనుము. కావున

$$\sum_1 = \alpha+\beta+\gamma = -a, \quad \ldots.(1)$$

$$\sum_2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = b, \quad \ldots.(2)$$

$$\sum_3 = \alpha\beta\gamma = -c. \quad \ldots.(3)$$

α^2, β^2, మరియు γ^2 మొదలగువాటిని మూలములుగా గల ఒక సమీకరణమును నిర్మించవలెను.

(1), (2) మరియు (3) లను ఉపయోగించి, క్రింది వాటిని కనుగొందుము:

$$\sum_1 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = (-a)^2-2(b) = a^2-2b,$$

$$\sum_2 = \alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2 = (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2((\alpha\beta)(\beta\gamma)+(\beta\gamma)(\gamma\alpha)+(\gamma\alpha)(\alpha\beta))$$

$$= (\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^2-2\alpha\beta\gamma(\beta+\gamma+\alpha) = (b)^2-2(-c)(-a) = b^2-2ca$$

$$\sum_3 = \alpha^2\beta^2\gamma^2 = (\alpha\beta\gamma)^2 = (-c)^2 = c^2.$$

కావున, కావలసిన సమీకరణము

$x^3-\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)x^2+\left(\alpha^2\beta^2+\beta^2\gamma^2+\gamma^2\alpha^2\right)x-\alpha^2\beta^2\gamma^2 = 0.$

$x^3-\left(a^2-2b\right)x^2+\left(b^2-2ca\right)x-c^2 = 0$ అగును.

ఉదాహరణ 3.7

p అనునది ఒక వాస్తవ సంఖ్య అయిన, $4x^2+4px+p+2=0$ అను సమీకరణము యొక్క మూలముల స్వభావము p ఆధారముగా చర్చించుము.

సాధన

విచక్షణి $\Delta=(4p)^2-4(4)(p+2)=16\left(p^2-p-2\right)=16(p+1)(p-2)$. అగును.

$-1<p<2$ అనిన, $\Delta<0$

$p=-1$ లేదా $p=2$ అనిన, $\Delta=0$

$-\infty<p<-1$ లేదా $2<p<\infty$ అనిన, $\Delta>0$ అగును.

కావున, ఇవ్వబడిన బహుపద సమాసమునకు,

$-1<p<2$; అనిన, కల్పిత మూలములు లభించును.

$p=-1$ లేదా $p=2$; అనిన, సమానమైన వాస్తవ మూలములు లభించును.

$-\infty<p<-1$ లేదా $2<p<\infty$ అనిన, అసమాన వాస్తవ మూలములు లభించును.

అభ్యాసము 3.1

1. ఒక ఘన చతురస్ర పెట్టె యొక్క భుజములను 1,2,3 ప్రమాణములు అధికము చేయగా ఘనచతురస్రాకార పెట్టె యొక్క ఘనపరిమాణము కన్నా 52 ఘనపు ప్రమాణములు అధికముగా గల ఘనదీర్ఘచతురస్రము లభించును. అయిన, ఘనదీర్ఘచతురస్రము యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.

2. ఇవ్వబడిన మూలములను ఉపయోగించి త్రిఘాత సమీకరణములను నిర్మించుము.

(i) $1, 2$, మరియు 3 (ii) $1, 1$, మరియు -2 (iii) $2, \frac{1}{2}$ మరియు 1

3. $x^3+2x^2+3x+4=0$ అను త్రిఘాత సమీకరణపు మూలములు α, β మరియు γ అయిన క్రింది మూలములను ఉపయోగించి త్రిఘాత సమీకరణములను నిర్మించుము.

(i) 2α, 2β, 2γ (ii) $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$ (iii) $-\alpha, -\beta, -\gamma$

4. $3x^3-16x^2+23x-6=0$ అను సమీకరణపు రెండు మూలముల లబ్ధము 1 అయిన సమీకరణమును సాధించుము.

5. $2x^4-8x^3+6x^2-3=0$. అను సమీకరణపు మూలముల వర్గముల మొత్తమును కనుగొనుము.

6. $x^3-9x^2+14x+24=0$ అను సమీకరణపు రెండు మూలములు $3:2$ అను నిష్పత్తిలో ఉండిన, సమీకరణమును సాధించుము.

7. α, β, మరియు γ మొదలగునవి $ax^3+bx^2+cx+d=0$ అను బహుపద సమీకరణపు మూలములుగా ఉండిన గుణకముల ద్వారా $\sum\frac{\alpha}{\beta\gamma}$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

8. α, β, γ మరియు δ మొదలగునవి $2x^4+5x^3-7x^2+8=0$ అను బహుపద సమీకరణపు మూలములు అయిన, $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ మరియు $\alpha\beta\gamma\delta$ మొదలగువాటిని మూలములుగాను, పూర్ణాంక గుణకములుగాను కలిగిన ఒక ద్విఘాత సమీకరణమును కనుగొనుము.

9. $lx^2+nx+n=0$ అను సమీకరణపు మూలములు p మరియు q అయిన $\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=0$ అని చూపుము.

10. $x^2+px+q=0$ మరియు $x^2+p'x+q'=0$ మొదలుగు రెండు సమీకరణములకు ఉమ్మడి మూలము ఉండిన, ఆ మూలము $\frac{pq'-p'q}{q-q'}$ లేదా $\frac{q-q'}{p'-p}$ అగునని చూపుము.

11. 12 మీటర్ల ఎత్తు గల ఒక చెట్టు రెండు భాగములుగా విరిగియున్నది. విరిగియున్న చోటు నుండి క్రింది భాగము, విరిగియున్న పై భాగపు పొడవు యొక్క ఘనమూలము అగును. ఈ సమాచారముతో పై భాగము యొక్క పొడవును కనుగొను విధముగా గణిత సమస్యగా మార్చుము.

3.4 బహుపద సమీకరణముల యొక్క గుణకముల స్వభావము మరియు మూలముల స్వభావము (Nature of Roots and Nature of Coefficients of Polynomial Equations)

3.4.1 కల్పిత మూలములు (Imaginary Roots)

వాస్తవ సంఖ్యను గుణకముగా కలిగిన ఒక ద్విఘాత సమీకరణమునకు $\alpha+i\beta$ అనునది ఒక మూలము అయిన $\alpha-i\beta$ అనునది కూడా ఒక మూలమగును. ఈ పాఠ్యాంశములో ఉన్నతి అంతస్థు గల బహుపద సమాసమునకు కూడా ఇది వర్తిస్తుందని నిరూపించగలము.

ఇంకా సమీకరణములో ఉండు మిక్కిలి ముఖ్యమైన సిద్ధాంతములలో ఒకదానిని నిరూపించగలము.

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 122 10-03-2022 10:53:50

సిద్ధాంతము 3.2 సంయుగ్మ సంకీర్ణ మూల సిద్ధాంతము (Complex Conjugate Root Theorem)

వాస్తవ సంఖ్యను గుణకముగా గల ఒక బహుపద సమీకరణమునకు z_0 ఒక సంకీర్ణ మూలమైన, దాని సంయుగ్మ సంకీర్ణ మూలము $\overline{z}_0$ గా ఉండును.

నిరూపణ:

$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_o=0$ అనునది వాస్తవ సంఖ్యను గుణకములుగా కలిగిన ఒక బహుపద సమీకరణము అనుకొనుము. ఈ బహుపద సమీకరణమునకు z_0 అనునది ఒక మూలము అనుకొనుము. కావున $P(z_0)=0$ అగును. ఇంకా

$$\begin{aligned}
P(\overline{z_0}) &= a_n\overline{z}_0^{\,n}+a_{n-1}\overline{z}_0^{\,n-1}+\cdots+a_1\overline{z}_0+a_0 \\
&= a_n\overline{z_0^{\,n}}+a_{n-1}\overline{z_0^{\,n-1}}+\cdots+a_1\overline{z_0}+a_0 \\
&= \overline{a_n}\,\overline{z_0^{\,n}}+\overline{a_{n-1}}\,\overline{z_0^{\,n-1}}+\cdots+\overline{a_1}\,\overline{z_0}+\overline{a_0} \qquad \text{(అన్ని } r \text{ కు } a_r \text{ అనునవి వాస్తవ సంఖ్య అయినందు వల్ల } a_r=\overline{a_r}\text{)} \\
&= \overline{a_nz_0^{\,n}}+\overline{a_{n-1}z_0^{\,n-1}}+\cdots+\overline{a_1z_0}+\overline{a_0} \\
&= \overline{a_nz_0^{\,n}+a_{n-1}z_0^{\,n-1}+\cdots+a_1z_0+a_0} \;=\overline{P(z_0)}=\overline{0}=0.
\end{aligned}$$

అంటే $P(\overline{z}_0)=0$, దీని నుండి ఎప్పుడైతే z_0 మూలముగా ఉండునో అప్పుడంతా దాని సంయుగ్మ సంకీర్ణ సంఖ్య $\overline{z}_0$ మూలముగా ఉండునని తెలియుచున్నది.

ఎవరైనా ఒకరు 2 అనునది ఒక సంకీర్ణసంఖ్య అగునా అని అడుగు ప్రశ్నకు "అవును" అని జవాబిచ్చుటకు చాలా మంది విద్యార్థులు సంకోచిస్తారు. ప్రతి పూర్ణసంఖ్య ఒక అకరణీయ సంఖ్య అయినందువలన ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య సంకీర్ణసంఖ్య అగును. కావున వాస్తవ సంఖ్య కాని ఒక సంకీర్ణసంఖ్య అంటే $\alpha+i\beta$ అనునట్లు ఉండు $\beta\neq0$ అను రూపములో ఉండు సంఖ్యను సూచించుటకు 'అవాస్తవ సంకీర్ణసంఖ్య' అని నిశ్చయముగా గుర్తించెదము. కొందరు రచయితలు ఇటువంటి సంఖ్యను కల్పిత సంఖ్య అని తెలియపరచుదురు.

విశేషాంశాలు 1

$z_0=\alpha+i\beta$ అనుకొనుము. ఇక్కడ $\beta\neq0$ అగును. కావున $\overline{z}_0=\alpha-i\beta$ అగును. వాస్తవసంఖ్యను గుణకముగా కలిగిన $P(x)=0$ అను బహుపద సమీకరణపు ఒక మూలము $\alpha+i\beta$ అనిన, సంయుగ్మ సంకీర్ణ మూల సిద్ధాంతము ప్రకారము $P(x)=0$ అనునది కూడా $\alpha-i\beta$ యొక్క మూలమగును. సాధారణంగా సంకీర్ణ మూలములు ఎల్లప్పుడూ జతగా ఏర్పడును అని పై వాక్యము తెలియజేస్తున్నది. కాని వాస్తవముగా బహుపద సమాసపు గుణకముల వాస్తవ సంఖ్యలుగా ఉండిన, అవాస్తవ సంకీర్ణ మూలములు లేదా కల్పిత మూలములు సంయుగ్మ సంకీర్ణ జత మూలములుగా ఏర్పడును అని అర్థము చేసుకొనవలెను.

విశేషాంశాలు 2

వీటి నుండి ఏదైనా వాస్తవ గుణకాలు గల బేసి అంతస్థు కలిగిన బహుపద సమీకరణమునకు కనీసము ఒక వాస్తవ మూలము ఉండును. వాస్తవముగా వాస్తవ గుణకములు వాస్తవ గుణకములు గల బేసి అంతస్థు కలిగిన బహుపద సమీకరణపు వాస్తవ మూలముల సంఖ్య ఎల్లప్పుడు ఒక బేసి సంఖ్యగానే ఉండును. అదే విధముగా వాస్తవ గుణకముగా గల సరి అంతస్థు కలిగిన బహుపద సమీకరణపు వాస్తవ మూలముల సంఖ్య ఎల్లప్పుడూ ఒక సరిసంఖ్యగానే ఉండును.

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 123 10-03-2022 10:53:57

ఉదాహరణ 3.8

$2-\sqrt{3}\,i$ ను మూలముగా గల కనీస అంతస్థుతో వాస్తవ గుణకములు కలిగిన ఏకఘాత బహుపద సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన

వాస్తవ గుణకములను కలిగిన బహుపద సమీకరణపు ఒక మూలము $2-\sqrt{3}\,i$ అయిన, $2+\sqrt{3}\,i$ కూడా ఒక మూలమగును. కావున, మూలముల మొత్తము 4 మరియు మూలముల లబ్ధము 7 అగును. అందువలన $x^2-4x+7=0$ అనునది ఒక వాస్తవ గుణకములు కలిగిన కావలసిన ఏకఘాత బహుపద సమీకరణము అగును. ■

3.4.2 కరణీయ మూలములు (Irrational Roots)

$ax^2+bx+c=0$ అను ద్విఘాత సమీకరణపు గుణకములు అకరణీయ సంఖ్యలుగా మాత్రమే ఉండునని అనుకొనిన కొన్ని ఆసక్తికరమైన ఫలితములను పొందవచ్చును. a, b, మరియు c అను అకరణీయ సంఖ్యల ఒక ద్విఘాత సమీకరణము $ax^2+bx+c=0$ అనుకొనుము. సాధారణముగా $\Delta=b^2-4ac$ గాను, r_1 మరియు r_2 ను మూలములుగాను అనుకొనుము. ఈ సమయములో $\Delta=0$ అనిన $r_1=r_2$ అగును. ఈ మూలము వాస్తవ సంఖ్య మాత్రమే కాకుండా వాస్తవంగా ఒక అకరణీయ సంఖ్యగాను ఉండును.

Δ అనునది ధనాత్మకమైన నిస్సందేహముగా $\sqrt{\Delta}$ అనునది $\mathbb{R}$ లో ఉండును. ఇంకను రెండు విభిన్న వాస్తవ విలువలను పొందవచ్చును.కాని $\sqrt{\Delta}$ అనునది a,b, మరియు c, ల Δ నిర్ధిష్ట విలువలకు అకరణీయ సంఖ్యగా ఉండును. మిగిలిన a,b, మరియు c ల విలువలకు కరణీయ సంఖ్యగా ఉండును.

$\sqrt{\Delta}$ అనునది ఒక అకరణీయ సంఖ్య అయిన, r_1 మరియు r_2 అను రెండునూ అకరణీయ సంఖ్యలుగా ఉండును.

$\sqrt{\Delta}$ అనునది ఒక కరణీయ సంఖ్య అయిన, r_1 మరియు r_2 అను రెండునూ కరణీయ సంఖ్యలుగా ఉండును.

ఈ సమయములో $\Delta>0$ అనిన ఏ సందర్భములో, $\sqrt{\Delta}$ అనునది అకరణీయ సంఖ్యగానో లేక కరణీయ సంఖ్యగానో ఉండునని ఒక ప్రశ్న మనకు ఎదురగును. దీనికి సమాధానం కావలయునన్న, గుణకములు అకరణీయ సంఖ్యలుగా ఉండుట వలన Δ అనునది అకరణీయ సంఖ్యగా ఉండునని గమనించదగినది. కావున (m,n) అనునది m మరియు n యొక్క గరిష్ఠ సామాన్య భాజకమును తెలుపును. $(m,n)=1$ అయిన m మరియు n అను కొన్ని ధన పూర్ణసంఖ్యలకు $\Delta=\frac{m}{n}$ గా ఏర్పడును. ఇప్పుడు $\sqrt{\Delta}$ అకరణీయ సంఖ్యగా ఉండుటకు m మరియు n రెండునూ ఖచ్చిత వర్గములుగా ఉండవలెను. దీని విపర్యయం (if and only if) నిజమగును. ఇంకనూ $\sqrt{\Delta}$ కరణీయ సంఖ్యగా ఉండుటకు కనీసం m మరియు n లు ఖచ్చిత వర్గములుగా ఉండనవసరం లేదని గుర్తించగలము. దీని విపర్యయం (if and only if.) నిజమగును.

p మరియు q అనునవి అకరణీయ సంఖ్యలుగాను $\sqrt{q}$ అనునది కరణీయ సంఖ్యగాను ఉండిన $p+\sqrt{q}$ అను రకపు కరణీయ సంఖ్య మనకు ఇదివరకే తెలియును. ఇటువంటి సంఖ్యలను కరణి అందురు. సంకీర్ణ మూలముల మాదిరిగానే ఒక బహుపద సమాసము యొక్క మూలము $p+\sqrt{q}$ అయిన $p-\sqrt{q}$ అనునది కూడా అకరణీయ సంఖ్య గుణకాలుగా గల అదే బహుపద సమాసమునకు ఒక మూలముగా ఏర్పడును. సంకీర్ణమూలములను నిరూపించుటకు ఉపయోగించిన అదే పద్ధతిని ఇక్కడ ఉపయోగించి, ఈ వివరణను ఏదేని అంతస్థు కలిగిన బహుపద సమీకరణమునకు చెందునని నిరూపించగలిగిననూ, ద్విఘాత బహుపద సమీకరణము మాత్రము సిద్ధాంతము 3.3 ద్వారా నిరూపించెదము.

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 124 10-03-2022 10:54:03

సిద్ధాంతమును నిరూపించుటకు ముందు మనము క్రింది విషయములను గుర్తించనవసరము కలదు. a మరియు b అనునవి అకరణీయ సంఖ్యలుగానూ, c అనునది ఒక కరణీయ సంఖ్యగానూ ఉండిన $a+bc$ అనునది ఒక అకరణీయ సంఖ్యగా ఏర్పడవలెననిన ఖచ్చితముగా b అనునది శూన్యముగా ఉండవలెను; ఇంకను $a+bc=0$ అయిన a మరియు b రెండునూ శూన్యముగానే ఉండవలెను.

ఉదాహరణకు $a+b\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ అయిన b అనునది శూన్యముగా ఉండవలెను. మరియు $a+b\sqrt{2}=0$ అయిన $a=b=0$ అగును. ఇప్పుడు ఒక సాధారణ ఫలితమును ఈ క్రింది విధముగా నిర్వచించి, నిరూపించెదము.

సిద్ధాంతము 3.3

p మరియు q అనునవి అకరణీయ సంఖ్యలుగాను, $\sqrt{q}$ అనునది ఒక కరణీయ సంఖ్య అని అనుకొనుము. అన్ని గుణకములు అకరణీయ సంఖ్యలుగా ఉండు ఒక ద్విఘాత సమీకరణపు ఒక మూలము $p+\sqrt{q}$ అయిన $p-\sqrt{q}$ అనునది కూడా అదే ద్విఘాత సమీకరణపు మూలముగా ఉండును.

నిరూపణ:

ద్విఘాత సమీకరణమును ఒక ఏక ఘాత బహుపద సమీకరణము అనుకొని ఈ సిద్ధాంతమును నిరూపించెదము. ఇదే విధముగా, ఇతర ఏకఘాత సమీకరణముకాని బహుపద సమీకరణములకు నిరూపించవచ్చును.

p మరియు q అనునవి అకరణీయ సంఖ్యలుగాను, $\sqrt{q}$ అనునది కరణీయ సంఖ్యగా అనుకొనుము. $x^2+bx+c=0$ అను సమీకరణమునకు $p+\sqrt{q}$ అనునది ఒక మూలము అనుకొనుము. ఇక్కడ b మరియు c అకరణీయ సంఖ్యలు అగును.

α అనునది ఇంకొక మూలము అనుకొనుము. మూలముల మొత్తమును లెక్కించునపుడు,

$$\alpha+p+\sqrt{q}=-b$$

కావున $\alpha+\sqrt{q}=-b-p\in\mathbb{Q}$. ఇంకను $-b-p$ as s, అనునది $\alpha+\sqrt{q}=s$ అనుకొనుము.

దీని ద్వారా

$$\alpha=s-\sqrt{q}\text{ . అగును.}$$

మూలముల లబ్ధమును గణించునపుడు,

$$(s-\sqrt{q})(p+\sqrt{q})=c$$

కావున $(sp-q)+(s-p)\sqrt{q}=c\in\mathbb{Q}$. కావున $s-p=0$. దీని ద్వారా $s=p$ మరియు $\alpha=p-\sqrt{q}$. ను పొందవచ్చును. కావున ఇంకో మూలము $p-\sqrt{q}$ అగును.

విశేషాంశాలు

సిద్ధాంతము 3.3 యొక్క నిర్వచనము చూచుటకు కొంత సంక్లిష్టంగా ఉంటుంది. పై తెలిపిన సిద్ధాంత నిర్వచనమును అనుసరించి "అకరణీయ గుణకములను కలిగిన ఒక బహుపద సమీకరణం యొక్క కరణీయ మూలములు జతలుగా ఏర్పడును" అని సూక్ష్మీకరించడం తొందరపాటు అగును. ఎందుకనగా ఇది సులభము కాదు.

ఉదాహరణకు $x^3-2=0$ అను సమీకరణమునకు ఒకేఒక కరణీయ మూలము, $\sqrt[3]{2}$ కలదు. నిశ్చయముగా మిగిలిన రెండు మూలములు కల్పిత సంఖ్యలుగా ఉండును. (అవి ఏవి?)

ఉదాహరణ 3.9

$2-\sqrt{3}$ ను మూలముగా గల కనీస అంతస్థుతో అకరణీయ గుణకములు గల బహుపద సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన

$2-\sqrt{3}$ అనునది ఒక మూలము మరియు అకరణీయ గుణకములు సంఖ్యలుగా ఉండుట వలన $2+\sqrt{3}$ అనునది కూడా ఒక మూలమగును.

x^2- (మూలముల మొత్తము) $x+$ మూలముల లబ్ధము $=0$

అనునది మనకు కావలసిన బహుపద సమీకరణము అగును. కావున,

$$x^2-4x+1=0$$

అనునది మనకు కావలసిన బహుపద సమీకరణమగును.

గమనిక

ఇక్కడ ప్రశ్నలో "అకరణీయ గుణకములు" అను పదము అతి ముఖ్యమైనది. లేకుంటే, $x-(2-\sqrt{3})=0$ అనునది $2-\sqrt{3}$ ను మూలముగా గల బహుపద సమీకరణముగా ఉన్నది. అయితే ఇందుకు $2+\sqrt{3}$ మూలము కాదు. క్రింది సిద్ధాంతము నిరూపణ లేకుండా ఇవ్వబడినది.

సిద్ధాంతము 3.4

p మరియు q అనునవి అకరణీయ సంఖ్యలుగాను $\sqrt{p}$ మరియు $\sqrt{q}$ అనునవి కరణీయ సంఖ్యలుగా ఉండునని అనుకొనుము. మరలా $\sqrt{p}$ మరియు $\sqrt{q}$ మొదలగువాటిలో ఒకటి ఇంకొకదాని యొక్క అకరణీయ గుణిజముగా లేనట్లు ఏర్పడునని అనుకొనుము. $\sqrt{p}+\sqrt{q}$ అనునది అకరణీయ గుణకములను కలిగిన ఒక బహుపద సమీకరణపు మూలము అయిన, $\sqrt{p}-\sqrt{q}, -\sqrt{p}+\sqrt{q}$, మరియు $-\sqrt{p}-\sqrt{q}$ అనునవి కూడా అదే బహుపద సమీకరణపు మూలములుగా ఏర్పడును.

ఉదాహరణ 3.10

$\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ ను ఒక మూలముగాను, పూర్ణసంఖ్యలను గుణకములుగా కలిగిన ఒక బహుపద సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన

$\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ అనునది ఒక మూలమైనందున, $x-\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ అనునది ఒక కారణాంకమగును. చివరగా ఉన్న వర్గమూలమును తొలగించుటకు $x+\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$ అనునది ఇంకొక కారణాంకముగా తీసుకొని, ఈ రెండింటిని గుణించగా,

$$\left(x+\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}\right) = x^2-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$ లభించును.

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 126 10-03-2022 10:54:14

అయిననూ ఇంకా లక్ష్యమును చేరుకోలేదు. కావున, $x^2+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ అనునది ఇంకొక కారణాంకముగా తీసుకొని రెండింటిని గుణించగా

$$\left(x^2-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)\left(x^2+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = x^4-\frac{2}{3}$$ అని లభించును.

కావున,కావలసిన ధర్మములు కలిగిన బహుపద సమీకరణము $3x^4-2=0$ అగును.

ఇప్పుడు సమీకరణపు సాధనను కనుగొనుటకు ప్రయత్నించకుండా ఇవ్వబడిన మూలముల స్వభావమును కనుగొనెదము. ఈ విషయము $\Delta=b^2-4ac$ యొక్క ఋణాత్మకము, శూన్యము, ధనాత్మకము మొదలగువాటి నుండి పొందవచ్చును.

3.4.3 అకరణీయ మూలములు (Rational Roots)

ఒక ద్విఘాత సమీకరణపు గుణకములు అన్నియు పూర్ణసంఖ్యలు అయిన Δ ఒక పూర్ణసంఖ్య, మరియు అది ధనాత్మకము అయిన $\sqrt{\Delta}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్యగా ఉండుటకు Δ ఒక ఖచ్చిత వర్గముగా ఉండవలెను. దీని విపర్యయం కూడా నిజమగును. ఇంకో విధంగా చెప్పిన పూర్ణసంఖ్యలను గుణకములుగా కలిగిన $ax^2+bx+c=0$ అను సమీకరణపు మూలములు అకరణీయ సంఖ్యలైన Δ ఒక ఖచ్చిత వర్గమగును. దీని విపర్యయం కూడా నిజమగును.

అకరణీయ సంఖ్యలను గుణకములుగా కలిగిన బహుపద సమీకరణమును మనము పరిశోధించిన అన్ని గుణకములు పూర్ణసంఖ్యలుగా కలిగిన బహుపద సమీకరణములకు వర్తించును. వాస్తవముగా అకరణీయ సంఖ్యలను గుణకములుగా కలిగిన బహుపద సమీకరణమును, గుణకముల హారముల సామాన్య గుణిజముతో గుణించగా అదే మూలములు గల పూర్ణసంఖ్యలను గుణకములుగా కలిగిన బహుపద సమీకరణము ఏర్పడును. ఖచ్చితముగా ఈ సందర్భమును మిక్కిలి జాగ్రత్తగా ఉపయోగించవలెను. ఉదాహరణకు $\frac{1}{2}$ను మూలముగా కలిగి అకరణీయ సంఖ్యలను గుణకములుగా కలిగిన అంతస్థు 1 గల ఒక ఏక ఘాత బహుపదసమీకరణము ఉండును. అదే సమయంలో $\frac{1}{2}$ను మూలముగా కలిగి పూర్ణసంఖ్యలను గుణకములుగా కలిగిన ఏ ఒక్క అంతస్థు గల ఏక ఘాత బహుపద సమీకరణము లేదు.

ఉదాహరణ 3.11

$2x^2-6x+7=0$ అను సమీకరణమునకు x యొక్క ఏ వాస్తవ విలువ సాధనకాదని నిరూపించుము.

1QN29

సాధన

$\Delta=b^2-4ac=-20<0$ కావున మూలములు కల్పితములు అగును.

ఉదాహరణ 3.12

$x^2+2(k+2)x+9k=0$ అను సమీకరణపు మూలములు సమానమైన, k విలువను కనుగొనుము.

సాధన

ఇక్కడ మూలములు సమానమగుట వలన $\Delta=b^2-4ac=0$ అగును. దీని నుండి $4(k+2)^2=4(9)k$ అని లభించును. దీని ద్వారా $k=4$ విలువ 4 లేదా 1 అగును.

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 127 10-03-2022 10:54:18

ఉదాహరణ 3.13

p, q, r అనునవి అకరణీయ సంఖ్యలైన $x^2 - 2px + p^2 - q^2 + 2qr - r^2 = 0$ అను సమీకరణపు మూలములు అకరణీయ సంఖ్యలని చూపుము.

సాధన

మూలములు అకరణీయ సంఖ్యలుగా ఉండవలెననిన $\Delta = b^2 - 4ac = (-2p)^2 - 4\left(p^2 - q^2 + 2qr - r^2\right)$ అని ఉండవలెను.

కాని దీనిని సూక్ష్మీకరించిన $4\left(q^2 - 2qr + r^2\right)$ లేదా $4(q-r)^2$. ఇది ఖచ్చిత వర్గమగును. కావున, మూలములు అకరణీయ సంఖ్యలుగా ఉండును.

3.5 రేఖాగణితములో బహుపద సమీకరణముల ఉపయోగములు
(Applications of Polynomial Equation in Geometry)

కొన్ని రేఖాగణిత ధర్మములను బహుపద సమీకరణముల ద్వారా నిరూపించుటకు వీలగును. అటువంటి నిరూపణలలో కొన్నింటిని ఇక్కడ చూచెదము.

ఉదాహరణ 3.14

ఒక సరళరేఖ ఒక వృత్తమును రెండు కంటే ఎక్కువ బిందువుల వద్ద ఖండించదని నిరూపించుము.

సాధన

సరియైన నిరూపక అక్షములను ఎన్నుకొనుట ద్వారా వృత్త సమీకరణము $x^2 + y^2 = r^2$ అనియు, సరళరేఖ సమీకరణము $y = mx + c$ గాను అనుకొనుము. వృత్తము మరియు సరళరేఖ ఖండించుకొను బిందువులు ఈ క్రింది సమకాలిక సమీకరణముల యొక్క సాధన అగుననని మనకు తెలియును.

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \ldots (1)$$

$$y = mx + c \quad \ldots (2)$$

సమీకరణము (1)లో $y = mx + c$ ని ప్రతిక్షేపించగా,

$$x^2 + (mx + c)^2 - r^2 = 0$$

అని లభించును. ఈ సమీకరణమును,

$$(1 + m^2)x^2 + 2mcx + (c^2 - r^2) = 0. \quad \ldots (3)$$

అను ద్విఘాత సమీకరణముగా వ్రాయవచ్చును.

ఈ సమీకరణమునకు రెండు కంటే ఎక్కువ సాధనలు లేనందువల్ల ఒక సరళరేఖ ఒక వృత్తమును రెండు కంటే ఎక్కువ బిందువుల వద్ద ఖండించదు.

రెండు చలరాశులను కలిగిన రెండు సమీకరణముల వ్యవస్థ అనునది ఒక ప్రతిక్షేపణ ద్వారా ఒక ద్విఘాత సమీకరణమును సాధించు సమస్యగా మారుట గమనించదగినది.

ఇంకను అదేవిధంగా సూక్ష్మీకరణ ద్వారా ఏర్పడు ద్విఘాత బహుపద సమీకరణపు గుణకములు వాస్తవ సంఖ్యలుగా ఉన్నందు వల్ల, రెండు మూలములు వాస్తవ సంఖ్యలుగాను లేదా రెండు మూలములు అవాస్తవ సంఖ్యలుగాను ఏర్పడును. అదే విధంగా రెండు మూలములు సంకీర్ణసంఖ్యలైన, వృత్తము మరియు సరళరేఖ ఒకదానికొకటి ఖండించుకొనవు. మూలములు వాస్తవ సంఖ్యల సందర్భంలో అవి విభిన్నాలు లేదా బహుపద

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 128 10-03-2022 10:54:23

సమాసపు మూలముల గుణిజములగును. అవి విభిన్న మూలములు అయిన, సమీకరణము (2)లో ప్రతిక్షేపించిన y కు రెండు విలువలు లభించునందువలన రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించుకొనును. ఈ రెండునూ సమాన మూలములైన వృత్తములో సరళరేఖ స్పర్శరేఖగా ఏర్పడును. సమీకరణము (3)లో ఇవ్వబడిన బహుపద సమాసమునకు ఒకేఒక సాధారణ వాస్తవ మూలము ఉన్నందువలన ఒక సరళరేఖ ఒక వృత్తమును ఒకేఒక బిందువు వద్ద ఖండించదు.

గమనిక

ఉదాహరణ 3.14లో ఉపయోగించిన అదే పద్ధతిని అనుసరించి క్రింది వాటిని నిరూపించవచ్చును.

- రెండు వృత్తములు రెండు బిందువుల కంటే ఎక్కువ బిందువుల వద్ద ఖండించుకొనవు.
- ఒక వృత్తము మరియు దీర్ఘవృత్తము నాలుగు కంటే ఎక్కువ బిందువుల వద్ద ఖండించుకొనవు.

అభ్యాసము 3.2

1. k అనునది వాస్తవ సంఖ్య అయిన, $2x^2+kx+k=0$ అను బహుపద సమీకరణపు మూలముల స్వభావమును, k ద్వారా పరిశోధించుము.
2. $2+\sqrt{3}i$ ను మూలముగా కలిగిన (కనిష్ట) అంతస్థ గల అకరణీయ సంఖ్యలు గుణకములుగా ఉన్న ఒక బహుపద సమీకరణమును కనుగొనుము.
3. $2i+3$ ను మూలముగా కలిగిన కనిష్ట అంతస్థ గల అకరణీయ సంఖ్యలు గుణకములుగా ఉన్న ఒక బహుపద సమీకరణమును కనుగొనుము.
4. $\sqrt{5}-\sqrt{3}$ ను మూలముగా కలిగిన కనిష్ఠ అంతస్థ గల అకరణీయ సంఖ్యలు గుణకములుగా ఉన్న ఒక బహుపద సమీకరణమును కనుగొనుము.
5. ఒక సరళరేఖ మరియు ఒక పరావలయము రెండు కంటే ఎక్కువ బిందువుల వద్ద ఖండించుకొనవని నిరూపించుము.

3.6 ఉన్నత అంతస్థ గల బహుపద సమీకరణపు మూలములు (Roots of Higher Degree Polynomial Equations)

$P(x)=0$ అనునది బహుపద సమీకరణమగునని మనకు తెలియును. ఒక బహుపద సమీకరణపు సాధన అనునది, మూలము లేదా శూన్యం అనునవి ఒకటే. కావున రెండు పదజాలములను ఉపయోగించుచున్నాము.

ఒక సంఖ్యను ప్రతిక్షేపించడం ద్వారా ఒక బహుపద సమీకరణమునకు అది మూలమా? లేదా? అను దానిని సులభముగా పరిశోధించి తెలుసుకొనవచ్చును. కాని ఆ సమీకరణము ద్విఘాత సమీకరణముగా ఉన్నంతవరకు ఈ విధంగా పరిశోధించి తెలుసుకొను పద్ధతియే మూలములను తెలుసుకొనుటకు సులభ పద్ధతి అగును. కాని, ఉన్నత అంతస్థ గల బహుపద సమీకరణమునకు ఇది సామాన్యముగా సులభమైనది కాదు.

నాలుగు ప్రాథమిక అంకగణిత పరిక్రియలు (కూడిక, గుణకారము, తీసివేత మరియు భాగాహారము) మరియు అకరణీయ ఘాతంకాలు (వర్గము, ఘనము, వర్గమూలము మరియు ఘనమూలము మొదలగు అకరణీయ సంఖ్యకు ఘాతముగా) మరియు గుణకములను మాత్రము వినియోగించి వ్రాయబడు బహుపద సమీకరణపు సాధనను కరణి సాధన

EPBK6

(addition, multiplication, subtraction and division) అని అందురు. అంతస్థు 5 మరియు అంతకన్నా ఎక్కువ గల సాధారణ బహుపద సమీకరణపు సాధనను కరణి సాధనగా వ్రాయుటకు వీలుకాదని ఏబెల్ (power to a rational number, such as square, cube, square roots, cube roots and so on) నిరూపించెను.

ఉన్నత అంతస్థు గల బహుపద సమీకరణముల సాధనలను కనుగొనడానికి ఉపయోగపడు బహుపద సమీకరణముల గురించి కొన్ని ఫలితములు ఈ క్రింది విధముగా ఇవ్వబడినది.

- ఒకే చలరాశి గల ప్రతి బహుపద సమాసము $\mathbb{R}$ నుండి $\mathbb{R}$ కు అవిచ్ఛిన్న ప్రమేయమగును.
- సరి అంతస్థు గల $P(x)=0$ అను బహుపద సమీకరణమునకు, $P(x)\to\infty$ అయినప్పుడు $P(x)\to\pm\infty$. కావున సరి అంతస్థు గల బహుపద సమాసపు రేఖాచిత్రము ఎడమ పై భాగమునుండి ప్రారంభించి, కుడి పై భాగమునకు చేరునట్లు కనిపించుచున్నది.
- పదకొండవ తరగతి మొదటి భాగపు పుస్తకములో గల "రేఖాచిత్ర ప్రమేయములు" అను పాఠ్యాంశములో చర్చించిన విషయములు బహుపద సమాసపు రేఖాచిత్రములకు వర్తించును. ఉదాహరణకు, ఒక బహుపద సమాసపు స్థిరాంకం మార్పు చెందిన, దాని రేఖచిత్రము పైకి లేదా క్రిందికి మాత్రమే కదులుతుంది.
- ప్రతి బహుపద సమాసము అపరమిత అవకలనముగా (differentiable) ఉండును.
- x అక్షమును $P(x)=0$ అను రేఖాచిత్రము ఖండించు బిందువులు, $P(x)=0$ అను బహుపద సమీకరణపు వాస్తవ మూలములుగా ఉండును.
- a మరియు b ఒకదాని కొకటి వ్యతిరేఖ గుర్తులుగా ఉండునట్లు వుంటే $P(a)$ మరియు $P(b)$ అనునవి రెండు వాస్తవ సంఖ్యలు అయిన,
  - c అని ఏర్పడు వాస్తవ రేఖలో $P(c)=0$ అను ఒక బిందువు ఉండును.
  - a మరియు b లకు మధ్య ఒక మూలము ఉండును.
  - పై గుర్తించిన బిందువులకు మధ్య ఒకే ఒక మూలము మాత్రమే ఉండవలసిన అవసరం లేదు. $3,5,7,\ldots\ldots$ అనునవి మూలములుగా ఉండవచ్చును. అంటే a మరియు b మధ్య బేసి సంఖ్య వాస్తవ మూలములు కలవు అని చెప్పవచ్చు మరియు సరిసంఖ్య మూలములు ఉండవు.

అయినను, మూలముల గురించి కొన్ని వివరములు తెలిసినచో మిగతా మూలములను మనము కనుగొనుటకు ప్రయత్నింతవచ్చును. ఉదాహరణముగా, అకరణీయ గుణకములు కలిగిన ఒక అంతస్థు 6గా గల బహుపద సమీకరణపు మూలములు $2+3i$ మరియు $4-\sqrt{5}$ అయిన, ఆ బహుపద సమీకరణమునకు $2-3i$ మరియు $4+\sqrt{5}$ మొగలగునవి మూలములుగా ఉండును. కావున ఈ నాలుగు కారణాంకములతో భాగించిన, ఇవ్వబడిన సమస్య ద్విఘాతపు సమీకరణపు సమస్యగా సూక్ష్మీకరించబడి సులభముగా సాధన కనుగొనబడును. ఈ పాఠ్యాంశములో ఉన్నత అంతస్థు గల బహుపద సమీకరణముల మూలముల గురించి కొన్ని వివరణల ఆధారములతో మూలములను కనుగొను కొన్ని పద్ధతులను చూచెదము.

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 130 10-03-2022 10:54:28

3.7 మరిన్ని విషయములతో కూడిన బహుపద సమాసములు (Polynomials with Additional Information)

ఉన్నత అంతస్థుగల బహుపద సమాసములకు సాధన కనుగొనుటకు కావలసిన కొన్ని వివరముల గురించి తెలుసుకొనెదము. కొన్ని సమయములలో మరింత సమాచారములు ప్రత్యక్షముగా అంటే ఇవ్వబడిన ఒక మూలము $2+3i$ అని ఇవ్వబడి ఉండును. కొన్ని సందర్భములలో నేరుగా కాకుండా అంటే గుణకముల మొత్తము శూన్యమగునని ఇవ్వబడి బహుపద సమాసమును పరిశోధించి కనుగొను విధముగా ఉండును.

3.7.1 కల్పిత లేక కరణుల మూలములు (Imaginary or Surds Roots)

వాస్తవ గుణకములు కలిగిన ఒక చతుర్ఘాత బహుపద సమీకరణపు ఒక మూలము $\alpha+i\beta$ అను ఒక అవాస్తవ సంకీర్ణ సంఖ్య అయిన $\alpha-i\beta$ కూడా ఒక మూలమగును; కావున, $(x-(\alpha+i\beta))$ మరియు $(x-(\alpha-i\beta))$ అనునది బహుపద సమీకరణపు కారణాంకములగును. కావున వాటి లబ్ధము కూడా కారణాంకమగును. కావున, $x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$ అనునది కారణాంకము అగును. కావున ఇవ్వబడిన బహుపద సమీకరణమును ఈ కారణాంకముచే భాగించిన, ద్విఘాత బహుపద సమాసపు భాగఫలము లభించును. దానిని తెలిసిన పద్ధతులనుపయోగించి సాధించుట ద్వారా బహుపద సమీకరణపు అన్ని మూలములను కనుగొనుటకు వీలగును.

అకరణీయ గుణకములను కలిగిన ఒక ద్విఘాత సమీకరణము యొక్క ఒక మూలము $2+\sqrt{3}$ అనిన, $2-\sqrt{3}$ అనునది ఇంకొక మూలమగును; కావున వాటి లబ్ధము $(x-(2+\sqrt{3}))(x-(2-\sqrt{3}))$ అనునది ఒక కారణాంకమగును. x^2-4x+1 అనునది కూడా ఒక కారణాంకమగును. ఈ కారణాంకముచే బహుపద సమాసమును భాగించగా లభించు ద్విఘాత బహుపద సమాస భాగఫలమును తెలిసిన పద్ధతులనుపయోగించి సాధించ వీలగును. $2+\sqrt{3}$ ఉన్న చోట తీసుకొను అన్ని కరణులకు ఇదే పద్ధతి వర్తించును. దీనిని ఉపయోగించి చతుర్ఘాత బహుపద సమీకరణపు అన్ని మూలములను మనమే కనుగొనుటకు వీలగును.

అకరణీయ గుణకములు కలిగిన అంతస్థు 6గా గల బహుపద సమాసపు ఒక మూలము అవాస్తవ సంకీర్ణ సంఖ్య మరియు ఒక మూలము కరణి అని తెలిసిన, అంచెలంచెలుగా అంతస్థు 6గా గల బహుపద సమీకరణపు సాధన ఒక ద్విఘాత సమీకరణపు సాధన సమస్యగా మార్చుచెందును.

ఉదాహరణ 3.15

$2+i$ మరియు $3-\sqrt{2}$ అనునవి

$$x^6-13x^5+62x^4-126x^3+65x^2+127x-140=0,$$

అను సమీకరణపు మూలములయిన, మిగిలిన అన్ని మూలములను కనుగొనుము.

సాధన

సమీకరణపు గుణకములన్నియు అకరణీయ సంఖ్యలుగా ఉన్నందువల్ల $2+i$ మరియు $3-\sqrt{2}$ అనునవి మూలములు అయినందున ఇవ్వబడిన బహుపద సమాసమునకు $2-i$ మరియు $3+\sqrt{2}$ అనునవి మూలములుగా ఉండును. కావున, $(x-(2+i)), (x-(2-i)), (x-(3-\sqrt{2}))$ మరియు $(x-(3+\sqrt{2}))$ అనునవి కారణాంకములగును. కావున వీటి లబ్ధము

$$((x-(2+i))(x-(2-i))(x-(3-\sqrt{2}))(x-(3+\sqrt{2}))$$

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 131 10-03-2022 10:54:33

అనునది ఇవ్వబడిన బహుపద సమాసమునకు ఒక కారణాంకమగును. అంటే,

$$(x^2-4x+5)(x^2-6x+7)$$

అనునది ఒక కారణాంకము. ఇవ్వబడిన బహుపద సమీకరణమును ఈ కారణాంకముచే భాగించగా, మరొక కారణాంకముగా (x^2-3x-4) లభించును. దీని ద్వారా 4 మరియు -1 అనునవి ఇతర రెండు మూలములగును. కావున

$$2+i, 2-i, 3+\sqrt{2}, 3-\sqrt{2}, -1, \text{ మరియు } 4$$

అనునవి ఇవ్వబడిన బహుపద సమీకరణపు మూలములగును.

3.7.2 సరి ఘాతములను మాత్రమే గల బహుపద సమీకరణములు (Polynomial equations with Even Powers Only)

$2n$ అంతస్థగల $P(x)$ అను బహుపద సమీకరణములో x కు సరి ఘాతములు మాత్రమే కలవు. (అంటే బేసి ఘాత గుణకములు 0 అగును) కావున x^2 అని ప్రతిక్షేపించగా y; లో n అంతస్థ గల బహుపద సమీకరణము లభించును; ఈ బహుపద సమీకరణమునకు $y_1, y_2, \cdots y_n$ అనునవి మూలములు అనుకొనుము. ఇంకను $x^2 = y_r$, అను n సమీకరణములను మాత్రము తీసుకొన్నచో ప్రతి y_r లో x కు రెండు విలువలు లభించును. ఈ $2n$ విలువలే ఇవ్వబడిన x లో గల బహుపద సమీకరణపు మూలములుగా ఏర్పడును.

ఉదాహరణ 3.16

$x^4-9x^2+20=0$ అను సమీకరణమును సాధించుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన సమీకరణము

$$x^4-9x^2+20=0 \text{ అగును.}$$

ఇది ఒక చతుర్ఘాత సమీకరణమగును. x^2 అని ప్రతిక్షేపించగా y అను ద్విఘాత సమీకరణము లభించును.

$$y^2-9y+20=0\,.$$

దీని సాధన 4 మరియు 5 అగును. ఇంకా $x^2=4$ మరియు $x^2=5$ అని తీసికొనిన, ఇవ్వబడిన సమీకరణమునకు $2, -2, \sqrt{5}, -\sqrt{5}$ అనునవి సాధనలగును.

పై తెలిపిన పద్ధతిని , $x^6-17x^3+30=0$, $ax^{2k}+bx^k+c=0$ మరియు బహుపద సమీకరణములకు మరియు $a_nx^{kn}+a_{n-1}x^{k(n-1)}+\cdots+a_1x^k+a_0=0$ (ఇక్కడ k అనునది ఏదేని ఒక ధన పూర్ణసంఖ్య) అను పద్ధతిలో ఏర్పడు సాధారణ బహుపద సమీకరణమునకు ఉపయోగించవచ్చునని గుర్తించదగినది.

3.7.3 అన్ని గుణకముల మొత్తము శూన్యము (Zero Sum of all Coefficients)

$P(x)=0$ అను ఒక బహుపద సమీకరణపు గుణకముల మొత్తము శూన్యము అనుకొనుము. గుణకముల మొత్తము అనునది నిజంగా ఏమి? గుణకముల మొత్తము అనునది $P(1)$. అని మనకు తెలియును. కావున గుణకముల మొత్తము శూన్యము అయిన $P(1)=0$ అయినందున $P(x)$ యొక్క ఒక మూలము 1 అగును. ఇంక మిగతా సమీకరణపు సాధనను కనుగొనుట సులభమగును.

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 132 10-03-2022 10:54:41

ఉదాహరణ 3.17

$x^3-3x^2-33x+35=0$ అను సమీకరణమును సాధించుము.

సాధన

ఇక్కడ బహుపద సమీకరణపు గుణకముల మొత్తము శూన్యమగును. కావున బహుపద సమీకరణపు ఒక మూలము 1 అగును. మిగిలిన మూలములను కనుగొనుటకు $x^3-3x^2-33x+35$ ను $x-1$ చే భాగించగా, $x^2-2x-35$ అను భాగఫలము లభించును. దీనిని సాధించగా 7 మరియు -5 మూలములగును. కావున $1, 7, -5$ అనునవి ఇవ్వబడిన సమీకరణపు సాధన అగును. ■

3.7.4 బేసి అంతస్థు గల గుణకముల మొత్తము సరి అంతస్థు గల గుణకముల మొత్తము సమానము (Equal Sums of Coefficients of Odd and Even Powers)

బేసి అంతస్థు గల గుణకముల మొత్తము సరి అంతస్థు గల గుణకముల మొత్తము సమానముగా ఉండు ఒక బహుపద సమీకరణము $P(x)=0$ అనుకొనుము. ఈ విధముగా చెప్పుట యొక్క అర్థము ఏమి? a అనునది $P(x)=0$ లో బేసి అంతస్థుగల గుణకము అయిన $P(-x)=0$ లో, అదే బేసి అంతస్థు కలిగిన గుణకము $-a$ అని ఉండవలెను. $P(x)=0$ మరియు $P(-x)=0$ లో ఉండు సరి అంతస్థు గల గుణకములు సమానముగా ఉండవలెను. కావున ఇవ్వబడిన నిబంధన ప్రకారము $P(-x)=0$ లో ఉండు అన్ని గుణకముల మొత్తము శూన్యముగా ఉండును. కావున $P(-x)=0$ కు ఒక మూలము 1 అగును. కావున $P(x)=0$ కు ఒక మూలము -1 అగును. ఇంకా మిగిలిన సమీకరణపు సమస్యను సాధించుట మిక్కిలి సులభమగును.

ఉదాహరణ 3.18

$2x^3+11x^2-9x-18=0$ అను సమీకరణమును సాధించుము.

సాధన

ఇక్కడ బేసిఘాతముగల గుణకముల మొత్తము సరి ఘాతముగల గుణకముల మొత్తమునకు సమానముగా ఉన్నదని గమనింతుము. కావున -1 అనునది ఈ సమీకరణపు ఒక మూలమగును. ఇతర మూలములను కనుగొనుటకు $2x^3+11x^2-9x-18$ ను $x+1$ చే భాగించగా $2x^2+9x-18$ అను భాగఫలము లభించును. దీనిని సాధించుట ద్వారా మూలములు $\frac{3}{2}$ మరియు -6 అని లభించును. కావున ఇవ్వబడిన సమీకరణమునకు $-6, -1, \frac{3}{2}$ అనునది సాధన లేక మూలములగును. ■

3.7.5 శ్రేఢుల రూపములో గల మూలములు (Roots in Progressions)

ఉన్నత అంతస్థు గల బహుపద సమీకరణములను సాధించుటకు ఇదివరకే తెలిపిన విధముగా బహుపద సమాసములను గురించో లేక సమీకరణపు సాధనలు గురించో కొన్ని వివరములు అధికముగా కావలయును. "మూలములు అంకశ్రేఢి రూపములో ఉన్నవి" మరియు "మూలములు గుణశ్రేఢి రూపములో ఉన్నవి" అనునవి కొన్ని వివరములగును. ఇటువంటి సమీకరణములను చర్చించెదము.

ఉదాహరణ 3.19

$x^3+px^2+qx+r=0$ యొక్క మూలములు అంకశ్రేఢి (A.P.) లో ఉండుటకు నిబంధనను తెలుపుము.

సాధన

మూలములు అంకశ్రేఢిలో ఉన్నవనుకొనుము. కావున ఆ మూలములు $\alpha-d, \alpha, \alpha+d$ అగును. వియట్టా యొక్క సూత్రమునుపయోగించిన, మనకు లభించునది

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 133 10-03-2022 10:54:47

$(\alpha-d)+\alpha+(\alpha+d)=-\frac{p}{1}=p \Rightarrow 3\alpha=-p \Rightarrow \alpha=-\frac{p}{3}$.

కాని, ఇవ్వబడిన సమీకరణమునకు α ఒక మూలమగుట వలన,

$$\left(-\frac{p}{3}\right)^3+p\left(-\frac{p}{3}\right)^2+q\left(-\frac{p}{3}\right)+r=0 \Rightarrow 9pq=2p^3+27r\,.$$

ఇదియే, సమీకరణపు మూలములు అంకశ్రేఢిలో ఉండుటకు కావలసిన నిబంధన అగును. ■

ఉదాహరణ 3.20

$ax^3+bx^2+cx+d=0$ అను సమీకరణపు మూలములు గుణశ్రేఢిలో (G.P.) ఉండుటకు నిబంధనను తెలుపుము. ఇక్కడ $a,b,c,d\neq 0$ అనుకొనుము.

సాధన

మూలములు గుణశ్రేఢిలో ఉన్నవనుకొనుము. కావున వాటిని $\frac{\alpha}{\lambda},\alpha,\alpha\lambda$ అనుకొనుము.

వియట్టా యొక్క సూత్రమునుపయోగించిన మనకు లభించునది

$$\sum_1 = \alpha\left(\frac{1}{\lambda}+1+\lambda\right)=-\frac{b}{a} \quad \ldots(1)$$

$$\sum_2 = \alpha^2\left(\frac{1}{\lambda}+1+\lambda\right)=\frac{c}{a} \quad \ldots(2)$$

$$\sum_3 = \alpha^3=-\frac{d}{a}. \quad \ldots(3)$$

సమీకరణము (2) ను (1) చే భాగించగా,

$$\alpha=-\frac{c}{b} \quad \ldots(4)$$

(4) ను (3) లో ప్రతిక్షేపించగా, $\left(-\frac{c}{b}\right)^3=-\frac{d}{a}\Rightarrow ac^3=db^3$. ■

ఉదాహరణ 3.21

$x^3+px^2+qx+r=0$ యొక్క మూలములు హరాత్మక శ్రేఢిలో (H.P.) ఉండినచో, $9pqr=27r^2+2q^3$ అని నిరూపించుము. ఇక్కడ $p,q,r\neq 0$ అనుకొనుము.

సాధన

మూలములు హరాత్మక శ్రేఢిలో ఉన్నవనుకొనుము. కావున వాటి గుణక విలోమములు అంకశ్రేఢిలో ఉండును. ఇంకను

$$\left(\frac{1}{x}\right)^3+p\left(\frac{1}{x}\right)^2+q\left(\frac{1}{x}\right)+r=0 \Leftrightarrow rx^3+qx^2+px+1=0\,. \quad \ldots(1)$$

(1) యొక్క మూలములు అంకశ్రేఢిలో ఉండుట వలన వాటిని $\alpha-d,\alpha,\alpha+d$. అనుకొనుము. వియట్టా యొక్క సూత్రములను ఉపయోగించిన

$$\sum_1=(\alpha-d)+\alpha+(\alpha+d)=-\frac{q}{r}\Rightarrow 3\alpha=-\frac{q}{r}\Rightarrow\alpha=-\frac{q}{3r}.$$

కాని, (1) యొక్క మూలము α అగుట వలన

$$r\left(-\frac{q}{3r}\right)^3+q\left(-\frac{q}{3r}\right)^2+p\left(-\frac{q}{3r}\right)+1=0\Rightarrow -q^3+3q^3-9pqr+27r^2=0\Rightarrow 9pqr=2q^3+27r^2\,.$$ ■

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 134 10-03-2022 10:54:55

ఉదాహరణ 3.22

$x^3-6x^2-4x+24=0$ అను సమీకరణపు మూలములు అంకశ్రేఢిలో ఉన్నవని తెలియుచున్నది. సమీకరణపు మూలములను కనుగొనుము.

సాధన

మూలములు $a-d, a, a+d$ అనుకొనుము. కావున మూలముల మొత్తము $3a$ అనునది ఇవ్వబడిన సమీకరణము ద్వారా లభించు 6 కు సమానము. కావున $3a=6$ అగును. అందువలన $a=2$ అగును. మూలముల లబ్ధము a^3-ad^2 అనునది సమీకరణము ద్వారా లభించు -24 కు సమానము. a విలువను ప్రతిక్షేపించగా $8-2d^2=-24$ అని అగును. కావున $d=\pm 4$ అగును. $d=4$ అనిన $-2, 2, 6$ అను మూలములు లభించును. మరలా $d=-4$, అనిన $6, 2, -2$ (అదే మూలములు వెనుక వరుసలో) అను మూలములు లభించును. ■

అభ్యాసము 3.3

1. $2x^3-x^2-18x+9=0$ అను త్రిఘాత బహుపద సమీకరణపు మూలములలో రెండింటి మొత్తము శూన్యమైన, సమీకరణమును సాధించుము.
2. $9x^3-36x^2+44x-16=0$ యొక్క మూలములు అంకశ్రేఢిలో ఉండిన, సమీకరణమును సాధించుము.
3. $3x^3-26x^2+52x-24=0$ యొక్క మూలములు గుణశ్రేఢిలో ఉండిన, సమీకరణమును సాధించుము.
4. $2x^3-6x^2+3x+k=0$ అను సమీకరణపు ఒక మూలము, ఇతర రెండు మూలముల మొత్తమునకు రెట్టింపు అయిన, k యొక్క విలువను కనుగొనుము మరియు సమీకరణమును సాధించుము.
5. $1+2i$ మరియు $\sqrt{3}$ అనునవి $x^6-3x^5-5x^4+22x^3-39x^2-39x+135$ అను బహుపద సమానపు రెండు శూన్యములయిన, అన్ని శూన్యవిలువలను కనుగొనుము.
6. ఈ క్రింది త్రిఘాత సమీకరణములను సాధించుము:

   (i) $2x^3-9x^2+10x=3$, (ii) $8x^3-2x^2-7x+3=0$.
7. $x^4-14x^2+45=0$అను సమీకరణమును సాధించుము.

3.7.6 పాక్షికముగా కారణాంకపరచిన బహుపద సమాసములు (Partly Factored Polynomials)

$(ax+b)(cx+d)(px+q)(rx+s)+k=0$, $k\neq 0$ అను రూపమునకు మార్చి వ్రాయబడిన $(\alpha x^2+\beta x+\lambda)(\alpha x^2+\beta x+\mu)+k=0$

ఈ క్రింది ఇవ్వబడిన ఉదాహరణల ద్వారా ఇటువంటి సమీకరణములను సాధించు పద్ధతిని వివరించెదము.

ఉదాహరణ 3.23

సాధించుము:

$$(x-2)(x-7)(x-3)(x+2)+19 = 0.$$

సాధన

ఈ చతుర్ఘాత సమీకరణమును తగిన విధముగా మార్చి, ప్రతిక్షేపించు పద్ధతిని పాటించుట ద్వారా దీనిని సాధించగలము.

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 135 10-03-2022 10:55:03

$$(x-2)(x-3)(x-7)(x+2)+19 = 0.$$

అని సమీకరణమును మార్చి వ్రాయవచ్చును. అందువలన ఇవ్వబడిన సమీకరణము

$(x^2-5x+6)(x^2-5x-14)+19 = 0$ గా మారును.

x^2-5x ను y అని ప్రతిక్షేపించగా, సమీకరణము $(y+6)(y-14)+19=0;$ గా మారును.

అంటే

$$y^2-8y-65 = 0.$$

ఈ సమీకరణమును సాధించగా $y=13$ మరియు $y=-5$ అని లభించును. వీటిని ప్రతిక్షేపించగా మనకు

$$x^2-5x-13 = 0 \text{ మరియు } x^2-5x+5=0$$

అను రెండు ద్విఘాత సమీకరణములు లభించును. వీటిని సాధారణ పద్ధతిలో సాధించ వీలగును. ఈ రెండు సమీకరణముల నుండి పొందిన సాధనల అన్నియునూ ఒకటిగా చేర్చి $\frac{5\pm\sqrt{77}}{2}, \frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$ అని వ్రాయవచ్చు.

ఉదాహరణ 3.24

$(2x-3)(6x-1)(3x-2)(x-2)-5 = 0$ అను సమీకరణమును సాధించుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన సమీకరణమును మార్చుటకు

$$(2x-3)(3x-2)(6x-1)(x-2)-5 = 0.$$

జతలుగా గుణించగా

$$(6x^2-13x+6)(6x^2-13x+2)-5 = 0.$$

దీనిలో $y=6x^2-13x,$ అని ప్రతిక్షేపించగా, సమీకరణము

$(y+6)(y+2)-5 = 0$ గా మారును.

అంటే

$$y^2+8y+7 = 0.$$

ఈ సమీకరణమును సాధించిన, $y=-1$ మరియు $y=-7$ అని లభించును.

y లో $y=6x^2-13x,$ విలువను ప్రతిక్షేపించగా

$$6x^2-13x+1 = 0$$

$$6x^2-13x+7 = 0 \text{ అని పొందుదుము}$$

ఈ రెండు సమీకరణములను సాధించిన,

$$x=1, x=\frac{7}{6}, x = \frac{13+\sqrt{145}}{12} \text{ మరియు } x=\frac{13-\sqrt{145}}{12}$$

అను సమీకరణపు మూలములను పొందుదుము.

అభ్యాసము 3.4

1. సాధించుము: : (i) $(x-5)(x-7)(x+6)(x+4)=504$ (ii) $(x-4)(x-7)(x-2)(x+1)=16$
2. సాధించుము: : $(2x-1)(x+3)(x-2)(2x+3)+20=0$

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 136 10-03-2022 10:55:11

3.8 అధిక వివరములు లేని బహుపద సమీకరణములు (Polynomial Equations with no Additional Information)

3.8.1 అకరణీయ మూలపు సిద్ధాంతము (Rational Root Theorem)

కొన్ని బహుపద సమీకరణపు మూలములలో కొన్నింటిని, పరిశోధించు పద్ధతి ద్వారా కనుగొనవచ్చును. ఉదాహరణకు,

$$4x^3 - 8x^2 - x + 2 = 0 \quad \ldots (1)$$

అను సమీకరణమును తీసుకొనుము. ఇది ఇదివరకు మనము పరిశోధించిన ఏ ఒక్క పద్ధతిలోను సాధించుటకు వీలుకాని ఒక త్రిఘాత బహుపద సమీకరణము అగును. (1) యొక్క బహుపద సమాసమును $P(x)$ అని గుర్తించిన, $P(2) = 0$ అనుట ద్వారా $x - 2$ అనునది ఒక కారణాంకమగును. సమస్యలో మిగిలియున్న సమీకరణమునకు సాధన కనుగొనుట అనునది ఇంకా సులభమవుట వలన అభ్యాసమునకు వదలబడినది.

ఉదాహరణ 3.25

$x^3 - 5x^2 - 4x + 20 = 0$ అను సమీకరణమును సాధించుము.

సాధన

సమీకరణములో గల బహుపద సమాసమును $P(x)$ అని గుర్తించిన, $P(2) = 0$ అగును. కావున బహుపద సమీకరణపు ఒక మూలము 2 అగును. మిగతా మూలములను కనుగొనుటకు $x^3 - 5x^2 - 4x + 20$ ను $x - 2$ చే భాగించగా $Q(x) = x^2 - 3x - 10$ అనునది భాగఫలముగా లభించును. దీనిని సాధించగా, -2 మరియు 5 అను మూలములు లభించును. కావున ఇవ్వబడిన సమీకరణపు సాధనలు $2, -2, 5$ అగును. ■

పరిశోధించు పద్ధతి ద్వారా ఒక సంఖ్యను మూలముగా ఊహించుట సులభమైనది కాదు. కాని గుణకములు పూర్ణసంఖ్యలయిన, ప్రధాన గుణకము మరియు స్థిరాంకములను ఉపయోగించి కొన్ని అకరణీయ సంఖ్యలను సాధ్యమైన అకరణీయ మూలములుగా పట్టికలో పొందుపరచవచ్చును. అకరణీయ మూలపు సిద్ధాంతము అటువంటి సాధ్యమైన అకరణీయ మూలముల పట్టికను తయారుచేయుటకు ఉపయోగపడుచున్నది. అకరణీయ గుణకములు గల బహుపద సమీకరణమును తగిన సంఖ్యతో గుణించినపుడు అదే మూలములను కలిగిన పూర్ణసంఖ్యలను గుణకములుగా కలిగిన బహుపద సమీకరణమును పొందవచ్చునని గమనించదగినది. కావున క్రింద ఇవ్వబడిన అకరణీయ మూలపు సిద్ధాంతము అకరణీయ గుణకములుగా కలిగినబహుపద సమీకరణపు కొన్ని మూలములను ఊహించుటకు ఉపయోగించెదము. నిరూపణ లేకుండా ఆ సిద్ధాంతమును తెలిపెదము.

సిద్ధాంతము 3.5 (అకరణీయ మూలపు సిద్ధాంతము) (Rational Root Theorem)

పూర్ణసంఖ్యలను గుణకములుగా గల ఒక బహుపద సమాసము $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ అనుకొనుము. ఇక్కడ $a_n \neq 0$ మరియు $a_0 \neq 0$, బహుపద సమాసపు ఒక మూలము $\frac{p}{q}$, (ఇక్కడ $(p, q) = 1$) అయిన p కారణాంకము a_0 గాను మరియు q యొక్క కారణాంకము a_n గాను ఉండును.

$a_n = 1$ అనునపుడు, $\frac{p}{q}$ అనునది ఒక అకరణీయ మూలము అయిన సిద్ధాంతము 3.5 ప్రకారం a_n యొక్క కారణాంకము q అగుటవలన $q = \pm 1$. అని ఉండవలెను. కావున p ఒక పూర్ణసంఖ్యగా మాత్రమే

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 137 10-03-2022 10:55:18

ఉండవలెను. కావున పూర్ణసంఖ్యలను గుణకములుగా గల ఒక ప్రధాన ఏకఘాత బహుపద సమీకరణమునకు సమగ్రము కాని అకరణీయ మూలములు ఉండవు. కావున $a_n = 1$ అయినపుడు, ఒకవేళ అకరణీయ మూలము అని ఉండిన అది పూర్ణసంఖ్యగాను a_0 ను భాగించదగిన సంఖ్యగా ఉండవలెను. (ఏదేని ఒక పూర్ణసంఖ్య a నకు b అయిన $b = ad$ అను పూర్ణసంఖ్య d అను పూర్ణసంఖ్యను నిశ్శేషంగా భాగించును అని మనము చెప్పవచ్చును)

ఉదాహరణకు $x^2 - 5x - 6 = 0$ అను సమీకరణమును తీసుకొనెదము. 6 యొక్క భాజకాలు $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ అగును. అకరణీయ మూలపు సిద్ధాంతము ప్రకారము ఈ సమీకరణపు సాధ్యమైన సాధనలుగా $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ మాత్రమే ఉండును. దీని వల్ల ఇవన్నియు సాధనలుగా ఉండునని అనుకొనుటకు వీలుకాదు. -1 మరియు 6 అనునవి మాత్రమే సమీకరణమును తృప్తిపరచును. మరియు మిగిలిన మూలములు సమీకరణమును తృప్తిపరచవు.

ఇంకను, అకరణీయ మూలపు సిద్ధాంతము ప్రకారము $x^2 + 4 = 0$ అను సమీకరణపు సాధ్యమైన సాధనలుగా $\pm 1, \pm 2, \pm 4$; ఏర్పడినను వీటిలో ఏదియునూ సాధనకాదు. కావున అకరణీయ మూలపు సిద్ధాంతము సాధనను ఊహించుటకు సహాయము మాత్రమే చేయును, సాధనను ఇవ్వదు.

ఉదాహరణ 3.26

$2x^3 + 3x^2 + 2x + 3 = 0$ యొక్క మూలములను కనుగొనుము.

సాధన

మన గుర్తించు పద్ధతి ద్వారా $a_n = 2$ మరియు $a_0 = 3$ అగును. బహుపద సమీకరణపు $(p, q) = 1$, అగుట వలన ఒక మూలము $\frac{p}{q}$ అయిన, p 3ను భాగించవలెను మరియు q 2ను భాగించును. స్పష్టముగా p యొక్క సాధ్యమైన విలువలు $1, -1, 3, -3$, q మరియు $1, -1, 2, -2$ యొక్క సాధ్యమైన విలువలు $\pm\frac{1}{1}, \pm\frac{1}{2}$ $, \pm\frac{3}{2}$, గా ఉండును. దీని ద్వారా $\pm\frac{3}{1}$ అను భిన్నములను రూపొందించవచ్చును. ఈ ఎనిమిది సాధ్య విలువలలో, పరిశోధించు పద్ధతి ద్వారా, $\frac{-3}{2}$ అనునది మాత్రము ఒక అకరణీయ మూలమగును. ఇతర మూలములను కనుగొనుటకు $2x^3 + 3x^2 + 2x + 3$ అను సమీకరణమును $2x + 3$ చే భాగించగా $x^2 + 1$ అను భాగఫలము మరియు శేషము శూన్యముగా లభించును. $x^2 + 1 = 0$ ను సాధించగా i మరియు $-i$ మూలములు లభించును. కావున, ఇవ్వబడిన సమీకరణపు మూలములు $\frac{-3}{2}, -i, i$ అగును.

3.8.2 విలోమ సమీకరణములు (Reciprocal Equations)

అను సమీకరణపు ఒక సాధన α అనుకొనుము.

$$2x^6 - 3x^5 + \sqrt{2}x^4 + 7x^3 + \sqrt{2}x^2 - 3x + 2 = 0. \quad \ldots (1)$$

ఇక్కడ $\alpha \neq 0$ అనునది స్పష్టము. (ఎందుకు?) మరియు

$$2\alpha^6 - 3\alpha^5 + \sqrt{2}\alpha^4 + 7\alpha^3 + \sqrt{2}\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0.$$

(1)లో $\frac{1}{\alpha}$ కు బదులుగా x ను ప్రతిక్షేపించగా

$$2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^6 - 3\left(\frac{1}{\alpha}\right)^5 + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 + 7\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 3\left(\frac{1}{\alpha}\right) + 2$$

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 138 10-03-2022 10:55:25

$$= \frac{2-3\alpha+\sqrt{2}\alpha^2+7\alpha^3+\sqrt{2}\alpha^4-3\alpha^5+2\alpha^6}{\alpha^6} = \frac{0}{\alpha^6} = 0 .$$

కావున, $\frac{1}{\alpha}$ అనునది (1)కు ఒక సాధన అగును. ఇదే విధంగా

$$2x^5+3x^4-4x^3+4x^2-3x-2 = 0 \qquad \ldots (2)$$

సమీకరణము (2)కు $\frac{1}{\alpha}$ ఒక సాధన అనిన, α మరొక సాధన అగును.

(1) మరియు (2) సమీకరణముల మధ్య గల సాధారణ ధర్మం ఏమనగా, సమీకరణములో x ను $\frac{1}{x}$ గాప్రతిక్షేపించగా అదే సమీకరణము మరలా లభించును. తక్షణమే మన మనస్సులో ఏర్పడు ప్రశ్న "ఇవ్వబడిన సమీకరణమును చూచిన వెంటనే అది పైన తెలిపిన ధర్మమును కలిగి ఉన్నదా? లేదా? అను దానిని కనుగొనుట ఎలా?" ఈ ప్రశ్నకు సిద్ధాంతము 3.6 సమాధానమిచ్చును.

నిర్వచనం 3.1

క్రింది నిబంధనలలో ఒకటి సత్యమైన, n అంతస్థుగా గల $P(x)$ అను బహుపద సమాసము విలోమ బహుపద సమాసమగును.

(i) $P(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ (ii) $P(x) = -x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$.

$P(x)$ అంతస్థ గల n అను బహుపద సమాసము, $P(x) = x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ అని ఉండినచో మొదటి రకపు విలోమ సమీకరణము అని అందురు.

$P(x)$ అంతస్థ గల n అను బహుపద సమాసము, $P(x) = -x^n P\left(\frac{1}{x}\right)$ అని ఉండినచో రెండవ రకపు విలోమ సమీకరణము అని అంటారు.

సిద్ధాంతము 3.6

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$, $(a_n \neq 0)$ అను ఒక బహుపద సమీకరణము విలోమ సమీకరణము కావడానికి కావలసిన నిబంధన ఏమనగా క్రింది రెండు ప్రవచనములతో (Statements) ఏదేని ఒకటి నిజము కావలెను.

(i) $a_n = a_0$, $a_{n-1} = a_1$, $a_{n-2} = a_2 \cdots$

(ii) $a_n = -a_0$, $a_{n-1} = -a_1$, $a_{n-2} = -a_2, \cdots$

నిరూపణ:

బహుపద సమీకరణము

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 . \qquad \ldots (1)$$

(1)లో x ను $\frac{1}{x}$ గా ప్రతిక్షేపించగా,

$$P\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{a_n}{x^n} + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_{n-2}}{x^{n-2}} + \cdots + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_1}{x} + a_0 = 0 . \qquad \ldots (2)$$

అని లభించును.సమీకరణము (2)ను ఇరుప్రక్కలా x^n చే గుణించగా,

$$x^n P\left(\frac{1}{x}\right) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = 0 . \qquad \ldots (3)$$

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 139 10-03-2022 10:55:35

అని లభించును. ఇంకా (1) అనునది విలోమ సమీకరణము $\Leftrightarrow$ $P(x) = \pm x^n P\left(\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow$ (1) మరియు (3) అను రెండు సమీకరణములు సమానమగును.

ఇది సాధ్యము $\Leftrightarrow$ $\frac{a_n}{a_0} = \frac{a_{n-1}}{a_1} = \frac{a_{n-2}}{a_2} = \cdots = \frac{a_2}{a_{n-2}} = \frac{a_1}{a_{n-1}} = \frac{a_0}{a_n}$. అని ఉండవలెను.

ఇక్కడ అనుపాతము λ అనుకొనుము. కావున, $\frac{a_n}{a_0} = \lambda$ మరియు $\frac{a_0}{a_n} = \lambda$ అని లభించును. ఈ రెండు సమీకరణములను గుణించిన, $\lambda^2 = 1$. అని లభించును. కావున, $\lambda = 1$ మరియు $\lambda = -1$ అను రెండు స్థితులు లభించును.

స్థితి (i) :

$\lambda = 1$ ఈ స్థితిలో $a_n = a_0$, $a_{n-1} = a_1$, $a_{n-2} = a_2$, $\cdots$ అని లభించును.

అంటే, (1)లో ప్రారంభము నుండి ఉండు గుణకములు చివరి నుండి ఉండు గుణకములకు సమానంగా ఉండును.

స్థితి (ii) :

$\lambda = -1$ ఈ స్థితిలో $a_n = -a_0$, $a_{n-1} = -a_1$, $a_{n-2} = -a_2$, $\cdots$ అని లభించును.

అంటే, సమీకరణము (1)లో ప్రారంభము నుండి ఉండు గుణకములు చివరి నుండి ఉండు గుణకములకు పరిమాణంలో సమానముగాను మరియు వ్యతిరేఖ గుర్తును కలిగియుండును.

గమనిక

మొదటిరకపు విలోమ సమీకరణములో ప్రారంభము నుండి ఉండు గుణకములు చివరినుండి ఉండు గుణకములకు సమానముగా ఉండును.

ఉదాహరణకు, $6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 = 0$ అను సమీకరణము మొదటి రకపు విలోమ సమీకరణమగును.

రెండవ రకపు విలోమ సమీకరణములలో ప్రారంభము నుండి ఉండు గుణకములు చివరి నుండి ఉండు గుణకములకు పరిమాణములో సమానముగాను, గుర్తులు వ్యతిరేఖముగాను ఉండును.

ఉదాహరణకు $6x^5 - 41x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6 = 0$ అను సమీకరణము రెండవ రకపు విలోమ సమీకరణమగును.

విశేషాంశాలు

(i) విలోమ సమీకరణమునకు 0 ఒక సాధన కాదు.

(ii) గుణకములు మరియు సాధనలు వాస్తవ సంఖ్యలుగా ఉండనవసరం లేదు.

(iii) $P(x) = 0$ అను బహుపద సమీకరణమునకు ఎప్పుడైతే α ఒక మూలముగా ఉండునో అప్పుడంతా $\frac{1}{\alpha}$ కూడా ఒక మూలమగును. బహుపద సమీకరణము $P(x) = 0$ తప్పకుండా ఒక విలోమ బహుపద సమీకరణముగానే ఉండవలెను" అను వివరణ నిజము కాదు. ఉదాహరణకు $2x^3 - 9x^2 + 12x - 4 = 0$ అను బహుపద సమీకరణపు మూలములు $2, 2, \frac{1}{2}$ అగును.

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 140 10-03-2022 10:55:40

$x^3 P\left(\frac{1}{x}\right) \neq \pm P(x)$ అగుట వలన, ఈ సమీకరణము విలోమ సమీకరణము కాదు అని గమనించవలెను. విలోమ సమీకరణములు $a_{n-r} = a_r$ లేదా $r = 0, 1, 2, ...n$ అనువాటిని బట్టి మొదటి రకమా మరియు రెండవ రకమా అని వర్గీకరింపబడును. కొన్ని ఫలితములు ఇక్కడ నిరూపణ లేకుండా ఇవ్వబడినవి.

- మొదటి రకమునకు చెందిన ఒక బేసి అంతస్థు గల విలోమ సమీకరణమునకు, $x = -1$ ఖచ్చితంగా ఒక సాధన అగును.
- రెండవ రకమునకు చెందిన ఒక బేసి అంతస్థు గల విలోమ సమీకరణమునకు, $x = 1$ ఖచ్చితంగా ఒక సాధన అగును.
- రెండవ రకమునకు చెందిన ఒక సరి అంతస్థు గల విలోమ సమీకరణమునకు, మధ్య పదము శూన్యముగానే ఉండును. $x = 1$ మరియు $x = -1$ సాధనలగును.
- సరి అంతస్థు గల విలోమ సమీకరణములలో $x + \frac{1}{x}$ లేదా $x - \frac{1}{x}$ ను, y అని ప్రతిక్షేపించగా, ఇవ్వబడిన బహుపద సమీకరణపు అంతస్థులో సగముగా ఉండు ఒక బహుపద సమీకరణమును పొందెదము.

ఈ బహుపద సమీకరణమును సాధించుట ద్వారా కావలసిన బహుపద సమీకరణపు మూలములను పొందుటకు వీలగును.

ఉదాహరణకు,

$$6x^6 - 35x^5 + 56x^4 - 56x^2 + 35x - 6 = 0$$

అనునది సరి అంతస్థు గల రెండవ రకపు విలోమ సమీకరణము అగును. కావున 1 మరియు -1 అనునవి సమీకరణపు రెండు సాధనలు అయినందువలన $x^2 - 1$ అనునది బహుపద సమాసపు ఒక కారణాంకమగును. కావున బహుపద సమాసమును $x^2 - 1$ చే భాగించగా, $6x^4 - 35x^3 + 62x^2 - 35x + 6$ అను ఒక కారణాంకము లభించును. ఈ కారణాంకమును x^2 చే భాగించి పదములను క్రమబద్ధీకరించగా $6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 62$ అని లభించును. $u = \left(x + \frac{1}{x}\right)$ అని ప్రతిక్షేపించగా, $6(u^2 - 2) - 35u + 62$ అనునది ద్విఘాత సమీకరణమగుచున్నది. ఇంకను $6u^2 - 35u + 50$ అని సూక్ష్మీకరింపబడును. దీనిని సాధించగా $u = \frac{10}{3}, \frac{5}{2}$ అని లభించును. $u = \frac{10}{3}$ అగుట ద్వారా $x = 3, \frac{1}{3}$ అను విలువలు, $u = \frac{5}{2}$ అగుట ద్వారా $x = 2, \frac{1}{2}$ అను విలువలు లభించును. కావున $+1, -1, 2, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{3}$ అనునవి సాధనలుగా ఏర్పడును.

ఉదాహరణ 3.27

$7x^3 - 43x^2 = 43x - 7$ అను సమీకరణమును సాధించుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన సమీకరణమును $7x^3 - 43x^2 - 43x + 7 = 0$ అని మార్చి వ్రాయగలము.

$x + 1$ ఇది మొదటి రకపు బేసి అంతస్థు గల విలోమ సమీకరణము అగును. కావున -1 ఒక సాధన అగును.

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 141 10-03-2022 10:55:47

అందువలన $x+1$ ఒక కారణాంకము అగును. $7x^3-43x^2-43x+7$ అను బహుపద సమాసమును $x+1$ చే భాగించగా $7x^2-50x+7$ అను ఒక కారణాంకము లభించును. దీనిని సాధించగా 7 మరియు $\frac{1}{7}$ మూలములు లభించును. కావున ఇవ్వబడిన సమీకరణమునకు $-1, \frac{1}{7}, 7$ సాధనలగును.

ఉదాహరణ 3.28

$x^4-10x^3+26x^2-10x+1=0$ అను సమీకరణమును సాధించుము.

సాధన

ఇది సరి అంతస్థు గల మొదటి రకపు విలోమ సమీకరణమగును. $x^2\left[\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+26\right]=0$

$x\neq 0$, కావున దీనిని $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-10\left(x+\frac{1}{x}\right)+26=0$ అని మార్చి వ్రాయవచ్చును.

$y = x+\frac{1}{x}$. అనుకొనిన,

$$\left(y^2-2\right)-10y+26 = 0 \Rightarrow y^2-10y+24 = 0 \Rightarrow (y-6)(y-4)=0 \Rightarrow y=6 \text{ or } y=4$$

స్థితి (i)

$$y=6 \quad \Rightarrow x+\frac{1}{x}=6 \Rightarrow x=3+2\sqrt{2}, x=3-2\sqrt{2}.$$

స్థితి (ii)

$$y=4 \Rightarrow x+\frac{1}{x}=4 \Rightarrow x=2+\sqrt{3}, x=2-\sqrt{3}$$

కావున, మూలములు $3\pm 2\sqrt{2}$, $2\pm\sqrt{3}$ అగును.

3.8.3 బహుపద సమాసములు కాని సమీకరణములు (Non-polynomial Equations)

కొన్ని బహుపద సమాసము కాని సమీకరణములను బహుపద సమీకరణముల ద్వారా సాధించవచ్చు. ఉదాహరణకు $\sqrt{15-2x}=x$ అను సమీకరణమును తీసుకొనెదము. మొదట ఇది బహుపద సమీకరణముకాదని గుర్తించవలెను. ఇరుప్రక్కలా వర్గము చేయగా $x^2+2x-15=0$ అని లభించును. ఈ బహుపద సమీకరణమును ఏ విధంగా సాధించవచ్చునని మనకు తెలుసు. ఈ బహుపద సమీకరణ సాధనల నుండి ఇవ్వబడిన సమీకరణమును విశ్లేషించవచ్చును. 3 మరియు -5 అనునవి $\sqrt{\bullet}$ కు సాధనలగును. $x=3$ విలువకు ఋణాత్మకముకాని విలువలను మాత్రమే కేటాయించుట అనునది గమనించిన $x^2+2x-15=0$ అనునది మాత్రమే మూలమగును. అలాంటి కేటాయింపు లేనిచే $x=-5$ అనునది కూడా మూలమగును.

ఉదాహరణ 3.29:

అను సమీకరణమునకు సాధన ఉన్నట్లయితే, కనుగొనుము.

$$2\cos^2 x-9\cos x+4 = 0. \qquad \ldots (1)$$

సాధన

సమీకరణమునకు ఎడమ ప్రక్కన ఉన్నది x లో బహుపద సమాసము కాదు. కాని అది బహుపద సమాసములాగా కనిపించుచున్నది. వాస్తవముగా, దీనిని $\cos x$ లో ఉండు ఒక బహుపద సమాసము

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 142 10-03-2022 10:55:54

అనవచ్చును. అయినను (1)లో ఉన్న సమీకరణమును సాధించుటకు బహుపద సమీకరణముల గురించి మనకు తెలిసిన దానిని ఉపయోగించవచ్చును. $\cos x$ ను y అని ప్రతిక్షేపించగా $2y^2-9y+4=0$ అను బహుపద సమీకరణము లభించును. 4 మరియు $\frac{1}{2}$ అనునవి దీని సాధనలగును.

దీని నుండి $\cos x=4$ లేదా $\cos x=\frac{1}{2}$ కు తగినట్లుగా x ఉండవలెను. కాని $\cos x=\frac{1}{2}$ అననది సాధ్యముకానిది. x అయినపుడు $\cos x=\frac{1}{2}$ యొక్క అనంతమైన వాస్తవ సంఖ్య విలువల $n\in\mathbb{Z}$ ను తృప్తిపరచును. వాస్తవముగా ప్రతి $x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$ అనునది ఇవ్వబడిన సమీకరణము (1)కు సాధన అగును.

$\cos^2 x-9\cos x+20=0$, అను సమీకరణమునకు ఇదే పద్ధతులను పాటించిన ఈ సమీకరణమునకు సాధనే లేదని అర్థమగును. ■

విశేషాంశాలు

మనము గమనించినవి

- నిర్వచింపబడిన బహుపద సమీకరణపు అన్ని సాధనలు ఇవ్వబడిన సమీకరణమునకు ఒక సాధన కాదు.
- బహుపద సమీకరణముల మాదిరిగా కనిపించినను బహుపద సమాసములు కాని సమీకరణములకు అనంత సాధనలు ఉండవచ్చును.
- ఇటువంటి సమీకరణములకు సాధన లేకుండా కూడా ఉంచవచ్చును.
- ప్రాథమిక బీజగణిత సిద్ధాంతము బహుపద సమాసములకు మాత్రమే నిరూపించబడినది. బహుపద సమాసములు కాని వాటికి అంతస్థ గురించే చెప్పలేనప్పుడు బహుపద సమాసములు కాని వాటిని మనసులో ఉంచుకొని ప్రాథమిక బీజగణిత సిద్ధాంతములో ఎటువంటి సందేహము అవసరం లేదు.

అభ్యాసము 3.5

1. ఈ క్రింది సమీకరణములను సాధించుము.
   (i) $\sin^2 x-5\sin x+4=0$ (ii) $12x^3+8x=29x^2-4$
2. అకరణీయ మూలములు ఉన్నవా? అని పరిశోధించుము.
   (i) $2x^3-x^2-1=0$ (ii) $x^8-3x+1=0$.
3. సాధించుము: : $8x^{\frac{3}{2n}}-8x^{\frac{-3}{2n}}=63$
4. సాధించుము: : $2\sqrt{\frac{x}{a}}+3\sqrt{\frac{a}{x}}=\frac{b}{a}+\frac{6a}{b}$.
5. సమీకరణములను సాధించుము:
   (i) $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$ (ii) $x^4+3x^3-3x-1=0$
6. $4^x-3\left(2^{x+2}\right)+2^5=0$ అను సమీకరణమును సంతృప్తిపరచు అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలను కనుగొనుము.
7. $6x^4-5x^3-38x^2-5x+6=0$ అను సమీకరణపు ఒక సాధన $\frac{1}{3}$ అయిన, సమీకరణపు సాధనను కనుగొనుము.

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 143 10-03-2022 10:56:00

3.9 డెస్కార్టెస్ నియమము (Descartes Rule)

ఈ పాఠ్యాంశములో $\mathbb{R}$ లో గల బహుపద సమాసమునకు ధనాత్మక మూలముల సంఖ్య, ఋణాత్మక మూలముల సంఖ్య మరియు అవాస్తవ సంకీర్ణ మూలముల సంఖ్య మొదలగువాటి కొన్ని ధర్మములను గురించి తెలుసుకొనెదము. అటువంటి ధర్మములను గణించుటకు ఉపయోగపడు ఒక ముఖ్యమైన పద్ధతియే డెస్కార్టెస్ నియమము అగును.

3.9.1 డెస్కార్టెస్ నియమము యొక్క నిర్వచనము (Statement of Descartes Rule)

నియమమును గురించి తెలుసుకొనుటకు ముందు బహుపద సమాసపు గుణకముల గుర్తులలో గల మార్పు అను విషయమును పరిచయం చేయుదుము. ఈ క్రింది బహుపద సమాసమును తీసుకొనిన

$$2x^7 - 3x^6 - 4x^5 + 5x^4 + 6x^3 - 7x + 8$$

ఈ బహుపద సమాసపు గుణకముల గుర్తులను '+' మరియు '−' అను గుర్తులను ఉపయోగించి

$$+, -, -, +, +, -, +$$ అని వ్రాయవచ్చును.

ఇక్కడ x^2 పదము యొక్క ఏ గుర్తును మనము గుర్తించలేదని గమనింతుము. మరియు 4 సార్లు గుర్తు మార్పు చెందియున్నది. (అంటే x^6, x^4, x^1 మరియు x^0 స్థానములలో) అను విషయము గమనించదగ్గది.

నిర్వచనం 3.2

x^{j+1} యొక్క గుణకము మరియు x^j యొక్క గుణకము లేదా x^{j-1} యొక్క గుణకము మరియు x^j యొక్క గుణకము వేర్వేరు గుర్తులతో ఉండిన, $P(x)$ అను బహుపద సమాసములో x యొక్క j వ ఘాతములోని గుణకముల గుర్తులలో ఒక మార్పు ఏర్పడును అని చెప్పవచ్చును. (గుణకము శూన్యముగా ఉండిన, శూన్య గుణకము గల పదము యొక్క పూర్వ పదపు శూన్యముకాని గుణకపు గుర్తులను పరిగణనలోకి తీసుకొనవలెను.)

గుర్తుల మార్పుల సంఖ్యలకు అనుగుణంగా డెస్కార్టెస్ నిబంధననుపయోగించి బహుపద సమాసపు మూలముల గురించి వివరములను పొందెదము. దీని నిరూపణ పుస్తకములోని పాఠ్యాంశమునకు చెందని అంశము అయినందువలన నిరూపణ లేకుండా సిద్ధాంతము మాత్రము ఇవ్వబడినది.

సిద్ధాంతము 3.7 (డెస్కార్టెస్ నిబంధన) (Descartes Rule)

వాస్తవ గుణకములు కలిగిన $P(x)$ అను బహుపద సమాసము యొక్క ధనాత్మక శూన్యముల సంఖ్య p, మరియు $P(x)$ యొక్క గుణకముల మార్పు సంఖ్య s అయిన, $s-p$ అనునది ఒక ఋణాత్మకము కానిసరి పూర్ణసంఖ్య అగును.

$P(x)$ అను బహుపద సమాసపు ధనాత్మక శూన్యముల (మూలములు) సంఖ్య $P(x)$ లో గల గుర్తుల మార్పుకు ఎక్కువగా ఉండదు అని సిద్ధాంతము తెలుపుచున్నది. మరియు $P(x)$ లో గల గుణకముల గుర్తుల మార్పు సంఖ్య, $P(x)$ లోని ధనాత్మక శూన్యముల సంఖ్య యొక్క వ్యత్యాసము సరిసంఖ్యగా ఉండును.

$P(x)$ యొక్క ఋణాత్మక శూన్యము అనునది $P(-x)$ యొక్క ధనాత్మక శూన్యము అయినందువలన సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి ఈ క్రింది ఫలితమునకు రావచ్చును $P(x)$ అను బహుపద సమాసపు ఋణాత్మక

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 144 10-03-2022 10:56:06

శూన్యముల సంఖ్య $P(-x)$ లో గుణకముల గుర్తుల మార్పు సంఖ్యకు ఎక్కువగా ఉండదు. $P(-x)$ యొక్క గుణకముల గుర్తుల మార్పుసంఖ్యకూ, $P(x)$ అను బహుపద సమాసపు ఋణాత్మక శూన్యముల సంఖ్యకు గల వ్యత్యాసము ఒక సరిసంఖ్య అగును.

ఏదేని ఒక ధనాత్మక సంఖ్య x^k కు, k చే బహుపద సమాసమును గుణించడం వలన బహుపద సమాసపు ధనాత్మక శూన్యముల సంఖ్యలో మార్పు ఉండదు. మరియు గుణకముల గుర్తుల మార్పు సంఖ్యలోనూ మార్పు ఉండదు. కావున బహుపద సమాసపు స్థిరాంకము గురించి బాధపడనవసరం లేదు. కొందరు రచయితలు బహుపద సమాసపు స్థిరాంకము ఒక శూన్యముకాని సంఖ్యగా ఉండవలెనని అనుకొందురు.

డెస్కార్టెస్ నిబంధనలో శూన్యము ఒక మూలముగా ఉండునని ఏ సందర్భములోను చెప్పలేదనునది గమనించదగినది. ఒక బహుపద సమాసము సాధారణ సాంప్రదాయ పద్ధతిలో వ్రాయబడి ఉండిన చూచిన వెంటనే ఎవరైన ఆ బహుపద సమాసమునకు 0 మూలముగా ఉండునా లేదా ఉండదా అని చెప్పవచ్చును. ఇప్పుడు డెస్కార్టెస్ నిబంధనను కొన్ని నిర్ధిష్ట బహుపద సమాసముల ద్వారా పరిశోధించెదము.

3.9.2 హద్దులు పొందుట (Attainment of bounds)

3.9.2. (అ) వాస్తవ మూలముల సంఖ్యలకు హద్దులు (Bounds for the number of real roots)

$P(x)=(x+1)(x-1)(x-2)(x+i)(x-i)$ అను బహుపద సమాసమునకు $-1, 1, 2, -i, i$ అను శూన్యములు కలవు. సాంప్రదాయ పద్ధతిలో దీనిని x^5-2x^4-x+2 అను బహుపద సమాసముగా వ్రాయవచ్చును. ఈ బహుపద సమాసము $P(x)$ కు శూన్య మరియు నాల్గవ ఘాతములలో 2సార్లు గుర్తు మార్పులు జరిగియున్నది. మరియు

$$P(-x)=-x^5-2x^4+x+2$$

లో ఒకసారి గుర్తుమార్పు ఏర్పడియున్నది. మన డెస్కార్టెస్ నిబంధన ప్రకారము $P(x)$ లో గల ధనాత్మక శూన్యముల సంఖ్య 2 కంటే ఎక్కువగా ఉండదు. $P(x)$ లో గల ఋణాత్మక శూన్యముల సంఖ్య 1 కంటే ఎక్కువగా ఉండదు. స్పష్టంగా 1 మరియు 2 ధనాత్మక శూన్యములుగాను , -1 అనునది ఋణాత్మక శూన్యముగాను x^5-2x^4-x+2 అను బహుపద సమాసమునకు ఉండును. కావున ధనాత్మక శూన్యముల హద్దు 2 అని, ఋణాత్మక శూన్యముల హద్దు – అని పొందబడినది. ఇక్కడ i .మరియు $-i$ అనునవి ధనాత్మకము కాదు మరియు ఋణాత్మకము కాదు.

$(x+2)(x+3)(x+i)(x-i)$ అనునది $-2,-3,-i, i$ అను మూలములను కలిగిన బహుపద సమాసము అని మనకు తెలియును. $P(x)$ ను సాధారణ పద్ధతిలో వ్రాయునపుడు $x^4+5x^3+7x^2+5x+6$ అని వ్రాయుదుము. $P(x)$ లోఒకసారి కూడా గుర్తు మార్పు ఏర్పడలేదు. మరియు $P(-x)=x^4-5x^3+7x^2-5x+6$ లో 4 సార్లు గుర్తు మార్పు జరిగియున్నది. డెస్కార్టెస్ నిబంధన ప్రకారము బహుపద సమాసము $P(x)$ కు 0 కన్నా ఎక్కువ ధనాత్మక శూన్యములు ఉండవు మరియు ఋణాత్మక శూన్యముల సంఖ్య 4 కంటే ఎక్కువగా ఉండదు. ఇంకొక ఉదాహరణగా

$$x^n-{}^nC_1x^{n-1}+{}^nC_2x^{n-2}-{}^nC_3x^{n-3}+\cdots+(-1)^{n-1}{}^nC_{(n-1)}x+(-1)^n.$$

అను బహుపద సమాసమును గమనించెదము. ఇది $(x-1)^n$ యొక్క విస్తీర్ణము అగును. ఈ బహుపద సమాసపు గుణకముల $P(-x)$ మార్పులు మరియు n యొక్క గుణకముల గుర్తుల మార్పులేకుండాఉన్నది. ఇది బహుపద సమాసపు ధనాత్మక శూన్యముల సంఖ్య n కంటే ఎక్కువగా ఉండదు మరియు ఋణాత్మక

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 145 10-03-2022 10:56:15

శూన్యముల సంఖ్య 0 కంటే ఎక్కువగా ఉండదని తెలుపుచున్నది. ఋణాత్మక శూన్యముల గురించిన వివరణ ప్రకారము బహుపద సమాసమునకు ఋణాత్మక శూన్యములే ఉండవు అనునది ఉపయోగకరమైన విషయమగును. కాని ధనాత్మక శూన్యముల గురించి ఏ విధమైన ఉపయోగకరమైన విషయమూ లేదు. అయిననూ దానికి సరిగా ఉండు n ధనాత్మక శూన్యములు కలవు. వాస్తవముగా n .అంతస్థ గల బహుపద సమాసమునకు n కంటే ఎక్కువగా శూన్యముల సంఖ్య ఉండదు, కావున ధనాత్మక శూన్యముల సంఖ్య n కంటే ఎక్కువగా ఉండదు.

3.9.2 (ఆ) వాస్తవము కాని సంకీర్ణ మూలములో సంఖ్యల హద్దులు
(Bounds for the number of Imaginary (Nonreal Complex) roots)

డెస్కార్టెస్ నిబంధననుపయోగించి వాస్తవముకాని సంకీర్ణ మూలముల సంఖ్యకు దిగువ హద్దును మనము గణించుటకు వీలగును. m అంతస్థ గల $P(x)$లో గుణకముల గుర్తుల మార్పు సంఖ్య n; అనుకొనుము. k లో గుర్తుల మార్పు సంఖ్యను $P(-x)$ అనుకొనుము. కావున కనీసము $n-(m+k)$ వాస్తవము కాని సంకీర్ణ మూలములు $P(x)$ అను బహుపద సమాసమునకు కలవు. నిబంధన యొక్క ఇతర ఫలితము ప్రకారము, మూలముల సంఖ్యకు, గుర్తుల మార్పు సంఖ్య యొక్క వ్యత్యాసము సరిసంఖ్యగా ఉండును అను విషయముతో నిర్దేశించిన సందర్భములలో హద్దులను తుల్యముగా గణించుటకు వీలగును.

ఉదాహరణ 3.30

$9x^9+2x^5-x^4-7x^2+2$ అను బహుపద సమీకరణమునకు కనీసము ఆరు సంకీర్ణ మూలములు ఉండునని చూపుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన $P(x)$ అను బహుపద సమీకరణమునకు 2 సార్లు గుర్తుల మార్పులు ఉండుట వలన $P(x)$ యొక్క ధనాత్మక మూలముల సంఖ్య 2 కంటే ఎక్కువగా ఉండదు. మరియు $P(-x)=-9x^9-2x^5-x^4-7x^2+2$, లో $P(-x)$ కు ఒకేఒకసారి గుర్తు మార్పు ఉండుట వలన ఋణాత్మక మూలముల సంఖ్య 1 కంటే ఎక్కువగా ఉండదు. స్పష్టంగా 0 ఒక మూలము కాదు. కావున వాస్తవ మూలముల సంఖ్య అధికపక్షము 3 గా ఉండును. కావున కనీసము 6 వాస్తవము కాని సంకీర్ణ మూలములు ఉండును. ■

విశేషాంశాలు

పైన తెలిపిన దాని నుండి డెస్కార్టెస్ నిబంధన అనునది ధనాత్మక మూలముల సంఖ్యకూ, ఋణాత్మక మూలముల సంఖ్యకూ ఎగువ హద్దును మాత్రమే తెలుపునని గుర్తించదగినది. ఖచ్చితంగా ధనాత్మక మూలముల సంఖ్యనో లేదా ఋణాత్మక మూలముల సంఖ్యనో ఇవ్వడం లేదు. కాని కొన్ని సందర్భములలో మన చేత స్పష్టంగా ధనాత్మక మూలముల సంఖ్యను, ఋణాత్మక మూలముల సంఖ్యను మరియు వాస్తవ మూలములు కాని సంఖ్యనూ మొదలగువాటిని కనుగొనుటకు వీలగును. మరియు ఇది మూలములను కనుగొనుటకు ఎటువంటి పద్ధతిని ఇవ్వడం లేదు.

ఉదాహరణ 3.31

ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన బహుపద సమీకరణముల మూలముల స్వభావము గురించి చర్చించుము.

(i) $x^{2018}+1947x^{1950}+15x^8+26x^6+2019$ (ii) $x^5-19x^4+2x^3+5x^2+11$

సాధన

ఇవ్వబడిన బహుపద సమాసమును $P(x)$ అనుకొనుము.

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 146 10-03-2022 10:56:19

(i) $P(x)$ మరియు $P(-x)$ లో గుర్తుల మార్పు సంఖ్య శూన్యము అగుట వలన ధనాత్మక మూలములో, ఋణాత్మక మూలములో లేవు. స్పష్టముగానే 0 మూలము కాదు. కావున బహుపద సమాసమునకు వాస్తవ మూలములు లేవు. మరియు బహుపద సమాసపు అన్ని మూలములు సంకీర్ణ మూలములు అగును.

(ii) $P(x)$ మరియు $P(-x)$ లో గుర్తుల మార్పు సంఖ్య క్రమముగా 2 మరియు 1 అగును. కావున అత్యధికంగా రెండు ధనాత్మక మూలములు, మరియు అత్యధికంగా ఒక ఋణాత్మక మూలము వుండును. $P(-x)$ లో గల గుర్తుల మార్పు సంఖ్యకూ, ఋణాత్మక మూలముల సంఖ్యకూ మధ్యగల వ్యత్యాసము సరిసంఖ్య అయినందు వలన శూన్య సంఖ్యలో ఋణాత్మక మూలములు వుండవు. కావున ఋణాత్మక మూలముల సంఖ్య 1 అగును. $P(x)$ లో గల గుర్తులు మార్పు సంఖ్యకూ, ధనాత్మక మూలముల సంఖ్యకూ మధ్య గల వ్యత్యాసం సరిసంఖ్య అయినందు వలన శూన్య సంఖ్యలో లేదా రెండు ధనాత్మక మూలములు వుండును. కాని గుణకముల మొత్తము శూన్యము అయినందు వలన 1 ఒక మూలమగును. కావున రెండే రెండు ధనాత్మక మూలములు వుండును. స్పష్టముగా మిగిలిన రెండు మూలములు అవాస్తవ సంకీర్ణ మూలములగును.

అభ్యాసము 3.6

1. $9x^9-4x^8+4x^7-3x^6+2x^5+x^3+7x^2+7x+2=0.$ అను బహుపద సమీకరణమునకు అత్యధికముగా సాధ్యమగు ధనాత్మక మరియు ఋణాత్మక మూలముల సంఖ్యను చర్చించుము.
2. x^2-5x+6 మరియు $x^2-5x+16$ మొదలగు బహుపద సమాసముల అత్యధికముగా సాధ్యమగు ధనాత్మక మరియు ఋణాత్మక శూన్యముల సంఖ్యను చర్చించుము.
3. $x^9-5x^5+4x^4+2x^2+1=0$ అను సమీకరణమునకు కనీసము 6 అవాస్తవ (కల్పిత) మూలములు కలవని చూపుము.
4. $x^9-5x^8-14x^7=0$ అను బహుపద సమీకరణమునకు ధనాత్మక మరియు ఋణాత్మక మూలముల సంఖ్యను కనుగొనుము.
5. $x^9+9x^7+7x^5+5x^3+3x$ అను బహుపద సమాసమునకు వాస్తవ మరియు అవాస్తవ సంకీర్ణ శూన్యములను స్పష్టముగా కనుగొనుము.

అభ్యాసము 3.7

ఇవ్వబడిన నాలుగు సమాధానములనుండి సరియైన లేక దానికి తగిన సమాధానములను ఎన్నుకొనుము.

1. x^3+64 యొక్క ఒక శూన్యము
   (1) 0 (2) 4 (3) $4i$ (4) -4

FWDV8

2. f మరియు g అనునవి క్రమముగా m మరియు n అంతస్థు కలిగిన బహుపద సమాసములు మరియు $h(x)=(f\circ g)(x)$ అయిన, h యొక్క అంతస్థు
   (1) mn (2) $m+n$ (3) m^n (4) n^m
3. x లో n అంతస్థు గల ఒక బహుపద సమీకరణము కలిగియున్న మూలములు
   (1) n వేర్వేరు మూలములు (2) n వాస్తవ మూలములు
   (3) n సంకీర్ణ మూలములు (4) అత్యధికముగా ఒక మూలము

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 147 10-03-2022 10:56:25

4. α, β , కు γ మరియు x^3+px^2+qx+r అనునవి శూన్యములయిన, $\sum\frac{1}{\alpha}$ యొక్క విలువ

(1) $-\frac{q}{r}$ (2) $-\frac{p}{r}$ (3) $\frac{q}{r}$ (4) $-\frac{q}{p}$

5. అకరణీయ మూలపు సిద్ధాంతము ప్రకారము క్రింద ఇవ్వబడిన ఏ సంఖ్య, $4x^7+2x^4-10x^3-5$ అనుదానికి అకరణీయ శూన్యమగుటకు వీలుకాదు.

(1) -1 (2) $\frac{5}{4}$ (3) $\frac{4}{5}$ (4) 5

6. x^3-kx^2+9x అను బహుపద సమాసమునకు మూడు వాస్తవ శూన్యములు ఉండుటకు కావలసిన మరియు తగిన నిబంధన కలిగిన k విలువ

(1) $|k|\leq 6$ (2) $k=0$ (3) $|k|>6$ (4) $|k|\geq 6$

7. $[0,2\pi]$ లో $\sin^4 x-2\sin^2 x+1$ ని సంతృప్తి పరచు వాస్తవ సంఖ్యలు

(1) 2 (2) 4 (3) 1 (4) ∞

8. $x^3+12x^2+10ax+1999$ కు ఖచ్చితముగా ఒక ధనాత్మక సంఖ్య శూన్యముగా ఉండుటకు కావలసిన మరియు తగిన నిబంధన

(1) $a\geq 0$ (2) $a>0$ (3) $a<0$ (4) $a\leq 0$

9. x^3+2x+3 అను బహుపద సమాసమునకు

(1) ఒక ఋణాత్మక మరియు రెండు అవాస్తవ (కల్పిత) శూన్యములు ఉండును.

(2) ఒక ధనాత్మక మరియు రెండు అవాస్తవ (కల్పిత) శూన్యములు ఉండును.

(3) మూడు వాస్తవ శూన్యములుండును.

(4) శూన్యములు ఉండవు.

10. $\sum_{j=0}^{n} {}^nC_r(-1)^r x^r$ is అను బహుపద సమాసము యొక్క ధనాత్మక శూన్యముల సంఖ్య

(1) 0 (2) n (3) $<n$ (4) r

పాఠ్య సారాంశము

- అంతస్థ 2, లేక 3 కంటే ఎక్కువ కలిగిన (n>3) బహుపద సమాసపు సమీకరణనకు వియట్టా యొక్క సూత్రము.
- ప్రాథమిక బీజగణిత సిద్ధాంతము: $n\geq 1$ అంతస్థు గల ఒక బహుపద సమాసమునకు $\mathbb{C}$ లో కనీసము ఒక శూన్యమైనను ఉండును.
- సంయుగ్మ సంకీర్ణ మూలము సిద్ధాంతము: బహుపద సమీకరణపు గుణకములు వాస్తవ సంఖ్యలైన, అవాస్తవ సంకీర్ణ మూలములు జతలుగానే ఏర్పడును.
- అకరణీయ మూలము సిద్ధాంతము: $a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$ (ఇక్కడ $a_n\neq 0$ మరియు $a_0\neq 0$) అనునది పూర్ణసంఖ్యలను గుణకములుగా కలిగిన ఒక బహుపద సమీకరణము అగును. $\frac{p}{q}$ (ఇక్కడ $(p,q)=1$

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 148 10-03-2022 10:56:33

అగును) అనునది బహుపద సమీకరణపు మూలము అయిన, p యొక్క కారణాంకము a_0 గాను, q యొక్క కారణాంకము a_n గాను ఉండును.

- సరిసంఖ్యను మాత్రమే ఘాతముగా కలిగిన బహుపద సమీకరణములు, పాక్షికముగా కారణాంకపరచబడిన బహుపద సమీకరణములు, గుణకముల మొత్తము శూన్యమగు బహుపద సమీకరణములు, విలోమ సమీకరణముల లాంటి కొన్ని విశేష బహుపద సమీకరణములను సాధించు పద్ధతులు.
- డెస్కార్టెస్ నిబంధన: $P(x)$ అను బహుపద సమాసపు ధనాత్మక శూన్యముల సంఖ్య p అయిన మరియు $P(x)$ యొక్క గుణకముల గుర్తుల మార్పు సంఖ్య s అయిన, $s-p$ అనునది ఒక ఋణాత్మకము కాని సరి పూర్ణసంఖ్య యగును.

సంగణక కృత్యము (ICT CORNER)

https://ggbm.at/vchq92pg లేక Scan ను QR Code చేయుము.

Browser ను ఒపన్ చేసి, ఇవ్వబడిన URL లింక్‌ను టైప్ చేయుము. GeoGebra యొక్క "12th Standard Mathematics" పేజి కనిపించును. work book కు ఎడమ చేతి వైపు మీ పాఠ్యపుస్తకమునకు సంబంధించిన పలు అధ్యాయములు కనపడును. వాటిలో "Theory of Equations" అను అధ్యాయమును ఎంచుకొనుము. ఇప్పుడు ఈ పాఠ్యాంశమునకు సంబంధించి పలు work sheets లు ఈ పేజిలో చూడవచ్చును. "Relation between roots and co-efficients" అను work sheet ను ఎంచుకొనుము.

12th_Maths_EM_Vol1_CH 3_Theory_of_Eqn.indd 149 10-03-2022 10:56:34

అధ్యాయము
4

విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు

QBML8

"గణితం యొక్క శక్తి తరుచుగా ఒక విషయాన్ని మరొక దానికి మార్చడం,
జ్యామితిని భాషలోకి మార్చడం అగును."

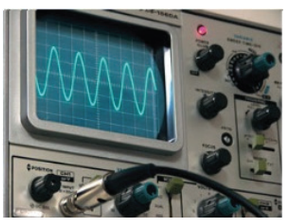
- **మార్కస్ డు సౌటాయ్** (**Marcus du Sautoy**)

4.1 పరిచయం



John F.W. Herschel

నిత్యజీవితంలో, కొలత సాధనాలను ఉపయోగించి పరిష్కరించడానికి అసాధ్యమైన సమస్యలకు పరిష్కారాలను పొందడానికి పరోక్ష కొలత ఉపయోగించబడుతుంది. కొలత సాధనాలను ఉపయోగించకుండా పర్వతాల ఎత్తులు మరియు ఎత్తైన భవనాలు వంటి కొలతలను కనుగొనడానికి త్రికోణమితి మనకు సహాయపడుతుంది. త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు మరియు వాటి విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు ఇంజనీరింగ్ మరియు భౌతిక శాస్త్రముతో సహా ఇతర శాస్త్రములలో విస్తృతముగా ఉపయోగించబడుతున్నాయి. పైగా ఈ ప్రమేయములు లంబ త్రిభుజము యొక్క రెండు భుజాల పొడవులను తెలిసిన త్రిభుజ సమస్యలను పరిష్కరించడములో మాత్రమే కాక, నిర్దిష్ట సమాకలన రకాలైన $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\, dx$ మరియు $\int \frac{1}{x^2 + a^2}\, dx$ లను గణన చేయుటకు మనకు సహాయపడతాయి. బ్రిటిష్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు జాన్ ఎఫ్.డబ్ల్యూ. హార్షెల్(1792–1871) విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయము $\arcsin(x)$ ను $\sin^{-1} x$ గా పరిచయం చేశారు. 1826వ సం॥లో తన తండ్రితో కలసి చేసిన పనికి అతనికి రాయల్ ఖగోళ సొసైటీ ద్వారా బంగారు పతకం లభించింది.

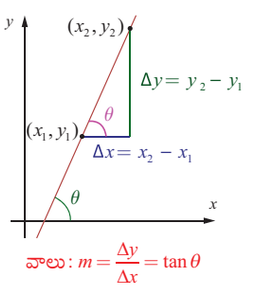


డోలన దర్శిని (oscilloscope) అనేది విద్యుత్ పరికరం. ఇది విద్యుత్ సంకేతాలను రేఖాచిత్రాలుగా మారుస్తుంది. ఇవి సైన్ ప్రమేయములుగా ఉంటాయి. నియంత్రణలను మార్చడం ద్వారా మనము సైన్ వక్రత యొక్క వ్యాప్తి, కాలం మరియు దిశ మార్పులను మార్చవచ్చు. డోలన దర్శిని మానవ హృదయ స్పందనలను కొలవడం వంటి అనేక అనువర్తనాలు ఉన్నాయి. ఇక్కడ త్రికోణమితి విధులు ప్రధాన పాత్ర పోషిస్తాయి.

విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయములను కొన్ని సులభ ఉదాహరణల మూలముగా వివరించెదము.

వివరణ 1 (వాలు సమస్య)

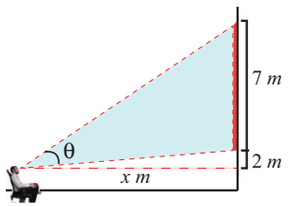
$y = mx + b$ అనునది ఒక సరళ రేఖగా పరిగణించబడినది. x అక్షములో θ-కోణము చేయు సరళరేఖ వాలును m పదాలలో కనుగొందాం. ఒత ప్రమేయం వాలు లేదా ప్రవణత **gradient** అనునది ఒక ప్రమేయం యొక్క మార్పురేటుగా నిర్వచింపబడుతుంది. దీనిని సాధారణంగా $m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ గా లెక్కిస్తాము. ప్రక్క పటంలోని లంబ త్రిభుజము (పటము 4,1) నుండి $\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ అందువలన $\tan\theta = m$ ఇక్కడ θ విలువ పరిష్కారానికి అవసరమయ్యే విలోమ త్రికోణమితియ ప్రమేయమును "విలోమ టాంజెంట్ ప్రమేయము" అంటారు.



పటము. 4.1

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 150 23-01-2023 15:25:11

వివరణ 2 (చలనచిత్ర ప్రదర్శన తెరలు)

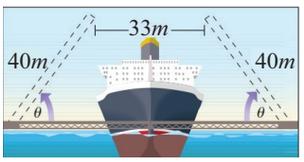


పటము. 4.2

చలనచిత్ర ప్రదర్శనశాలలో 7మీటర్ల పొడవు గల తెర ఉందని అనుకొందాం. అపుడు ఎవరైనా క్రింద కూర్చున్నప్పుడు తెర అడుగుభాగము కంటి మట్టము నుండి 2మీటర్లు పైన ఉంది. కంటి నుండి తెర దిగువనకు గీచిన ఒక రేఖకు మరియు కంటి నుండి తెర పైభాగమునకు గీచిన ఒక రేఖకు మధ్య ఏర్పడు కోణమును "వీక్షణ కోణం" అంటారు. పటము 4.2లో θ ఒక వీక్షణ కోణము. వ్యక్తి తెర నుండి x మీటర్ల దూరంలో కూర్చున్నాడు అనుకొందాం. వీక్షణ కోణం θ ను కనుగొనుటకు ఉపయోగపడు ప్రమేయము $\theta(x) = \tan^{-1}\left(\frac{9}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{2}{x}\right)$. ఇక్కడ వీక్షణ కోణము θ అనునది x యొక్క ప్రమేయము అని గమనించండి.

ZLH9D

వివరణ 3 (డ్రాబ్రిడ్జ్)



పటము. 4.3

ప్రక్క పటములో (4.3) కనబడునట్లుగా ద్విదళ వంతెన కలదు. వంతెన యొక్క ప్రతి దళము 40 మీటర్లు పొడవు ఉంటుంది. 33 మీటర్ల వెడల్పు గల ఒక ఓడ వంతెనను దాటవలెను. వంతెన గుండా ఓడ వెళ్ళుటకు వంతెన యొక్క ప్రతి దళము తెరవడానికి ఏర్పడు కనిష్ట కోణం θ ను కనుగొనుటకు విలోమ త్రికోణమితియ ప్రమేయం మనకు సహాయపడును.

11వ తరగతిలో(రేడియన్ కొలతలో కోణాలు వున్న) ప్రమాణ వృత్తమును ఉపయోగించి, వాస్తవ సంఖ్యల త్రికోణమితీయ ప్రమేయములను చర్చించాము. ఈ పాఠ్యాంశము నందు మనము విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయములు, వాటి రేఖా చిత్రములు మరియు ధర్మాలను అధ్యయనం చేస్తాము. మన చర్చలో ఎప్పటిలాగే $\mathbb{R}$ మరియు $\mathbb{Z}$ అనునవి క్రమముగా వాస్తవసంఖ్యల సమితిని మరియు పూర్ణసంఖ్యల సమితిని గుర్తించును. ఆరు త్రికోణమితీయ ప్రమేయముల యొక్క ఆవర్తన, ప్రదేశము మరియు వ్యాప్తి యొక్క నిర్వచనాలను గుర్తుచేసుకొందాం.

అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ అధ్యాయం పూర్తయిన తర్వాత విద్యార్థులు చేయగలిగినవి

- విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలను నిర్వచించడం
- విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల యొక్క ప్రధాన విలువలను గణన చేయడం.
- త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల రేఖా చిత్రం మరియు వాటి విలోమాలను గీయడం.
- విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల లక్షణాలను వర్తింపజేయడం మరియు కొన్ని వ్యక్తీకరణాలను గణన చేయడం.

4.2 కొన్ని ప్రాథమిక అంశాలు (Some Fundamental Concepts)

నిర్వచనం 4.1 ఆవర్తనం:

f యొక్కప్రదేశములోని ప్రతి x కు $x+p$, f యొక్కప్రదేశంలో ఉండునట్లు మరియు $f(x+p) = f(x)$ అగునట్లు $p > 0$ వ్యవస్థిమయితే వాస్తవ ప్రమేయము f ను ఆవర్తనము (**periodic**) అంటారు.

ఇటువంటి అన్ని సంఖ్యలలో అతిచిన్న దానిని ప్రమేయము f యొక్క ఆవర్తనకాలము అంటారు.

ఉదాహరణకు, 2π రేడియన్లు ఆవర్తనకాలం గల ఆవర్తన ప్రమేయాలు $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ మరియు e^{ix}, π రేడియన్లు ఆవర్తనకాలం గల ఆవర్తన ప్రమేయాలు $\tan x$ మరియు $\cot x$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 151 23-01-2023 15:25:14

నిర్వచనం 4.2 సరి మరియు బేసి ప్రమేయములు (Odd and Even functions)

ఒక వాస్తవ విలువ ప్రమేయం f ప్రదేశంలో ఉన్న ఒక్కొక్క x విలువకు $-x$ అనునది కూడా f ప్రదేశంలో ఉండి $f(-x)=f(x)$ అయ్యేవిధంగా ఉన్నట్లయితే f అనునది ఒక సరిప్రమేయం అంటారు. ఒక వాస్తవ విలువ ప్రమేయం f ప్రదేశంలో ఉన్న ఒక్కొక్క x విలువకు, $-x$ అనునది కూడా f ప్రదేశంలో ఉండి $f(-x)=-f(x)$ అయ్యేవిధంగా ఉన్నట్లయితే f అనునది ఒక బేసిప్రమేయము అంటారు. ఉదాహరణకు, x^3, $\sin x$, $\operatorname{cosec} x$, $\tan x$ మరియు $\cot x$ మొదలగునవి బేసి ప్రమేయాలగును. అయితే x^2, $\cos x$ మరియు $\sec x$ మొదలగునవి సరిప్రమేయాలగును.

విశేషాంశాలు

$f=g\pm h$ యొక్క ఆవర్తనము,అవి వ్యవస్థిమయిన క.సా.గు (ఆవర్తనం g, ఆవర్తనం h)గా ఉండును.

ఉదాహరణకు $y=\cos 6x+\sin 4x$ కు ఆవర్తనం π మరియు $y=\cos x-\sin x$ కు ఆవర్తనం 2π గా ఉండును.

4.2.1 త్రికోణమితి ప్రమేయము యొక్క ప్రదేశము మరియు వ్యాప్తి

కొన్ని త్రికోణమితి ప్రమేయాలకు ప్రదేశము మరియు వ్యాప్తిలను క్రింది పట్టికలో పొందుపరచబడినది.

త్రికోణమితి ప్రమేయాలు	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$	$\operatorname{cosec} x$	$\sec x$	$\cot x$
ప్రదేశం	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}\setminus\{n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\in\mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}\setminus\{n\pi,\ n\in\mathbb{Z}\}$
వ్యాప్తి	$[-1,\ 1]$	$[-1,\ 1]$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}\setminus(-1,\ 1)$	$\mathbb{R}\setminus(-1,\ 1)$	$\mathbb{R}$

4.2.2 ప్రమేయం యొక్క రేఖాచిత్రాలు

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ అనునది ఒక వాస్తవ విలువ ప్రమేయం మరియు ప్రదేశములో ఉన్న ఒక బిందువు x వద్ద ప్రమేయం f విలువ $f(x)$ అగును. తరువాత $(x, f(x)), x\in\mathbb{R}$ అను బిందువుల సమితి ప్రమేయం f రేఖాచిత్రమును నిర్ణయించును. సాధారణంగా xy- తలంపై ఉన్న ఒక రేఖాచిత్రం, ఒక ప్రమేయమును సూచించవలసిన అవసరము లేదు. అయినప్పటికీ ఒక రేఖా చిత్రం లంబ రేఖ పరీక్ష (ఏదేని ఒక లంబరేఖ ఒక రేఖాచిత్రమును గరిష్టంగా ఒకే ఒక బిందువు వద్ద ఖండించును)ను సంతృప్తిపరచిన ఆ రేఖాచిత్రం ఒక ప్రమేయమును సూచించును. ఒక ప్రమేయమునకు రేఖాచిత్రము గీచి దానిని అభ్యసించడం ఒక సరైన మార్గమగును మరియు దీని ధర్మములను రేఖాచిత్రము ద్వారా విశ్లేషించవచ్చును.

మన నిత్యజీవితంలో సంభవించు అలలు, రాత్రి/పగలు అను భ్రమణ సమయం మరియు సమయానుగుణంగా జరుగు అనేక సంభవాలు చూస్తున్నాము. త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు అన్నియూ ఆవర్తన ప్రమేయములు. కావున ఇటువంటి దృగ్విషయాలను త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల ద్వారా అర్థంచేసుకోగలం. త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలను వాటి రేఖాచిత్రాలు ద్వారా చూసి అర్థంచేసుకోవడం ద్వారా కాలనుగుణంగా జరుగు సంభవముల లక్షణాలను పరిశోధించి తెలుసుకొనవచ్చును.

త్రికోణమితీయ ప్రమేయ రేఖాచిత్రంను xy-తలంలో గీయుటకు స్వతంత్రత చలరాశి 'x' కోణంను రేడియన్లులలో సూచించును. దానికి సంబంధించిన అస్వతంత్ర చలరాశి 'y' అని గుర్తించవచ్చును. సైన్

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 152 23-01-2023 15:25:24

ప్రమేయమును $y = \sin x$ అని వ్రాయవచ్చును. ఇదేవిధంగా మరొక త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలను వ్రాయవచ్చును. ఇక పై వచ్చు పాఠ్యాంశమునందు త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు మరియు విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల రేఖాచిత్రాలను ఏ విధంగా గీయవచ్చును మరియు వాటి ధర్మాలు గురించి చదవబోతున్నాము.

4.2.3 రేఖాచిత్రం యొక్క వ్యాప్తి మరియు ఆవర్తనం

x-అక్షం నుండి ఒక ప్రమేయ రేఖాచిత్రానికి ఉన్న గరిష్ఠ దూరం ఆ ప్రమేయం యొక్క వ్యాప్తి అగును. ఏవిధంగా ఒక ప్రమేయం యొక్క వ్యాప్తి x-అక్షం నుండి దాని గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠ విలువకు ఉన్న ఎత్తు అగును. ఒక పూర్తి భ్రమణం చేయుటకు ప్రమేయమునకు కావలసిన దూరం ప్రమేయము యొక్క ఆవర్తనం (Period) అగును.

విశేషాంశము

(i) ఆవర్తన ప్రమేయాల రేఖాచిత్రము నందు దాని యొక్క ఆవర్తన పొడవు యొక్క అంతరంలో రేఖాచిత్రము యొక్క కొంత భాగము పునరావృతమగును.

(ii) బేసి ప్రమేయపు రేఖాచిత్రము మూలబిందువు ఆధారముగా సౌష్ఠవంగాను మరియు సరిప్రమేయపు రేఖాచిత్రము y-అక్షం ఆధారంగా సౌష్ఠవంగాను ఉండును.

4.2.4 విలోమ ప్రమేయం

ఇవ్వబడు ఒక విలువకు ఎల్లప్పుడూ ఒకేఒక ఏకైక విలువను సమాధానముగా ఇచ్చు నియమమే ఒక ప్రమేయము అని గుర్తించుకొందాము. ప్రమేయమునకు విలోమము ఉండుటకు పైన చెప్పబడిన ప్రమేయము యొక్క నిబంధనను పూర్తిచేయుట అవసరమగుచున్నది. దీనిని మనం ఉదాహరణ ద్వారా వివరిస్తాము.

విరూప కవలలు గల ప్రతి మానవుల సమితిని గమనించెదము. అలా గమనించినచో ఈ సమితి నుంచి ప్రతి మానవుడు ఒక రక్త వర్గము మరియు ఒక అనువంశిక పదార్థము (DNA) వరుసను పొందియున్నారు. ఇవ్వన్నియు ప్రమేయాలు,ఇక్కడ ఒక వ్యక్తి ఇన్‌పుట్ రక్త వర్గము అయిన DNA ఔట్‌పుట్ అగును. ఒకే రక్త వర్గము గల మనుషులు చాలామంది కలరని మనకు తెలియును. కాని DNA వరుస ఒక్కొక్కరికి ఒక్కోరకంగా ఉండును. దీనిని వెనుక నుండి జత చేయగలమా? ఉదాహరణకు,రక్త వర్గము తెలిసినచో దాని ద్వారా ఆ మాదిరి రక్తపు రకం ముఖ్యంగా ఎవరి నుండి తీసుకోబడింది అని చెప్పవచ్చునా? చెప్పలేము అనునదే దీనికి సమాధానము అగును. వేరేవిధంగా ఒక అనువంశిక పదార్థ వరుసను తెలిసి ఉన్నచో దానికి సంబంధించిన మనిషిని గుర్తించగలం. DNA ఉదహరణ వలె ఒక ప్రమేయము అన్వేక ప్రమేయమయిన వెనుక నుండి జత చేయుట సాధ్యమగును. ఈవిధంగా రివర్స్‌లో జత చేయుటను విలోమప్రమేయము అంటారు.ప్రమేయము చేసే పనిని విలోమ ప్రమేయము రివర్స్‌గా చేయునని చెప్పవచ్చును.

ఒక లంబకోణ త్రిభుజంలో ఒక అల్పకోణము మరియు ఒక భుజపు పొడవు ఇవ్వబడినచో, ఇతర కోణములను మరియు ఇతర భుజముల పొడవులను కనుగొనుట సులభం అగును. కాని ఒక లంబకోణ త్రిభుజపు రెండు భుజములు మాత్రమే ఇవ్వబడినచో భుజముల నిష్పత్తిని ఉపయోగించి కోణమును కనుగొనుటకు ఒక పద్ధతి అవసరమగుచున్నది. ఇటువంటి సమయంలో త్రికోణమితీయ ప్రమేయము యొక్క విలోమ ప్రమేయము ముఖ్యత్వము తెలుపుతున్నది.

ఏ ఒక్క త్రికోణమితి ప్రమేయము దాని పూర్తి ప్రదేశం మీద అన్వేక ప్రమేయం కాదని మనకు తెలియును. ఉదాహరణకు, $\sin\theta = 0.5$ అని తీసుకొన్నచో $\theta = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}, -\frac{11\pi}{6}, \cdots$ అను అనంతమైన θ .యొక్క విలువలు ఇవ్వబడిన సమీకరణమును తృప్తిచేయును. కావున, ఇవ్వబడిన $\sin\theta$ కు తగ్గట్లు θ కు

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 153 23-01-2023 15:25:26

ఒకేఒక విలువలను కనిపెట్టుటకు వీలుకాదు. ఈవిధంగా ఒకే విలువకు పలు కోణములు చేకూర్చు పరిస్థితి ఏర్పడకుండునట్లు, విలోమ త్రికోణమితి ప్రమేయమును నిర్వచించుటకు ముందుగానే తగిన ప్రదేశపు హద్దులకు లోబడి ఉండునట్లు ప్రమేయపు ప్రదేశాన్ని నిర్వచించవలయును.

త్రికోణమితీయ ప్రమేయపు విలోమమును నిర్మించునపుడు నిర్దేశించబడిన అంతరంలో ఆ ప్రమేయము అన్వేక ప్రమేయంగా ఉండునట్లు సరిపోవు ఒక చిన్న అంతరంను తీసుకొనెదము. కాని ఆవిధంగా నిర్దేశించబడిన అంతరమును ప్రదేశంగా గల ప్రమేయపు వ్యాప్తి ఆ ప్రమేయపు సంపూర్ణ వ్యాప్తిగా ఉండవలెను. ఈ పాఠ్యాంశములో నిర్దేశించబడ్డ ప్రదేశములలో నిర్వచింపబడ్డ త్రికోణమితీయ ప్రమేయపు విలోమ ప్రమేయములను నిర్వచించెదము.

4.2.5 విలోమ ప్రమేయముల రేఖాచిత్రము

f అనునది ఒక ద్విగుణ ప్రమేయము మరియు f యొక్క విలోమము f^{-1} అని తీసుకొనెదము. కావున $y = f(x)$ అయిన, ఉంటే మాత్రమే (if and only if) $x = f^{-1}(y)$ అగును. కావున (a, b) అనునది f యొక్క రేఖాచిత్రంలో ఒక బిందువుగా ఉండుటకు కావలసిన మరియు తగిన నిబంధన సరూప బిందువుగా (b, a) అను బిందువు f^{-1} రేఖాచిత్రంలో ఉండవలెను. ఈ వివరణ ద్వారా f యొక్క రేఖాచిత్రంలో గల x మరియు y అక్షములను పరస్పర మార్పు చేయడం ద్వారా f^{-1} యొక్క రేఖాచిత్రమును పొందవచ్చునని అర్థమగుచున్నది. వేరేవిధంగా $y = x$ అను సరళరేఖ ద్వారా ఏర్పడు f యొక్క రేఖాచిత్రపు ప్రతిబింబముగా (mirror image) యొక్క రేఖాచిత్రము ఉండునని చెప్పవచ్చును. లేదా $y = x$ ను సరళరేఖ ద్వారా యొక్క రేఖాచిత్రపు పరావర్తనముగా f యొక్క రేఖాచిత్రం ఉండునని చెప్పవచ్చును.

4.3 సైన్‌ప్రమేయం మరియు విలోమ సైన్ ప్రమేయం (Sine Function and Inverse Sine Function)

$\mathbb{R}$ ను ప్రదేశముగా మరియు $[-1, 1]$ ను వ్యాప్తిగా కలిగినప్రమేయమును సైన్‌ప్రమేయముగా గుర్తుచేసుకొందాం. సైన్ ప్రమేయము $y = \sin x$ అని మరియు సైన్ విలోమ ప్రమేయమును $y = \sin^{-1} x$ లేదా $y = \arcsin(x)$ అని చూపుతాము. ఇక్కడ -1 అనునది ఘాతం కాదు. ఇది విలోమాన్ని సూచిస్తుంది కాని వ్యుత్క్రమము కాదు

x యొక్క అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలకు $\sin(x + 2\pi) = \sin x$ అనునది నిజమగును.. అదేవిధంగా $0 < p < 2\pi$ నందు $\sin(x + p)$ ల విలువ $\sin x$ కు సమానంగా ఉండవలసిన అవసరం లేదు. అందువలన సైన్ ప్రమేయం యొక్క ఆవర్తనం 2π అగును.

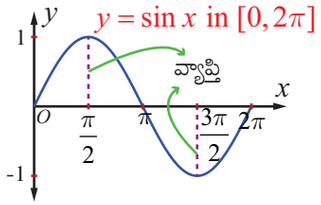
4.3.1 సైన్ ప్రమేయం యొక్క రేఖాచిత్రం (The graph of sine function)

సైన్ ప్రమేయం యొక్క రేఖాచిత్రము అనునది $y = \sin x$ యొక్క రేఖాచిత్రం అగును. ఇక్కడ x అనునది వాస్తవ సంఖ్య. సైన్ ప్రమేయము ఆవర్తనము 2π . కావున, తరువాత వచ్చే ప్రతి అంతరం $\cdots, [-2\pi, 0], [0, 2\pi], [2\pi, 4\pi], [4\pi, 6\pi], \ldots$ లో సైన్ ప్రమేయం యొక్క రేఖాచిత్రం ఒకే ఆకారము పునరావృతమగును. కావున $x \in [0, 2\pi]$ అనే విలువలకు మాత్రం రేఖాచిత్రం నిర్మించగలిగితే చాలు. $x \in [0, 2\pi]$ అయిన $y = \sin x$ అనే రేఖాచిత్రంలో ఉన్న (x, y) బిందువులలో తెలిసిన కొన్ని బిందువుల విలువలను క్రింది పట్టికలో పొందుపరచబడినవి.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 154 23-01-2023 15:25:38

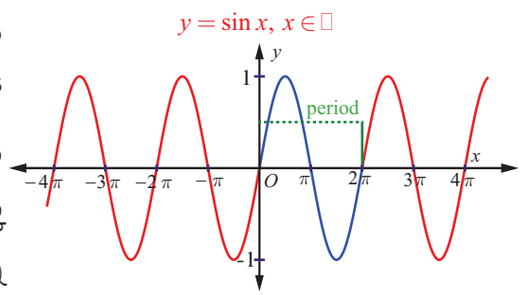
x (రేడియన్‌లో)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y=\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0

సైన్ పట్టిక నుండి $y=\sin x$, $0\le x\le 2\pi$, కావున ఈ రేఖాచిత్రం ఆది బిందువు నుండి ప్రారంభమవుతుందని తెలియుచున్నది. 0 నుండి $\frac{\pi}{2}$ వరకు x విలువ పెరిగే కొలది, $y=\sin x$ యొక్క విలువ 0 నుండి 1 వరకు పెరుగుచున్నది. $\frac{\pi}{2}$ నుండి π వరకు పెరుగుతూ, $\frac{3\pi}{2}$ వరకు కొనసాగుతూ పెరుగుచున్నది. ఇచ్చట y విలువ 1 నుండి 0 వరకు తగ్గుతూ అదేవిధంగా -1 వరకు తగ్గుచున్నది. $\frac{3\pi}{2}$ నుండి 2π వరకు x యొక్క విలువ పెరిగేకొలది .... యొక్క విలువ కూడా -1 నుండి 0 వరకు పెరుగుచున్నది. పై పట్టికలోని బిందువులను రేఖాచిత్రంలో గుర్తించి వక్రరేఖను సరళంగా కలుపబడిన పటము4. 4లో చూడగలం.



పటము. 4.4

$y=\sin x$, $x\in\mathbb{R}$ అనునది 2π ఆవర్తనం కలిగి ఉండడం వలన $y=\sin x$ యొక్క పూర్తి వక్రరేఖ $[0, 2\pi]$ అంతరంలో నిర్మితమైన రేఖాచిత్రము. ఈ అంతరంకు ఇరువైపుల పునరావృతమగును పటము 4. 5లో సైన్ ప్రమేయము యొక్క పూర్తి రేఖాచిత్రము చూపబడియున్నది. 0 నుండి 2π వరకు ఉన్న సైన్ వక్రత యొక్క భాగమును ఒక చక్రీయము అంటారు. దీని యొక్క వ్యాప్తి 1 అగును.



పటము. 4.5

గమనిక

$0\le x\le\pi$ నందు మొదటి మరియు రెండవ పాదంలో సైన్ ప్రమేయ విలువలకు $\sin x\ge 0$ అగును. $\pi<x<2\pi$ నందు మూడవ మరియు నాల్గవ పాదంలో సైన్ విలువలక $\sin x<0$ అగును.

4.3.2 సైన్ ప్రమేయం యొక్క లక్షణాలు (Properties of the sine function)

$y=\sin x$ యొక్క రేఖాచిత్రం నుండి ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన సైన్ ప్రమేయ లక్షణాలను గురించి తెలుసుకొందాము.

(i) రేఖాచిత్రం నందు విఛిన్నంగా లేదా విరామం ఉండదు, కావున సైన్ ప్రమేయం అవిచ్ఛిన్నం.

(ii) వక్రం ఆదిబిందువు అనుసరించి సౌష్ఠంగా ఉండును. కావున సైన్ ఒక బేసి ప్రమేయం అగును.

(iii) సైన్ ప్రమేయం యొక్క గరిష్ఠ విలువ 1ని $x=\cdots,-\frac{3\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{2},\cdots$ ల వద్ద కలిగి ఉండును. సైన్‌ప్రమేయం యొక్క కనిష్ఠ విలువ -1ని $x=\cdots,-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2},\frac{7\pi}{2},\cdots$ అయిన విలువలు కలిగి ఉండును. వేరేవిధంగా $x\in\mathbb{R}$ కు $-1\le\sin x\le 1$ అని చెప్పవచ్చు.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 155 23-01-2023 15:25:49

4.3.3 విలోమ సైన్ ప్రమేయము మరియు వాటి లక్షణాలు

సైన్ ప్రమేయం దానికి సంబంధించిన సంపూర్ణ ప్రదేశం $\mathbb{R}$ లో అన్వేక ప్రమేయం కాదు. దీనిని $y=b,\ -1\le b\le 1,$ అను ఒక్కొక్క రేఖ సమాంతర రేఖ $y=\sin x$ అను రేఖాచిత్రమును అనేకసార్లు అనంతముగా ఖండించుట వలన తెలుసుకొందుము. అంటే అన్వేక ప్రమేయమును పరిశోధించు పరికరమైన సమాంతరరేఖ పరీక్ష ద్వారా సైన్‌ప్రమేయము నిరాకరించబడుచున్నది. $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ అను సైన్ ప్రమేయపు ప్రదేశంను పరిమితం చేయగలిగితే దాని వ్యాప్తి $[-1,1]$ అనుట మాత్రమే కాకుండా సైన్ ప్రమేయం అన్వేక మరియు సంగ్రస్తము (ద్విగుణ)అగును. ఇప్పుడు $[-1,1]$ ను ప్రదేశంగాను $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ ను వ్యాప్తిగాను కలిగిన విలోమ సైన్ ప్రమేయం నిర్వచించవచ్చును.

నిర్వచనం 4.3

$\sin^{-1}x$ అగునట్లు $-1\le x\le 1,$ కు ఏకైక సంఖ్య y ను $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ నిర్వచిస్తాము. మరోకవిధంగా విలోమ ప్రమేయము $\sin y=x$ ను $\sin^{-1}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ నిర్వచించుటకు నిబంధన $\sin y=x$ మరియు $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right].$

గమనిక

(i) $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ అను పరిమిత ప్రదేశము నందు సైన్ ప్రమేయము అన్వేకమగును. మూల బిందువుతో కూడిన పెద్ద తరగతి అంతరమునకు సైన్ ప్రమేయం అన్వేకము కాదు.

(ii) $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ యొక్క వ్యాప్తి $\sin^{-1}x$ లో కొసైన్ ప్రమేయము ఋణాత్మకంకాని విలువగా ఉండును. ఇదే కాకుండా సమాకలన కలన గణితము నందు కొన్ని త్రికోణమితీయ ప్రతిక్షేపణలకు చాలా ముఖ్యమైనదిగా గమనించగలరు.

(iii) సైన్ ప్రమేయం యొక్క విలోమమును వివరించునపుడు,
$\sin:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$ మరియు $\sin^{-1}:[-1,1]\to\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ అని గుర్తించుకొనవలయును.

(iv) $\ldots\left[-\frac{5\pi}{2},-\frac{3\pi}{2}\right],\left[-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right],\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right],\left[\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}\right]\ldots$ అను అంతరంలో ఏదైనా ఒక అంతరమునకు సైన్ ప్రమేయము యొక్క ప్రదేశము పరిమితం చేయవచ్చును. ఈవిధమైన అంతరములలో సైన్‌ప్రమేయం అన్వేకము మరియు $[-1,1]$. అనేది దీని వ్యాప్తిగా ఉండును.

(v) పరిమిత ప్రదేశము $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ అనునది సైన్ ప్రమేయం యొక్క ప్రధాన ప్రదేశము (**principal domain**) మరియు $-1\le x\le 1$ లో $y=\sin^{-1}x$ అను ప్రమేయ విలువలు ప్రధాన విలువలు (**principal values**) అని పిలువబడును..

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 156 23-01-2023 15:25:57

$y = \sin^{-1} x$ యొక్క నిర్వచనం ద్వారా ఈ క్రింది వాటిని తెలుసుకొందుము:

(i) $-1 \le x \le 1$ మరియు $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ అని ఉన్నప్పుడు, $y = \sin^{-1} x$ అయిన, అయినప్పుడు మాత్రమే $x = \sin y$ అగును.

(ii) $|x| \le 1$ అయితే $\sin\left(\sin^{-1} x\right) = x$ అగును. $|x| > 1$ అయినపుడు ఎటువంటి అర్థము లేదు.

(iii) $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ నందు $\sin\left(\sin^{-1} x\right) = x$ అగును. $\sin^{-1}(\sin 2\pi) = 0 \ne 2\pi$ అనునది గుర్తించు కొనవలయును.

(iv) $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ నందు $\sin^{-1}\left(\sin x\right) = \pi - x$ అగును. $\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$ అయినప్పుడు $-\frac{\pi}{2} \le \pi - x \le \frac{\pi}{2}$ వచ్చునని గుర్తించుకొనవలయును.

(v) $y = \sin^{-1} x$ అనునది ఒక బేసి ప్రమేయము.

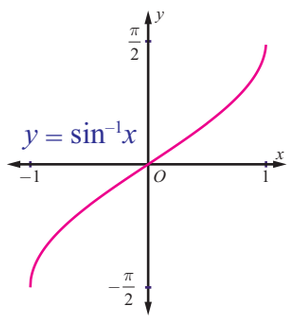
విశేషాంశము

$\sin x = \frac{1}{2}$ మరియు $x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ అను సమీకరణముల మధ్య భేధమును తెలుసుకొనవలయును. $\sin x = \frac{1}{2}$ అను సాధించుట కొరకు $(-\infty, \infty)$ అంతరంలో $\sin x = \frac{1}{2}$ వచ్చునట్లు అన్ని x విలువలను కనుగొనవలయును. అదేవిధముగా $x = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ లో ఉన్న x విలువను కనుగొనుటకు $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ అంతరంలో $\sin x = \frac{1}{2}$ వచ్చునటు వంటి ఒకేఒక విలువను కనుగొనవలయును.

4.3.4 విలోమ సైన్ ప్రమేయ రేఖాచిత్రము(Graph of the inverse sine function)

$\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ అను విలోమ సైన్ ప్రమేయం $[-1, 1]$ అంతరంలో x అను వాస్తవ సంఖ్య ఉత్పధితములు (input) ఇచ్చుచున్నది. ఇదేవిధంగా $y = \sin^{-1} x$ సమీకరణమును ఉపయోగించి (x, y) అను

x	y
-1	$-\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$
0	0
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
1	$\frac{\pi}{2}$



పటము. 4.6

కొన్ని బిందువులు కనుగొని వాటిని xy- తలంలో గుర్తిస్తాము. x యొక్క విలువ -1 నుండి 1 వరకు పెరిగే కొలది y విలువ $-\frac{\pi}{2}$ నుండి $\frac{\pi}{2}$ వరకు పెరుగుతుంది. ఈ బిందువులను వక్రముతో కలుపునపుడు $y = \sin^{-1} x$ యొక్క రేఖాచిత్రం ఏర్పడును. ఇది ప్రక్క పటం 4.6లో గమనించుము.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 157 23-01-2023 15:26:08

గమనిక

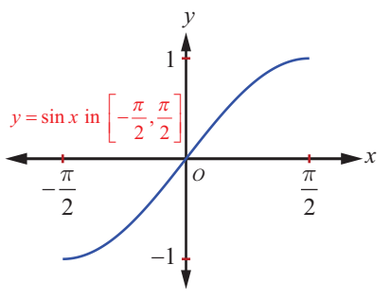
$y = \sin^{-1} x$ రేఖాచిత్రమును

(i) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ అంతరంలో $y = \sin x$ యొక్క పూర్తి రేఖా చిత్ర భాగమును $y = x$ రేఖతో ప్రతిబింబించిన పొందవచ్చును. లేదా $y = \sin x$ రేఖాచిత్రంలో x మరియు y అక్షములను పరస్పరము మార్చడం వలన పొందవచ్చు.

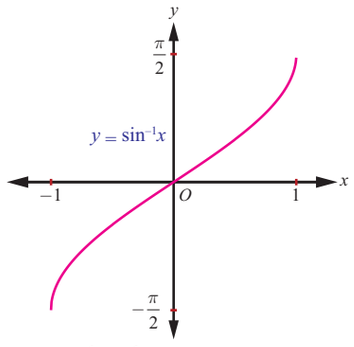
(ii) ఆది బిందువు ద్వారా పోవును.

(iii) మూలబిందువుకు సౌష్ఠవంగా ఉన్నందువలన $y = \sin^{-1} x$ అనునది బేసి ప్రమేయం అగును.

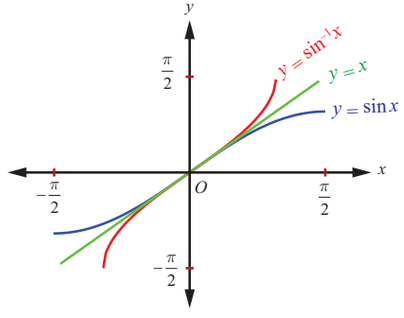
$y = \sin x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ మరియు $y = \sin^{-1} x,\ -1 \le x \le 1$ వీటి రేఖాచిత్రములు వేరువేరుగా, రెండు రేఖాచిత్రాలను కలిపి అర్థం చేసుకోవడానికి ఈ క్రింద ఇవ్వబడినవి.



పటము. 4.7



పటము. 4.8



పటము. 4.9

$y = \sin^{-1} x$ రేఖాచిత్రము అనునది $y = x$ అను రేఖ ఆధారంగా $y = \sin x,\ -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ యొక్క రేఖాచిత్రముకు దర్పణ ప్రతిబింబము అని పటము 4.9 వివరిస్తున్నది. అదేవిధంగా సైన్ ప్రమేయం మరియు విలోమ సైన్ ప్రమేయమును ఆదిబిందువు ఆధారంగా సౌష్ఠవంగా ఉన్నదని తెలియుచున్నది.

ఉదాహరణ 4.1

(రేడియన్ మరియు డిగ్రీలలో) $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ యొక్క ప్రధాన విలువలను కనుగొనుము.

సాధన

$\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = y$ అయితే $\sin y = -\frac{1}{2}$ అగును.

$\sin^{-1} x$ ప్రధాన విలువ యొక్క వ్యాప్తి $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ అగును. కావున $\sin y = -\frac{1}{2}$ అగునట్లు $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ తెలుసుకనవలయును. కావున $y = -\frac{\pi}{6}$ గా లభించును.

కావున $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ కు ప్రధాన విలువ $-\frac{\pi}{6}$ అగును. దీని కోణ విలువ $-30°$ అగును. ■

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 158 23-01-2023 15:26:17

ఉదాహరణ 4.2

$\sin^{-1}(2)$ కు ప్రధాన విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$y = \sin^{-1} x$ ప్రదేశం $[-1, 1]$ అయినందువలన $2 \notin [-1, 1]$ అందువలన $\sin^{-1}(2)$ కు ప్రధాన విలువ లేదు. ■

ఉదాహరణ 4.3

క్రింది వాటికి ప్రధాన విలువలను కనుగొనుము.

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\sin^{-1}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (iii) $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

సాధన

$\sin^{-1} : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ అనునది $\sin^{-1} x = y$ అని ఇవ్వబడినది మరియు అవసరమైన నిబంధన $x = \sin y$ అగును. ఇక్కడ $-1 \le x \le 1$ మరియు $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ అయితే

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$, అందువలన $\frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ మరియు $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(ii) $\sin^{-1}\left(\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$, అందువలన $-\frac{\pi}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ అగును.

(iii) $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \sin^{-1}\left(\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) = \sin^{-1}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$, అందువలన $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. ■

ఉదాహరణ 4.4

$\sin^{-1}\left(2 - 3x^2\right)$ యొక్క ప్రదేశమును కనుగొనుము.

సాధన

$\sin^{-1}(x)$ ప్రదేశము $[-1, 1]$ అగును.

కాని $-1 \le 2 - 3x^2 \le 1$ అందువలన $-3 \le -3x^2 \le -1$.

$-3 \le -3x^2$, గణించునపుడు $x^2 \le 1$ మరియు ... (1)

$-3x^2 \le -1$, గణించునపుడు $x^2 \ge \frac{1}{3}$ ... (2)

సమీకరణం (1) మరియు (2)ల నుండి $\frac{1}{3} \le x^2 \le 1$ లభించును. కావున $\frac{1}{\sqrt{3}} \le |x| \le 1$ దీని నుండి $x \in \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{3}}, 1\right]$ అని లభించును. ఎందుకనగా $a \le |x| \le b$. అయిన $x \in [-b, -a] \cup [a, b]$ అగును. ■

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 159 23-01-2023 15:26:28

అభ్యాసము 4.1

1. క్రింది వాటికి x విలువలను కనుగొనుము.

   (i) $-10\pi \le x \le 10\pi$ మరియు $\sin x = 0$ (ii) $-3\pi \le x \le 3\pi$ మరియు $\sin x = -1$.

2. ఈక్రింది వాటికి ఆవర్తనము మరియు వ్యాప్తిని కనుగొనుము.

   (i) $y = \sin 7x$ (ii) $y = -\sin\left(\frac{1}{3}x\right)$ (iii) $y = 4\sin(-2x)$.

3. $0 \le x < 6\pi$ కు $y = \sin\left(\frac{1}{3}x\right)$ రేఖాచిత్రమును గీయుము.

4. విలువలను కనుగొనుము. (i) $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$ (ii) $\sin^{-1}\left(\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.

5. x యొక్క ఏ విలువకు $\sin x = \sin^{-1} x$ అగును?

6. ఈ క్రింది వాటికి ప్రదేశమును కనుగొనుము.

   (i) $f(x) = \sin^{-1}\left(\frac{x^2+1}{2x}\right)$ (ii) $g(x) = 2\sin^{-1}(2x-1) - \frac{\pi}{4}$.

7. $\sin^{-1}\left(\sin\frac{5\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{5\pi}{9}\sin\frac{\pi}{9}\right)$ కు విలువలను కనుగొనుము.

4.4 కొసైన్ ప్రమేయము మరియు విలోమ కొసైన్ ప్రమేయము (The Cosine Function and Inverse Cosine Function)

కొసైన్ ప్రమేయము అనునది $\mathbb{R}$ ను ప్రదేశంగాను మరియు $[-1, 1]$ ను వ్యాప్తిగాను కలిగిన ప్రమేయము. కొసైన్ ప్రమేయమును $y = \cos x$ అని మరియు విలోమ కొసైన్ ప్రమేయమును $y = \cos^{-1} x$ లేదా $y = \arccos(x)$ అని చూపుతాము. x యొక్క అన్ని వాస్తవసంఖ్యల కు $\cos(x + 2\pi) = \cos x$ అనునది సత్యమగును. అదేవిధంగా $0 < p < 2\pi$, $x \in \mathbb{R}$, కు $\cos(x + p)$, $\cos x$ కు సమానంగా ఉండనవసరం లేదు. కావున $y = \cos x$ యొక్క ఆవర్తనము 2π అగును.

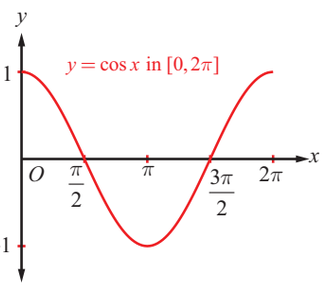
4.4.1 కొసైన్ ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రములు (Graph of cosine function)

కొసైన్ ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రము $y = \cos x$ కూడా రేఖాచిత్రము అగును. ఇక్కడ x అనునది వాస్తవ సంఖ్య. కొసైన్ ప్రమేయము యొక్క ఆవర్తనము 2π కావున $\cdots, [-4\pi, -2\pi], [-2\pi, 0], [0, 2\pi], [2\pi, 4\pi], [4\pi, 6\pi], \cdots$ యొక్క ప్రతి అంతరంలో $x \in [0, 2\pi]$. కొసైన్ ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రములు ఒకే ఆకారము పునరావ తమగును. కావున $x \in [0, 2\pi]$ అనే విలువకు మాత్రమే రేఖాచిత్రమును నిర్మించగలిగితే చాలు. $x \in [0, 2\pi]$ అయిన $y = \cos x$ అని రేఖాచిత్రంలో ఉన్న (x, y) బిందువులలో కొన్ని బిందువుల విలువలను క్రింది పట్టికలో పొందుపరచబడినది.

x (రేడియను)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$y = \cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

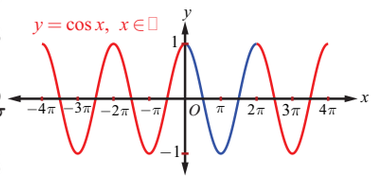
12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 160 23-01-2023 15:26:44

పై పట్టిక నుండి $y = \cos x,\ 0 \le x \le 2\pi$, రేఖాచిత్రము (0, 1) నుండి ప్రారంభమవుతున్నదని తెలియుచున్నది. x విలువ 0 నుండి π వరకు పెరిగే కొలది, $y = \cos x$ యొక్క విలువ 1 నుండి -1 వరకు తగ్గుచున్నది. x యొక్క విలువ π నుండి 2π వరకు పెరిగే కొలది y యొక్క విలువ -1 నుండి 1 వరకు పెరుగుచున్నది. పై పట్టికలో ఉన్న బిందువులను రేఖాచిత్రంలో గుర్తించి వక్రరేఖను గీయుము. ఈ రేఖాచిత్రం యొక్క ఒక భాగమును పటము 4.10 నందు చూడవచ్చును.



పటము. 4.10

$x \in \mathbb{R}$ కు $y = \cos x$ రేఖాచిత్రము నందు $[0, 2\pi]$ అంతరంకు ఇరువైపుల గల భాగము పునరావృతమగును మరియు ఇది పటము 4.11లో చూపబడినది. కొసైన్ ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రము నుండి $\cos x$ యొక్క విలువ మొదటి పాదములో $\left(0 \le x \le \frac{\pi}{2}\right.$ కు$\left.\right)$ ధనాత్మకంగాను, రెండవ పాదంలో $\left(\frac{\pi}{2} < x \le \pi\right.$ కు$\left.\right)$ మరియు మూడవ పాదంలో $\left(\pi < x < \frac{3\pi}{2}\right.$ కు$\left.\right)$



పటము. 4.11

ఋణాత్మకంగాను తరువాత నాల్గవ పాదంలో $\left(\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi\right.$ కు$\left.\right)$. ధనాత్మకంగా ఉండునని తెలియును.

గమనిక

రేఖాచిత్రం నుండి x విలువలు $\cos(-x) = \cos x$ అని తెలియుచున్నది. $y = \cos x$ ఒక సరి ప్రమేయమని రుజువగుచున్నది.

4.4.2 కొసైన్ ప్రమేయము యొక్క లక్షణాలు (Properties of the cosine function)

$y = \cos x$ రేఖాచిత్రం నుండి కొసైన్ ప్రమేయము యొక్క లక్షణాలు క్రింద పొందుపరచబడినది.

(i) ఈ వక్రము నందు ఎక్కడా అంతరము లేదు (లేదా) విచ్ఛిన్నము కాలేదు. కావున కొసైన్ ప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నం అగును.

(ii) y-అక్షానికి అనుగుణంగా రేఖాచిత్రం సౌష్ఠవంగా ఉన్నందువలన కొసైన్ ప్రమేయము సరి ప్రమేయము అగును.

(iii) $x = \ldots, -2\pi, 0, 2\pi, \ldots$ అను విలువలకు కొసైన్ ప్రమేయము గరిష్ఠ విలువ 1 ను $x = \ldots, -\pi, \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots.$ అను విలువలకు కొసైన్ ప్రమేయము కనిష్ఠ విలువ -1ను పొందును. మరోకవిధంగా $-1 \le \cos x \le 1,\ x \in \mathbb{R}$ అగును.

విశేషాంశము

(i) $y = \cos x$ రేఖాచిత్రమును $\frac{\pi}{2}$ రేడియన్లు కుడిప్రక్కకు జరిపిన $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ అను రేఖాచిత్రము ద్వారా పొందగలము. ఈ రేఖాచిత్రం $y = \sin x$ అను రేఖాచిత్రమును పోలియుండును. ఇక్కడ $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$ గా గమనించవచ్చును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 161 23-01-2023 15:26:54

(ii) $y = A\sin\alpha x$ మరియు $y = B\cos\beta x$ అనునవి క్రమముగా $-|A| \le A\sin\alpha x \le |A|$ మరియు $-|B| \le B\cos\beta x \le |B|$ అసమానతలను సంతృప్తిపరచును. $y = \mathrm{A}\sin\alpha x$ యొక్క వ్యాప్తి మరియు ఆవర్తనం క్రమముగా $|A|$ మరియు $\frac{2\pi}{|\alpha|}$ అగును. $y = B\cos\beta x$ యొక్క వ్యాప్తి మరియు ఆవర్తనం, క్రమముగా $|B|$ మరియు $\frac{2\pi}{|\beta|}$ అగును.

$y = A\sin\alpha x$ మరియు $y = B\cos\beta x$ అనునవి సైనుసోయిడల్ ప్రమేయములు (sinusoidal functions) అగును.

(iii) $y = A\sin\alpha x$ మరియు $y = B\cos\beta x$ అంతరములపై రేఖాచిత్ర భాగములను పొడిగించిన క్రమముగా $\left[0, \frac{2\pi}{|\alpha|}\right]$ మరియు $\left[0, \frac{2\pi}{|\beta|}\right]$ మొదలగువాటి రేఖాచిత్రాలను పొందవచ్చును.

అనువర్తనాలు (Applications)

సముద్రపు అలలు మరియు వార్షిక ఉష్ణోగ్రతలు వంటి దృగ్విషయాలు సహాయముతో పునరావృతమయ్యే తమయ్యే చక్రం. ఇవి సైనుసోయిడల్‌ను ఉపయోగించి రూపొందించబడినది. ఉదాహరణకు సైనుసోయిడల్ ప్రమేయము $y = d + a\cos(bt - c)$ ఉపయోగించి సముద్రపు అలలను నమూనాలుగా రూపొందించుటకు క్రింది సోపానాలు ఇవ్వబడినవి.

(i) సైనుసోయిడల్ రేఖాచిత్రం వ్యాప్తి అనునది, రేఖాచిత్రంలో y - యొక్క గరిష్ఠ విలువ మరియు కనిష్ఠ విలువల వ్యత్యాసములో సగమగును.

అందువలన వ్యాప్తి $a = \frac{1}{2}$ (గరిష్ఠ విలువ − కనిష్ఠ విలువ); మధ్య రేఖ $y = d$ ఇక్కడ $d = \frac{1}{2}$ (గరిష్ఠ విలువ + కనిష్ఠ విలువ)

(ii) ఆవర్తనము $p = 2 \times$ (గరిష్ఠ విలువ నుండి కనిష్ఠ విలువకు గల ఆవర్తన కొలత) $b = \frac{2\pi}{p}$

(iii) $c = b \times$ గరిష్ఠ విలువను పొందు సమయము.

మాదిరి (Model-1)

ఒక నౌకాశ్రయము ఒడ్డున సముద్రపు అలలు వలన లోతు మారుతున్నది. క్రింద ఇవ్వబడిన పట్టిక నందు ఒక్కొక్క సమయము నందు నీటి లోతు (మీటర్లు) ఇవ్వబడినది.

సమయము, t	12 am	2 am	4 am	6 am	8 am	10 am	12 noon
లోతు (మీటరులో)	3.5	4.2	3.5	2.1	1.4	2.1	3.5

t సమయమున నీటి లోతును కనుగొనుటకు $y = d + a\cos(bt - c)$ అను రూపంలో ఒక సైనుసోయిడల్ ప్రమేయము నిర్మిస్తాము. ఇక్కడ $a = 1.4$; $d = 2.8$; $p = 12$; $b = \frac{\pi}{6}$; $c = \frac{\pi}{3}$.

అవసరమైన సైనుసోయిడల్ ప్రమేయము $y = 2.8 + 1.4\cos\left(\frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{3}\right)$.

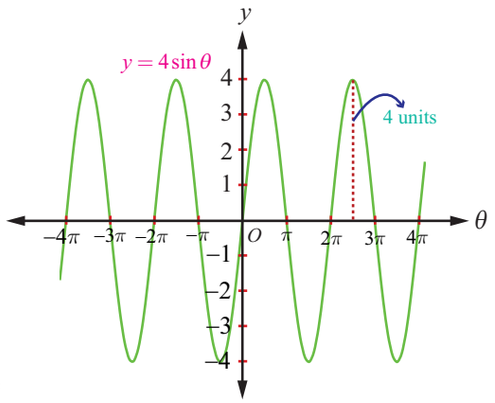
గమనిక

సైన్ మరియు కొసైన్ ప్రమేయాల పరివర్తనాలను అనేక అనువర్తనాలకు ఉపయోగిస్తున్నాము. సైన్ లేదా కొసైన్ ప్రమేయములను ఉపయోగించి ఒక వృత్తాకార చలన నమూనాను ఏర్పరచవచ్చును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 162 23-01-2023 15:27:04

మాదిరి 2

మూలబిందువు కేంద్రంగా వ్యాసార్ధం 4గాఉన్న ఒక వృత్తముపై ఒక బిందువు భ్రమిస్తున్నది. ఈ బిందువు యొక్క y -నిరూపకమును, భ్రమణకోణము యొక్క ప్రమేయముగా పొందవచ్చును.



పటము. 4.12

మూలబిందువు కేంద్రంగా వ్యాసార్ధం a గా ఉన్న ఒక వృత్తముపై ఉన్న బిందువు యొక్క నిరూపకము $y = a\sin\theta$ అగును. ఇక్కడ θ అనునది భ్రమణ కోణము. $y(\theta) = 4\sin\theta$ అను సమీకరణము లభించును. (ఇక్కడ θ రేడియన్, వ్యాప్తి 4 మరియు ఆవర్తనం 2π అగును.) వ్యాప్తి 4 కావున సైన్ ప్రమేయము యొక్క y - విలువలు 4కు కారణాంకముగా క్షితిజరేఖకు లంబంగా పోవును.

4.4.3 విలోమ కొసైన్ ప్రమేయము మరియు వాటి లక్షణాలు (The inverse cosine function and its properties)

కొసైన్ ప్రమేయము దానికి సంబంధించిన పూర్తి ప్రదేశము $\mathbb{R}$ లో అన్వేక ప్రమేయము కాదు. కావున పరిమిత ప్రదేశము $[0, \pi]$ లో కొసైన్ ప్రమేయము అనునది అన్వేక ప్రమేయము మరియు దాని వ్యాప్తి $[-1, 1]$ అగును. తరువాత $[-1, 1]$ అనునది ప్రదేశమును మరియు $[0, \pi]$ అనునది వ్యాప్తిగాను తీసుకొని విలోమ కొసైన్ ప్రమేయమును నిర్వచించెదము.

నిర్వచనం 4.4

$-1 \le x \le 1$, కు, $\cos y = x$ అగునట్లు $\cos^{-1} x$ ను $[0, \pi]$ ఒక ఏకైక సంఖ్య y ను నిర్వచిస్తాము. మరోకవిధంగా $\cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ అను విలోమ కొసైన్ ప్రమేయము $\cos^{-1}(x) = y$ గా నిర్వచించడానికి అవసరమైన నిబంధన $\cos y = x$ మరియు $y \in [0, \pi]$.

గమనిక

(i) $\cos^{-1} x$ యొక్క వ్యాప్తి $[0, \pi]$ లో సైన్ ప్రమేయము ఋణాత్మకం కాని విలువగా ఉండును. దీని ఫలితంగా సమాకలన గణితం నందు కొన్ని త్రికోణమితీయ ప్రతిక్షేపణలో ముఖ్యంగా ఉపయోగపడును.

(ii) విలోమ కొసైన్ ప్రమేయము గురించి చర్చించునప్పుడల్లా $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$ మరియు $\cos^{-1} x : [-1, 1] \to [0, \pi]$ గా గుర్తించుకొనవలయును.

(iii) $\cdots, [-\pi, 0], [\pi, 2\pi], \cdots$, మొదలగు అంతరములలో ఏదైనా ఒక అంతరమును కొసైన్ ప్రమేయము యొక్క ప్రదేశముగాను పరిమితం చేయవచ్చును. అలాంటి అంతరంలో కొసైన్ ప్రమేయము ఒక అన్వేక ప్రమేయము మరియు $[-1, 1]$ వాటి వ్యాప్తిగా ఉండును.

పరిమితి చేయబడిన అంతరము $[0, \pi]$ కొసైన్ ప్రమేయము యొక్క ప్రధాన ప్రదేశముగాను, $-1 \le x \le 1$, లో ప్రమేయం $y = \cos^{-1} x$ ను ప్రమేయ విలువల ప్రధాన విలువలుగా పిలువబడును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 163 23-01-2023 15:27:13

$y = \cos^{-1} x$ నిర్వచనం నుండి క్రింద ఇవ్వబడిన వానిని గమనించవచ్చును:

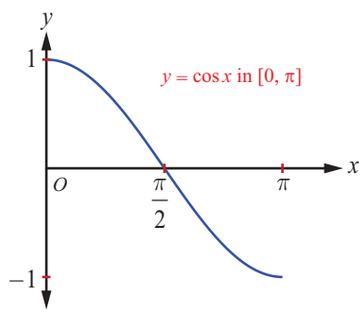
(i) $-1 \le x \le 1$ మరియు $0 \le y \le \pi$ కు $y = \cos^{-1} x$ అయినప్పుడు మాత్రమే $x = \cos y$ అగును.

(ii) $|x| \le 1$ అయితే $\cos\left(\cos^{-1} x\right) = x$ అగును. మరియు $|x| > 1$ కు అర్థములేనిది అగును.

(iii) $\cos^{-1} x$ యొక్క వ్యాప్తి $0 \le x \le \pi$ లో $\cos^{-1}\left(\cos x\right) = x$ అగును. $\cos^{-1}\left(\cos 3\pi\right) = \pi$. అనునది గమనించవలయును.

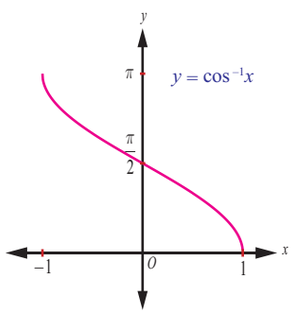
4.4.4 విలోమ కొసైన్ ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రం (Graph of the inverse cosine function)

$\cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ అను విలోమ కొసైన్ ప్రమేయము $[-1, 1]$ అంతరంలో x వాస్తవసంఖ్యను ఉత్పాదకంగా (input) మరియు $[0, \pi]$ అంతరంలో y రేడియన్‌లలో వాస్తవసంఖ్యను ఉత్పాదకతముగా (output) ఇచ్చును. $y = \cos^{-1} x$ సమీకరణమును ఉపయోగించి (x, y) అను కొన్ని బిందువులను కనుగొని xy - తలంనందు గుర్తిస్తాము. x యొక్క విలువ -1 నుండి 1 వరకు పెరిగేకొలది y యొక్క విలువ π నుండి 0 నుండి వరకు తగ్గుచున్నది. విలోమ కొసైన్ ప్రమేయము దాని ప్రదేశం నందు మరియు అవిచ్ఛి ప్రమేయంగా ఉండును. ఈ బిందువులు కలుపుతూ గీయబడిన సరళ వక్రం పటము 4.14 నందు చూడవచ్చును మరియు $y = \cos^{-1} x$ అను రేఖాచిత్రం మనకు లభించును.



పటము. 4.13

x	y
-1	π
$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$
0	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$
1	0



పటము. 4.14

గమనిక

(i) $y = \cos x$ రేఖాచిత్రములో x మరియు y అక్షముల విలువలను పరస్పర మార్చుచేయగా $y = \cos^{-1} x$ యొక్క రేఖాచిత్రమును పొందవచ్చును.

(ii) $y = \cos^{-1} x$ అను ప్రమేయమునందు x-అంతర ఖండము 1 మరియు y-అంతర ఖండము $\frac{\pi}{2}$ అగును.

(iii) మూలబిందువు ఆధారంగా లేదా y-అక్షం ఆధారంగా $y = \cos^{-1} x$ రేఖాచిత్రం సౌష్ఠవం కాదు. కావున $y = \cos^{-1} x$ అనునది సరి ప్రమేయము కాదు మరియు బేసి ప్రమేయము కాదు.

ఉదాహరణ 4.5

$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ కు ప్రధాన విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y$ అయితే $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ అగును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 164 23-01-2023 15:27:24

$y = \cos^{-1} x$ యొక్క ప్రధాన విలువ వ్యాప్తి $[0, \pi]$ అని మనకు తెలియును.

కావున $\cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ అగునట్లు y విలువ $[0, \pi]$ లో చూడవలెను.

కాని $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ మరియు $\frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$ అయినందువలన $y = \frac{\pi}{6}$ అగును.

కావున $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ప్రధాన విలువ $\frac{\pi}{6}$ అగును.

ఉదాహరణ 4.6

విలువలను కనుగొనుము. (i) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ (iii) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$

సాధన

$\cos^{-1} x : [-1, 1] \to [0, \pi]$ అను విలోమ కొసైన్ ప్రమేయము నిర్వచనము నుండి $\cos^{-1} x = y$ అయిన అయినప్పుడు మాత్రమే $x = \cos y$ అగును. ఇక్కడ $-1 \le x \le 1$ మరియు $0 \le y \le \pi$ అయినందువలన.

(i) $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}$, ఎందువలననగా $\frac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$ మరియు $\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(ii) $\cos^{-1}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = \cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$, ఎందువలననగా $-\frac{\pi}{3} \notin [0, \pi]$, కాని $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$.

(iii) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \frac{5\pi}{6}$, ఎందువలననగా $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ మరియు $\frac{5\pi}{6} \in [0, \pi]$.

ఉదాహరణ 4.7

$\cos^{-1}\left(\frac{2 + \sin x}{3}\right)$ కు ప్రదేశం కనుగొనుము.

సాధన

$y = \cos^{-1} x$ యొక్క ప్రదేశం $-1 \le x \le 1$ లేదా $|x| \le 1$ అగును. కావున $-1 \le \frac{2 + \sin x}{3} \le 1$ అనునది $-3 \le 2 + \sin x \le 3$ గా వ్రాయవచ్చును.

కావున $-5 \le \sin x \le 1$ అనుదానిని సూక్ష్మీకరించి $-1 \le \sin x \le 1$ ను పొందవచ్చును. $-\sin^{-1}(1) \le x \le \sin^{-1}(1)$ లేదా $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ ను పొందవచ్చును.

కావున $\cos^{-1}\left(\frac{2 + \sin x}{3}\right)$ కు ప్రదేశం $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ అగును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 165 23-01-2023 15:27:37

అభ్యాసము 4.2

1. ఈ క్రింది వాటికి x యొక్క అన్ని విలువలను కనుగొనుము.

   (i) $-6\pi \le x \le 6\pi$ మరియు $\cos x = 0$ (ii) $-5\pi \le x \le 5\pi$ మరియు $\cos x = -1$.

2. $\cos^{-1}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] \neq -\frac{\pi}{6}$ గా ఉండుటకు గల కారణములను తెలుపుము.

3. $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1}(x)$ అనునది సత్యమగునా? తగిన కారణమును తెలుపుము.

4. $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ యొక్క ప్రధాన విలువను కనుగొనుము.

5. విలువలను కనుగొనుము.

   (i) $2\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}(-1)$

   (iii) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{17}-\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{17}\right)$.

6. ప్రదేశం కనుగొనుము. (i) $f(x)=\sin^{-1}\left(\frac{|x|-2}{3}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{1-|x|}{4}\right)$ (ii) $g(x)=\sin^{-1}x+\cos^{-1}x$

7. x యొక్క ఏ విలువకు అసమీకరణము $\frac{\pi}{2} < \cos^{-1}(3x-1) < \pi$ సత్యమగును?

8. విలువను కనుగొనుము.

   (i) $\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)+\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$ (ii) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)+\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$.

4.5 టాంజన్ట్ ప్రమేయము మరియు విలోమ టాంజన్ట్ ప్రమేయము (The Tangent Function and the Inverse Tangent Function)

భవనం, కొండలు లేదా జెండా స్థంభం మొదలగువాటి ఎత్తు లేదా దూరాలను తెలుసుకొనుటకు $y = \tan x$ అనునది ప్రమేయముగా ఉపయోగపడుతుంది. $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ యొక్క ప్రదేశంలో హారమును సున్న చేయు x విలువలను తొలగించబడును. కావున $x = \cdots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \cdots$ అను విలువలకు టాంజన్ట్ ప్రమేయము నిర్వచించబడదు కావున $y = \tan x$ ప్రదేశం $\left\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty}\left(\frac{2k+1}{2}\pi, \frac{2k+3}{2}\pi\right)$ అగును. దాని వ్యాప్తి $(-\infty, \infty)$ అగును. $y = \tan x$ అను ప్రమేయము యొక్క ఆవర్తనం π అగును.

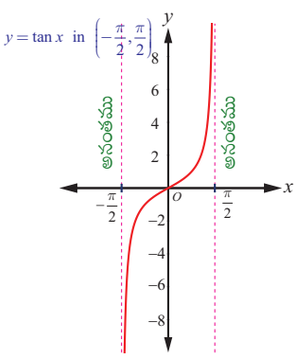
12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 166 23-01-2023 15:27:45

4.5.1 టాంజన్ట్ ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రం (The graph of tangent function)

మరల మరల వచ్చు ఆవర్తన తరగతి అంతరంలో ప్రమేయం విలువ కనుగొనుటకు టాంజన్ట్ ప్రమేయము ఉపయోగకరంగా ఉండును. టాంజన్ట్ ప్రమేయము బేసి ప్రమేయం అగును. ఎందుకనగా $y = \tan x$ అను రేఖాచిత్రం మూలబిందువు ఆధారంగా సౌష్ఠవం. టాంజన్ట్ ప్రమేయము యొక్క ఆవర్తనం π అయినందువలన π పొడవు గల ఏదైనా ఒక అంతరంలో $y = \tan x$ కు రేఖాచిత్రం గీయవచ్చును. $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ అను అంతరం $y = \tan x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ రేఖాచిత్రమునకు సంబంధించిన విలువలు క్రింది పట్టిక నందు పొందుపరచబడినది.

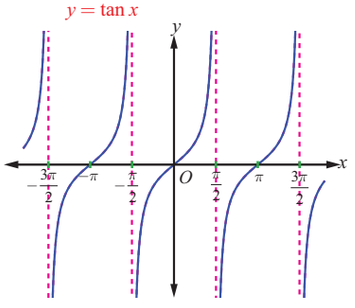
x (రేడియన్‌లో)	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$y = \tan x$	$-\sqrt{3}$	-1	$\frac{-\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

ఇప్పుడు పట్టిక నందు పొందుపరచబడిన బిందువులను రేఖాచిత్రంలో గుర్తించి వాటిని కలుపుతూ సరళ వక్రరేఖను గీచిన, $y = \tan x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ అను రేఖాచిత్రము ఏర్పడును. $\frac{\pi}{2}$ విలువ x కు దగ్గరగా వచ్చునపుడు మరియు అదే సమయములో $\frac{\pi}{2}$ కంటే తక్కువయినప్పుడు $\sin x$ విలువ 1 కు దగ్గరగా మరియు $\cos x$ ధనాత్మక విలువ మరియు 0కు దగ్గరగా ఉండును. అందువలన $x, \frac{\pi}{2}$ ను సమీపించునపుడు $\frac{\sin x}{\cos x}$ నిష్పత్తి ధనాత్మకంగాను మరియు దాని విలువలు పెరుగుతూ ∞ ను సమీపించును.



పటము. 4.15

అందువలన $x = \frac{\pi}{2}$ సరళరేఖాచిత్రమునకు లంబ అనంత స్పర్శరేఖగా ఉండును. అదేవిధంగా $x, -\frac{\pi}{2}$ ను సమీపిస్తున్నప్పుడు $\frac{\sin x}{\cos x}$ అను నిష్పత్తి ఋణాత్మక విలువగాను మరియు సంఖ్య విలువలు పెరుగుతూ $-\infty$ ను సమీపించును. అందువలన $x = -\frac{\pi}{2}$ అను సరళరేఖ రేఖాచిత్రానికి లంబ అనంత స్పర్శరేఖగా ఉండును. కావున పటము 4,15లో చూపబడిన విధంగా $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ కు $y = \tan x$ అను రేఖాచిత్రం యొక్క భాగం వచ్చును. $y = \tan x$ యొక్క ప్రధాన ప్రదేశం $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ అగును.



పటము. 4.16

$x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$, ను తప్పించి, మిగిలిన వాస్తవసంఖ్యలకు టాంజన్ట్ ప్రమేయము నిర్వచించబడును. మరియు పెరుగును. $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ కు అనంత స్పర్శరేఖలు ఉండును. $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ ఆధారంగా $y = \tan x$ భాగములు సౌష్ఠవంగా ఉండును. $y = \tan x$ యొక్క పూర్తి రేఖాచిత్రమును పటము 4. 16లో గమనించవచ్చును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 167 23-01-2023 15:27:56

గమనిక

రేఖాచిత్రము నుండి $y = \tan x$ అనునది $0 < x < \frac{\pi}{2}$ మరియు $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$; ల మధ్య ధనాత్మక విలువగా ఉండును. $y = \tan x$ అనునది $\frac{\pi}{2} < x < \pi$ మరియు $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ ల మధ్య ఋణాత్మక విలువగా ఉండును.

4.5.2 టాంజన్ట్ ప్రమేయము యొక్క లక్షణాలు
(Properties of the tangent function)

$y = \tan x$ అను రేఖాచిత్రం నుండి క్రింద చూపబడిన టాంజన్ట్ ప్రమేయ లక్షణాలు తెలుసుకొందాం.

(i) టాంజన్ట్ ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రము విచ్ఛిన్నం. అదేవిధంగా $x = (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$ అను బిందువులలో $y = \tan x$ విచ్ఛిన్నంగా ఉన్నది.

(ii) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ కు $y = \tan x$ అను రేఖాచిత్రములో ఒక భాగం మూలబిందువు ఆధారంగా సౌష్ఠవంగా ఉండును.

(iii) $x = (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$ అను విలువల వలన అనేక అనంత స్పర్శరేఖలు ఉండును.

(iv) టాంజన్ట్ ప్రమేయమునకు గరిష్ఠం కాని లేదా కనిష్ఠం కాని లేదు.

విశేషాంశాలు

(i) $y = a\tan bx$ అను రేఖాచిత్రము $-\frac{\pi}{2|b|} < x < \frac{\pi}{2|b|}$ ల మధ్య పూర్తిభ్రమణం చేయును మరియు దాని ఆవర్తనము $\frac{\pi}{|b|}$ అగును.

(ii) $y = a\tan bx$ నకు అనంత స్పర్శ రేఖలు $x = \frac{\pi}{2|b|} + \frac{\pi}{|b|}k,\ k \in \mathbb{Z}$ అగును.

(iii) టాంజన్ట్ ప్రమేయమునకు గరిష్ఠ విలువకాని లేదా కనిష్ఠ విలువకాని ఉండదు. కావున $\tan x$ కు వ్యాప్తిని నిర్వచించలేము.

4.5.3 విలోమ టాంజన్ట్ ప్రమేయము మరియు వాటి లక్షణాలు
(The inverse tangent function and its properties)

టాంజన్ట్ ప్రమేయము దాని పూర్తి ప్రదేశము $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ లో అన్వేకముకాదు. కాని $\tan x : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ అనునది ద్విగుణ ప్రమేయం అగును. ఇక్కడ $\mathbb{R}$ ను ప్రదేశంగాను మరియు $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ను వ్యాప్తిగాను ఉన్నప్పుడు విలోమ టాంజన్ట్ ప్రమేయమును నిర్వచింపుము.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 168 23-01-2023 15:28:03

నిర్వచనం 4.5

ఏదైనా వాస్తవ సంఖ్య x, కు $\tan y = x$. అగునట్లు $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ లో ఉన్న ఏకైకసంఖ్య y ను $\tan^{-1} x$ గా నిర్వచింపబడుచున్నది. మరియొకవిధంగా విలోమ టాంజన్ట్ ప్రమేయము $\tan^{-1} : (-\infty, \infty) \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ను $\tan^{-1}(x) = y$ గా నిర్వచింపబడడానికి అవసరమైన మరియు సరిపోవునట్టి నిబంధన $\tan y = x$ మరియు $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ అగును.

$y = \tan^{-1} x$ నిర్వచనం నుండి క్రింద ఇవ్వబడిన వానిని గమనించవచ్చును.

(i) $y = \tan^{-1} x$ అనుదానికి అవసరమైన మరియు సరిపోవు నిబంధనలు అన్నియు $x \in \mathbb{R}$ మరియు $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ కు $x = \tan y$ అగును.

(ii) ఒక్కొక్క వాస్తవ సంఖ్య x కు $\tan\left(\tan^{-1} x\right) = x$ అగును. పైగా $y = \tan^{-1} x$ ఒక బేసి ప్రమేయం అగును.

(iii) $\tan^{-1}\left(\tan x\right) = x$ అని ఉండుటకు అవసరమైన మరియు సరిపోవునంత నిబంధన $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ అగును. ఇక్కడ $\tan^{-1}\left(\tan \pi\right) = 0$ అవుతుందే తప్ప π కాదని గమనించగలము.

గమనిక

(i) విలోమ టాంజన్ట్ ప్రమేయము గురించి చర్చించునపుడు $\tan : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ మరియు $\tan^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ అనునది గుర్తించుకొనవలయును.

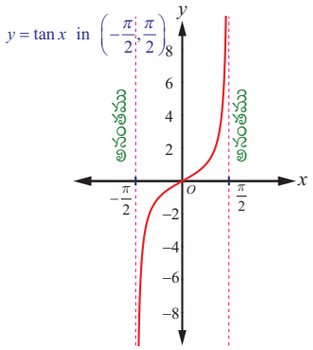
(ii) నిర్దేశించిన ప్రదేశం $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ అనునది టాంజన్ట్ ప్రమేయము ప్రధాన ప్రదేశం అగును. $y = \tan^{-1} x$, $x \in \mathbb{R}$ అను విలువలు $y = \tan^{-1} x$ యొక్క ప్రధాన విలువలు అగును..

4.5.4 విలోమ టాంజన్ట్ ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రం (Graph of the inverse tangent function)

$y = \tan^{-1} x$ అను ప్రమేయము వాస్తవ రేఖ మొత్తము దాని ప్రదేశం $(-\infty, \infty)$ గా మరియు వ్యాప్తి $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ గా కలిగి ఉండును. ఇక్కడ $-\frac{\pi}{2}$ మరియు $\frac{\pi}{2}$ నందు టాంజన్ట్ ప్రమేయము నిర్వచించబడలేదని గుర్తించగలము. కావున $y = \tan^{-1} x$ రేఖాచిత్రము $y = -\frac{\pi}{2}$ మరియు $y = \frac{\pi}{2}$ అను రెండు రేఖల మధ్య మాత్రమే అమర్చబడును. మరియు ఆ రెండు రేఖలు ఎక్కడా ఖండించుకోవు. $y = -\frac{\pi}{2}$ మరియు $y = \frac{\pi}{2}$ అను రెండు రేఖలు $y = \tan^{-1} x$ కు క్షితిజ సమాంతర అనంత స్పర్శరేఖలుగా ఉండును.

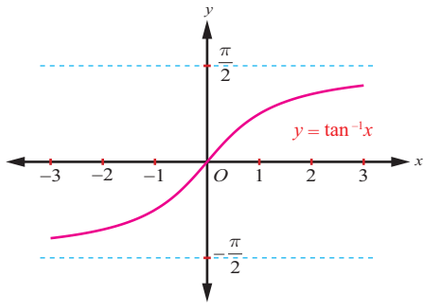
పటము 4.17 మరియు 4.18 అనే రెండు పటములు క్రమమంగా $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ అను ప్రదేశమును కలిగిన $y = \tan x$ అను రేఖాచిత్రమును మరియు $(-\infty, \infty)$ ప్రదేశము కలిగిన $y = \tan^{-1} x$ అను రేఖాచిత్రమును గుర్తించును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 169 23-01-2023 15:28:16



పటము. 4.17

x	y
-1	$-\frac{\pi}{4}$
0	0
$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{4}$



పటము. 4.18

గమనిక

(i) విలోమ టాంజన్ట్ ప్రమేయము ఖచ్చితంగా పెరుగుతున్న ప్రమేయం మరియు ప్రదేశము $(-\infty, \infty)$ లో అవిచ్ఛిన్నం.

(ii) $y = \tan^{-1} x$ అను రేఖాచిత్రము ఆది బిందువు ద్వారా పోవును.

(iii) ఆది బిందువు ఆధారంగా సౌష్ఠవము ఉన్నందువలన $y = \tan^{-1} x$ ఒక బేసి ప్రమేయము అగును.

ఉదాహరణ 4.8

$\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ యొక్క ప్రధాన విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = y$ అనుకొనుము $\tan y = \sqrt{3}$ అగును $y = \frac{\pi}{3}$ అయినట్లు $\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ కావున $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ కు ప్రధాన విలువ $\frac{\pi}{3}$ అగును.

ఉదాహరణ 4.9

విలువలను కనుగొనుము (i) $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{5}\right)$ (iii) $\tan\left(\tan^{-1}(2019)\right)$

సాధన

(i) $\tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = -\frac{\pi}{3}$, ఎందువలననగా $-\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(ii) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{5}\right)$.

$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ అయ్యేవిధంగా $\tan\theta = \tan\frac{3\pi}{5}$ కనుగొందాము.

టాంజన్ట్ ప్రమేయము ఆవర్తనం π కావున $\tan\frac{3\pi}{5} = \tan\left(\frac{3\pi}{5} - \pi\right) = \tan\left(-\frac{2\pi}{5}\right)$.

కావున, $\tan^{-1}\left(\tan\frac{3\pi}{5}\right) = \tan^{-1}\left(\tan\left(-\frac{2\pi}{5}\right)\right) = -\frac{2\pi}{5}$, ఎందుకనగా $-\frac{2\pi}{5} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(iii) $\tan\left(\tan^{-1} x\right) = x, x \in \mathbb{R}$ అయినందువల్ల $\tan\left(\tan^{-1}(2019)\right) = 2019$ అగును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 170 23-01-2023 15:28:25

ఉదాహరణ 4.10

$\tan^{-1}(-1)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$ ల విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$\tan^{-1}(-1)=y$ అనుకొనుము $\tan y=-1=-\tan\frac{\pi}{4}=\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

ఇక్కడ $-\frac{\pi}{4}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, అనునది గుర్తించదగినదికావున $\tan^{-1}(-1)=-\frac{\pi}{4}$.

ఇప్పుడు $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=y$ అనుకొనుము $\cos y=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$.

$\frac{\pi}{3}\in[0,\pi]$ అయినందువలన $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$.

మరల ఇప్పుడు $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=y$ అనుకొనుము $\sin y=-\frac{1}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

$-\frac{\pi}{6}\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ అయినందున $\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$.

కావున, $\tan^{-1}(-1)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{12}$.

ఉదాహరణ 4.11

$\tan\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1<x<1$.ను నిరూపించుము.

సాధన

$x=0$ అయితే ఇరువైపుల '0' అగును. ... (1)

$0<x<1$ అనుకొనుము.

$\theta=\sin^{-1}x$ తీసుకొనగా $0<\theta<\frac{\pi}{2}$. అగును. ఇప్పుడు $\sin\theta=\frac{x}{1}$ నుండి $\tan\theta=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ఇచ్చును.

అయినందున, $\tan\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. ... (2)

తరువాత $-1<x<0$ అనుకొనుము.అప్పుడు $\theta=\sin^{-1}x$ నుండి $-\frac{\pi}{2}<\theta<0$ వచ్చును. ఇప్పుడు $\sin\theta=\frac{x}{1}$ నుండి $\tan\theta=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ వచ్చును.

ఈ సందర్భములో, $\tan\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ లభించును. ... (3)

సమీకరణము (1) (2) మరియు (3)ల నుండి $\tan\left(\sin^{-1}x\right)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $-1<x<1$ అనునది నిరూపించబడినది.

అభ్యాసము 4.3

1. ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రమేయములకు ప్రదేశమును కనుగొనుము.

(i) $\tan^{-1}\left(\sqrt{9-x^2}\right)$ (ii) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(1-x^2\right)-\frac{\pi}{4}$.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 171 23-01-2023 15:28:36

2. విలువలు కనుగొనుము (i) $\tan^{-1}\left(\tan\frac{5\pi}{4}\right)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)$.

3. విలువలను కనుగొనుము.

(i) $\tan\left(\tan^{-1}\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$ (ii) $\tan\left(\tan^{-1}(1947)\right)$ (iii) $\tan\left(\tan^{-1}(-0.2021)\right)$.

4. విలువను కనుగొనుము. (i) $\tan\left(\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ (ii) $\sin\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)-\cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)\right)$.

(iii) $\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)-\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right)$.

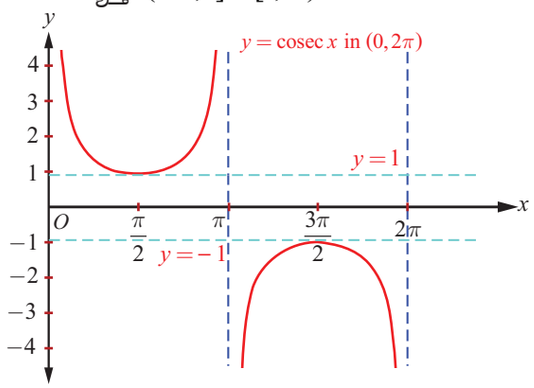
4.6 కొసీకెంట్ ప్రమేయము మరియు విలోమ కొసీకెంట్ ప్రమేయము (The Cosecant Function and the Inverse Cosecant Function)

సైన్ ప్రమేయంలాగే కొసీకెంట్ ప్రమేయము కూడా ఒక బేసి ప్రమేయం మరియు దాని ఆవర్తనం 2π అగును. కొసీకెంట్ ప్రమేయము $y=\operatorname{cosec} x$ విలువలు 2π ఆవర్తనకు తరువాత తిరిగి అదే విలువను పొందును. $\sin x=0$ అయినపుడు $y=\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$ ను నిర్వచించడానికి వీలులేదు. దాని వలన కొసీకెంట్ ప్రమేయము యొక్క ప్రదేశము $\mathbb{R}\setminus\{n\pi : n\in\mathbb{Z}\}$ అగును. $-1\le\sin x\le 1$ అయినందువలన $y=\operatorname{cosec} x$. -1 మరియు 1 కి మధ్యలో ఎటువంటి విలువను పొందదు. కావున కొసీకెంట్ ప్రమేయ వ్యాప్తి $(-\infty,1]\cup[1,\infty)$ అగును.

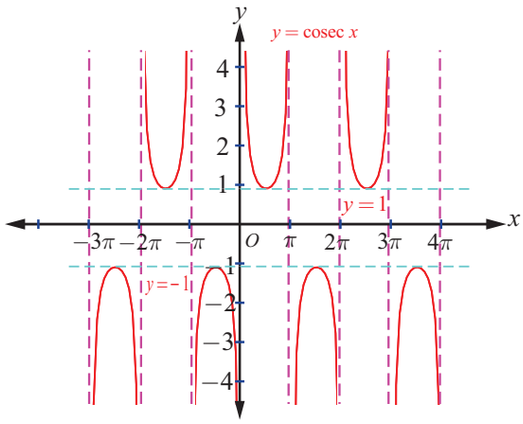
4.6.1 కొసీకెంట్ ప్రమేయము యొక్క రేఖా చిత్రాలు

$(0, 2\pi)$ అంతరంలో కొసీకెంట్ ప్రమేయము అనునది $x=\pi$ అను బిందువు వద్ద తప్ప మిగిలిన బిందువుల వద్ద అవిచ్ఛినం. దీనికి గరిష్ఠము మరియు కనిష్ఠము ఉండదు. సాధారణంగా $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ విలువలకు $y=\operatorname{cosec} x$ విలువ ∞ నుండి 1 వరకు తగ్గుతుంది. $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ విలువలకు $y=\operatorname{cosec} x$ విలువ 1 నుండి ∞ వరకు పెరుగుతుంది. $x\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right]$ విలువలకు $y=\operatorname{cosec} x$ విలువ $-\infty$ నుండి -1 వరకు పెరుగుతుంది. $x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ విలువలకు $y=\operatorname{cosec} x$ విలువ -1 నుండి $-\infty$ వరకు తగ్గుతుంది.

$y=\operatorname{cosec} x,\quad x\in(0,2\pi)\setminus\{\pi\}$ రేఖాచిత్రపటమును పటము 4.19లో చూడగలము. మొదలగు మూలలో $\cdots,(-4\pi,-2\pi)\setminus\{-3\pi\}$, $(-2\pi,0)\setminus\{-\pi\}$, $(2\pi,4\pi)\setminus\{3\pi\}$, $(4\pi,6\pi)\setminus\{5\pi\},\cdots$. లో రేఖాచిత్రం ఈ భాగమును తిరిగి పొందవచ్చును. $y=\operatorname{cosec} x$ పూర్తి రేఖాచిత్రం పటము 4.20లో చూడగలము.



పటము. 4.19



పటము. 4.20

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 172 23-01-2023 15:28:47

4.6.2 విలోమ కొసీకెంట్ ప్రమేయము

$\text{cosec} : \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \to (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ అను కొసీకెంట్ ప్రమేయము $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ అనే పరిమితి చేయబడిన ప్రదేశం నందు ద్విగుణ ప్రమేయంగా ఉన్నది. కావున $(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ ప్రదేశంగాను మరియు $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ వ్యాప్తిగాను ఉన్నప్పుడు విలోమ కొసీకెంట్ ప్రమేయము నిర్వచింపబడుతున్నది..

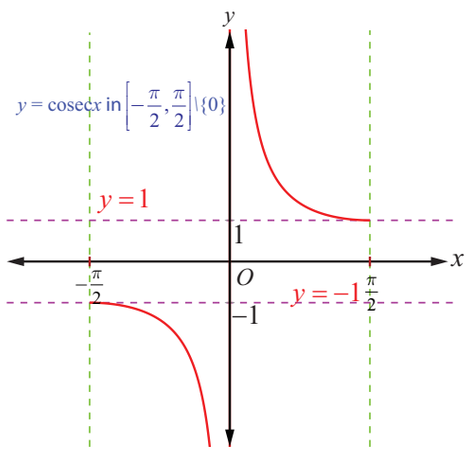
నిర్వచనం 4.6

$\text{cosec}^{-1} : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ అను విలోమ కొసీకెంట్ ప్రమేయము $\text{cosec}^{-1}(x) = y$ గా నిర్వచింపబడడానికి అవసరమైన మరియు సరిపోవు నిబంధన $\text{cosec}\, y = x$ మరియు $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ అగును.

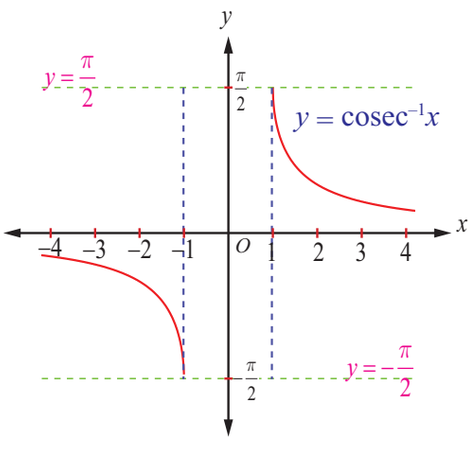
4.6.3 విలోమ కొసీకెంట్ ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రం

$y = \text{cosec}^{-1} x$ అనే విలోమ కొసీకెంట్ ప్రమేయము ప్రదేశం $\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ మరియు వ్యాప్తి $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ అగును. అదేవిధంగా $\text{cosec}^{-1} : (-\infty, -1] \cup [1, \infty) \to \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ అగును.

పటము 4.21 మరియు పటము 4.22లో ప్రధాన ప్రదేశంలో కొసీకెంట్ ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రము మరియు విలోమ కొసీకెంట్ ప్రమేయము యొక్క ప్రదేశం నందు రేఖాచిత్రం చూపబడినది.



పటము. 4.21



పటము. 4.22

4.7 సీకెంట్ ప్రమేయము మరియు విలోమ సీకెంట్ ప్రమేయము

(The Secant Function and Inverse Secant Function)

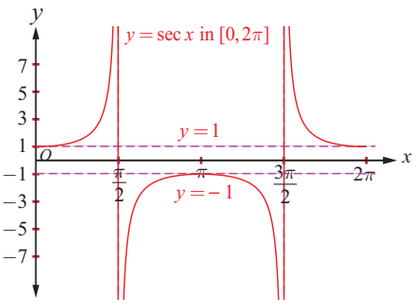
సీకెంట్ ప్రమేయము అనునది కొసైన్ ప్రమేయము యొక్క విలోమంగా నిర్వచించవచ్చును. కావున $y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$ అనునది $\cos x = 0$ అని లెక్కించినపుడు తప్ప మిగిలిన x విలువలను నిర్వచించవచ్చును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 173 23-01-2023 15:28:53

అయినందువల్ల $y=\sec x$ ప్రదేశము $\mathbb{R}\setminus\left\{(2n+1)\frac{\pi}{2}:n\in\mathbb{Z}\right\}$ అగును. $-1\le\cos x\le 1$ అయినందువలన $y=\sec x$ అనునది $(-1, 1)$ వద్ద ఏ విలువలను కలిగి ఉండదు. కావున సీకెంట్ ప్రమేయము యొక్క వ్యాప్తి $(-\infty,1]\cup[1,\infty)$ అగును. సీకెంట్ ప్రమేయమునకు కనిష్ఠము లేదా గరిష్ఠము లేదు. $y=\sec x$ యొక్క ఆవర్తనం 2π మరియు ఇది ఎల్లప్పుడు సరి ప్రమేయం అవుతుంది.

4.7.1 సీకెంట్ ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రం

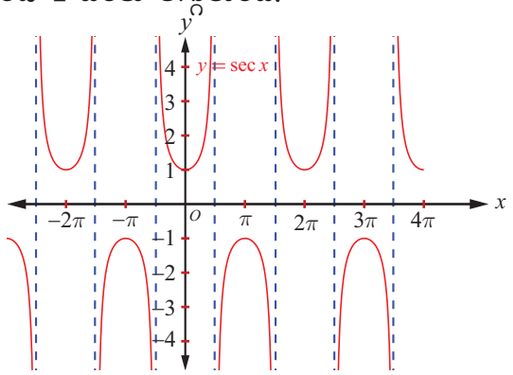
$0\le x\le 2\pi$, $x\ne\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ లో సీకెంట్ ప్రమేయము రేఖాచిత్రమును పటము 4.23లో చూపబడియున్నది. మొదటి మరియు నాల్గవ పాదములలో అంటే $-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$ అంతరములో మరియు $y=\sec x$ కు ధనాత్మక విలువలు వచ్చును. అదేవిధంగా రెండవ మరియు మూడవ పాదములలో అంటే $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ అంతరములో $y=\sec x$ కు ఋణాత్మక విలువలు వచ్చును.



పటము. 4.23

$0\le x\le 2\pi$, $x\ne\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ అనునపుడు సీకెంట్ ప్రమేయము అవిచ్ఛిన్నం $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ గణించునపుడు సీకెంట్ ప్రమేయము విలువ 1 నుండి ∞ వరకు పెరుగుతుంది. అదేవిధంగా $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$ ను గణించునపుడు సీకెంట్ ప్రమేయము $-\infty$ నుండి -1 వరకు పెరుగుతుంది. $x\in\left[\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ గణించునపుడు -1 నుండి $-\infty$ వరకు తగ్గుతుంది. $x\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right]$ ను గణించునపుడు ∞ నుండి 1 వరకు తగ్గుతుంది.

$y=\sec x$ యొక్క ఆవర్తన 2π అగును. కావున $0\le x\le 2\pi$, $x\ne\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ కు సంబంధించిన రేఖాచిత్రభాగం $[2\pi,4\pi]\setminus\left\{\frac{5\pi}{2},\frac{7\pi}{2}\right\}$, $[4\pi,6\pi]\setminus\left\{\frac{9\pi}{2},\frac{11\pi}{2}\right\}$, ... మరియు ..., $[-4\pi,-2\pi]\setminus\left\{-\frac{7\pi}{2},-\frac{5\pi}{2}\right\}$, $[-2\pi,0]\setminus\left\{-\frac{3\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right\}$ మొదలగు అంతరములలో పునరావృతమగును.



పటము. 4.24

తరువాత $y=\sec x$ యొక్క పూర్తి రేఖాచిత్రము పటము 4.24లో చూపబడినది.

4.7.2 విలోమ సీకెంట్ ప్రమేయము (Inverse secant function)

$\sec x:[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\to\mathbb{R}\setminus(-1,1)$ అను సీకెంట్ ప్రమేయము పరిమితి చేయబడిన ప్రదేశము $[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ లో ఒక ద్విగుణ ప్రమేయము అగును. అయితే విలోమ సీకెంట్ ప్రమేయము యొక్క ప్రదేశము $\mathbb{R}\setminus(-1,1)$ గా మరియు వ్యాప్తి $[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ గా నిర్వచింపబడుతున్నది.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 174 23-01-2023 15:29:05

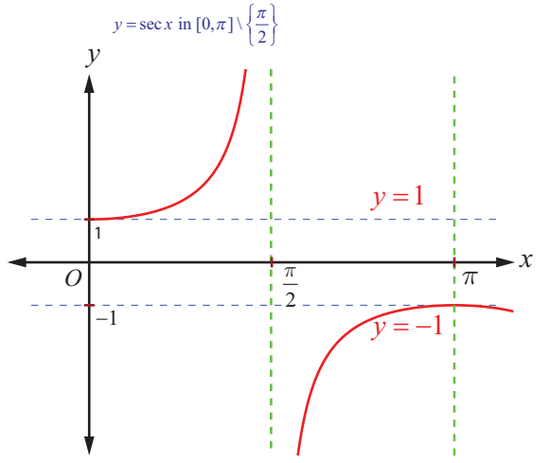
నిర్వచనం 4.7

$\sec y = x$ మరియు $y \in [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ఆయినపుడు విలోమ సీకెంట్ ప్రమేయము $\sec^{-1} : \mathbb{R} \setminus (-1,1) \to [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ ను $\sec^{-1}(x) = y$ గా నిర్వచింపబడుతుంది.

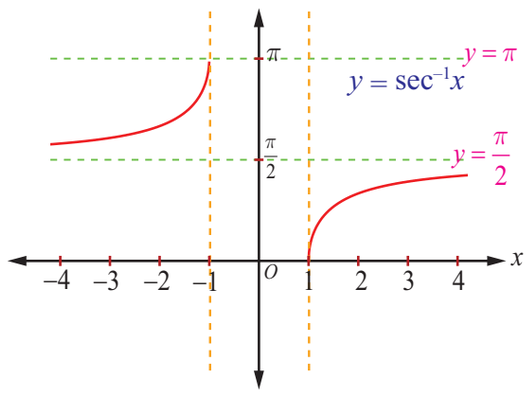
4.7.3 విలోమ సీకెంట్ ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రము

$y = \sec^{-1} x$ అను విలోమ సీకెంట్ ప్రమేయము యొక్క ప్రదేశము $\mathbb{R} \setminus (-1,1)$ మరియు వ్యాప్తి $[0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ అగును. $\sec^{-1} : \mathbb{R} \setminus (-1,1) \to [0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

పటము 4.25 మరియు పటము 4.26 నందు వరుసగా ప్రధాన ప్రదేశములో సీకెంట్ ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రము మరియు విలోమ సీకెంట్ ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రము దానికి సంబంధించిన ప్రదేశంలో చూపబడియున్నది.



పటము. 4.25



పటము. 4.26

విశేషాంశము

$y = \sec x$ లేదా $\operatorname{cosec} x$ అనే రేఖాచిత్రము సరళంగా గీయడానికి క్రింద ఇవ్వబడిన సూచనలను గమనించగలము.:

(i) $y = \cos x$ లేదా $\sin x$ రేఖాచిత్రమును గీయుము.

(ii) x-అంతరఖండముల వద్ద లంబ అనంత స్పర్శరేఖలు గీయుము మరియు y విలువలకు విలోమము తీసుకొనుము.

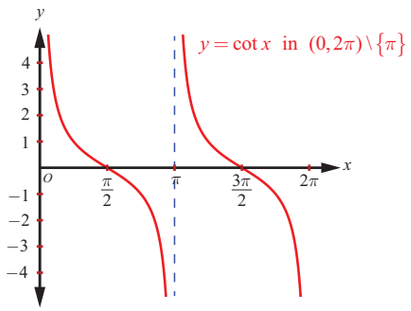
4.8 కోటాంజెంట్ ప్రమేయము మరియు విలోమ కోటాంజెంట్ ప్రమేయము (The Cotangent Function and the Inverse Cotangent Function)

కోటాంజెంట్ ప్రమేయము అనునది $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ అగును. ఇక్కడ $\tan x = 0$ లేదా $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ అను విలువలు తప్ప x యొక్క మిగిలిన అన్ని వాస్తవ విలువలకు కోటాంజెంట్ ప్రమేయము నిర్వచించబడుతుంది. కోటాంజెంట్ ప్రమేయము యొక్క ప్రదేశము $\mathbb{R} \setminus \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ మరియు దాని వ్యాప్తి $(-\infty, \infty)$ అగును. $\tan x$ లాగా కోటాంజెంట్ ప్రమేయము ఒక బేసి ప్రమేయం మరియు దాని ఆవర్తనం π గా ఉండును.

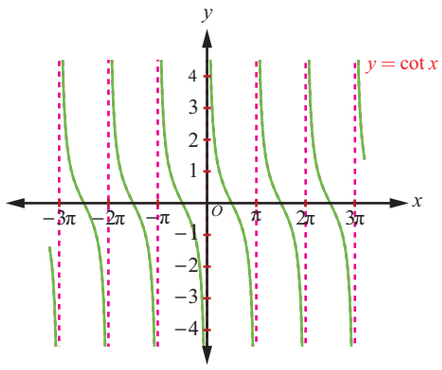
12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 175 23-01-2023 15:29:12

4.8.1 కోటాంజెంట్ ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రము (The graph of the cotangent function)

కోటాంజెంట్ ప్రమేయము $(0,2\pi)\setminus\{\pi\}$ అను సమితిలో అవిచ్ఛిన్నం. $(0,2\pi)\setminus\{\pi\}$ లో మొదట ఒక కోటాంజెంట్ ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రమును గీయుము. ఇక్కడ మొదటి మరియు మూడవ పాదము నందు కోటాంజెంట్ ప్రమేయము ధనాత్మక విలువలను మాత్రమే పొందుతుంది. రెండవ మరియు నాల్గవ పాదముల నందు ఋణాత్మక విలువలను పొందుతుంది. కోటాంజెంట్ ప్రమేయమునకు గరిష్ఠ విలువకాని లేదా కనిష్ఠ విలువకాని లేదు. $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ అను అంతరములో కోటాంజెంట్ ప్రమేయము. ∞ నుండి 0 కు తగ్గుతుంది మరియు $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right)$ కు 0 నుండి $-\infty$ కు తగ్గుతుంది. అదేవిధముగా $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$ అను అంతరములో కోటాంజెంట్ ప్రమేయము కు ∞ నుండి 0 వరకు తగ్గుతుంది మరియు $x\in\left[\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$ కు 0 నుండి $-\infty$ వరకు తగ్గుతుంది.



పటము. 4.27



పటము. 4.28

$y=\cot x$, $x\in(0,2\pi)\setminus\{\pi\}$ నకు సంబంధించిన రేఖాచిత్రపటము 4.27లో చూడవచ్చును. $(0,2\pi)\setminus\{\pi\}$ నందు గల $y=\cot x$ రేఖాచిత్ర భాగము $(2\pi,4\pi)\setminus\{3\pi\},(4\pi,6\pi)\setminus\{5\pi\},\cdots$, మరియు $\cdots$, $(-4\pi,-2\pi)\setminus\{-3\pi\}$, $(-2\pi,0)\setminus\{-\pi\}$ మొదలగు అంతరములలో పునరావృతమగును $\mathbb{R}\setminus\{n\pi : n\in\mathbb{Z}\}$ ను ప్రదేశముగా కలిగిన సంపూర్ణ కోటాంజెంట్ ప్రమేయపు రేఖాచిత్రమును పటము 4.28లో చూడవచ్చును.

4.8.2 విలోమ కోటాంజెంట్ ప్రమేయము (Inverse cotangent function)

కోటాంజెంట్ ప్రమేయము సంపూర్ణ ప్రదేశము $\mathbb{R}\setminus\{n\pi : n\in\mathbb{Z}\}$ లో అన్వేక ప్రమేయము కాదు. కాని పరిమిత ప్రదేశము $(0,\pi)$ లో $\cot:(0,\pi)\to(-\infty,\infty)$ అనునది ఒక ద్విగుణ ప్రమేయం అగును. కావున ప్రదేశము $(-\infty,\infty)$ మరియు వ్యాప్తి $(0,\pi)$ కలిగిన విలోమ కోటాంజెంట్ ప్రమేయము నిర్వచింపబడును.

నిర్వచనం 4.8

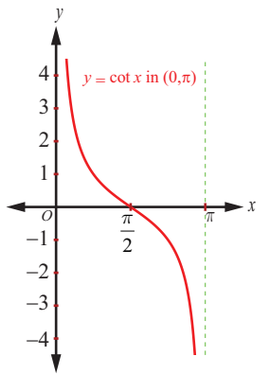
విలోమ కోటాంజెంట్ ప్రమేయము $\cot^{-1}:(-\infty,\infty)\to(0,\pi)$ అనునది $\cot^{-1}(x)=y$ గా నిర్వచించబడుటకు అవసరమైన మరియు సరిపోవు నిబంధన $y\in(0,\pi)$ మరియు $\cot y=x$ అగును.

4.8.3 విలోమ కోటాంజెంట్ ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రము

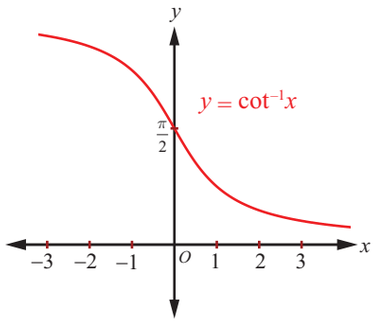
విలోమ కోటాంజెంట్ ప్రమేయము $y=\cot^{-1}x$ అనునది ప్రదేశము $\mathbb{R}$ గాను మరియు వ్యాప్తి $(0,\pi)$ గాను గల ఒక ప్రమేయము అయిన $\cot^{-1}x:(-\infty,\infty)\to(0,\pi)$ అగును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 176 23-01-2023 15:29:22

పటము 4.29 మరియు పటము 4.30 అను రేఖాచిత్రములు క్రమముగా ప్రధాన ప్రదేశములో కోటాంజెంట్ ప్రమేయపు రేఖాచిత్రము మరియు విలోమ కోటాంజెంట్ ప్రమేయపు రేఖాచిత్రం దానికి సంబంధించిన ప్రదేశములో ఇవ్వబడినది.



పటము. 4.29



పటము. 4.30

4.9 విలోమ త్రికోణమితి ప్రమేయముల యొక్క ప్రధాన విలువ (Principal Value of Inverse Trigonometric Functions)

x బిందువు వద్ద విలోమ త్రికోణమితి ప్రమేయం యొక్క ప్రధాన విలువ x అనునది బిందువు వద్ద విలోమ ప్రమేయపు విలువ అగును. ఇది ప్రధాన భాగము యొక్క వ్యాప్తిలో ఉంటుంది. ఉదాహరణలు $\frac{\pi}{6} \in [0, \pi]$ అయినందున, $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ కు ప్రధాన విలువ $\frac{\pi}{6}$ అగును. ఇక్కడ రెండు విలువలు కలవు, అందులో ఒకటి ధనాత్మకముగాను మరొకటి ఋణాత్మకంగా సంఖ్యా పరంగా సమానంగా ఉంటే విలోమ త్రికోణమితి ప్రమేయపు ప్రధాన విలువ ఎల్లప్పుడూ ధనాత్మకంగానే ఉండును. క్రింద చూపబడిన పట్టికనందు త్రికోణమితీయ ప్రమేయం యొక్క ప్రధాన ప్రదేశము మరియు వ్యాప్తి, విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రదేశం మరియు వ్యాప్తికి సంబంధించిన విలువలు పొందుపరచబడినవి.

ప్రమేయం	ప్రధాన ప్రదేశము	వ్యాప్తి
sine	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1,1]$
cosine	$[0,\pi]$	$[-1,1]$
tangent	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\mathbb{R}$
cosecant	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$	$\mathbb{R} \setminus (-1, 1)$
secant	$[0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$	$\mathbb{R} \setminus (-1,1)$
cotangent	$(0,\pi)$	$\mathbb{R}$

విలోమ ప్రమేయం	ప్రదేశం	ప్రధాన విలువల వ్యాప్తి
$\sin^{-1}$	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
$\cos^{-1}$	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
$\tan^{-1}$	$\mathbb{R}$	$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
$\operatorname{cosec}^{-1}$	$\mathbb{R} \setminus (-1,1)$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$
$\sec^{-1}$	$\mathbb{R} \setminus (-1,1)$	$[0,\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$
$\cot^{-1}$	$\mathbb{R}$	$(0,\pi)$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 177 23-01-2023 15:29:31

ఉదాహరణ 4.12

క్రింది వాటికి ప్రధాన విలువను కనుగొనుము.

(i) $\operatorname{cosec}^{-1}(-1)$ (ii) $\sec^{-1}(-2)$.

సాధన

(i) $\operatorname{cosec}^{-1}(-1) = y$ అనుకొనుము. అప్పుడు $\operatorname{cosec} y = -1$

$y = \operatorname{cosec}^{-1} x$ యొక్క ప్రధాన విలువ భాగము యొక్క వ్యాప్తి $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$ అగును. మరియు

$\operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$ అయినందువల్ల $y = -\frac{\pi}{2}$ గా ఉండును. ఇక్కడ $-\frac{\pi}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \{0\}$.

కావున $\operatorname{cosec}^{-1}(-1)$ కు ప్రధాన విలువ $-\frac{\pi}{2}$ అగును..

(ii) $y = \sec^{-1}(-2)$ అనుకొనుము. అప్పుడు $\sec y = -2$ అగును.

నిర్వచనం నుంచి $y = \sec^{-1} x$ యొక్క ప్రధాన విలువ భాగము యొక్క వ్యాప్తి $[0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ అగును.

$\sec y = -2$ గా ఉన్నప్పుడు $[0, \pi] - \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ లో y విలువను కనుగొనవలెను.

కావున, $\sec y = -2 \Rightarrow \cos y = -\frac{1}{2}$.

ఇప్పుడు, $\cos y = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$. కావున, $y = \frac{2\pi}{3}$.

$\frac{2\pi}{3} \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ అయినందున $\sec^{-1}(-2)$ కు ప్రధాన విలువ $\frac{2\pi}{3}$ అగును.

ఉదాహరణ 4.13

$\sec^{-1}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

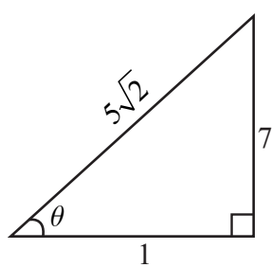
$\sec^{-1}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \theta$ అనుకొనుము. అప్పుడు $\sec\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ ఇక్కడ $\theta \in [0, \pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ అగును.

అందువలన $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ అగును.

ఇప్పుడు, $\cos\frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. కావున, $\sec^{-1}\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{5\pi}{6}$ అగును.

ఉదాహరణ 4.14

$\cot^{-1}\left(\frac{1}{7}\right) = \theta$ అయిన $\cos\theta$ విలువను కనుగొనుము.



సాధన

నిర్వచనము నుండి , $\cot^{-1} x \in (0, \pi)$.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 178 23-01-2023 15:29:43

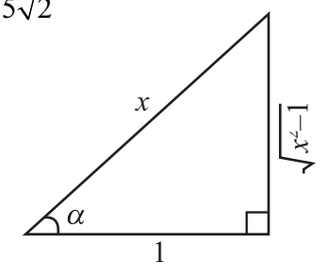
కావున, $\cot^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)=\theta$ నుండి $\theta\in(0,\pi)$ అగును .

కాని $\cot^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)=\theta$ అయిన $\cot\theta=\frac{1}{7}$ అగును కావున $\tan\theta=7$ మరియు θ ఒక అల్పకోణము.

$\tan\theta=\frac{7}{1}$ అనునది ఉపయోగించి లంబకోణ త్రిభుజం నిర్మించుము.తరువాత $\cos\theta=\frac{1}{5\sqrt{2}}$ అనునది లభించును. ■

ఉదాహరణ 4.15

$\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\sec^{-1}x$, $|x|>1$ అని నిరూపించుము.



సాధన

$\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\alpha$. అనుకొనుము.అప్పుడు $\cot\alpha=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ మరియు α ఒక అల్పకోణము అగును.

ఇవ్వబడిన విలువల ఆధారంగా ఒక లంబకోణ త్రిభుజమును నిర్మించగా త్రిభుజము నుంచి $\sec\alpha=\frac{x}{1}=x$ కావున $\alpha=\sec^{-1}x$ అగును.

కావున $\cot^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\right)=\sec^{-1}x$, $|x|>1$ అగును. ■

అభ్యాసము 4.4

1. క్రింది వాటికి ప్రధాన విలువలను కనుగొనుము.

   (i) $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ (ii) $\cot^{-1}\left(\sqrt{3}\right)$ (iii) $\operatorname{cosec}^{-1}\left(-\sqrt{2}\right)$

2. క్రింది వాటికి విలువలను కనుగొనుము.

   (i) $\tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right)-\sec^{-1}(-2)$ (ii) $\sin^{-1}(-1)+\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\cot^{-1}(2)$

   (iii) $\cot^{-1}(1)+\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\sec^{-1}\left(-\sqrt{2}\right)$

4.10 విలోమ త్రికోణమితి ప్రమేయము యొక్క ధర్మములు (Properties of Inverse Trigonometric Functions)

ఈ పాఠ్యాంశము నుండి విలోమ త్రికోణమితి ప్రమేయం యొక్క కొన్ని ధర్మాలను గురించి తెలుసుకొందాము. ఇక్కడ గుర్తించిన ధర్మాలకు సంబంధించిన విలోమ త్రికోణమితి ప్రమేయముల ప్రధాన విలువలు కలిగిన అంతరములలో ఎక్కడ నిర్వచింపబడినదో అక్కడ సరిపోవును.

ధర్మం 1

(i) $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, అయితే $\sin^{-1}(\sin\theta)=\theta$.(ii) $\theta\in[0,\pi]$, అయితే $\cos^{-1}(\cos\theta)=\theta$.

(iii) $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, అయితే $\tan^{-1}(\tan\theta)=\theta$.(iv) $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$, అయితే $\operatorname{cosec}^{1}(\operatorname{cosec}\theta)=\theta$

(v) $\theta\in[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, అయితే $\sec^{-1}(\sec\theta)=\theta$.(vi) $\theta\in(0,\pi)$, అయితే $\cot^{-1}(\cot\theta)=\theta$.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 179 23-01-2023 15:29:54

నిరూపణ

పైన తెలిపిన అన్ని ఫలితములు వాటికి సంబంధించిన నిర్వచనం నుండి లభించును.

ఉదాహరణకు, (i) $\sin\theta = x$; $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ అనుకొనుము.

కావున విలోమ సైన్ ప్రమేయం నిర్వచనం నుండి $\sin\theta = x$ మూలముగా $\theta = \sin^{-1} x$ అని పొందవచ్చును.

కావున $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$ అగును.

ధర్మం 2

(i) $x \in [-1, 1]$, అయితే $\sin\left(\sin^{-1} x\right) = x$ (ii) $x \in [-1, 1]$, అయితే $\cos\left(\cos^{-1} x\right) = x$

(iii) $x \in \mathbb{R}$, అయితే $\tan\left(\tan^{-1} x\right) = x$ (iv) $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$, అయితే $\operatorname{cosec}\left(\operatorname{cosec}^{-1} x\right) = x$

(v) $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$, అయితే $\sec\left(\sec^{-1} x\right) = x$ (vi) $x \in \mathbb{R}$, అయితే $\cot\left(\cot^{-1} x\right) = x$

నిరూపణ

(i) $x \in [-1, 1]$ కు $\sin^{-1} x$ సునిర్వచితము.

$\sin^{-1} x = \theta$ అయితే నిర్వచనం నుండి $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ మరియు $\sin\theta = x$

కావున $\sin\theta = x$ నుండి $\sin\left(\sin^{-1} x\right) = x$ ను పొందవచ్చును.

ఇదేవిధంగా మిగిలిన ధర్మాలను నిరూపించవచ్చును.

గమనిక

(i) $f^{-1}(x)$ నిర్వచనం నుంచి $y = f(x)$, అను ఏదేని త్రికోణమితీయ ప్రమేయంకు f యొక్క వ్యాప్తిలో గల ప్రతి x కు $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$ అగునని చెప్పవచ్చును. $g^{-1}(x) = \sin^{-1} x$ లేదా $\cos^{-1} x$, అయినపుడు $f\left(g^{-1}(x)\right)$ కనుగొనుటకు ఇచ్చిన విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయంకు త్రిభుజమును గీయుట అవసరము. ఉదాహరణకు $\cot\left(\sin^{-1} x\right)$ విలువ కనుగొనుటకు $\sin^{-1} x$. నుపయోగించి మనము ఒక త్రిభుజమును గీయవలెను. కాని, $f^{-1}\left(f(x)\right)$. వానికి కొంత ఎక్కువ జాగ్రత్త వహించవలెను.

(ii) f అనునది ఆరు త్రికోణమితీయ ప్రమేయంలో ఏదైనా ఒకటి అయిన $f^{-1}[f(x)]$ విలువను గణించునపుడు క్రింది వానిని గమనించుము.

(అ) x అనునది f యొక్క పరిమిత ప్రదేశంలో ఉంటే $f^{-1}[f(x)] = x$ అగును..

(ఆ) x అనునది f యొక్క పరిమిత ప్రదేశంలో లేకుంటే f యొక్క పరిమిత ప్రదేశంలో $f(x) = f(x_1)$ గా ఉండునట్లు x_1 కనుగొనుము. అప్పుడు $f^{-1}[f(x)] = x_1$. ఉదాహరణకు,

$$\sin^{-1}(\sin x) = \begin{cases} x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ x_1, & x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \text{ ఇక్కడ } \sin x = \sin x_1 \text{ మరియు } x_1 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

ధర్మం 3: విలోమ వ్యుత్క్రమాల సర్వసమానతలు (Reciprocal inverse identities)

(i) $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$, అయితే $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{cosec}^{-1} x$. (ii) $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$, అయితే $\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sec^{-1} x$.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 180 23-01-2023 15:30:11

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}\cot^{-1}x, & x>0\\ -\pi+\cot^{-1}x, & x<0.\end{cases}$

నిరూపణ

(i) If $x\in\mathbb{R}\setminus(-1,1)$ అయితే $\frac{1}{x}\in[-1,1]$ మరియు $x\neq 0$ అగును. కావున, $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)$ ను సునిర్వచితము.

$\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\theta$ అనుకొనుము. నిర్వచనం ప్రకారం $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$ మరియు $\sin\theta=\frac{1}{x}$.

అందువలన, $\operatorname{cosec}\theta=x$, నుండి $\theta=\operatorname{cosec}^{-1}x$ ను పొందవచ్చును.

ఇప్పుడు, $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\theta=\operatorname{cosec}^{-1}x$. అగును. అందువలన, $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right)=\operatorname{cosec}^{-1}x$, $x\in\mathbb{R}\setminus(-1,1)$.

అగును.

ఇదేవిధంగా ఇతర ఫలితములను నిరూపించవచ్చును.

ధర్మం 4: (పరావర్తన ధర్మం (Reflection identities)

(i) $x\in[-1,1]$ అయితే $\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x$.

(ii) $x\in\mathbb{R}$ అయితే $\tan^{-1}(-x)=-\tan^{-1}x$.

(iii) $x\in\mathbb{R}\setminus(-1,1)$ లేదా $|x|\geq 1$ అయితే $\operatorname{cosec}^{-1}(-x)=-\operatorname{cosec}^{-1}x$.

(iv) $x\in[-1,1]$, అయితే $\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x$.

(v) $|x|\geq 1$ లేదా $x\in\mathbb{R}\setminus(-1,1)$ అయితే $\sec^{-1}(-x)=\pi-\sec^{-1}x$.

(vi) $x\in\mathbb{R}$, అయితే $\cot^{-1}(-x)=\pi-\cot^{-1}x$.

నిరూపణ

(i) $x\in[-1,1]$ అయితే $-x\in[-1,1]$ అగును. అందువలన $\sin^{-1}(-x)$ సునిర్వచితము.

$\sin^{-1}(-x)=\theta$ అయినపుడు $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ మరియు $\sin\theta=-x$ అగును.

ఇప్పుడు $\sin\theta=-x$ నుండి $x=-\sin\theta=\sin(-\theta)$ అగును.

$x=\sin(-\theta)$ నుండి $\sin^{-1}x=-\theta$ అవుతుంది. దీని నుండి $\theta=-\sin^{-1}x$ అగును.

కావున $\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x$ అగును.

(iv) $x\in[-1,1]$ అయితే, $-x\in[-1,1]$ అగును. కావున $\cos^{-1}(-x)$ సునిర్వచితము.

$\cos^{-1}(-x)=\theta$ అయినపుడు $\theta\in[0,\pi]$ మరియు $\cos\theta=-x$ అగును.

ఇప్పుడు $\cos\theta=-x$ నుండి $x=-\cos\theta=\cos(\pi-\theta)$.

కావున $\pi-\theta=\cos^{-1}x$, అయినందువలన $\theta=\pi-\cos^{-1}x$ అగును.

కావున $\cos^{-1}(-x)=\pi-\cos^{-1}x$ అగును.

ఇదేవిధంగా ఇతర ఫలితములను కూడా నిరూపించవచ్చును.

గమనిక

(i) అన్వేక మరియు బేసి ప్రమేయము యొక్క విలోమ ప్రమేయము ఒక బేసి ప్రమేయము అగును. ఉదాహరణకు $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ పరిమిత ప్రదేశములో సైన్ ప్రమేయం అన్వేక ప్రమేయం మరియు బేసి ప్రమేయం అయినందువలన $y=\sin^{-1}x$ అనునది ఒక బేసి ప్రమేయం అగును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 181 23-01-2023 15:30:28

(ii) సరిప్రమేయం విలోమం సరి ప్రమేయం అగునా? ఈ ప్రశ్నను అర్థము లేని ప్రశ్నగా వదిలివేయవచ్చును. సున్నా తప్ప వేరెక్కడగాని నిర్వచింపబడిన ఒక సరి ప్రమేయం అన్వేక ప్రమేయంగా ఉండదు. $\cos^{-1}x$ మరియు $\sec^{-1}x$ మొదలగునవి సరి ప్రమేయంగా ఉండదు అని గమనించవలెను.

ధర్మం 5 ఉప ప్రమేయముల సర్వసమానతలు (Cofunction inverse identities)

(i) $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2},\ x\in[-1,1].$ (ii) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2},\ x\in\mathbb{R}.$

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1}x+\sec^{-1}x=\frac{\pi}{2},\ x\in\mathbb{R}\setminus(-1,1)$ or $|x|\geq 1$.

నిరూపణ

(i) ఇక్కడ $x\in[-1,1]$, $\sin^{-1}x=\theta$ అనుకొనుము. అప్పుడు $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ మరియు $\sin\theta=x$ అగును.

$-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow 0\leq\frac{\pi}{2}-\theta\leq\pi$ అనునది గమనించవలెను.

అందువలన, $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=x,$ దీని నుండి $\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}x$ అగును.

అందువలన, $\cos^{-1}x+\sin^{-1}x=\frac{\pi}{2}$, $|x|\leq 1$ అగును.

(ii) $\cot^{-1}x=\theta$ అనుకొనుము. అప్పుడు $\cot\theta=x$, $0<\theta<\pi$ మరియు $x\in\mathbb{R}$ అగును.

ఇక్కడ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta=x.$ అగును. ... (1)

అందువలన $x\in\mathbb{R}$ కు $\tan(\tan^{-1}x)=x$ మరియు (1) నుండి $\tan(\tan^{-1}x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ అగును.

అందువలన $\tan(\tan^{-1}x)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\cot^{-1}x\right)$ అగును. ... (2)

$0<\cot^{-1}x<\pi$ నుండి $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}-\cot^{-1}x<\frac{\pi}{2}.$ ను గమనించుము.

అందువలన (2) నుండి $\tan^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\cot^{-1}x$ అనునది పొందవచ్చును. కావున $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2},\ x\in\mathbb{R}.$ అగును.

ఇదేవిధంగా (iii) ను కూడా నిరూపించవచ్చును.

ధర్మం 6

(i) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)$, ఇక్కడ $x^2+y^2\leq 1$ లేదా $xy<0$ అగును.

(ii) $\sin^{-1}x-\sin^{-1}y=\sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\right)$, ఇక్కడ $x^2+y^2\leq 1$ లేదా $xy>0$ అగును.

(iii) $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\cos^{-1}\left[xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]$, అయితే $x+y\geq 0$ అగును.

(iv) $\cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\cos^{-1}\left[xy+\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]$, అయితే $x\leq y$ అగును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 182 23-01-2023 15:30:43

(v) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$, అయితే $xy<1$ అగును.

(vi) $\tan^{-1}x-\tan^{-1}y=\tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$ అయితే $xy>-1$ అగును.

నిరూపణ

(i) $A=\sin^{-1}x$ అనుకొనుము. అప్పుడు $x=\sin A$; $A\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; $|x|\le 1$ మరియు $\cos A$ ధనాత్మక విలువ అగును.

$B=\sin^{-1}y$ అనుకొనుము. అప్పుడు $y=\sin B$; $B\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$; $|y|\le 1$ మరియు $\cos B$ ధనాత్మక విలువ అగును.

ఇప్పుడు $\cos A=+\sqrt{1-\sin^2 A}=\sqrt{1-x^2}$ మరియు $\cos B=+\sqrt{1-\sin^2 B}=\sqrt{1-y^2}$

అప్పుడు $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$= x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$, ఇక్కడ $|x|\le 1$; $|y|\le 1$ అందువలన, $x^2+y^2\le 1$

కావున, $A+B=\sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)$

అందువలన, $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right)$, ఇక్కడ $x^2+y^2\le 1$ లేదా $xy<0$.

ఇదేవిధంగా ఇతర ఫలితములను కూడా నిరూపించవచ్చును.

ధర్మం 7

(i) $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right),|x|<1$ (ii) $2\tan^{-1}x=\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right),\ x\ge 0$

(iii) $2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right),|x|\le 1$.

నిరూపణ

(i) ధర్మం VI (v) లో $y=x$ అని తీసుకొనగా మనకు అవసరమైన ఫలితాలను పొందవచ్చును.

$2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right),|x|<1$ అగును.

(ii) $\theta=2\tan^{-1}x$. కావున, $\tan\frac{\theta}{2}=x$.

సర్వసమానత $\cos\theta=\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1-x^2}{1+x^2}$ దీని నుండి $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$.

కావున, $2\tan^{-1}x=\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right),\ x\ge 0$.

ఇదేవిధంగా ఇతర ఫలితాలను నిరూపించవచ్చును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 183 23-01-2023 15:30:57

ధర్మం 8

(i) $|x| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ లేదా $-\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ అయితే $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sin^{-1} x$.

(ii) $\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le 1$ అయితే $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1} x$.

నిరూపణ

(i) $x = \sin\theta$ కావున

ఇప్పుడు $2x\sqrt{1-x^2} = 2\sin\theta\cos\theta = \sin 2\theta$

అయినందువల్ల $2\theta = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ కావున $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\sin^{-1} x$.

(ii) $x = \cos\theta$.

ఇప్పుడు $2x\sqrt{1-x^2} = 2\cos\theta\sin\theta = \sin 2\theta$

కావున $2\theta = \sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$ అయినందువలన $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) = 2\cos^{-1} x$.

ధర్మం 9

(i) $0 \le x \le 1$ అయితే $\sin^{-1} x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$.(ii) $-1 \le x < 0$ అయితే $\sin^{-1} x = -\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$.

(iii) $-1 < x < 1$ అయితే $\sin^{-1} x = \tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$. (iv) $0 \le x \le 1$ అయితే $\cos^{-1} x = \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

(v) $-1 \le x < 0$ అయితే $\cos^{-1} x = \pi - \sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$.

(vi) $x > 0$ అయితే $\tan^{-1} x = \sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$.

నిరూపణ

(i) $\sin^{-1} x = \theta$ అనుకొనుము. అయితే $\sin\theta = x$. $0 \le x \le 1$ అయినందువల్ల $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

అని లభించును. ఇక్కడ $\cos\theta = \sqrt{1-x^2}$ లేదా $\cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = \theta = \sin^{-1} x$.

కావున, $\sin^{-1} x = \cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$, $0 \le x \le 1$.

(ii) $-1 \le x \le 0$ మరియు $\sin^{-1} x = \theta$ తీసుకొంటే $-\frac{\pi}{2} \le \theta < 0$.

అందువలన $\sin\theta = x$ మరియు $\cos(-\theta) = \sqrt{1-x^2}$ (since $\cos\theta > 0$)

కావున, $\cos^{-1}\sqrt{1-x^2} = -\theta = -\sin^{-1} x$. అందువలన, $\sin^{-1} x = -\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$.

ఇదేవిధంగా ఇతర ఫలితములను నిరూపించవచ్చును.

ధర్మం 10

(i) $3\sin^{-1} x = \sin^{-1}(3x - 4x^3)$, $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. (ii) $3\cos^{-1} x = \cos^{-1}(4x^3 - 3x)$, $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 184 23-01-2023 15:31:13

నిరూపణ

(i) $x = \sin\theta$ అయితే $\theta = \sin^{-1} x$ అగును.

ఇప్పుడు, $3x - 4x^3 = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta = \sin 3\theta$.

అందువలన, $\sin^{-1}(3x - 4x^3) = 3\theta = 3\sin^{-1} x$.

ఇదేవిధంగా తరువాత వచ్చు ఫలితములను నిరూపించవచ్చును.

విశేషాంశము

(i) $\sin^{-1}(\cos x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & x \in [0, \pi] \\ \frac{\pi}{2} - y, & x \notin [0, \pi] \text{ మరియు } \cos x = \cos y, y \in [0, \pi] \end{cases}$

(ii) $\cos^{-1}(\sin x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - x, & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{\pi}{2} - y, & x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ మరియు } \sin x = \sin y,\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$

ఉదాహరణ 4.16

$\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1} x + 2\cos^{-1} x \le \frac{3\pi}{2}$ ను నిరూపించుము.

సాధన

$\sin^{-1} x + 2\cos^{-1} x = \sin^{-1} x + \cos^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} + \cos^{-1} x$

$0 \le \cos^{-1} x \le \pi$ అయితే $\frac{\pi}{2} + 0 \le \cos^{-1} x + \frac{\pi}{2} \le \pi + \frac{\pi}{2}$ అని మనకు తెలుసు.

కావున, $\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1} x + 2\cos^{-1} x \le \frac{3\pi}{2}$.

ఉదాహరణ 4.17

సూక్ష్మీకరించుము (i) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)\right)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$

(iii) $\sec^{-1}\left(\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$ (iv) $\sin^{-1}[\sin 10]$

సాధన

(i) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)\right)$. $\cos^{-1} x$ కు ప్రధాన విలువల వ్యాప్తి $[0, \pi]$ అగును.

$\frac{13\pi}{3} \notin [0, \pi]$ అయినందువలన $\frac{13\pi}{3}$ ను $\frac{13\pi}{3} = 4\pi + \frac{\pi}{3}$ అని వ్రాయవచ్చును.

ఇక్కడ $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$ తరువాత $\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right) = \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$.

అందువలన $\cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{13\pi}{3}\right)\right) = \cos^{-1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$, ఎందుకనగా $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]$.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 185 23-01-2023 15:31:23

(ii) $\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$.

$\tan^{-1}x$ యొక్క ప్రధాన వ్యాప్తి $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ లో $\frac{3\pi}{4}$ లేదని గమనించవలెను.

కావున $\frac{3\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$ అని వ్రాయుము.

తరువాత $\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ మరియు $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

$-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ అయినందువలన $\tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) = \tan^{-1}\left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$.

(iii) $\sec^{-1}\left(\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right)$.

$\sec^{-1}x$ యొక్క ప్రధాన వ్యాప్తి $[0, \pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ లో $\frac{5\pi}{3}$ లేదని గమనించవలెను.

అందువలన $\frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3}$. అని వ్రాయుము. తరువాత $\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \sec\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sec\left(\frac{\pi}{3}\right)$

మరియు $\frac{\pi}{3} \in [0, \pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$.

కావున $\sec^{-1}\left(\sec\left(\frac{5\pi}{3}\right)\right) = \sec^{-1}\left(\sec\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{\pi}{3}$.

(iv) $\sin^{-1}[\sin 10]$

$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ అయితే $\sin^{-1}(\sin\theta) = \theta$ అగును. $\frac{\pi}{2} \simeq \frac{11}{7}$ అను ఉజ్జాయింపు విలువను తీసుకొనుము.

$10 \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ అయిన కాని $(10 - 3\pi) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ అగును.

తరువాత, $\sin 10 = \sin(3\pi + (10 - 3\pi)) = \sin(\pi + (10 - 3\pi) = -\sin(10 - 3\pi) = \sin(3\pi - 10)$.

కావున, $\sin^{-1}[\sin 10] = \sin^{-1}[\sin(3\pi - 10)] = 3\pi - 10$ అగును. $(3\pi - 10) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

ఉదాహరణ 4.18

విలువ కనుగొనుము (i) $\sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$ (ii) $\cos\left[\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right]$

(iii) $\tan\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right) + \frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)\right]$.

సాధన

(i) $\sin\left[\frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \sin\left[\frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 186 23-01-2023 15:31:34

(ii) $\cos\left[\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right]$ నందు $\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)=\theta$ అనుకొనుము. కావున $\cos\theta=\frac{1}{8}$ మరియు $\theta\in[0,\pi]$.

ఇప్పుడు $\cos\theta=\frac{1}{8}$ ల నుండి $2\cos^2\frac{\theta}{2}-1=\frac{1}{8}$, $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ ధనాత్మకం కావున $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{3}{4}$.

కావున, $\cos\left[\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)\right]=\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)=\frac{3}{4}$.

(iii) $\tan\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)+\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)\right]$

$a=\tan\theta$ అనుకొనుము.

ఇప్పుడు,

$$\tan\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2a}{1+a^2}\right)+\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)\right]=\tan\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)+\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)\right]$$

$$=\tan\left[\frac{1}{2}\sin^{-1}(\sin 2\theta)+\frac{1}{2}\cos^{-1}(\cos 2\theta)\right]=\tan[2\theta]=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2a}{1-a^2}.$$

ఉదాహరణ 4.19

నిరూపించుము $\tan(\cos^{-1}x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ ఇక్కడ $|x|<1,\ x\neq 0$

సాధన

$\cos^{-1}x=\theta$ అనుకొనుము. అప్పుడు $x=\cos\theta$ మరియు $-1\le x\le 1$

ఇప్పుడు, $\tan(\cos^{-1}x)=\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{1-\cos^2\theta}}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $|x|<1$.

ఉదాహరణ 4.20

$\sin\left[\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)+\sec^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)\right]$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$\sec^{-1}\frac{5}{4}=\theta$ అనుకొనుము. అప్పుడు $\sec\theta=\frac{5}{4}$ అగును మరియు $\cos\theta=\frac{4}{5}$.

తరువాత $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$, $\theta=\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ లభించినది.

అందువలన, $\sec^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ మరియు $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sec^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)=2\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$.

$|x|\le\frac{1}{\sqrt{2}}$ కావున $\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)=2\sin^{-1}x$ అని తెలియును.

$\frac{3}{5}<\frac{1}{\sqrt{2}}$, అయినందువలన $2\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)=\sin^{-1}\left(2\times\frac{3}{5}\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{24}{25}\right)$.

కావున, $\sin\left[\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)+\sec^{-1}\left(\frac{5}{4}\right)\right]=\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{24}{25}\right)\right)=\frac{24}{25}$, ఎందుకనగా $\frac{24}{25}\in[-1,1]$.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 187 23-01-2023 15:31:49

ఉదాహరణ 4.21

నిరూపించుము (i) $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$ (ii) $2\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\frac{31}{17}$

సాధన

(i) $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y=\tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$, $xy<1$. అని తెలియును.

అందువల్ల, $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)}=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$.

(ii) $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}$, $-1<x<1$ అని తెలియును.

కావున, $2\tan^{-1}\frac{1}{2}=\tan^{-1}\frac{2\left(\frac{1}{2}\right)}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$.

అయినందువలన, $2\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\tan^{-1}\left(\frac{\frac{4}{3}+\frac{1}{7}}{1-\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{1}{7}\right)}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{31}{17}\right)$. ■

ఉదాహరణ 4.22

$\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$ మరియు $0<x,y,z<1$, అయిన

$x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ అని నిరూపించుము.

సాధన

$\cos^{-1}x=\alpha$ మరియు $\cos^{-1}y=\beta$ అనుకొనుము. కావున $x=\cos\alpha$ మరియు $y=\cos\beta$ అగును.

$\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$ దీని నుండి $\alpha+\beta=\pi-\cos^{-1}z$. ... (1)

తరువాత, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$.

(1) నుండి $\cos(\pi-\cos^{-1}z)=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ ను పొందవచ్చును.

$-\cos(\cos^{-1}z)=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$.

కావున, $-z=xy-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ దీని నుండి $-xy-z=-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$.

ఇరువైపుల వర్గము చేసినపుడు $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$ వచ్చును. ■

ఉదాహరణ 4.23

d ను సామాన్య భేదముగా తీసుకొని $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n$ ఒక అంకశ్రేడి అయితే,

$\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right)+\ldots+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_na_{n-1}}\right)\right]=\frac{a_n-a_1}{1+a_1a_n}$ అని నిరూపించుము.

సాధన

$\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{a_2-a_1}{1+a_1a_2}\right)=\tan^{-1}a_2-\tan^{-1}a_1$.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 188 23-01-2023 15:32:02

ఇదేవిధంగా, $\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{a_3-a_2}{1+a_2a_3}\right) = \tan^{-1}a_3 - \tan^{-1}a_2$.

ఇదేవిధంగా కొనసాగించిన మనకు లభించునది

$\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_na_{n-1}}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{a_n-a_{n-1}}{1+a_{n-1}a_n}\right) = \tan^{-1}a_n - \tan^{-1}a_{n-1}$.

లంబంగా కూడిన

$\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right)+\ldots+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_na_{n-1}}\right) = \tan^{-1}a_n - \tan^{-1}a_1$ మనకు లభించును.

$$\tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_1a_2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_2a_3}\right)+\ldots+\tan^{-1}\left(\frac{d}{1+a_na_{n-1}}\right)\right] = \tan[\tan^{-1}a_n - \tan^{-1}a_1]$$

$$= \tan\left[\tan^{-1}\left(\frac{a_n-a_1}{1+a_1a_n}\right)\right] = \frac{a_n-a_1}{1+a_1a_n}.$$

ఉదాహరణ 4.24 సాధించుము $\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}x$ ఇక్కడ $x>0$.

సాధన

$\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1}{2}\tan^{-1}x$ అనుదాని నుండి $\tan^{-1}1-\tan^{-1}x=\frac{1}{2}\tan^{-1}x$.

కావున, $\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}\tan^{-1}x$ ను సూక్ష్మీకరించిన $\tan^{-1}x=\frac{\pi}{6}$ అనునది లభించును.

అందువలన, $x=\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

ఉదాహరణ 4.25 $\sin^{-1}x>\cos^{-1}x$ ను సాధించుము.

సాధన

$-1\le x\le 1$ ఇవ్వబడినది $\sin^{-1}x>\cos^{-1}x$.

ఇరువైపుల $\sin^{-1}x,$ ను కూడిన

$\sin^{-1}x+\sin^{-1}x>\cos^{-1}x+\sin^{-1}x$ సూక్ష్మీకరించగా $2\sin^{-1}x>\frac{\pi}{2}$.

$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ అను అంతరంలో సైన్ ప్రమేయము విలువ పెరుగుతున్నందువల్ల $x>\sin\frac{\pi}{4}$ లేదా $x>\frac{1}{\sqrt{2}}$ అగును.

అందువలన సాధన సమితి అంతరము $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},1\right]$ అగును.

ఉదాహరణ 4.26

$\cot(\sin^{-1}x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, -1\le x\le 1$ మరియు $x\neq 0$ అని చూపుము.

సాధన

$\sin^{-1}x=\theta$ అనుకొనుము. అప్పుడు $x=\sin\theta$ మరియు $x\neq 0,\ \theta\in\left[\frac{-\pi}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{\pi}{2}\right]$ అని పొందగలము.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 189 23-01-2023 15:32:14

$\cos\theta \geq 0$ మరియు $\cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-x^2}$.

కావున, $\cot(\sin^{-1}x) = \cot\theta = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $|x| \leq 1$ మరియు $x \neq 0$

ఉదాహరణ 4.27: $6x^2 < 1$ అయితే $\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \dfrac{\pi}{4}$ ను సాధించుము.

సాధన

$6x^2 < 1$ అయితే $\tan^{-1}2x + \tan^{-1}3x = \tan^{-1}\left(\dfrac{2x+3x}{1-6x^2}\right)$. .

$\tan^{-1}\left(\dfrac{5x}{1-6x^2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ అయినందువలన $\dfrac{5x}{1-6x^2} = \tan\dfrac{\pi}{4} = 1$.

కావున, $1-6x^2 = 5x$, అను దాని నుండి $6x^2+5x-1=0$ పొందగలం

సాధనలు, $x = \dfrac{1}{6}, -1$. కాని $x=-1$, $6x^2<1$ ను తృప్తి పరుచదు.

$x=-1$ సమీకరణపు ఎడమవైపును ఋణాత్మకంగా, కుడివైపును ధనాత్మకంగా మారునని గమనించవలెను. కావున $x=-1$ సాధన కాదు. కావున $x=\dfrac{1}{6}$ వద్ద మాత్రమే సమీకరణమునకు సాధన కలదు.

ఉదాహరణ 4.28

$\tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ ను సాధించుము.

సాధన

ఇప్పుడు, $\tan^{-1}\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right) = \tan^{-1}\left[\dfrac{\dfrac{x-1}{x-2}+\dfrac{x+1}{x+2}}{1-\dfrac{x-1}{x-2}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)}\right] = \dfrac{\pi}{4}$.

కావున, $\dfrac{\dfrac{x-1}{x-2}+\dfrac{x+1}{x+2}}{1-\dfrac{x-1}{x-2}\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)} = 1$, ను సూక్ష్మీకరించగా $2x^2-4=-3$ లభించును.

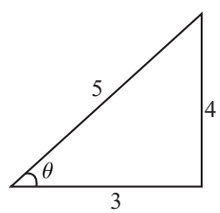
కావున, $x^2 = \dfrac{1}{2}$ నుండి $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ లభించును.

ఉదాహరణ 4.29

$\cos\left(\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right) = \sin\left\{\cot^{-1}\left(\dfrac{3}{4}\right)\right\}$ ను సాధించుము.

సాధన

$\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ అని తెలియును.



కావున, $\cos\left(\sin^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. ...(1)

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 190 23-01-2023 15:32:26

$\cot^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)=\theta$. అనుకొనిన $\cot\theta=\frac{3}{4}$ మరియు θ అల్పకోణము.

పటము నుండి మనకు లభించునది

$$\sin\left\{\cot^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)\right\}=\sin\theta=\frac{4}{5} \quad \ldots (2)$$

(1) మరియు (2)ల నుండి $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{4}{5}$ అని మనకు లభించును. దీని నుండి $\sqrt{1+x^2}=\frac{5}{4}$.

కావున, $x=\pm\frac{3}{4}$.

అభ్యాసము 4.5

1. ఈ క్రింది వాటికి విలువ వ్యవస్థితం అయితే దాని విలువను కనుగొనుము. వ్యవస్థితం కాకపోతే దానికి కారణమును తెలుపుము.

   (i) $\sin^{-1}(\cos\pi)$ (ii) $\tan^{-1}\left(\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\right)$ (iii) $\sin^{-1}[\sin 5]$.

2. త్రిభుజమును ఉపయోగించి క్రింది సమాసంలకు x విలువను x పదాలలో కనుగొనుము.

   (i) $\sin\left(\cos^{-1}(1-x)\right)$ (iii) $\cos\left(\tan^{-1}(3x-1)\right)$ (iii) $\tan\left(\sin^{-1}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right)$.

3. విలువను కనుగొనుము.

   (i) $\sin^{-1}\left(\cos\left(\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right)$ (ii) $\cot\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{4}{5}\right)$ (iii) $\tan\left(\sin^{-1}\frac{3}{5}+\cot^{-1}\frac{3}{2}\right)$.

4. నిరూపించుము

   (i) $\tan^{-1}\frac{2}{11}+\tan^{-1}\frac{7}{24}=\tan^{-1}\frac{1}{2}$ (ii) $\sin^{-1}\frac{3}{5}-\cos^{-1}\frac{12}{13}=\sin^{-1}\frac{16}{65}$.

5. నిరూపించుము $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\left[\frac{x+y+z-xyz}{1-xy-yz-zx}\right]$.

6. $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$ అయితే $x+y+z=xyz$ అని నిరూపించుము.

7. $|x|<\frac{1}{\sqrt{3}}$ అయితే $\tan^{-1}x+\tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}=\tan^{-1}\frac{3x-x^3}{1-3x^2}$ అని నిరూపించుము.

8. $\tan^{-1}\frac{x}{y}-\tan^{-1}\frac{x-y}{x+y}$ ను సూక్ష్మీకరించుము.

9. సాధించుము. :

   (i) $\sin^{-1}\frac{5}{x}+\sin^{-1}\frac{12}{x}=\frac{\pi}{2}$ (ii) $2\tan^{-1}x=\cos^{-1}\frac{1-a^2}{1+a^2}-\cos^{-1}\frac{1-b^2}{1+b^2}$, $a>0,\ b>0$.

   (iii) $2\tan^{-1}(\cos x)=\tan^{-1}(2\operatorname{cosec}x)$ (iv) $\cot^{-1}x-\cot^{-1}(x+2)=\frac{\pi}{12}$, $x>0$.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 191 23-01-2023 15:32:38

10. ఈ క్రింది సమీకరణము యొక్క సాధనల సంఖ్యను కనుగొనుము.

$\tan^{-1}(x-1)+\tan^{-1}x+\tan^{-1}(x+1)=\tan^{-1}(3x)$.

16R30

అభ్యాసము 4.6

క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రతి ప్రశ్నకు నాలుగు సమాధానములు ఇవ్వబడినవి. అందులో సరియైన సమాధానమును ఎన్నుకొనుము.

1. $0 \le x \le \pi$ వద్ద $\sin^{-1}(\cos x)$ యొక్క విలువ

(1) $\pi - x$ (2) $x - \frac{\pi}{2}$ (3) $\frac{\pi}{2} - x$ (4) $x - \pi$

2. $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y = \frac{2\pi}{3}$; అయితే $\cos^{-1}x + \cos^{-1}y$ యొక్క విలువ _____ కు సమానము.

(1) $\frac{2\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{\pi}{6}$ (4) π

3. $\sin^{-1}\frac{3}{5} - \cos^{-1}\frac{12}{13} + \sec^{-1}\frac{5}{3} - \text{cosec}^{-1}\frac{13}{12}$ యొక్క విలువ _____ కు సమానము.

(1) 2π (2) π (3) 0 (4) $\tan^{-1}\frac{12}{65}$

4. $\sin^{-1}x = 2\sin^{-1}\alpha$ కు ఒక సాధన ఉన్నట్లయితే, తరువాత

(1) $|\alpha| \le \frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $|\alpha| \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$ (3) $|\alpha| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (4) $|\alpha| > \frac{1}{\sqrt{2}}$

5. $\sin^{-1}(\cos x) = \frac{\pi}{2} - x$ క్రింద ఇవ్వబడిన ఏ విలువలకు సత్యమగును.

(1) $-\pi \le x \le 0$ (2) $0 \le x \le \pi$ (3) $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ (4) $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{3\pi}{4}$

6. $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y + \sin^{-1}z = \frac{3\pi}{2}$ అయితే $x^{2017} + y^{2018} + z^{2019} - \frac{9}{x^{101} + y^{101} + z^{101}}$ విలువ.

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

7. కొన్ని $x \in R$ కు $\cot^{-1}x = \frac{2\pi}{5}$ అయితే $\tan^{-1}x$ విలువ

(1) $-\frac{\pi}{10}$ (2) $\frac{\pi}{5}$ (3) $\frac{\pi}{10}$ (4) $-\frac{\pi}{5}$

8. $f(x) = \sin^{-1}\sqrt{x-1}$ అని నిర్వచింపబడిన ప్రమేయం యొక్క ప్రదేశం

(1) $[1, 2]$ (2) $[-1, 1]$ (3) $[0, 1]$ (4) $[-1, 0]$

9 $x = \frac{1}{5}$ అయితే $\cos\left(\cos^{-1}x + 2\sin^{-1}x\right)$ యొక్క విలువ

(1) $-\sqrt{\frac{24}{25}}$ (2) $\sqrt{\frac{24}{25}}$ (3) $\frac{1}{5}$ (4) $-\frac{1}{5}$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 192 23-01-2023 15:32:52

10. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)$ కు సమానమైనది

(1) $\frac{1}{2}\cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (2) $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (3) $\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ (4) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

11. ప్రమేయం $f(x)=\sin^{-1}\left(x^2-3\right)$, అయితే x ఉండు అంతరం

(1) $[-1, 1]$ (2) $\left[\sqrt{2}, 2\right]$

(3) $\left[-2, -\sqrt{2}\right]\cup\left[\sqrt{2}, 2\right]$ (4) $\left[-2, -\sqrt{2}\right]$

12. $\cot^{-1}2$ మరియు $\cot^{-1}3$ లు ఒక త్రిభుజంలో రెండు కోణములు అయితే మూడవ కోణము.

(1) $\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{3\pi}{4}$ (3) $\frac{\pi}{6}$ (4) $\frac{\pi}{3}$

13. $\sin^{-1}\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)-\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{x}}\right)=\frac{\pi}{6}$ నందు x యొక్క వర్గ సమీకరణం

(1) $x^2-x-6=0$ (2) $x^2-x-12=0$ (3) $x^2+x-12=0$ (4) $x^2+x-6=0$

14. $\sin^{-1}\left(2\cos^2 x-1\right)+\cos^{-1}\left(1-2\sin^2 x\right)=$

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) $\frac{\pi}{6}$

15. $\cot^{-1}\left(\sqrt{\sin\alpha}\right)+\tan^{-1}\left(\sqrt{\sin\alpha}\right)=u$ అయితే $\cos 2u$ విలువ

(1) $\tan^2\alpha$ (2) 0 (3) -1 (4) $\tan 2\alpha$

16. $|x|\le 1$ అయితే $2\tan^{-1}x-\sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}$ కు సమానమైనది

(1) $\tan^{-1}x$ (2) $\sin^{-1}x$ (3) 0 (4) π

17. $\tan^{-1}x-\cot^{-1}x=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ కు సాధన.

(1) సాధన లేదు (2) ఏకైక సాధన

(3) రెండు సాధనలు (4) అనంత సాధనలు

18. $\sin^{-1}x+\cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$ అయితే x విలువ

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ (3) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ (4) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

19. $\sin^{-1}\frac{x}{5}+\operatorname{cosec}^{-1}\frac{5}{4}=\frac{\pi}{2}$ అయితే x యొక్క విలువ

(1) 4 (2) 5 (3) 2 (4) 3

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 193 23-01-2023 15:33:05

20. $|x|<1$ అయితే $\sin(\tan^{-1}x)$ విలువ

(1) $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ (4) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

సారాంశము

విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు (Inverse Trigonometric Functions)

విలోమ సైన్ ప్రమేయం	విలోమ కొసైన్ ప్రమేయం	విలోమ టాంజెంట్ ప్రమేయం	విలోమ కొసీకెంట్ ప్రమేయం	విలోమ సీకెంట్ ప్రమేయం	విలోమ కోటాంజెంట్ ప్రమేయం
ప్రదేశం $[-1,1]$	ప్రదేశం $[-1,1]$	ప్రదేశం $\mathbb{R}$	ప్రదేశం $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$	ప్రదేశం $(-\infty,-1]\cup[1,\infty)$	ప్రదేశం $\mathbb{R}$
వ్యాప్తి $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$	వ్యాప్తి $[0,\pi]$	వ్యాప్తి $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$	వ్యాప్తి $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$	వ్యాప్తి $[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$	వ్యాప్తి $(0,\pi)$
అనువర్తన ప్రమేయం కాదు	అనువర్తన ప్రమేయం కాదు	అనువర్తన ప్రమేయం కాదు	అనువర్తన ప్రమేయం కాదు	అనువర్తన ప్రమేయం కాదు	అనువర్తన ప్రమేయం కాదు
బేసి ప్రమేయం	సరి ప్రమేయం కాదు, బేసి ప్రమేయం కాదు	బేసి ప్రమేయం	బేసి ప్రమేయం	సరి ప్రమేయం కాదు, బేసి ప్రమేయం కాదు	సరి ప్రమేయం కాదు, బేసి ప్రమేయం కాదు
ప్రమేయం ఖచ్చితంగా పెరుగును	ప్రమేయం ఖచ్చితంగా తగ్గును	ప్రమేయం ఖచ్చితంగా పెరుగును	దాని ప్రదేశము ఆధారంగా ప్రమేయం ఖచ్చితంగా తగ్గును	దాని ప్రదేశము ఆధారంగా ప్రమేయం ఖచ్చితంగా తగ్గును	ప్రమేయం ఖచ్చితంగా తగ్గును
అన్వేక ప్రమేయం	అన్వేక ప్రమేయం	అన్వేక ప్రమేయం	అన్వేక ప్రమేయం	అన్వేక ప్రమేయం	అన్వేక ప్రమేయం

విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయము యొక్క ధర్మాలు:

ధర్మం 1

(i) $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ అయితే $\sin^{-1}(\sin\theta)=\theta$ (ii) $\theta\in[0,\pi]$ అయితే $\cos^{-1}(\cos\theta)=\theta$

(iii) $\theta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ అయితే $\tan^{-1}(\tan\theta)=\theta$ (iv) $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\setminus\{0\}$ అయితే $\operatorname{cosec}^{-1}(\operatorname{cosec}\theta)=\theta$

(v) $\theta\in[0,\pi]\setminus\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$ అయితే $\sec^{-1}(\sec\theta)=\theta$ (vi) $\theta\in(0,\pi)$ అయితే $\cot^{-1}(\cot\theta)=\theta$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 194 23-01-2023 15:33:13

ధర్మం 2

(i) $x \in [-1, 1]$ అయితే $\sin\left(\sin^{-1} x\right) = x$ (ii) $x \in [-1, 1]$ అయితే $\cos\left(\cos^{-1} x\right) = x$

(iii) $x \in \mathbb{R}$ అయితే $\tan\left(\tan^{-1} x\right) = x$ (iv) $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ అయితే $\operatorname{cosec}\left(\operatorname{cosec}^{-1} x\right) = x$

(v) $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ అయితే $\sec\left(\sec^{-1} x\right) = x$ (vi) $x \in \mathbb{R}$ అయితే $\cot\left(\cot^{-1} x\right) = x$

ధర్మం 3 విలోమ వ్యుత్క్రమాల సర్వసమానతలు (Reciprocal inverse identities)

(i) $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ అయితే $\sin^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{cosec} x$. (ii) $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ అయితే $\cos^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \sec x$

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \cot^{-1} x & \text{if } x > 0 \\ -\pi + \cot^{-1} x & \text{if } x < 0. \end{cases}$

ధర్మం 4 పరావర్తన ధర్మం (Reflection identities)

(i) $x \in [-1, 1]$ అయితే $\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1} x$.

(ii) $x \in \mathbb{R}$ అయితే $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$.

(iii) $|x| \geq 1$ లేదా $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ అయితే $\operatorname{cosec}^{-1}(-x) = -\operatorname{cosec}^{-1} x$.

(iv) $x \in [-1, 1]$ అయితే $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$.

(v) $|x| \geq 1$ లేదా $x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ అయితే $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$.

(vi) $x \in \mathbb{R}$ అయితే $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x$.

ధర్మం 5 ఉపవిలోమ ప్రమేయము యొక్క ధర్మాలు

(i) $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}, \ x \in [-1, 1].$ (ii) $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2}, \ x \in \mathbb{R}.$

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1} x + \sec^{-1} x = \frac{\pi}{2}, \ x \in \mathbb{R} \setminus (-1, 1)$ లేదా $|x| \geq 1$.

ధర్మం 6

(i) $\sin^{-1} x + \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)$, ఇక్కడ $x^2 + y^2 \leq 1$ లేదా $xy < 0$.

(ii) $\sin^{-1} x - \sin^{-1} y = \sin^{-1}\left(x\sqrt{1-y^2} - y\sqrt{1-x^2}\right)$, ఇక్కడ $x^2 + y^2 \leq 1$ లేదా $xy > 0$.

(iii) $\cos^{-1} x + \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left[xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]$, ఇక్కడ $x + y \geq 0$.

(iv) $x \neq y$ అయితే. $\cos^{-1} x - \cos^{-1} y = \cos^{-1}\left[xy + \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right]$,

(v) $xy < 1$ అయితే $\tan^{-1} x + \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$

(vi) $xy > -1$ అయితే $\tan^{-1} x - \tan^{-1} y = \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{1+xy}\right)$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 195 23-01-2023 15:33:33

ధర్మం 7

(i) $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right),\ |x|<1$ (ii) $2\tan^{-1}x=\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right),\ x\geq 0$

(iii) $2\tan^{-1}x=\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right),\ |x|\leq 1$

ధర్మం 8

(i) $|x|\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ లేదా $-\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq\frac{1}{\sqrt{2}}$ అయితే $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)=2\sin^{-1}x$

(ii) $\frac{1}{\sqrt{2}}\leq x\leq 1$ అయితే $\sin^{-1}\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)=2\cos^{-1}x$

ధర్మం 9

(i) $0\leq x\leq 1$ అయితే $\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$ (ii) $-1\leq x<0$ అయితే $\sin^{-1}x=-\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$

(ii) $-1<x<1$ అయితే $\sin^{-1}x=\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ (iv) $0\leq x\leq 1$ అయితే $\cos^{-1}x=\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

(v) $-1\leq x<0$ అయితే $\cos^{-1}x=\pi-\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$

(vi) $x>0$ అయితే $\tan^{-1}x=\sin^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$

ధర్మం 10

(i) $3\sin^{-1}x=\sin^{-1}(3x-4x^3),\ x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. (ii) $3\cos^{-1}x=\cos^{-1}(4x^3-3x),\ x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$.

అంతర్జాల కృత్యము

https://ggbm.at/vchq92pg or Scan the QR Code

బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్ చేసి పైన ఇవ్వబడిన URL లింక్‌ను టైపు చేయుము లేదా QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము. జియోజిబ్రా యొక్క "12th Standard Mathematics" వచ్చును. ఈ వర్క్‌బుక్ ఎడమ ప్రక్కన పాఠ్యపుస్తకమునకు సంబంధించిన అధ్యాయములు కనబడును. వాటిలో “విలోమ త్రికోణమితియ ప్రమేయాలు” అను అధ్యాయమును ఎన్నుకొనుము. ఇప్పుడు ఈ పాఠ్యాంశమునకు సంబంధించిన కొన్ని వర్క్‌షీట్ పేజీలను చూడవచ్చును. అందులో "Graph of Inverse Trigonometric Functions" అను వర్క్‌షీటును ఎన్నుకొనుము.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_4.indd 196 23-01-2023 15:33:42

అధ్యాయము
5

ద్విపరిమాణ రేఖాగణితము-II

"ప్రతి కష్టాన్ని సాధ్యమయ్యే మరియు పరిష్కరించడానికి అవసరమైన అనేక భాగాలుగా విభజించండి"

– రెనె డెస్కార్ట్స్



René Descartes
1596 – 1650

5.1 పరిచయం

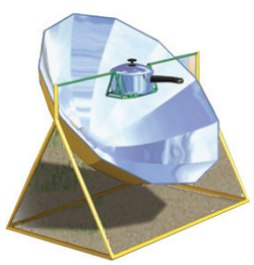
ద్విపరిమాణ రేఖాగణితమును కార్టీషియన్ వ్యవస్థనాధారముగా బిందువు, రేఖ, వృత్తము, పరావలయం దీర్ఘవృత్తం మరియు అతి పరావలయం వంటి రేఖాగణిత ఆకారములను వివరించడానికి ఉపయోగిస్తారు. 200 సం॥ల క్రితం (≈ 2– 1 BC (BCE)) పురాతన గ్రీకులు శంఖాకార వక్రతలను అధ్యయనం చేశారు, ఎందుకంటే వాటి అధ్యయనం ఉత్తేజకరముగా, సవాలుగా మరియు ఆసక్తికరంగా ఉండే ఆలోచనలను రాబట్టింది. తరువాతి శతాబ్దాలలో ఈ వక్రత యొక్క అనువర్తనాలను వారు ఊహించలేరు.

విశ్లేషణాత్మక జ్యామితి పద్ధతి ద్వారా సమస్యలను పరిష్కరించడం 17వ శతాబ్దం మొదటిఅర్ధ భాగంలో డెస్కార్టెస్ మరియు ఇతర గణిత శాస్త్రజ్ఞులైన ఫెర్మాట్, కెప్లర్, న్యూటన్, ఐలర్, లెబ్‌నిజ్, l' హోపిటల్, కేరాట్, క్రామర్ మరియు జాకోవిస్ వారిచే క్రమపద్ధతిలో అభివృద్ధి చేయబడింది.) (రేఖాగణిత సమస్యలను పరిష్కరించడానికి బీజగణిత పద్ధతులను స్థాపించాల్సిన అవసరం లేకుండా విశ్లేషణాత్మక జ్యామితి (Analytical Geometry) పెరిగింది, మరియు దీని అభివృద్ధి పరిశ్రమ, వైద్యం మరియు శాస్త్రీయ పరిశోధనలను జయించింది.

జర్మనీ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు మరియు భౌతిక శాస్త్రవేత్త అయిన జాన్‌సన్ కెప్లర్ అభివృద్ధి చేసిన గ్రహాల సిద్ధాంతం భూమితో సహా సౌరవ్యవస్థలో అన్ని గ్రహాలు సూర్యుడితో దీర్ఘవృత్తాకార కక్ష్యలో కదులుతున్నాయని.

పేర్కొంది, ఇది యూక్లిడియస్ జ్యామితి విలోమవర్గన్యాయము చేత కనిపెట్టబడినది. అంతరిక్ష వక్రతలు మరియు ఉపరితలాలపై క్రమబద్ధమయిన అధ్యయనంలో ఐలర్ కో–ఆర్డినేట్ పద్ధతిని ఉపయోగించాడు. దీనిని ఆల్బర్ట్ ఐన్‌స్టీన్ తన సాపేక్ష సిద్ధాంతంలో మరింత అభివృద్ధి చేశాడు..

వివిధ రంగాలలోని అనువర్తనాలైన గేర్లు, ఆనకట్టలు, చక్రాలు వృత్తాకార జ్యామితిని కలిగి, త్రికోణమితికి దారితీసే వృత్తాల లక్షణాలు ఆధారంగా అనువర్తనం; నిర్మాణ వంపులు (arches) డిష్, సౌరకుక్కర్లు, హెడ్‌లైట్లు, సస్పెన్షన్ వంతెనలు మరియు శోధనలైట్లు, పరావలయం యొక్క లక్షణాల ఆధారంగా పరివర్తనలు; నిర్మాణ వంపులు, వైద్యరంగంలో లిథోట్రిప్సీ, రహస్యద్వారములు, Ne-de-yag లేసర్లు మరియు గేర్లు మొదలగునవి దీర్ఘవృత్త లక్షణములపై ఆధారపడి పనిచేయుచున్నవి. టెలిస్కోపులు, శీతలీకరణ టవర్లు, నౌకలు లేదా విమానముల నిర్దిష్ట స్థానాలను గుర్తించడం మొదలగునవి అతి పరావలయ లక్షణములపై పనిచేయుటను కొన్ని ఉదాహరణములుగా చెప్పవచ్చును.



పటము. 5.1



పటము. 5.2



పటము. 5.3

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 197 23-01-2023 15:10:11



పటము. 5.4



పటము. 5.5



పటము. 5.6

ఒక డ్రైవరు ఆన్‌లైన్‌నందు కొనుగోలు చేయబడిన పుస్తకములను చేర్చుటకు వాహనము (truck) ద్వారా తీసుకెళ్ళుచుండెను. ఆ వాహనము యొక్క వెడల్పు 3 మీ మరియు ఎత్తు 2.7 మీ గా వుండిన అతను వాహనమును నడుపునపుడు సొరంగ మార్గ ముఖద్వారం అర్ధదీర్ఘవృత్తాకారము (semielliptical) గా వుండు ఒక హెచ్చరికను గమనించెను. హెచ్చరిక! సొరంగ మార్గపు మధ్యభాగపు ఎత్తు 3 మీటర్లు అనియు మరియొక హెచ్చరిక సొరంగ మార్గం వెడల్పు 12 మీటర్లు అని వుండెను. ఆ సొరంగ మార్గము గుండా ఆ వాహనము వెళ్ళగలదా? ఈ రకమైన ప్రశ్నలకు ఈ పాఠ్యభాగము ముగింపులో మనమే సమాధానం ఇవ్వగలము..

అభ్యసన లక్ష్యాలు

ఈ పాఠ్యభాగము ముగింపునందు విద్యార్థులు ఈ క్రింది సామర్థ్యాలను పొందివుండగలరు.

- వృత్తము, పరావలయము, దీర్ఘవృత్తము, అతి పరావలయము మొదలగు వాటి యొక్క సమీకరణముల ప్రామాణిక రూపములో వ్రాయుట.
- వివిధ శంఖాకారముల సమీకరణము నుండి కేంద్రము, శీర్షములు, నాభులు, మొదలగునవి కనుగొనుట.
- వివిధ శంఖాకారములకు స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబము యొక్క సమీకరణములను ఉత్పాదించుట.
- వివిధ శంఖాకారములు మరియు వాటి యొక్క క్షీణించిన రూపాలను వర్గీకరించుట.
- శంఖాకారపు సమీకరణాలను పరామితీయ రూపంలో మరియు వాటి పరివర్తనాలుగా రూపొందించుట.
- శంఖాకారములను వివిధ నిజజీవిత పరిస్థితులలో వర్తించుట.

5.2 వృత్తము

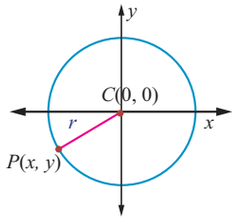
వృత్తము అను పదము గ్రీకు భాష నుండి ఆవిర్భవించినది మరియు క్రీ.పూ. 17వ శతాబ్దపు మధ్యకాలంలో వృత్తమును గూర్చిన వివరణలు తెలియజేయబడినవి. సూర్యుడు, చంద్రుడు, నీటియందు ఏర్పడు సుడులు ఇలా ప్రకృతిలో అనేక చోట్ల మనము వృత్తమును గమనించవచ్చును. చక్రము యొక్క ఆధార సూత్రము వృత్తము మరియు అనేక నూతన యంత్రముల తయారీలో ఉపయోగించే ముళ్ళ చక్రములు (gears) రూపొందుటకు వృత్తము ఆధారముగా అమరియున్నది. గణితశాస్త్రములో వృత్తములు గురించి అభ్యసించుట వలన రేఖాగణితము, ఖగోళశాస్త్రము మరియు గణనముల అభివృద్ధికి దోహదపడు విధముగానున్నది. (Bohr-Sommerfeld) పరమాణు సిద్ధాంతములో ఎలక్ట్రానుల కక్ష్య వృత్తాకారముగా అమరియున్నది.

నిర్వచనము 5.1

ఒక సమతలములో గల స్థిర బిందువు నుండి చలన బిందువుకు గల దూరము ఎల్లప్పుడూ స్థిరంగా ఉండునట్లు చలించు బిందు పథము ఒక వృత్తము అగును. స్థిర బిందువును వృత్తము యొక్క కేంద్రము అనియు మరియు స్థిర బిందువు నుండి చలన బిందువు వరకు గల స్థిర దూరమును వృత్త వ్యాసార్ధం అంటారు.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 198 23-01-2023 15:10:12

5.2.1 ప్రామాణిక రూపములో వృత్త సమీకరణము (Equation of a circle in standard form)



పటము. 5.7

(i) కేంద్రము మరియు (0, 0) మరియు వ్యాసార్ధము, r గా గల వృత్త సమీకరణము

కేంద్రము $C(0,0)$ మరియు వ్యాసార్ధము r మరియు $P(x,y)$ ను చలన బిందువు తీసుకొందాము.

గమనిక P యొక్క నిరూపకములు (x,y) ను ..... గా సూచిస్తారని గమనించుము.

ఇప్పుడు, $CP = r$ మరియు $CP^2 = r^2$

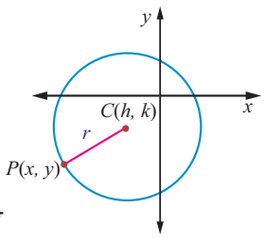
కావున $(x-0)^2 + (y-0)^2 = r^2$

అనగా $x^2 + y^2 = r^2$

ఇది కేంద్రము $(0,0)$ మరియు వ్యాసార్ధము r గా గల వృత్తము యొక్క సమీకరణము అగును.

(ii) కేంద్రము (h, k) మరియు వ్యాసార్ధము r గా గల వృత్తము యొక్క సమీకరణము.

కేంద్రం $C(h,k)$ మరియు వ్యాసార్ధము r మరియు చలనబిందువు $P(x,y)$ గా తీసుకొందాము.



పటము. 5.8

ఇప్పుడు, $CP = r$ మరియు $CP^2 = r^2$.

అనగా, $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$. ఇది ఒక ప్రామాణిక రూపములోని వృత్తము యొక్క సమీకరణము అగును. దీనినే కేంద్ర–వ్యాసార్ధ రూపము అంటారు.

మనము ఈ సమీకరణమును విస్తరించగా

$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$.

గా పొందెదము $2g = -2h, 2f = -2k, c = h^2 + k^2 - r^2$, గా తీసుకొనిన, పై సమీకరణము

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, గా రూపొందును దీనినే వృత్తము యొక్క సాధారణ రూపం అంటారు.

సమీకరణము $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ అనునది x మరియు y లో ఒక ద్విఘాత సమీకరణముగా వుండి క్రింది లక్షణాలను కలిగియున్నది:

(i) ఇది x మరియు y లో ఇది ఒక ద్విఘాతీయ సమీకరణము,

(ii) x^2 యొక్క గుణకము = y^2 యొక్క గుణకము $\neq 0$,

(iii) xy యొక్క గుణకము $= 0$.

విపర్యయముగా, పై మూడు లక్షణాలను కలిగిన ప్రతి సమీకరణము ఒక వృత్తమును సూచించునని మనం నిరూపించ వచ్చును.

$ax^2 + ay^2 + 2g'x + 2f'y + c = 0$ ... (1)

(i), (ii) మరియు (iii), $a \neq 0$ లక్షణాలను కలిగి. x మరియు y లో ఒక ద్విఘాతీయ సమీకరణము సమీకరణము ను (1) a, చే భాగించగా

$$x^2 + y^2 + \frac{2g'}{a}x + \frac{2f'}{a}y + \frac{c'}{a} = 0. \quad \ldots (2)$$

$\frac{g'}{a} = g, \frac{f'}{a} = f$ మరియు $\frac{c'}{a} = c$, గా తీసుకొనిన సమీకరణము (2) అనునది $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ గా మారును.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 199 23-01-2023 15:10:24

g^2 మరియు f^2, ను సంకలనం మరియు వ్యవకలనం చేయుట వలన మనకు లభించునది

$$x^2+2gx+g^2+y^2+2fy+f^2-g^2-f^2+c=0$$

$$\Rightarrow (x+g)^2+(y+f)^2=g^2+f^2-c$$

$$\Rightarrow (x-(-g))^2+(y-(-f))^2=\left(\sqrt{g^2+f^2-c}\right)^2$$

Tఇది కేంద్రము C $(-g,-f)$ మరియు వ్యాసార్ధము $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$ గా వున్న వృత్తం యొక్క ప్రామాణిక రూపము అగును.సమీకరణము (1) అనునది కేంద్రము $(-g,-f)=\left(\frac{-g'}{a},\frac{-f'}{a}\right)$ మరియు వ్యాసార్ధము $=\sqrt{g^2+f^2-c}=\frac{1}{a}\sqrt{g'^2+f'^2-c'a}$ గా గల ఒక వృత్తమును సూచించును.

గమనిక

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ అను సమీకరణము కేంద్రము $(-g,-f)$ మరియు వ్యాసార్ధము $\sqrt{g^2+f^2-c}$ గా వున్న కలిగిన వృత్తమును సూచించును.

(i) $g^2+f^2-c>0$ అయినపుడు ఇది ఒక వాస్తవ వృత్తమును సూచించును.

(ii) $g^2+f^2-c=0$ అయినపుడు ఒక బిందు వృత్తమును సూచించును.

(iii) లేదా $g^2+f^2-c<0$ అయినపుడు గమనిక లేని ఒక కల్పిత వృత్తమును సూచించును.

ఉదాహరణ 5.1

కేంద్రము $(-3,-4)$ మరియు వ్యాసార్ధము 3 యూనిట్లుగా గల వృత్తము యొక్క సాధారణ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన

వృత్త సమీకరణము యొక్క ప్రామాణిక రూపము $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$$\Rightarrow \quad (x-(-3))^2+(y-(-4))^2=3^2$$
$$\Rightarrow \quad (x+3)^2+(y+4)^2=3^2$$
$$\Rightarrow \quad x^2+y^2+6x+8y+16=0.$$

సిద్ధాంతము 5.1

$lx+my+n=0$ అను సరళరేఖ మరియు $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ అను వృత్తము ఖండన బిందువుల ద్వారా వెళ్ళు వృత్తము యొక్క సమీకరణము $x^2+y^2+2gx+2fy+c+\lambda(lx+my+n)=0$, $\lambda\in\mathbb{R}^1$ అను రూపములో వుండును.

నిరూపణ

వృత్తము S : $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, ... (1)

మరియు సరళరేఖ L : $lx+my+n=0$ గా అనుకొనిన. ... (2)

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 200 23-01-2023 15:10:36

$S+\lambda L=0$ అని తీసుకొందుము అది, $x^2+y^2+2gx+2fy+c+\lambda(lx+my+n)=0$ ... (3)

x, y మరియు స్థిరాంకములను కలపగా మనకు లభించునది.

$x^2+y^2+x(2g+\lambda l)+y(2f+\lambda m)+c+\lambda n=0$ ఇది x మరియు y చలరాశులలో కూడిన ద్విఘాత సమీకరణము మరియు xy పదము లేని x^2 మరియు y^2 యొక్క గుణకములు సమానముగా గలదు.

(α,β) అను బిందువు S మరియు L ల యొక్క ఖండన బిందువుగా వుండిన సమీకరణము (1) మరియు (2) లు సంతృప్తి చెందును. అదే విధంగా ఇది సమీకరణము (3) ను సంతృప్తిపరచును

కనుక $S+\lambda L=0$ ఆనునది మనకు కావలసిన వృత్తమును తెలియజేయును. ■

ఉదాహరణ 5.2

$x^2+y^2=16$ అను వృత్తము యొక్క జ్యా $3x+y+5=0$ వ్యాసంగా మరియు వీని ఖండన బిందువుల ద్వారా పోవు వృత్త సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన

సిద్ధాంతము 5.1 ప్రకారం వృత్తము మరియు జ్యా (సరళరేఖ) ఖండించుకొను బిందువుల ద్వారా వెళ్ళు వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2-16+\lambda(3x+y+5)=0$.

ఈ జ్యా $3x+y+5=0$ పై వృత్తమునకు వ్యాసమగును. కేంద్రము $\left(\frac{-3\lambda}{2},\frac{-\lambda}{2}\right)$ ఈ 'జ్యా' మీదఉంటుంది. ఆ జ్యా వృత్త వ్యాసమగును.

$$\text{కావున } 3\left(\frac{-3\lambda}{2}\right)-\frac{\lambda}{2}+5=0 \text{ గా పొందెదము.,}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-9\lambda}{2}-\frac{\lambda}{2}+5=0,$$

$$\Rightarrow \quad -5\lambda+5=0,$$

$$\Rightarrow \quad \lambda=1.$$

$x^2+y^2+3x+y-11=0$ అనునది మనకు కావలసిన వృత్త సమీకరణము అగును.. ■

ఉదాహరణ 5.3

$x^2+y^2-6x+4y+c=0$ వృత్తమునకు c యొక్క అన్ని సాధ్యమగు విలువలకు $x+y-1=0$ అను సమీకరణము వృత్త వ్యాసము సమీకరణము అగునా అని కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన వృత్తము యొక్క కేంద్రము $(3,-2)$ అనునది $x+y-1=0$ పై అమరియున్నది. కావున సరళరేఖ $x+y-1=0$ అనునది కేంద్రము గుండా వెళ్ళును మరియు c యొక్క అన్ని సాధ్యమగు విలువలకు $x+y-1=0$ అను సరళరేఖ ఈ వృత్తమునకు వ్యాసము అగును. ■

సిద్ధాంతము 5.2

(x_1,y_1) మరియు (x_2,y_2) ఆను వ్యాసము యొక్క అంత్యబిందువులుగా కలిగిన వృత్త సమీకరణము

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 201 23-01-2023 15:10:48

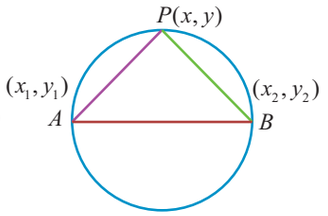
నిరూపణ

AB అను వ్యాసము యొక్క అంత్యబిందువులు $A(x_1, y_1)$ మరియు $B(x_2, y_2)$. $P(x, y)$ అనునది వృత్తముపై ఏదేని ఒక బిందువు. అప్పుడు $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ (అర్ధ వృత్తము నందలి కోణము).

కనుక, AP మరియు PB అను వాలుల లబ్ధము -1 నకు సమానము.

అది, $\left(\frac{(y-y_1)}{(x-x_1)}\right)\left(\frac{(y-y_2)}{(x-x_2)}\right) = -1$ దీనినుంచి పొందు సమీకరణము మనకు కావలసిన వృత్త సమీకరణము

$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$ అగును.



పటము. 5.9

ఉదాహరణ 5.4

$(-4,-2)$ మరియు $(1,1)$ లను కలిపే రేఖాఖండమును జ్యాగా కలిగిన వృత్తము యొక్క సాధారణ సమీకరణమును కనుగొనుము?

సాధన

సిద్ధాంతము 5.2 ప్రకారం (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) ఈ బిందువులను వ్యాసము యొక్క అంత్యబిందువులుగా కలిగిన వృత్త సమీకరణము

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad (x+4)(x-1)+(y+2)(y-1) = 0$$

$\Rightarrow \quad x^2+y^2+3x+y-6=0$ అనునది మనకు కావలసిన వృత్త సమీకరణము అగును.

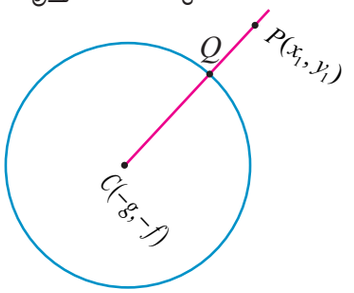
సిద్ధాంతము 5.3

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ అను దత్త వృత్తము దృష్ట్యా $P(x_1, y_1)$ బిందువు స్థానము, ఈ వృత్తమున్న తలములో $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c$ విలువ $\begin{cases} >0 & \text{లేదా,} \\ =0 & \text{లేదా,} \\ <0. & \end{cases}$ ఆధారంగా వృత్తమునకు బాహ్యంగా లేదా పైన లేదా అంతరంగా ఉంటుంది.

నిరూపణ

కేంద్రం C $(-g,-f)$ మరియు వ్యాసార్ధము $r=\sqrt{g^2+f^2-c}$ గా గల వృత్తము యొక్క సమీకరణము $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.

$P(x_1, y_1)$ అనునది సమతలముపై ఏదైనా ఒక బిందువుగా తీసుకొనుము. CP ను కలుపగా అది వృత్తముపై Q వద్ద ఖండించినది. అయిన P అను బిందువు వృత్తమునకు బాహ్యంగా, లేదా పైన లేదా అంతరంగా ఉంటుందని క్రింది విలువల ఆధారంగా కనుగొనవచ్చును.



పటము. 5.10

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 202 23-01-2023 15:10:59

$$|CP| \text{ అనునది } \begin{cases} > |CQ| & \text{లేదా} \\ = |CQ| & \text{లేదా} \\ < |CQ|. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad CP^2 \text{ అనునది } \begin{cases} > r^2 & \text{లేదా} \\ = r^2 & \text{లేదా } \{CQ = r\}, \\ < r^2. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad (x_1+g)^2+(y_1+f)^2 \text{ అనునది } \begin{cases} > g^2+f^2-c & \text{లేదా} \\ = g^2+f^2-c & \text{లేదా} \\ < g^2+f^2-c. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c \text{ అనునది } \begin{cases} > 0 & \text{లేదా} \\ = 0 & \text{లేదా} \\ < 0. \end{cases}$$

ఉదాహరణ 5.5

వృత్తము $x^2+y^2-6x-8y+12=0$ దృష్ట్యా, బిందువు $(2,3)$ యొక్క స్థానాన్ని పరిశీలించండి.

సాధన

$(2, 3)$ ను (x_1, y_1) గా తీసుకొనిన,

$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c = 2^2+3^2-6\times 2-8\times 3+12,$$
$$= 4+9-12-24+12 = -11 < 0.$$

కావున సిద్ధాంతము 5.3 ప్రకారం బిందువు $(2,3)$ అనునది వృత్తమునకు అంతరంగా అమరియున్నది.

ఉదాహరణ 5.6

$3x+4y-12=0$ అను సరళరేఖ నిరూపక అక్షములను A మరియు B వద్ద సంధించినట్లయితే. AB వ్యాసముగా గల వృత్త సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన

$3x+4y=12$, అను సరళరేఖ అంతరఖండ రూపములో వ్రాయగా, $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1$ గా లభించును. కనుక A మరియు B యొక్క బిందువులు $(4,0)$ మరియు $(0,3)$ అగును.

వ్యాసరూపములో వృత్తసమీకరణము

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2) = 0$$
$$(x-4)(x-0)+(y-0)(y-3) = 0$$
$$x^2+y^2-4x-3y = 0.$$

ఉదాహరణ 5.7

$3x+4y+10=0$ అను సరళరేఖ వృత్త కేంద్రము $(2,1)$ గా గల వృత్తము నందలి 6 యూనిట్లు పొడవు గల 'జ్యా' ను ఖండించునట్లయితే. సాధారణ రూపములో ఆ వృత్త సమీకరణమును కనుగొనుము.

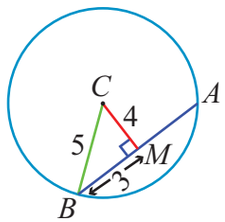
12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 203 23-01-2023 15:11:07

సాధన

కేంద్రము $C(2,1)$ మరియు సరళరేఖ $3x+4y+10=0$ అనునవి వృత్తములో గల AB అను 'జ్యా' ను ఖండించును. M అనునది AB యొక్క మధ్యబిందువు అగును.

$AM = BM = 3$. ఇప్పుడు BMC అనునది ఒక లంబకోణము.

కావున $CM = \dfrac{|3(2)+4(1)+10|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 4$.



పటము. 5.11

పైథాగరస్ సిద్ధాంతము ప్రకారం $BC^2 = BM^2 + MC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$.

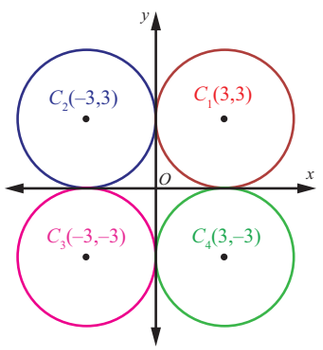
$BC = 5 =$ వ్యాసార్ధము.

కావున, మనకు కావలసిన వృత్త సమీకరణము $(x-2)^2+(y-1) = 5^2$

$x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

ఉదాహరణ 5.8

వ్యాసార్ధము 3 యూనిట్లుగా గల ఒక వృత్తము రెండు అక్షాలను తాకినట్లయితే సాధారణ రూపంలో సాధ్యమగు అన్ని వృత్త సమీకరణాలను కనుగొనుము.



పటము. 5.12

సాధన

వృత్తము రెండు అక్షములను తాకినచో, ఆ రెండు అక్షముల నుండి కేంద్రము వరకు గల దూరము 3 యూనిట్లు, కనుక కేంద్రము $(\pm 3, \pm 3)$ గా వుండును. అందువలన ఏర్పడగల నాలుగు వృత్తముల వ్యాసార్ధము 3 యూనిట్లు మరియు ఆ నాలుగు వృత్తముల సమీకరణములు $x^2 + y^2 \pm 6x \pm 6y + 9 = 0$ అగును.

ఉదాహరణ 5.9

$3x^2 + (a+1)y^2 + 6x - 9y + a + 4 = 0$ వృత్త కేంద్రమును మరియు వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము.

సాధన

x^2 యొక్క గుణకము = y^2 యొక్క గుణకము. (ద్విఘాతీయ సమీకరణము యొక్క (ii) వ లక్షణము ప్రకారము ఒక వృత్తమును తెలియజేయును.)

అది $3 = a+1$ మరియు $a = 2$.

ఇప్పుడు, వృత్త సమీకరణము

$$3x^2 + 3y^2 + 6x - 9y + 6 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 3y + 2 = 0$$

కావున, కేంద్రము $\left(-1, \dfrac{3}{2}\right)$ మరియు వ్యాసార్ధము $r = \sqrt{1 + \dfrac{9}{4} - 2} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

ఉదాహరణ 5.10

$(1,1)$, $(2,-1)$ మరియు $(3,2)$ బిందువుల ద్వారా పోవు వృత్త సమీకరణమును కనుగొనుము.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 204 23-01-2023 15:11:17

సాధన

సాధారణ వృత్త సమీకరణము

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ అనుకొనిన. ... (1)

అది $(1,1),(2,-1)$ మరియు $(3,2)$ అను బిందువుల ద్వారా వెళ్ళిన.

ఇప్పుడు, $2g + 2f + c = -2$, ... (2)

$4g - 2f + c = -5$, ... (3)

$6g + 4f + c = -13$. ... (4)

(2) – (3) నుండి $-2g + 4f = 3$. ... (5)

(4) – (3) నుండి $2g + 6f = -8$. ... (6)

(5) + (6) నుండి $f = -\frac{1}{2}$

$f = -\frac{1}{2}$ ను (6)లో ప్రతిక్షేపించగా, $g = -\frac{5}{2}$.

$f = -\frac{1}{2}$ మరియు $g = -\frac{5}{2}$ లను (2) లో ప్రతిక్షేపించగా, $c = 4$.

కావున, మనకు కావలసిన వృత్త సమీకరణము

$$x^2 + y^2 + 2\left(-\frac{5}{2}\right)x + 2\left(-\frac{1}{2}\right)y + 4 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 5x - y + 4 = 0.$$

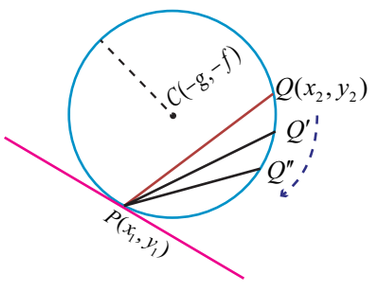
గమనిక

వృత్తముపై గల మూడు బిందువులచే కనుగొనుబడు వృత్త సమీకరణము ఏకైకము. దాని విపర్యయముగా మధ్య బిందువు నుండి సమాన దూరంలో గల మూడు బిందువులు ఒక వృత్తమును ఏర్పరచును.

5.2.2 ఇవ్వబడిన వృత్తము మీద *P* బిందువు వద్దగల స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబము యొక్క సమీకరణములు

ఒక వృత్తము యొక్క స్పర్శరేఖ అనునది ఆ వృత్తమును ఏదేని ఒక బిందువు వద్ద తాకు సరళరేఖ అగును.మరియు అభిలంబము (Normal) అనునది స్పర్శబిందువు ద్వారా పోవుచూ స్పర్శరేఖకు లంబముగా నుండు ఒక సరళరేఖ అగును..

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ వృత్తముపై $P(x_1, y_1)$ మరియు $Q(x_2, y_2)$ అను రెండు బిందువులు తీసుకొందాము.



పటము. 5.13

ఇప్పుడు,

$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$ ... (1)

మరియు $x_2^2 + y_2^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c = 0$ ... (2)

(2) – (1) నుండి

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 205 23-01-2023 15:11:28

$$x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2 + 2g(x_2 - x_1) + 2f(y_2 - y_1) = 0$$

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + 2g) + (y_2 - y_1)(y_2 + y_1 + 2f) = 0$$

$$\frac{x_2 + x_1 + 2g}{y_2 + y_1 + 2f} = -\frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

కావున, PQ వాలు $= -\dfrac{(x_1 + x_2 + 2g)}{(y_1 + y_2 + 2f)}$.

$Q \to P$, అయినపుడు, PQ అను 'జ్యా' P వద్ద స్పర్శరేఖగా మారును.

స్పర్శరేఖ యొక్క వాలు అనునది $-\dfrac{(2x_1 + 2g)}{(2y_1 + 2f)} = -\dfrac{(x_1 + g)}{(y_1 + f)}$.

కావున, స్పర్శరేఖ యొక్క సమీకరణము అనునది $y - y_1 = -\dfrac{(x_1 + g)}{(y_1 + f)}(x - x_1)$.

$yy_1 + fy - y_1^2 - fy_1 + xx_1 - x_1^2 + gx - gx_1 = 0$ ను సూక్ష్మీకరించగా

$$xx_1 + yy_1 + gx + fy - (x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1) = 0 \qquad ...(1)$$

(x_1, y_1) అనునది వృత్తము మీద ఒక బిందువుగా నుండిన, $x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$ గా లభించును.

కావున, $-(x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1) = gx_1 + fy_1 + c$. ...(2)

ఇప్పుడు, (2) ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా, స్పర్శరేఖా సమీకరణమును (x_1, y_1) వద్ద మనము ఈ క్రింది విధముగా పొందగలము.

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0.$$

అభిలంబము యొక్క సమీకరణము అనునది $(y - y_1) = \dfrac{(y_1 + f)}{(x_1 + g)}(x - x_1)$

$$\Rightarrow \quad (y - y_1)(x_1 + g) = (y_1 + f)(x - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad x_1(y - y_1) + g(y - y_1) = y_1(x - x_1) + f(x - x_1)$$

$$\Rightarrow \quad yx_1 - xy_1 + g(y - y_1) - f(x - x_1) = 0.$$

విశేషాంశము

(1) (x_1, y_1) అను వృత్తమునకు $x^2+y^2=a^2$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖా సమీకరణము $xx_1 + yy_1 = a^2$.

(2) (x_1, y_1) అను వృత్తమునకు $x^2+y^2=a^2$ బిందువు వద్ద అభిలంబరేఖా సమీకరణము $xy_1 - yx_1 = 0$.

(3) అభిలంబము అనునది వృత్తకేంద్రము గుండా పోవును.

5.2.3 $y = mx + c$ అను సరళరేఖ $x^2 + y^2 = a^2$ అను వృత్తమునకు స్పర్శరేఖగా ఉండుటకు నిబంధన మరియు స్పర్శబిందువును కనుగొనుట

$y = mx + c$ అను సరళరేఖ $x^2 + y^2 = a^2$ అను వృత్తమును తాకుచున్నది అనుకొనెదము. $x^2 + y^2 = a^2$ అను వృత్తమునకు కేంద్రము మరియు వ్యాసార్ధములు క్రమముగా $(0, 0)$ మరియు a అగును.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 206 23-01-2023 15:11:42

(i) ఒక సరళరేఖ స్పర్శరేఖగా యుండుటకు నిబంధన (Condition for a line to be tangent)

$(0,0)$ బిందువు నుండి సరళరేఖ $y-mx-c=0$ వరకు గల లంబదూరము $\left|\frac{0-m.0-c}{\sqrt{1+m^2}}\right| = \frac{|c|}{\sqrt{1+m^2}}$

ఇది వ్యాసార్ధమునకు సమానము. అనగా $\frac{|c|}{\sqrt{1+m^2}} = a$ లేక $c^2 = a^2(1+m^2)$.

కనుక $y=mx+c$ అను సరళరేఖ $x^2+y^2=a^2$ అను వృత్తమునకు స్పర్శరేఖగా ఉండుటకు నిబంధన $c^2=a^2(1+m^2)$ అగును.

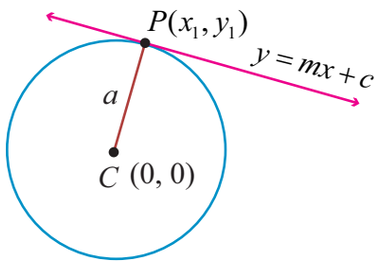
(ii) స్పర్శబిందువు (Point of contact)

$y=mx+c$ అను సరళరేఖ $x^2+y^2=a^2$ అను వృత్తమును తాకు బిందువు (x_1,y_1),

అయిన $y_1 = mx_1+c$. ... (1)

(x_1,y_1) బిందువువద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము $xx_1+yy_1 = a^2$.

$yy_1 = -xx_1+a^2$ ... (2)



పటము. 5.14

సమీకరణము (1) మరియు (2)లు ఒకే సరళరేఖను సూచించుచున్నవి. మరియు వాటి గుణకములు అనుపాతములో ఉండును.

కనుక, $\frac{y_1}{1} = \frac{-x_1}{m} = \frac{a^2}{c}$

$y_1 = \frac{a^2}{c}, x_1 = \frac{-a^2m}{c}, \ c = \pm a\sqrt{1+m^2}$.

అందుచేత స్పర్శబిందువులు $\left(\frac{-am}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$

లేదా $\left(\frac{am}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{-a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$.

గమనిక

P అను బిందువు వద్ద వృత్తము యొక్క స్పర్శరేఖ సమీకరణము $y=mx\pm a\sqrt{1+m^2}$.

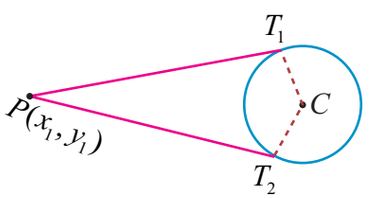
సిద్ధాంతము 5.4

$x^2+y^2=a^2$ అను వృత్తమునకు ఏదేని ఒక బాహ్యబిందువు నుండి రెండు స్పర్శరేఖలను గీయవచ్చును.

నిరూపణ

$P(x_1,y_1)$ అనునది వృత్తమునకు బాహ్య బిందువుగా తీసుకొనెదము. స్పర్శరేఖ యొక్క సమీకరణము $y=mx\pm a\sqrt{1+m^2}$ ఇది (x_1,y_1) బిందువు గుండా పోవుచున్నది. కనుక

$y_1 = mx_1 \pm a\sqrt{1+m^2}$



పటము. 5.15

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 207 23-01-2023 15:11:55

$y_1 - mx_1 = a\sqrt{1+m^2}$. (ఇరువైపులా వర్గము చేయగా, మనకు లభించునది)

$$(y_1 - mx_1)^2 = a^2(1+m^2)$$

$$y_1^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1y_1 - a^2 - a^2m^2 = 0$$

$$m^2(x_1^2 - a^2) - 2mx_1y_1 + (y_1^2 - a^2) = 0 .$$

m చలరాశితో కూడిన ద్విఘాత సమీకరణము నందు m నకు రెండు విలువలు లభించును. ఈ రెండు విలువలు వృత్తము $x^2 + y^2 = a^2$ నకు రెండు స్పర్శరేఖలను ఇచ్చును. ■

గమనిక

(1) (x_1, y_1) అనునది వృత్తమునకు బాహ్యబిందువుగా ఉండిన ఏర్పడు రెండు స్పర్శరేఖలూ వాస్తవములు.

(2) (x_1, y_1) అనునది వృత్తమునకు అంతర బిందువుగా నుండిన ఏర్పడు రెండు స్పర్శరేఖలూ కల్పితములు.

(3) (x_1, y_1) అనునది వృత్తముపై అమరిన ఏర్పడు రెండు స్పర్శరేఖలు ఒకదానితో నొకటి ఏకీభవించును.

ఉదాహరణ 5.11

$x^2 + y^2 = 25$ అను వృత్తమునకు $P(-3, 4)$ అను బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబముల సమీకరణములు కనుగొనుము.

సాధన

వృత్తమునకు $P(x_1, y_1)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము $xx_1 + yy_1 = a^2$.

అది, $x(-3) + y(4) = 25$

$-3x + 4y = 25$

అభిలంబము యొక్క సమీకరణము $xy_1 - yx_1 = 0$

అది, $4x + 3y = 0$.

ఉదాహరణ 5.12

సరళరేఖ $y = 4x + c$ అనునది $x^2 + y^2 = 9$ అను వృత్తమునకు స్పర్శరేఖగాయుండిన, c యొక్క విలువను కనుగొనుము.

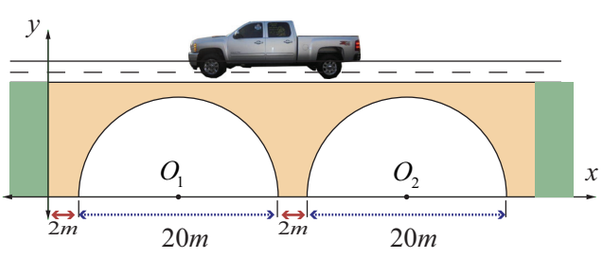
సాధన

$y = mx + c$ అను సరళరేఖ $x^2 + y^2 = a^2$ అను వృత్తమునకు స్పర్శరేఖగా యుండుటకైన నిబంధన $c^2 = a^2(1+m^2)$.

అయిన, $c = \pm\sqrt{9(1+16)} = \pm 3\sqrt{17}$.

ఉదాహరణ 5.13

ఒక పరివాహక కాలువపై అమరిన వంతెనలో 20మీ వెడల్పు గల రెండు అర్ధవృత్తాకార నీటి ద్వారములు గలవు. ఆ నీటి ద్వారములకు సహాయముగా అమర్చబడిన స్థంబముల వెడల్పు 2మీ పటము 5.16ను ఉపయోగించి ఆ అర్ధవృత్తాకార నీటి ద్వారములను తెలియజేయు సమీకరణములను వ్రాయుము.



పటము. 5.16

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 208 23-01-2023 15:12:07

సాధన

అర్ధవృత్తాకార నీటి ద్వారముల కేంద్ర బిందువులు O_1 మరియు O_2 గా తీసుకొనెదము.

మొదటి ద్వారపు కేంద్రము O_1 $(12,0)$ మరియు $r=10$. దీని ద్వారా అర్ధవృత్తమును తెలియజేయు సమీకరణము

$$(x-12)^2+(y-0)^2=10^2$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-24x+44=0,\ y>0.$$

కేంద్రము O_2 $(34,0)$ మరియు $r=10$ గా గల రెండవ ద్వారపు అర్ధవృత్త సమీకరణము ఈ క్రింది విధంగా పొందవచ్చును.

$$(x-34)^2+y^2=10^2$$
$$\Rightarrow x^2+y^2-68x+1056=0,\ y>0.$$

అభ్యాసము **5.1**

1. వ్యాసార్ధము 5సెం.మీ గా x-అక్షమును ఆది బిందువు వద్ద స్పృశించు వృత్త సమీకరణముల సాధారణ రూపమును తెలుపుము.
2. $(2,-1)$ ను కేంద్రముగా కలిగి $(3,6)$ బిందువు ద్వారా వెళ్ళు వృత్త సమీకరణమును ప్రామాణిక రూపములో కనుగొనుము.
3. రెండు అక్షములను తాకుచూ $(-4,-2)$ బిందువు ద్వారా వెళ్ళు వృత్త సమీకరణమును సాధారణ రూపములో కనుగొనుము.
4. $(2,3)$ ను కేంద్రముగా కలిగియుండి $3x-2y-1=0$ మరియు $4x+y-27=0$ అను రేఖల ఖండన బిందువు ద్వారా వెళ్ళు వృత్తము యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము.
5. $(3,4)$ మరియు $(2,-7)$ అను బిందువులను వ్యాసపు అంత్య బిందువులుగా కలిగిన వృత్త సమీకరణమును కనుగొనుము.
6. $(1,0)$, $(-1,0)$, మరియు $(0,1)$ బిందువుల ద్వారా వెళ్ళు వృత్త సమీకరణమును కనుగొనుము.
7. 9π చ.యూనిట్లు వైశాల్యము గల వృత్తపు రెండు వ్యాసములు $x+y=5$ మరియు $x-y=1$ అను సరళరేఖలపై అమరియున్నది. అయిన ఆ వృత్త సమీకరణమును కనుగొనుము..
8. $y=2\sqrt{2}x+c$ అనునది $x^2+y^2=16$ అను వృత్తమునకు స్పర్శరేఖ అయిన, c యొక్క విలువను కనుగొనుము.
9. $x^2+y^2-6x+6y-8=0$ అను వృత్తమునకు $(2,2)$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబముల సమీకరణములు కనుగొనుము.
10. $(-2,1),(0,0)$ మరియు $(-4,-3)$ అను బిందువులు $x^2+y^2-5x+2y-5=0$ అను వృత్తమునకు బాహ్యముగా లేదా వృత్తముపైన లేదా అంతరముగా యున్నవా అనుటను పరిశోధించి కనుగొనుము.
11. ఈ క్రింది వృత్తములకు కేంద్రము మరియు వ్యాసార్ధములను కనుగొనుము.

    (i) $x^2+(y+2)^2=0$ (ii) $x^2+y^2+6x-4y+4=0$

    (iii) $x^2+y^2-x+2y-3=0$ (iv) $2x^2+2y^2-6x+4y+2=0$

    T5AV3
12. $3x^2+(3-p)xy+qy^2-2px=8pq$ అను సమీకరణము ఒక వృత్తమును తెలియజేసిన, p మరియు q లను కనుగొనుము. మరియు ఆ వృత్తము యొక్క కేంద్రము మరియు వ్యాసార్ధములను కనుగొనుము.

5.3 శాంకవాలు

నిర్వచనము 5.2

ఒక సమ తలములో ఒక స్థిరబిందువు నుండి ఒక బిందువుకు గల దూరమునకు మరియుఈ స్థిరబిందువు లేని స్థిర రేఖ నుండి ఈ బిందువుకు గల దూరముల నిష్పత్తిని స్థిరంగా ఉండునట్లు చలించు బిందువు యొక్క బిందుపథంను శాంకవము అంటారు.

ఈ స్థిర బిందువును నాభి (**focus**) అనియు, ఆ స్థిర రేఖను నియత రేఖ (**directrix**) అనియు మరియు ఈ స్థిర నిష్పత్తిని ఉత్కేంద్రత (**eccentricity**) అనియు అంటారు. ఉత్కేంద్రతను e చే సూచించెదరు.

(i) ఉత్కేంద్రత $e=1$ 1 గా నున్నప్పుడు శాంకవము అనునది ఒక పరావలయము అగును.

(ii) ఉత్కేంద్రత $e<1$ 1 గా నున్నప్పుడు శాంకవము అనునది ఒక దీర్ఘవృత్తము అగును.

(iii) ఉత్కేంద్రత $e>1$ 1 గా నున్నప్పుడు శాంకవము అనునది ఒక అతిపరావలయము అగును.

5.3.1 శాంకవము యొక్క సాధారణ సమీకరణము (The general equation of a Conic)

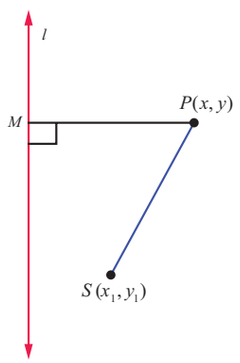
$S(x_1, y_1)$ ను నాభిగా, l ను నియంతరేఖగా మరియు e ను ఉత్కేంద్రతముగా అనుకొనుము. $P(x, y)$ అనునది చలన బిందువు అనుకొందాము.

శాంకవము యొక్క నిర్వచనము ప్రకారము,

$$\text{మనకు } \frac{SP}{PM} = \text{స్థిరాంకము } = e, \qquad \ldots(1)$$

$$\text{ఇచ్చట } SP = \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

$$\text{మరియు } PM = P(x,y) \text{ బిందువు నుండి } lx+my+n=0 \text{ అను రేఖకు లంబదూరము } = \left|\frac{lx+my+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right|.$$



పటము. 5.17

సమీకరణము (1) నుండి $SP^2 = e^2 PM^2$ అని మనము పొందగలము.

$$\Rightarrow (x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = e^2\left[\frac{lx+my+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right]^2.$$

పై సమీకరణమును సూక్ష్మీకరించగా, అది ఒక సాధారణ ద్విఘాత సమీకరణ రూపములో మార్పుచెందును.

$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$, ఇచ్చట

ఇచ్చట $A=1-\frac{e^2l^2}{l^2+m^2}, B=\frac{2lme^2}{l^2+m^2}, C=1-\frac{e^2m^2}{l^2+m^2}$

ఇప్పుడు ,

$$B^2-4AC=\frac{4l^2m^2e^4}{\left(l^2+m^2\right)^2}-4\left(1-\frac{e^2l^2}{l^2+m^2}\right)\left(1-\frac{e^2m^2}{l^2+m^2}\right)$$

$$=4\left(e^2-1\right) \text{ దీని ద్వారా}$$

ఈ క్రింది ఫలితములను పొందవచ్చును.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 210 23-01-2023 15:12:27

(i) $B^2-4AC=0 \Leftrightarrow e=1 \Leftrightarrow$ శాంకవము అనునది ఒక పరావలయం.

(ii) $B^2-4AC<0 \Leftrightarrow 0<e<1 \Leftrightarrow$ శాంకవము అనునది ఒక దీర్ఘవృత్తము.

(iii) $B^2-4AC>0 \Leftrightarrow e>1 \Leftrightarrow$ శాంకవము అనునది ఒక అతిపరావలయం.

5.3.2 పరావలయం (Parabola)

పరావలయమునకు ఉత్కేంద్రత $e=1$ అగును. ఒక సమతలములో నాభి మరియు నియంతరేఖలకు సమాన దూరములో ఉండు బిందువుల యొక్క బిందుపథమును పరావలయము అంటారు.

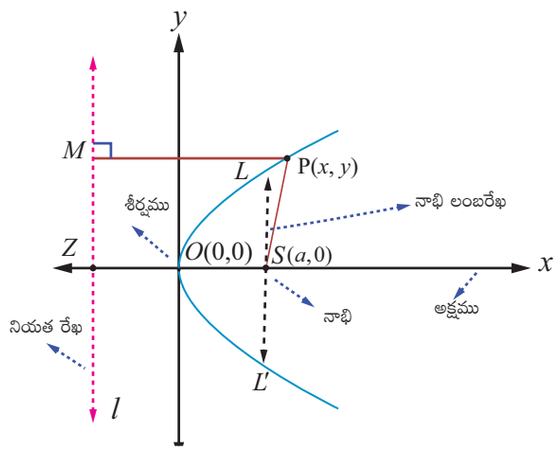
(i) శీర్షము (0, 0) గా పరావలయ సమీకరణము యొక్క ప్రామాణిక రూపము

S ను నాభిగాను మరియు l ను నియతరేఖగాను అనుకొనెదము.

SZ ను l రేఖకు లంబముగా ఉండునట్లు గీయుము..

SZ అనునది x-అక్షమును మరియు SZ యొక్క లంబ సమద్విఖండన y-అక్షమును ఏర్పరచునని గమనించుము. SZ మరియు దాని లంబ సమద్విఖండన రేఖల ఖండన బిందువు ఆది బిందువు O అగును.

$SZ=2a$ అయిన, S అనునది $(a,0)$ మరియు నియత రేఖ సమీకరణము $x+a=0$.



పటము. 5.18

పరావలయమును ఏర్పరచు చలన బిందువు $P(x,y)$ అనుకొనుము. నియతరేఖకు లంబముగా PM ను గీయుము. పరావలయ నిర్వచనము ప్రకారము, $e=\frac{SP}{PM}=1$ కనుక $SP^2=PM^2$.

అందుచేత $(x-a)^2+y^2=(x+a)^2$. దీనిని సూక్ష్మీకరించగా $y^2=4ax$ అను పరావలయ ప్రామాణిక రూపమును మనము పొందవచ్చును. పరావలయము యొక్క ఇతర ప్రామాణిక రూపములు $y^2=-4ax, x^2=4ay$, మరియు $x^2=-4ay$.

నిర్వచనము 5.3

- ఒక రేఖ నియతరేఖకు లంబముగా నుండి మరియు నాభి గుండా వెళ్ళిన ఆ రేఖను పరావలయము యొక్క అక్షము (**Axis**) అంటారు.
- ఒక అక్షము మరియు వక్రరేఖల ఖండన బిందువును శీర్షము అని అంటారు (**vertex**).
- పరావలయపు నాభి గుండా పోవు దాని జ్యా అనునది ఆ పరావలయము యొక్క నాభీయ జ్యా (**focal chord**) అగును.
- అక్షమునకు లంబముగా నుండు నాభీయ జ్యా యొక్క పొడవు ఆ పరావలయము యొక్క నాభి లంబము (**latus rectum**) అగును.

ఉదాహరణ 5.14

$y^2=4ax$ గా గల పరావలయము యొక్క నాభి లంబపు పొడవును కనుగొనుము.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 211 23-01-2023 15:12:35

సాధన

పరావలయ సమీకరణము $y^2 = 4ax$.

LL' అను నాభిలంబము $(a,0)$ నాభి ద్వారా వెళ్ళును. (పటము 5.18ని గమనించుము)

కనుక బిందువు L అనునది (a, y_1).

${y_1}^2 = 4a^2$.

అందుచేత $y_1 = \pm 2a$.

$(a,2a)$ మరియు $(a,-2a)$ అనునవి నాభిలంబము యొక్క అంత్య బిందువులు అగును.

కనుక నాభిలంబము యొక్క పొడవు $LL' = 4a$.

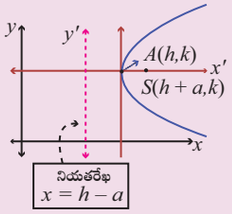
గమనిక

$y^2 = 4ax$ అను నిర్దిష్ట రూపములో గల పరావలయము $(0,0)$ ను శీర్షముగాను, x-అక్షమును అక్షముగాను, $(a,0)$ ను నాభిగాను కలిగియుండును $y^2 = 4ax$ పరావలయము సంపూర్ణముగా x- అక్షము యొక్క ధనాత్మక భాగముపైపులో నుండును. $y^2 = 4ax$ నందు y నకు బదులు $-y$ ను ప్రతిక్షేపించిననూ సమీకరణము మార్పుచెందకుండా యుండును. అందుచేత పరావలయము $y^2 = 4ax$ అనునది x-అక్షమునకు సౌష్ఠవముగా అమరును. కనుక $y^2 = 4ax$ పరావలయమునకు x అక్షము సౌష్ఠవ రేఖగా యుండును.

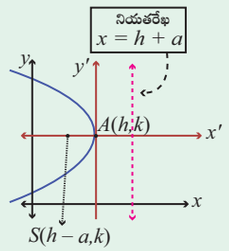
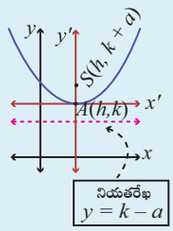
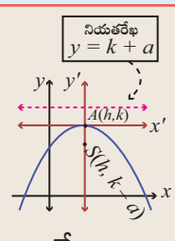
(ii) (h,k) ను శీర్షముగా గల పరావలయములు (Parabolas with vertex at (h,k))

(h,k) శీర్షముగా గల మరియు సౌష్ఠవ రేఖ x అక్షమునకు సమాంతరముగా గల పరావలయము యొక్క సమీకరణము $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ లేదా $(y-k)^2 = -4a(x-h)$ అగును. (పటము 5.19 మరియు 5.20 ల నుండి).

(h,k) శీర్షముగా గల మరియు సౌష్ఠవ రేఖ y-అక్షమునకు సమాంతరముగా గల పరావలయము యొక్క సమీకరణము $(x-h)^2 = 4a(y-k)$ లేదా $(x-h)^2 = -4a(y-k)$ (పటము 5.21, 5.22ల నుండి).

సమీకరణము Equation	ంఖాచిత్రము Graph	శీర్షములు Vertices	నాభి Focus	సౌష్ఠవ రేఖ Axis of symmetry	నియతరేఖ సమీకరణము Equation of directrix	నాభిలంబపు పొడవు Length of latus rectum
$(y-k)^2 = 4a(x-h)$	 (a) రేఖాచిత్రము $(y-k)^2 = 4a(x-h)$ పటము. 5.19	(h,k)	$(h+a, 0+k)$	$y = k$	$x = h - a$	$4a$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 212 23-01-2023 15:12:44

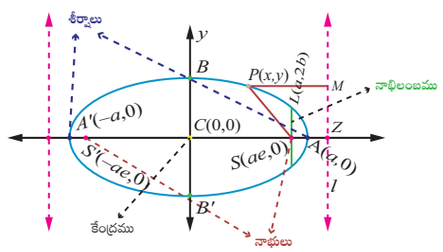
$(y-k)^2=-4a(x-h)$	 (b) రేఖాచిత్రము $(y-k)^2=-4a(x-h)$ పటము. 5.20	(h,k)	$(h-a,0+k)$	$y=k$	$x=h+a$	$4a$
$(x-h)^2=4a(y-k)$	 (c) రేఖాచిత్రము $(x-h)^2=4a(y-k)$ పటము. 5.21	(h,k)	$(0+h,a+k)$	$x=h$	$y=k-a$	$4a$
$(x-h)^2=-4a(y-k)$	 (d) రేఖాచిత్రము $(x-h)^2=-4a(y-k)$ పటము. 5.22	(h,k)	$(0+h,-a+k)$	$x=h$	$y=k+a$	$4a$

5.3.3 దీర్ఘ వృత్తము (Ellipse)

ఒక సమతలమునందు ఒక చలన బిందువునకు నాభికి మధ్యగల దూరము, ఆ చలన బిందువునుండి నియత రేఖకు మధ్యగల దూరమునకు ఏర్పడు స్థిర నిష్పత్తి 1 కంటే తక్కువగా యున్నప్పుడు $(0<e<1)$ ఆ చలన బిందువు ద్వారా ఏర్పడు మార్గము దీర్ఘవృత్తము అగును..

(i) ప్రామాణిక రూపములో దీర్ఘవృత్తము యొక్క సమీకరణము

నాభి S, నియత రేఖ l, ఉత్కేంద్రతము e $(0<e<1)$ మరియు $P(x,y)$ అనునది చలన బిందువుగా అనుకొందును. lనకు SZ మరియు PM లను లంబముగా నుండునట్లు గీయుము.



పటము. 5.23

A మరియు A' అను బిందువులు SZ ను క్రమముగా అంతరము మరియు బాహ్యముగా $e:1$ నిష్పత్తిలో విభజించును. $AA'=2a$ గా తీసుకొనుము. AA' యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖ AA' ను C వద్ద ఖండించును. ఇక్కడ $CA=a$ మరియు $CA'=a$.. C అనునది మూలబిందువుగా CZ అనునది x-అక్షముగా మరియు AA' యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖను y-అక్షముగా తీసుకొనుము.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 213 23-01-2023 15:12:51

నిర్వచనము ప్రకారము,

$$\frac{SA}{AZ} = \frac{e}{1} \qquad \text{మరియు} \qquad \frac{SA'}{A'Z} = \frac{e}{1}$$

$$SA = eAZ \qquad SA' = eA'Z$$

$$CA - CS = e(CZ - CA) \qquad A'C + CS = e(A'C + CZ)$$

$$a - CS = e(CZ - a) \quad \ldots(1) \qquad a + CS = e(a + CZ) \quad \ldots(2)$$

$(2)+(1)$ నుండి $CZ = \frac{a}{e}$ మరియు $(2)-(1)$ నుండి $CS = ae$ వచ్చును.

ఇచ్చట M అనునది $\left(\frac{a}{e}, y\right)$ మరియు S అనునది $(ae, 0)$ అగును.

నిర్వచనము ప్రకారము, $\frac{SP}{PM} = e \Rightarrow SP^2 = e^2 PM^2$

$$\Rightarrow (x-ae)^2 + (y-0)^2 = e^2\left[\left(x - \frac{a}{e}\right)^2 + 0\right] \text{ ను}$$

సూక్ష్మీకరించగా $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1.$

$1-e^2$ అనునది ధనాత్మక విలువ అయినందున $b^2 = a^2(1-e^2)$ అని వ్రాయవచ్చును.

$ae = c$, గా తీసుకొనిన $b^2 = a^2 - c^2$.

కనుక మనము బిందుపథము P అనునది $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ గా గల దీర్ఘవృత్త నిర్దిష్ట రూపమును పొందవచ్చును మరియు ఇది x మరియు y అక్షములకు సౌష్ఠవముగా అమరుటను గమనించవచ్చును.

నిర్వచనము 5.4

(1) AA' అనునది దీర్ఘవృత్తము యొక్క దీర్ఘాక్షము (**major axis**) మరియు దాని పొడవు $2a$ అగును.

(2) BB' అనునది దీర్ఘవృత్తము యొక్క లఘు అక్షము (**minor axis**) మరియు దాని పొడవు $2b$ అగును.

(3) CA రేఖాఖండము CA' = రేఖాఖండము = అర్ధ దీర్ఘాక్షము $= a$ మరియు CB రేఖాఖండము = రేఖాఖండము CB' అర్ధలఘు అక్షము $= b$ అగును.

(4) సౌష్ఠవ ధర్మము ప్రకారము $S'(-ae, 0)$ ను నాభిగా మరియు $x = -\frac{a}{e}$ ను నియత రేఖ l' గా తీసుకొనినను అదే దీర్ఘవృత్తము లభించును. ఇందుమూలంగా దీర్ఘవృత్తము $S(ae, 0)$ మరియు $S'(-ae, 0)$ అను రెండు నాభులను $A(a, 0)$ మరియు $A'(-a, 0)$ అను రెండు శీర్షములను మరియు $x = \frac{a}{e}$ మరియు $x = -\frac{a}{e}$ అను రెండు నియత రేఖలను కలిగియుండుటను మనము గమనించవచ్చును.

ఉదాహరణ 5.15

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ అను దీర్ఘవృత్తమునకు నాభిలంబ పొడవును కనుగొనుము.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 214 23-01-2023 15:13:07

సాధన

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ అను దీర్ఘవృత్తము యొక్క నాభిలంబము $S(ae,0)$ ద్వారా వెళ్ళుచున్నది (పటము 5.22 నుండి)

కనుక L అనునది (ae, y_1).

అందుచేత,

$$\frac{a^2e^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$$

$$\frac{y_1^2}{b^2}=1-e^2$$

$$y_1^2=b^2(1-e^2)$$

$$=b^2\left(\frac{b^2}{a^2}\right) \quad \left(e^2=1-\frac{b^2}{a^2} \text{ అయినందున}\right)$$

$$y_1=\pm\frac{b^2}{a}.$$

నాభిలంబము యొక్క అంత్య బిందువులు L మరియు L' అనునవి $\left(ae,\frac{b^2}{a}\right)$ మరియు $\left(ae,-\frac{b^2}{a}\right)$ అగును.

కనుక నాభిలంబము యొక్క పొడవు $LL'=\frac{2b^2}{a}$ అగును.

(ii) (h,k) వద్ద కేంద్రముగా గల దీర్ఘవృత్తము యొక్క రకములు

(అ) దీర్ఘాక్షము x-అక్షమునకు సమాంతరము.

దీర్ఘవృత్త సమీకరణము (పటము 5.24 నుండి)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1,\ a>b$$

దీర్ఘవృత్తము యొక్క పొడవు $2a$. లఘు అక్షము యొక్క పొడవు $2b$. శీర్షము యొక్క నిరూపకములు $(h+a,k)$ మరియు $(h-a,k)$ నాభుల నిరూపకములు $(h+c,k)$ మరియు $(h-c,k)$ ఇచ్చట $c^2=a^2-b^2$.

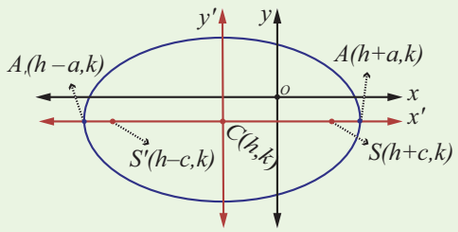
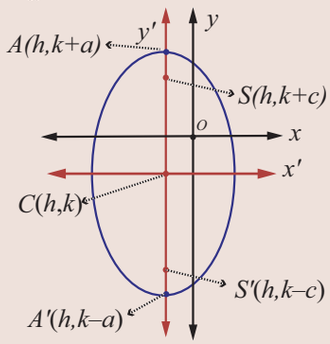
(ఆ) దీర్ఘాక్షము y-అక్షమునకు సమాంతరము

దీర్ఘవృత్త సమీకరణము (పటము 5.25 నుండి)

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1,\ a>b$$

దీర్ఘాక్షము యొక్క పొడవు $2a$. లఘు అక్షము యొక్క పొడవు $2b$. శీర్షముల నిరూపకములు $(h,k+a)$ మరియు $(h,k-a)$ నాభుల యొక్క నిరూపకములు $(h,k+c)$ మరియు $(h,k-c)$ ఇచ్చట $c^2=a^2-b^2$.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 215 23-01-2023 15:13:18

సమీకరణము Equation	కేంద్రము Centre	దీర్ఘాక్షము Major Axis	శీర్షములు Vertices	నాభులు Foci
$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad \boxed{a^2 > b^2}$  పటము. 5.24 (అ) దీర్ఘాక్షము x-అక్షమునకు సమాంతరము కేంద్రము నుండి నాభులు కుడి వైపునకు c యూనిట్లు మరియు ఎడమ వైపునకు c యూనిట్ల దూరములో ఉండును. ఇచ్చట $c^2 = a^2 - b^2$.	(h,k)	x-అక్షమునకు సమాంతరము	$(h-a,k)$ $(h+a,k)$	$(h-c,k)$ $(h+c,k)$
$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad \boxed{a^2 > b^2}$  పటము. 5.25 (ఆ) దీర్ఘాక్షము y-అక్షమునకు సమాంతరము కేంద్రము నుండి నాభులు కుడి వైపునకు c యూనిట్లు మరియు ఎడమ వైపునకు c యూనిట్ల దూరములో ఉండును. ఇచ్చట $c^2 = a^2 - b^2$.	(h,k)	y-అక్షమునకు సమాంతరము	$(h,k-a)$ $(h,k+a)$	$(h,k-c)$ $(h,k+c)$

సిద్ధాంతము 5.5

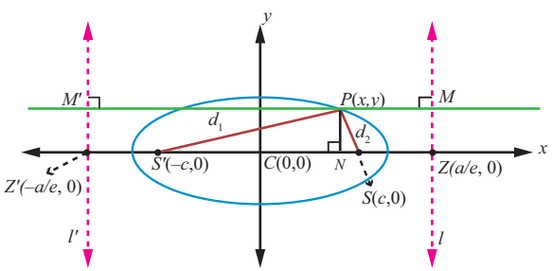
దీర్ఘవృత్తము పై గల ఏదేని బిందువు నుండి నాభీయ దూరముల మొత్తము దాని దీర్ఘాక్షపు పొడవునకు సమానము.

నిరూపణ

$P(x,y)$ అనునది $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ అను దీర్ఘవృత్తము పై ఏదేని ఒక బిందువు

MM' ను P గుండా వెళ్ళుచూ, నియతరేఖలు l మరియు l' నకు లంబముగా నుండునట్లు గీయుము.

PN ను x-అక్షమునకు లంబముగా నుండునట్లు గీయుము.



పటము. 5.26

నిర్వచనము ప్రకారము $SP = ePM$

$= eNZ = e[CZ - CN]$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 216 23-01-2023 15:13:27

$$= e\left[\frac{a}{2} - x\right] = a - ex \qquad \ldots (1)$$

మరియు
$$SP' = ePM'$$
$$= e[CN + CZ']$$
$$= e\left[x + \frac{a}{e}\right] = ex + a \qquad \ldots (2)$$

కనుక, $SP + S'P = a - ex + a + ex = 2a$

విశేషాంశము

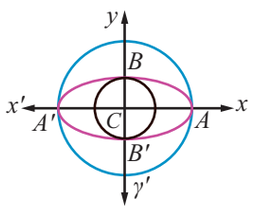
$b = a$ అయినప్పుడు, $\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ అను సమీకరణము $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ గా మారును. ఇది కేంద్రము (h,k) మరియు వ్యాసార్ధము a గా గల వృత్త సమీకరణము అగును.

$b = a$, అయినప్పుడు, $e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2}} = 0$ కనుక వృత్తము యొక్క ఉత్కేంద్రత అనునది శూన్యము **(zero)** అగును.

$\frac{SP}{PM} = 0$ నుండి $PM \to \infty$ అని పొందవచ్చును. అనగా వృత్తము యొక్క నియతరేఖ అనంతము వద్ద ఉంటుంది.

విశేషాంశము

దీర్ఘాక్షము యొక్క పొడవును వ్యాసముగా గల వృత్తమును సహాయక వృత్తము లేదా పరివృత్తము అనియు, లఘుఅక్షము యొక్క పొడవును వ్యాసముగా గల వృత్తమును అంతర వృత్తము అనియు అంటారు. అవి క్రమముగా $x^2 + y^2 = a^2$ మరియు $x^2 + y^2 = b^2$ గా ఇవ్వబడియున్నవి.



పటము. 5.27

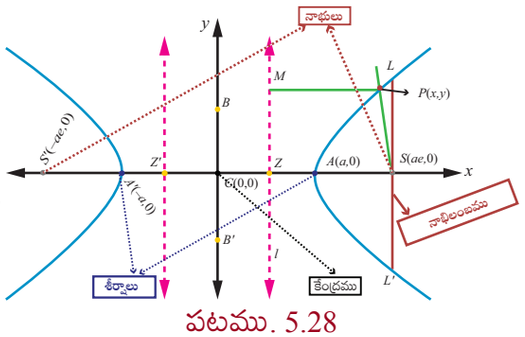
5.3.4 అతిపరావలయము

ఒక సమతలములో ఒక చలన బిందువునకు నాభికి మధ్యగల దూరము ఆ చలన బిందువు నుండినియతరేఖకు మధ్యగల దూరముకు ఏర్పడు స్థిర నిష్పత్తి 1 కంటే ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు ఆ చలన బిందువు ద్వారా ఏర్పడు మార్గము అతిపరావలయము అగును..

(i) కేంద్రము (0, 0) గా గల అతిపరావలయ సమీకరణపు ప్రామాణిక రూపము

S ను నాభిగా l అనునది నియత రేఖగా, e అనునది ఉత్కేంద్రతము $e > 1$ గా మరియు $P(x, y)$ అనునది చలన బిందువుగా తీసుకొనెదము. SZ మరియు PM లు l కు లంబముగా నుండునట్లు గీయుము.

A మరియు A' అను బిందువులు SZ ను అంతరముగా మరియు బాహ్యముగా $e:1$ అను నిష్పత్తిలో విభజించును.



పటము. 5.28

$AA' = 2a$ అగును. AA' మరియు దాని లంబసమద్విఖండన రేఖల ఖండన బిందువు C అగును. CA=CA'= a మరియు C కేంద్రము అగును. CZ అనునది x-అక్షముగాను మరియు AA' యొక్క లంబసమద్విఖండన రేఖ y-అక్షముగా అమరును.

నిర్వచనము ప్రకారము, $\frac{AS}{AZ} = e$ మరియు $\frac{A'S}{A'Z} = e$ అగును.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 217 23-01-2023 15:13:36

$\Rightarrow \quad AS = eAZ$ $\qquad\qquad$ $A'S = eA'Z$

$\Rightarrow \quad CS - CA = e(CA - CZ)$ $\qquad\qquad$ $A'C + CS = e(A'C + CZ)$

$\Rightarrow \quad CS - a = e(a - CZ) \ldots (1)$ $\qquad\qquad$ $a + CS = e(a + CZ) \ldots (2)$

$(1)+(2)$ అనునది $CS = ae$ ను ఇచ్చును. $(2)-(1)$ అనునది $CZ = \frac{a}{e}$ ను ఇచ్చును.

కనుక S బిందువు యొక్క నిరూపకములు $(ae, 0)$, $PM = x - \frac{a}{e}$ అగుటచే నియతరేఖ సమీకరణము $x - \frac{a}{e} = 0$ అగును. $P(x, y)$ అనునది అతిపరావలయముపై ఒక బిందువు.

శాంకవము నిర్వచనము ప్రకారము, $\frac{SP}{PM} = e \Rightarrow SP^2 = e^2 PM^2$.

అయిన $(x-ae)^2 + (y-0)^2 = e^2\left(x - \frac{a}{e}\right)^2$

$\Rightarrow \quad (x-ae)^2 + y^2 = (ex - a)^2$

$\Rightarrow \quad (e^2-1)x^2 - y^2 = a^2(e^2-1)$

$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1$. $e > 1, a^2\left(e^2-1\right) > 0$ అగును. $a^2(e^2-1) = b^2$, అని ప్రతిక్షేపించగా P అను బిందుపథము $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ గా లభించును. ఇది అతిపరావలయ ప్రామాణిక రూపము అగును మరియు ఇది x మరియు y-అక్షములకు సౌష్ఠవముగా అమరును.

$ae = c$ గా తీసుకొనిన, $b^2 = c^2 - a^2$ గా మనము పొందగలము.

నిర్వచనము 5.5

(1) AA' అను రేఖాఖండము అనునది $2a$ పొడవుగా గల తిర్యగాక్షము (**transverse axis**) అగును.

(2) BB' అను రేఖాఖండము అనునది $2b$ పొడవుగా గల సంయుగ్మాక్షము ((**conjugate axis**) అగును.

(3) CA రేఖాఖండము = CA' రేఖాఖండము =అర్ధ తిర్యగాక్షము = ***a*** మరియు CB రేఖాఖండము = CB' రేఖాఖండము = అర్ధ సంయుగ్మాక్షము = ***b*** అగును.

(4) సౌష్ఠవము ప్రకారము, $S'(-ae, 0)$ ను నాభిగా మరియు $x = -\frac{a}{e}$ ను నియత రేఖ l' గా తీసుకొనిన అదే అతి పరావలయమును ఇచ్చును.

కనుక అతిపరావలయము అనునది $S(ae, 0)$ మరియు $S'(-ae, 0)$ అను రెండు నాభులను, $A(a, 0)$ మరియు $A'(-a, 0)$ అను రెండు శీర్షములు, $x = \frac{a}{e}$ మరియు $x = -\frac{a}{e}$ అను రెండు నియత రేఖలను కలిగియుండుటను మనము గమనించవచ్చును.

అతిపరావలయము యొక్క నాభిలంబ పొడవు $\frac{2b^2}{a}$ అని, దీర్ఘవృత్తములో వలె పొందవచ్చును.

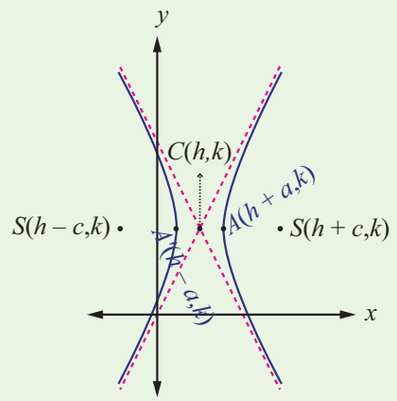
12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 218 23-01-2023 15:13:52

అనంత స్పర్శరేఖలు (Asymptotes)

$y = f(x)$ అని నిర్వచించబడిన వక్రరేఖపై గల బిందువు $P(x, y)$ గా తీసుకొనుము. P బిందువునకు ఏదేని ఒక స్థిరరేఖకు మధ్యగల దూరము శూన్యమును సమీపించునట్లు, P అను బిందువు ఆది బిందువును వదలి కొద్ది కొద్దిగా కదిలి వెళ్ళినట్లైన ఆ స్థిరరేఖ అనునది అనంత స్పర్శరేఖ అని పిలువబడును.

అతిపరావలయమునకు అనంత స్పర్శరేఖలు గలవు. అదేసమయంలో పరావలయమునకు మరియు దీర్ఘవృత్తమునకు అనంత స్పర్శరేఖలు లేవు.

(ii) (h, k) వద్ద కేంద్రముగా గల అతిపరావలయ రకాలు



పటము. 5.29

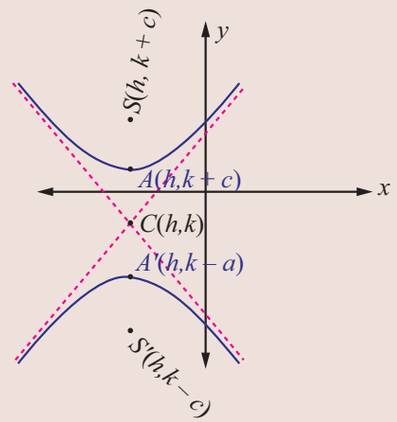
(అ) తిర్యగాక్షము x-అక్షమునకు సమాంతరము

(అ) తిర్యగాక్షము x-అక్షమునకు సమాంతరము.

$C(h,k)$ ను కేంద్రముగా మరియు తిర్యగాక్షము x-అక్షమునకు సమాంతరముగా గల అతిపరావలయ సమీకరణము (పటము 5.29 ప్రకారం) $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$ గా ఇవ్వబడియున్నది.

శీర్షముల యొక్క నిరూపకములు $A(h+a,k)$ మరియు $A'(h-a,k)$ అగును. నాభిల యొక్క నిరూపకములు $S(h+c,k)$ మరియు $S'(h-c,k)$ ఇచ్చట $c^2 = a^2 + b^2$.

నియత రేఖల సమీకరణము $x = h \pm \frac{a}{e}$.



పటము. 5.30

(ఆ) తిర్యగాక్షము y-అక్షమునకు సమాంతరము

(ఆ) తిర్యగాక్షము y-అక్షమునకు సమాంతరము.

$C(h,k)$ ను కేంద్రముగా మరియు తిర్యగాక్షము y-అక్షమునకు సమాంతరముగా గల అతిపరావలయ సమీకరణము (పటము 5.30 నుండి)

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$

శీర్షముల యొక్క నిరూపకములు $A(h,k+a)$ మరియు $A'(h,k-a)$ అగును. నాభిల యొక్క నిరూపకములు $S(h,k+c)$ మరియు $S'(h,k-c)$ ఇచ్చట $c^2 = a^2 + b^2$.

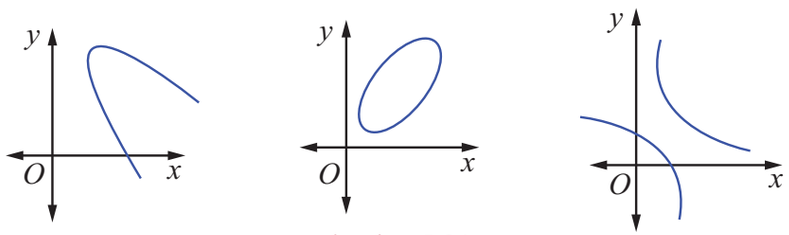
నియత రేఖల సమీకరణము $y = k \pm \frac{a}{e}$.

విశేషాంశము

(1) అతిపరావలయపు తిర్యగాక్షమును వ్యాసముగా కలిగి గీయబడు వృత్తము అతిపరావలయపు సహాయక వృత్తము అనబడును. దాని సమీకరణము $x^2 + y^2 = a^2$.

(2) అతిపరావలయము పై గల ఏదేని ఒక బిందువునకు నాభిలకు మధ్యగల దూరముల పరమ వ్యత్యాసము ఒక స్థిరాంకము మరియు తిర్యగాక్ష పొడవునకు సమానము. అదేవిధంగా $|PS - PS'| = 2a$ (దీనిని దీర్ఘవృత్తము వలె నిరూపించవచ్చును.)

ఇది వరకు మనము పరావలయము యొక్క నాలుగు ప్రామాణిక రూపములను, దీర్ఘ వృత్తము యొక్క రెండు ప్రామాణిక రూపములను మరియు అతిపరావలయము యొక్క రెండు ప్రామాణిక రూపములను గూర్చి చర్చించియున్నాము. ఇవి మాత్రమే కాకుండా ఈ స్థిర రూపములో వర్గీకరించుటకు వీలుకాని అనేక పరావలయములు, దీర్ఘవృత్తములు మరియు అతిపరావలయములు కలవు. ఉదాహరణగా ఈ క్రింది పరావలయములు, దీర్ఘవృత్తములు, అతిపరావలయము మొదలగువాటిని తీసుకొనెదము.

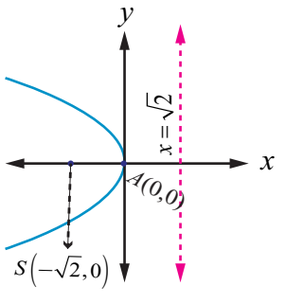


పటము. 5.31

అయితే పైన కనబడిన వక్రరేఖల నిరూపకములను సరియైన అక్షములలోనికి స్థాన మార్పిడి చేయుట ద్వారా ప్రామాణిక రూపములో సూచించవచ్చును.

ఉదాహరణ 5.16

నాభి $\left(-\sqrt{2},0\right)$ మరియు నియత రేఖ $x=\sqrt{2}$ గా గల పరావలయ సమీకరణమును కనుగొనుము.



పటము. 5.32

సాధన

పరావలయము ఎడమవైపు తెరవబడియుండును, x-అక్షమును సౌష్ఠవ రేఖగా మరియు $(0,0)$ ను శీర్షముగా కలిగియుండును.

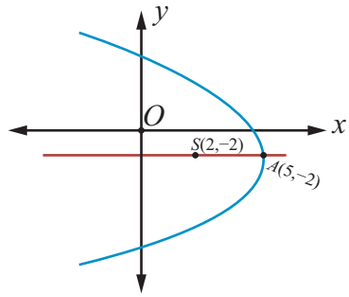
కనుక మనకు కావలసిన పరావలయ సమీకరణము

$$\left(y-0\right)^2=-4\sqrt{2}\left(x-0\right)$$

$$\Rightarrow \qquad y^2=-4\sqrt{2}\,x\,.$$

ఉదాహరణ 5.17

$(5,-2)$ ను శీర్షముగా మరియు $(2,-2)$ ను నాభిగా గల పరావలయ సమీకరణమును కనుగొనుము.



పటము. 5.33

సాధన

శీర్షము $A(5,-2)$, నాభి $S(2,-2)$ మరియు నాభీయ దూరము $AS=a=3$ గా ఇవ్వబడియున్నది.

పరావలయము అనునది ఎడమవైపు తెరవబడియుండును మరియు x-అక్షమునకు సమాంతర రేఖ సౌష్ఠవతను కలిగియుండును.

కనుక, మనకు కావలసిన పరావలయ సమీకరణము

$$\left(y+2\right)^2=-4\left(3\right)\left(x-5\right)$$

$$\Rightarrow \qquad y^2+4y+4=-12x+60$$

$$\Rightarrow \qquad y^2+4y+12x-56=0\,.$$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 220 23-01-2023 15:14:08

ఉదాహరణ 5.18

$(-1,-2)$ ను శీర్షముగా కలిగి అక్షము y-అక్షమునకు సమాంతరము మరియు $(3,6)$ బిందువు ద్వారా వెళ్ళు పరావలయ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన

అక్షము y-అక్షమునకు సమాంతరముగా యుండుట వలన మనకు కావలసిన పరావలయ సమీకరణము

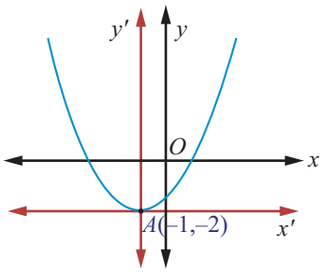
$$(x+1)^2 = 4a(y+2).$$

ఇది $(3,6)$ బిందువు ద్వారా పోవుచున్నది, కనుక

$$(3+1)^2 = 4a(6+2)$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{1}{2} \text{ గా మనము పొందగలము.}$$

$(x+1)^2 = 2(y+2)$ అను పరావలయ సమీకరణమును సూక్ష్మీకరించగా $x^2+2x-2y-3 = 0$ గా పొందవచ్చును.



పటము. 5.34

ఉదాహరణ 5.19

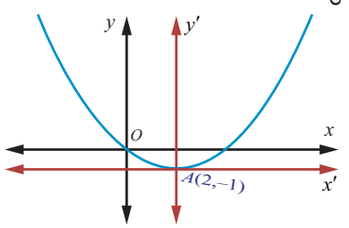
$x^2-4x-5y-1=0$. అను పరావలయమునకు శీర్షము, నాభి, నియతరేఖ మరియు నాభిలంబము యొక్క పొడవును కనుగొనుము.

సాధన

$x^2-4x-5y-1 = 0$ అను పరావలయమునకు

$$\Rightarrow \quad x^2-4x = 5y+1$$

$$\Rightarrow \quad x^2-4x+4 = 5y+1+4.$$



పటము. 5.35

$\Rightarrow (x-2)^2 = 5(y+1)$ అనునది ప్రామాణికరూపము అగును. కనుక $4a=5$, శీర్షము $(2,-1)$ మరియు నాభి $\left(2,\frac{1}{4}\right)$ అగును.

నియత రేఖ సమీకరణము $\quad y-k+a = 0$

$$y+1+\frac{5}{4} = 0 \quad 4y+9 = 0.$$

నాభిలంబము యొక్క పొడవు 5 యూనిట్లు అగును.

ఉదాహరణ 5.20

$(\pm 2,0)$ నాభిలకు $(\pm 3,0)$ శీర్షముగా గల దీర్ఘవృత్తము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన

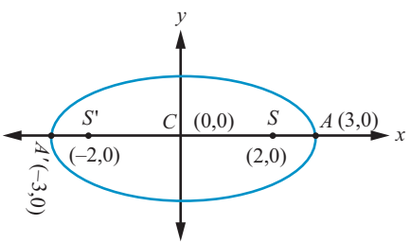
పటము 5.36 నుండి

$$SS' = 2c \text{ మరియు } 2c = 4 \; ; \quad A'A = 2a = 6$$

అని మనము పొందగలము

$$\Rightarrow \quad c = 2 \text{ మరియు } a = 3,$$

$$\Rightarrow b^2 = a^2-c^2 = 9-4 = 5.$$



పటము. 5.36

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 221 23-01-2023 15:14:20

దీర్ఘాక్షములు అనునది x-అక్షముపై అమరియుండును, కనుక $a > b$.

కేంద్రము $(0, 0)$ మరియు నాభిలు $(\pm 2, 0)$ అగును..

కనుక దీర్ఘవృత్తము యొక్క సమీకరణము అనునది $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$ అగును.

ఉదాహరణ 5.21

ఉత్కేంద్రత $\frac{1}{2}$ గా, ఒక నాభి $(2,3)$ గా మరియు $x=7$ ను నియతరేఖగా కలిగిన దీర్ఘవృత్తము యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము. ఆ దీర్ఘవృత్తమునకు దీర్ఘాక్షము మరియు లఘు అక్షము పొడవులను కనుగొనుము.

సాధన

శాంకవము నిర్వచనము ప్రకారము, $\frac{SP}{PM} = e$ లేదా $SP^2 = e^2 PM^2$.

అయిన, $(x-2)^2+(y-3)^2 = \frac{1}{4}(x-7)^2$

$\Rightarrow$ $3x^2+4y^2-2x-24y+3 = 0$

$\Rightarrow$ $3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+4(y-3)^2 = 3\left(\frac{1}{9}\right)+4\times 9-3=\frac{100}{3}$

$\Rightarrow$ $\frac{\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}{\frac{100}{9}}+\frac{(y-3)^2}{\frac{100}{12}} = 1$ అనునది నిర్ధిష్ట రూపము అగును.

కనుక, దీర్ఘాక్షము యొక్క పొడవు $= 2a = 2\sqrt{\frac{100}{9}}=\frac{20}{3}$ మరియు

లఘు అక్షము యొక్క పొడవు $= 2b = 2\sqrt{\frac{100}{12}}=\frac{10}{\sqrt{3}}$.

ఉదాహరణ 5.22

$4x^2+36y^2+40x-288y+532=0$ అను శాంకవమునకు నాభి, శీర్షములు, దీర్ఘాక్షము మరియు లఘు అక్షముల పొడవులను కనుగొనుము.

సాధన

$4x^2+36y^2+40x-288y+532=0$ ను x మరియు y విలువలకు వర్గము అగునట్లు పూరించగా.

$4(x^2+10x+25-25)+36(y^2-8y+16-16)+532 = 0$, నుండి

$4(x^2+10x+25)+36(y^2-8y+16) = -532+100+576$

$4(x+5)^2+36(y-4)^2 = 144$.

'144' ను ఇరువైపులా భాగించగా, పై సమీకరణము

$\frac{(x+5)^2}{36}+\frac{(y-4)^2}{4} = 1$ గా లభించును.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 222 23-01-2023 15:14:30

ఇది $(-5,4)$ ను కేంద్రముగాను, దీర్ఘాక్షము అనునది x-అక్షమునకు సమాంతరముగాను యుండు దీర్ఘవృత్తము అగును. దీర్ఘాక్షపు పొడవు 12 మరియు లఘు అక్షపు పొడవు 4 అగును. $(1,4)$ మరియు $(-11,4)$ అనునవి శీర్షములు అగును.

$$\text{ఇప్పుడు, } c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 4 = 32$$

$$\text{మరియు } c = \pm 4\sqrt{2}\,.$$

అయిన నాభిలు $\left(-5-4\sqrt{2},4\right)$ మరియు $\left(-5+4\sqrt{2},4\right)$ అగును.

$$\text{దీర్ఘాక్షము యొక్క పొడవు} = 2a = 12 \text{ యూనిట్లు మరియు}$$

$$\text{లఘు అక్షము పొడవు} = 2b = 4 \text{ యూనిట్లు.}$$

ఉదాహరణ 5.23

$4x^2 + y^2 + 24x - 2y + 21 = 0$ అను దీర్ఘవృత్తమునకు కేంద్రము, శీర్షములు మరియు నాభిలను కనుగొనుము. మరియు దాని నాభిలంబపు పొడవు 2 అని నిరూపించుము.

సాధన

పదములను పునర్నిర్మాణము చేయగా, దీర్ఘవృత్త సమీకరణము అనునది

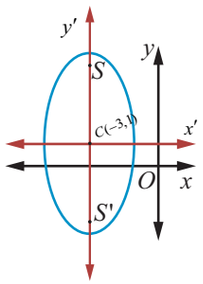
$$4x^2 + 24x + y^2 - 2y + 21 = 0$$

$$\text{అనగా, } 4\left(x^2+6x+9-9\right)+\left(y^2-2y+1-1\right)+21 = 0\,,$$

$$4\left(x+3\right)^2 - 36 + \left(y-1\right)^2 - 1 + 21 = 0\,,$$

$$4\left(x+3\right)^2 + \left(y-1\right)^2 = 16\,,$$

$$\frac{\left(x+3\right)^2}{4} + \frac{\left(y-1\right)^2}{16} = 1\,.$$



పటము. 5.37

కేంద్రము $(-3,1)$ $a=4,\ b=2$, మరియు దీర్ఘాక్షము y-అక్షమునకు సమాంతరము

$$c^2 = 16 - 4 = 12$$

$$c = \pm 2\sqrt{3}\,.$$

కనుక నాభిలు $\left(-3, 2\sqrt{3}+1\right)$ మరియు $\left(-3, -2\sqrt{3}+1\right)$ అగును.

శీర్షములు అనునవి $(3, \pm 4 + 1)$. అనగా శీర్షములు $(-3,5)$ మరియు $(-3,-3)$

$$\text{మరియు నాభిలంబపు పొడవు} = \frac{2b^2}{a} = 2 \text{ యూనిట్లు (పటము 5.37 నుండి)}$$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 223 23-01-2023 15:14:41

ఉదాహరణ 5.24

$(0,\pm4)$ ను శీర్షములుగా మరియు $(0,\pm6)$ ను నాభిలుగా గల అతిపరావలయమును కనుగొనుము..

సాధన

పటము 5.38 నుండి, నాభిలను కలుపు రేఖ మధ్యబిందువు కేంద్రము

$C\,(0,0)$ అగును.

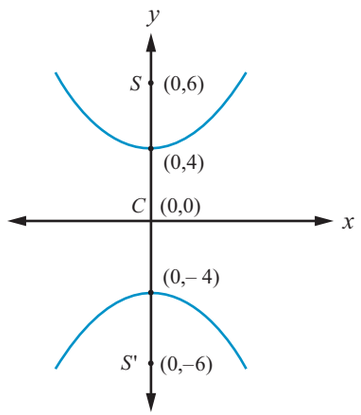
y -అక్షము అనునది తిర్యగాక్షము అగును.

$$AA' = 2a \Rightarrow 2a = 8,$$

$$SS' = 2c = 12, c = 6$$

$$a = 4$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 16 = 20.$$



పటము. 5.38

మనకు కావలసిన అతిపరావలయ సమీకరణము $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{20} = 1$ అగును.

ఉదాహరణ 5.25

$9x^2 - 16y^2 = 144$ అను అతిపరావలయమునకు శీర్షములు మరియు నాభిలను కనుగొనుము.

సాధన

$9x^2 - 16y^2 = 144$ ను ప్రామాణిక రూపములోనికి మార్చగా

$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ అని పొందగలము.

తిర్యగాక్షము x -అక్షముపై అమరియుండి, $(-4,0)$ మరియు $(4,0)$ లను శీర్షములుగా కలిగియుండును.

మరియు $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$, $c = 5$.

కనుక $(-5,0)$ మరియు $(5,0)$ లు నాభిలగును.

ఉదాహరణ 5.26

$11x^2 - 25y^2 - 44x + 50y - 256 = 0$ అను అతిపరావలయపు కేంద్రము, నాభిలు మరియు ఉత్కేంద్రతను కనుగొనుము.

సాధన

పదములను పునర్వ్యవస్థీకరించుట ద్వారా అతిపరావలయపు సమీకరణమును ప్రామాణిక రూపములో పొందవచ్చును.

కనుక, $11(x^2 - 4x) - 25(y^2 - 2y) - 256 = 0$

$$11(x-2)^2 - 25(y-1)^2 = 256 - 44 + 25$$

$$11(x-2)^2 - 25(y-1)^2 = 275$$

$$\frac{(x-2)^2}{25} - \frac{(y-1)^2}{11} = 1.$$

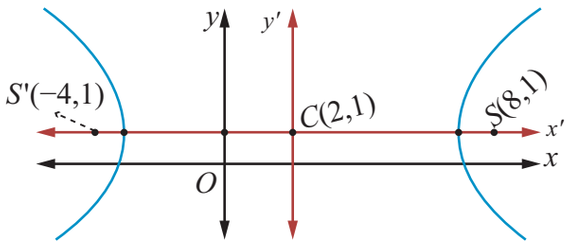
12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 224 23-01-2023 15:14:52

(2,1) కేంద్రము కనుక, $a^2 = 25, b^2 = 11$

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$= 25 + 11 = 36$$

అందుచేత, $c = \pm 6$

మరియు $e = \frac{c}{a} = \frac{6}{5}$ మరియు నాభిల నిరూపకములు (8,1) మరియు (–4,1) అగును. (పటము 5.39 నుండి)



పటము. 5.39

ఉదాహరణ 5.27

(పటము 5.51 నుండి) హెల్లే తోకచుక్క యొక్క కక్ష్య 36.18 అస్ట్రానామికల్ యూనిట్ల పొడవు మరియు 9.12 అస్ట్రానామికల్ యూనిట్ల వెడల్పుతో దీర్ఘవృత్తాకారములో యున్నది. అయిన దాని ఉత్కేంద్రతను కనుగొనుము.

సాధన

$2a = 36.18,\ 2b = 9.12$ అని ఇవ్వబడియున్నది.

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{\left(\frac{36.18}{2}\right)^2 - \left(\frac{9.12}{2}\right)^2}}{\frac{36.18}{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{(18.09)^2 - (4.56)^2}}{(8.09)} \approx 0.97 .$$

గమనిక

ఒక అస్ట్రానామికల్ యూనిట్ (అనగా సూర్యుని నుండి భూమికి మధ్యగల దూరము) అనునది 1,49,597,870 కి.మీ. ఇది భూకక్ష్య యొక్క దీర్ఘాక్షము నందలి సగభాగము అగును.

అభ్యాసము 5.2

1. క్రింద ఇవ్వబడిన వాటికి పరావలయపు సమీకరణములను కనుగొనుము.

(i) నాభి (4,0) మరియు నియతరేఖ $x = -4$.

(ii) (2,–3) బిందువు గుండా వెళ్ళును మరియు y-అక్షమునకు సౌష్ఠవముగా యుండును.

(iii) శీర్షము (1,–2) మరియు నాభి (4,–2).

(iv) నాభిలంబపు అంత్య బిందువులు (4,–8) మరియు (4,8) అయిన

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 225 23-01-2023 15:14:59

2. క్రింద ఇవ్వబడిన విలువలకు దీర్ఘవృత్త సమీకరణములు కనుగొనుము.

(i) నాభిలు $(\pm 3, 0), e = \frac{1}{2}$.

(ii) నాభిలు $(0, \pm 4)$ మరియు దీర్ఘాక్షపు అంత్యబిందువులు $(0, \pm 5)$.

(iii) నాభిలంబపు పొడవు 8, ఉత్కేంద్రత $= \frac{3}{5}$, కేంద్రము (0, 0) మరియు దీర్ఘాక్షము x-అక్షముపై అమరియుండిన.

(iv) నాభిలంబపు పొడవు 4, నాభిల మధ్యదూరము $4\sqrt{2}$ కేంద్రము (0, 0) మరియు y-అక్షమును దీర్ఘాక్షముగా కలిగియుండిన.

3. ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన విలువలకు అతిపరావలయ సమీకరణమును కనుగొనుము.

(i) నాభిలు $(\pm 2, 0)$, ఉత్కేంద్రత $= \frac{3}{2}$.

(ii) కేంద్రము $(2,1)$, ఒక నాభి $(8,1)$ మరియు సంబంధిత నియతరేఖ $x = 4$.

(iii) $(5, -2)$ బిందువు గుండా వెళ్ళు మరియు xఅక్షములో అమరు తిర్యగాక్షము యొక్క పొడవు 8 యూనిట్లు.

4. ఈ క్రింద ఇవ్వబడిన వాటికి శీర్షము, నాభి, నియత రేఖ సమీకరణము మరియు నాభిలంబముల పొడవులను కనుగొనుము.

(i) $y^2 = 16x$ (ii) $x^2 = 24y$ (iii) $y^2 = -8x$

(iv) $x^2 - 2x + 8y + 17 = 0$ (v) $y^2 - 4y - 8x + 12 = 0$

5. ఈ క్రింది వాటికి శాంకవము యొక్క రకమును కనుగొనుము మరియు కేంద్రము, నాభి, శీర్షములు మరియు నియతరేఖలను కనుగొనుము.

(i) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ (ii) $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{10} = 1$ (iii) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$ (iv) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

6. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ అను అతిపరావలయము నాభిలంబపు పొడవు $\frac{2b^2}{a}$ అని నిరూపించుము..

7. అతిపరావలయముపై గల P బిందువు నుండి నాభిల మధ్యగల దూరముల వ్యత్యాసముల పరమ విలువ తిర్యగాక్షపు పొడవునకు సమానము అని నిరూపించుము.

8. ఈ క్రింది శాంకవాలు రకములను కనుగొని వాటి కేంద్రము, నాభిలు, శీర్షములు మరియు నియతరేఖలను కనుగొనుము.

(i) $\frac{(x-3)^2}{225} + \frac{(y-4)^2}{289} = 1$ (ii) $\frac{(x+1)^2}{100} + \frac{(y-2)^2}{64} = 1$ (iii) $\frac{(x+3)^2}{225} - \frac{(y-4)^2}{64} = 1$

(iv) $\frac{(y-2)^2}{25} - \frac{(x+1)^2}{16} = 1$ (v) $18x^2 + 12y^2 - 144x + 48y + 120 = 0$

(vi) $9x^2 - y^2 - 36x - 6y + 18 = 0$

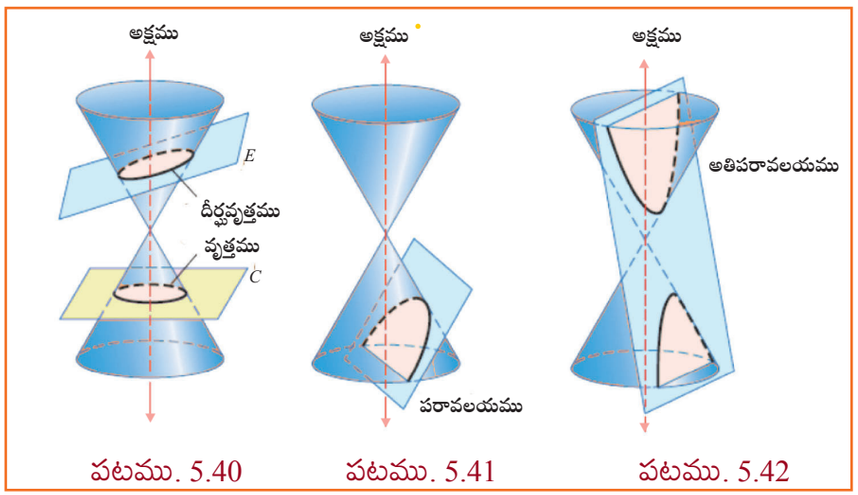
12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 226 23-01-2023 15:15:12

5.4 శాంకవచ్ఛేదన విభాగములు (Conic Sections)

వక్రములను నిర్ధారించుటకు భాగము 5.3 నందు వివరించిన పద్ధతులతో కూడిన శంఖుచ్ఛేదన విభాగములకు జ్యామితీయ వివరణ గూర్చి ఇచ్చట చర్చించెదము. శీర్షాభిముఖ ద్విశంఖువులను ఒక సమతలముచే ఖండించునపుడు వృత్తము, దీర్ఘవృత్తము, పరావలయము, అతిపరావలయము మొదలగు ఆకారములు లభించును. అందుచేత ఆ ఆకారాలను శంఖుచ్ఛేదన విభాగములు లేదా సూక్ష్మముగాశంఖాకార వక్రములు అంటారు.

5.4.1 శాంకవచ్ఛేదన విభాగముల రేఖాగణిత వివరణ (Geometric description of conic section)

శంఖువు యొక్క అక్షమునకు లంబముగా గల ఒక సమతలము (సమతలము C) శీర్షాభిముఖ ద్విశంఖువులలో ఒకదానిని ఖండించునపుడు వృత్తము (పటము 5.40లో) లభించును. తలము E, అక్షమునకు లంబముగా లేకుండా కొద్దిగా వంగిన స్థితిలో ద్విశంఖువులలో ఒక భాగమును మాత్రము ఖండించునపుడు దీర్ఘవృత్తము (పటము 5.40) లభించును. ద్విశంఖువులలో ఒక శంఖువు భుజమునకు సమాంతరముగాఒక తలము ఖండించునపుడు పరావలయము (పటము 5.41) ఏర్పడును. ద్విశంఖువుల యొక్క అక్షమునకు సమాంతరముగా ఒక తలము ద్విశంఖువుల రెండు భాగములను ఖండించునపుడు అతిపరావలయము (పటము 5.42) లభించును.



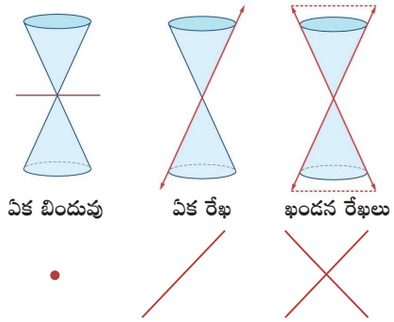
పటము. 5.40 పటము. 5.41 పటము. 5.42

5.4.2 శిథిల ఆకారములు (Degenerate Forms)

శంఖాకారముల శిథిల ఆకారములు (పటము 5.43) ద్విశంఖువులను ఖండించు తలము యొక్క కోణము మరియు అది శీర్షము గుండా పోవుచున్నదా అనుదానిని అనుసరించి, బిందువు లేదా ఒక సరళరేఖ లేదా ఒక జత సరళరేఖలు లేదా రెండు ఖండన రేఖలు లేదా శూన్యసమితిగా యుండును. లేదా తలము స్థూపాకార అక్షమునకు సమాంతరముగా యున్నప్పుడు శిథిలాకారము ఒక స్థూపముగా యుండును.

ఖండించు తలము శీర్షాభిముఖ ద్విశంఖువు శీర్షము గుండా వెళ్ళుచూ అక్షమునకు లంబముగా ఉన్న యెడల మనము బిందువు లేదా బిందు వృత్తమును పొందగలము. ఖండన తలము శంఖువు ఉత్పాదకము గుండా వెళ్ళునప్పుడు మనము ఒక రేఖ లేదా ఒక జత సమాంతర రేఖలను పొందుచున్నాము.శంఖాకార సాధారణ సమీకరణములో $A = B = C = 0$ అని తీసుకొన్న పరావలయ శిథిలాకార రూపముగా పొందగలము మరియు ఖండన తలము అక్షము గుండా మరియు శీర్షాభిముఖ ద్విశంఖువుల శీర్షము గుండా వెళ్ళునప్పుడు మనము ఖండన రేఖలను పొందుతాము. ఇది అతిపరావలయపు శిథిలాకారము.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 227 23-01-2023 15:15:12



పటము. 5.43

విశేషాంశము

దీర్ఘ వృత్తము విషయంలో $(0<e<1)$ ఇచ్చట $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$. $e\to 0$, అయిన $\frac{b}{a}\to 1$ అయిన $b\to a$ లేదా దీర్ఘాక్షము మరియు లఘు అక్షముల పొడవుల పరిమాణములో అతిదగ్గరగా వచ్చును. అనగా దీర్ఘవృత్తము వృత్తముగా మారును. $e\to 1$, $\frac{b}{a}\to 0$ అయిన దీర్ఘ వృత్తము ఒక రేఖాఖండముగా మారును. అనగా దీర్ఘవృత్తము సమతలము అగును.

విశేషాంశము

అతిపరావలయ విషయంలో $(e>1)$, ఇచ్చట $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}$ అయిన $e\to 1$, $\frac{b}{a}\to 0$. అదేమనగా $e\to 1$, b అయిన a ను అనుసరించి అతిచిన్న విలువ అగును మరియు ఈ అతిపరావలయము ఒక వాడియైన మొనగా మారును. $e\to\infty$ అయిన a అనుసరించి b మిక్కిలి పెద్ద విలువ మరియు అతిపరావలయము అనునది సమతలముగా మారును.

5.4.3 శాంకవము యొక్క సాధారణ సమీకరణము $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ నుండి శాంకవాలు గుర్తించుట

ఒక ద్విఘాత సమీకరణము యొక్క రేఖాచిత్రము క్రింది నిబంధనలను అనుసరించి ఒక వృత్తము, పరావలయము, దీర్ఘ వృత్తము, అతిపరావలయము, ఒక బిందువు, శూన్య సమితి, ఏక రేఖ లేదా ఒక జత రేఖలుగా యుండును. అదేమనగా

(1) $A=C=1, B=0, D=-2h, E=-2k, F=h^2+k^2-r^2$ గా తీసుకొని సాధారణ సమీకరణమును సూక్ష్మీకరించగా $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ లభించును. ఇది ఒక వృత్తము అగును.

(2) $B=0$ మరియు A లేదా $C=0$ అయిన, సాధారణ సమీకరణము ఈ స్థాయి నందు మనము అభ్యసించిన ఏదేని ఒక పరావలయమును ఇచ్చును.

(3) $A\neq C$ మరియు A మరియు C లు సజాతి గుర్తులుగా యుండిన, సాధారణ సమీకరణము ఒక దీర్ఘవృత్తమును ఇచ్చును.

(4) $A\neq C$ మరియు A మరియు C లు విజాతి గుర్తులుగా యుండిన, సాధారణ సమీకరణము ఒక అతిపరావలయమును ఇచ్చును.

(5) $A=C$ మరియు $B=D=E=F=0$, అయిన సాధారణ సమీకరణము $x^2+y^2=0$ అను బిందువును ఇచ్చును.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 228 23-01-2023 15:15:22

(6) $A = C = F$ మరియు $B = D = E = 0$ అయిన, సాధారణ సమీకరణము $x^2 + y^2 = 0$ అను శూన్య సమితిని ఇచ్చును. దీనికి వాస్తవ సాధన లేదు

(7) $A \neq 0$ లేదా $C \neq 0$ మరియు మిగిలిన అన్ని విలువలు శూన్యములు అయిన, సాధారణ సమీకరణము నిరూపాక్షమును (నిరూపక అక్షములను) ఇచ్చును.

(8) $A = -C$ మరియు మిగిలిన అన్ని విలువలు శూన్యములు అయిన, సాధారణ సమీకరణము $x^2 - y^2 = 0$ అను జత సరళరేఖలను ఇచ్చును.

ఉదాహరణ 5.28

ఈ క్రింది సమీకరణముల నుండి శాంకవాలు రకములను కనుగొనుము.

(1) $16y^2 = -4x^2 + 64$ (2) $x^2 + y^2 = -4x - y + 4$

(3) $x^2 - 2y = x + 3$ (4) $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$

సాధన

ప్రశ్న సంఖ్య	సమీకరణము	నిబంధన	శాంకవము రకము
1	$16y^2 = -4x^2 + 64$	3	దీర్ఘవృత్తము
2	$x^2 + y^2 = -4x - y + 4$	1	వృత్తము
3	$x^2 - 2y = x + 3$	2	పరావలయము
4	$4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$	4	అతిపరావలయము

అభ్యాసము 5.3

ఈ క్రింది సమీకరణములకు శాంకవచ్ఛేదన విభాగములను కనుగొనుము.

1. $2x^2 - y^2 = 7$ 2. $3x^2 + 3y^2 - 4x + 3y + 10 = 0$ 3. $3x^2 + 2y^2 = 14$

4. $x^2 + y^2 + x - y = 0$ 5. $11x^2 - 25y^2 - 44x + 50y - 256 = 0$ 6. $y^2 + 4x + 3y + 4 = 0$

5.5 శాంకవాలు పరామితీయ రూపము (Parametric form of Conics)

5.5.1 పరామితీయ సమీకరణము (Parametric equations)

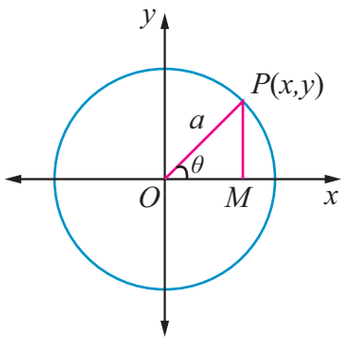
$f(t)$ మరియు $g(t)$ అనునవి 't' యొక్క ప్రమేయములుగా తీసుకొనిన, $x = f(t)$ మరియు $y = g(t)$ అను రెండు సమీకరణములు కలిసి సమతలముపై ఒక వక్రమును ఏర్పరచును. సాధారణముగా 't' అనునది ఒక ఏకపక్ష చలరాశి, ఇచ్చట దీనిని పరామితి అనియు, ఒక వక్రరేఖను ఈ విధానములో సూచించుటను పరామితీయ సమీకరణములు అని అంటారు. 't' యొక్క ముఖ్యమైన భావన కాలమును తెలియజేయుట అగును. ఈ వివరణలో $x = f(t)$ మరియు $y = g(t)$ అను సమీకరణములు ఒక నిర్ణీత కాలప్రమాణము 't' లో ఒక వస్తువు యొక్క స్థితిని తెలుపును.

క్లుప్తముగా x మరియు y విలువలను ఒక మూడవ చలరాశితో పరామితిగా వ్యక్తపరచిన పరామితీయ సమీకరణములో మూడవ చలరాశి గలదు అని చెప్పవచ్చును. పరామితి అనునది అన్ని వేళలా 't' ని కలిగియుండక పోవచ్చును. 't' ను ఉపయోగించుట ఒక ప్రామాణికత అయిననూ, ఇతర చలరాశులను కూడా ఉపయోగించవచ్చును.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 229 23-01-2023 15:15:35

(i) $x^2 + y^2 = a^2$ అను వృత్తము యొక్క పరామితీయ రూపము

$P(x, y)$ అనునది $x^2 + y^2 = a^2$ అను వృత్తముపై ఏదేని ఒక బిందువు అనుకొనుము.



పటము. 5.44

OP ను కలుపుము మరియు అది x-అక్షముతో θ అను కోణమును ఏర్పరచును.

PM ను x-అక్షమునకు లంబముగా నుండునట్లు గీయుము. త్రిభుజము OPM నుండి,

$$x = OM = a\cos\theta$$

$$y = MP = a\sin\theta$$

కనుక, ఇవ్వబడిన వృత్తముపై ఏదేని ఒక బిందువు వద్ద నిరూపకములు అనునవి $(a\cos\theta, a\sin\theta)$ మరియు $x = a\cos\theta, y = a\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$ అనునవి $x^2 + y^2 = a^2$ అను వృత్తము యొక్క పరామితీయ సమీకరణములు అగును.

విపర్యయముగా $x = a\cos\theta,\ y = a\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$ అయిన,

$$\frac{x}{a} = \cos\theta, \frac{y}{a} = \sin\theta \text{ అగును.}$$

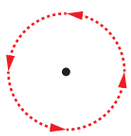
వర్గము చేసి కూడగా, మనము $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ అని పొందగలము.

కనుక $x^2 + y^2 = a^2$ అను సమీకరణము కేంద్రము $(0,0)$ మరియు వ్యాసార్ధము a యూనిట్లుగా గల వృత్తమును ఇచ్చును.

గమనిక

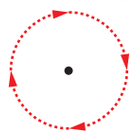
(1) $x = a\cos t, y = a\sin t,\ 0 \le t \le 2\pi$ అనునది కూడా $x^2 + y^2 = a^2$ అను వృత్తపు అదే పరామితి సమీకరణములను తెలుపును.

ఇచ్చట t అనునది అపసవ్య దిశలో పెరుగును.


పటము. 5.45

(2) $x = a\sin t, y = a\cos t, 0 \le t \le 2\pi$ అనునది కూడా $x^2 + y^2 = a^2$ అను వృత్తపు అదే పరామితి సమీకరణములను తెలుపును.

ఇచ్చట t అనునది సవ్య దిశలో పెరుగును.


పటము. 5.46

(ii) $y^2 = 4ax$ అను పరావలయపు పరామితి రూపము

$P(x_1, y_1)$ అనునది పరావలయముపై ఏదేని ఒక బిందువుగా తీసుకొనిన

$$y_1^2 = 4ax_1$$

$$(y_1)(y_1) = (2a)(2x_1)$$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 230 23-01-2023 15:15:48

$$\frac{y_1}{2a} = \frac{2x_1}{y_1} = t \quad (-\infty < t < \infty) \text{ అని చెప్పవచ్చును.}$$

$$y_1 = 2at,\ 2x_1 = y_1 t$$

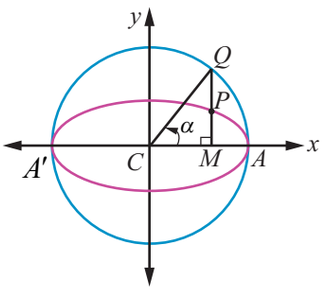
$$2x_1 = 2at(t)$$

$$x_1 = at^2$$

$y^2 = 4ax$ యొక్క పరామితీయ రూపము $x = at^2, y = 2at, -\infty < t < \infty$ అగును.

విపర్యయముగా $x = at^2$ మరియు $y = 2at, -\infty < t < \infty$ అయిన, 't' ను ఈ సమీకరణముల నుండి తొలగించగా మనకు $y^2 = 4ax$ లభించును.

(iii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ అను దీర్ఘవృత్తము యొక్క పరామితి రూపము



పటము. 5.47

P అనునది దీర్ఘవృత్తముపై ఏదేని ఒక బిందువు MP నిరూపకము సహాయక వృత్తమును Q వద్ద ఖండించును.

అనగా $\angle ACQ = \alpha$

$\therefore\ CM = a\cos\alpha,\ MQ = a\sin\alpha$

మరియు $Q(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$

ఇప్పుడు P యొక్క x-నిరూపకము అనునది $a\cos\alpha$. దాని y-నిరూపకము y', అయిన. $P(a\cos\alpha, y')$ అనునది

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ పై అమరును.}$$

అందుచేత $$\cos^2\alpha + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

$\Rightarrow$ $$y' = b\sin\alpha\ .$$

ఇచ్చట P యొక్క నిరూపకాలు $(a\cos\alpha, b\sin\alpha)$.

పరామితి α అనునది P బిందువు యొక్క ఉత్కేంద్ర కోణముగా పిలువబడుచున్నది. α అనునది CQ రేఖ x-అక్షముతో ఏర్పరచు కోణము అగును మరియు CP అను రేఖ ఏర్పరచు కోణము కాదు అనునది గుర్తించదగినది అగును

కనుక దీర్ఘ వృత్తపు పరామితి సమీకరణము అనునది $x = a\cos\theta,\ y = b\sin\theta$, ఇచ్చట θ అనునది $0 \le \theta \le 2\pi$ గా గల పరామితి అగును.

(iv) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ అను అతిపరావలయ పరామితి రూపము

అదేవిధంగా $x = a\sec\theta,\ y = b\tan\theta$ గా అతిపరావలయపు పరామితి సమీకరణమును ఉత్పాదించవచ్చును.

ఇచ్చట θ అనునది $-\pi \le \theta \le \pi$ లో $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ తప్ప మిగిలిన విలువలు గల పరామితి అగును.

వృత్తము, పరావలయము, దీర్ఘవృత్తము మరియు అతి పరావలయము యొక్క పరామితియ సమీకరణములు క్రింద ఇవ్వబడిన పట్టికలో పొందుపరచబడినవి..

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 231 23-01-2023 15:16:03

శాంకవము	పరామితీయ సమీకరణము	పరామితి రూపము	పరామితి యొక్క వ్యాప్తి	శాంకవాలుపై ఏదేని ఒక బిందువు
వృత్తము	$x = a\cos\theta$ $y = a\sin\theta$	θ	$0 \le \theta \le 2\pi$	'θ' లేదా $(a\cos\theta, a\sin\theta)$
పరావలయము	$x = at^2$ $y = 2at$	t	$-\infty < t < \infty$	't' లేదా $(at^2, 2at)$
దీర్ఘవృత్తము	$x = a\cos\theta$ $y = b\sin\theta$	θ	$0 \le \theta \le 2\pi$	'θ' లేదా $(a\cos\theta, b\sin\theta)$
అతిపరావలయము	$x = a\sec\theta$ $y = b\tan\theta$	θ	$-\pi \le \theta \le \pi$ except $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$	'θ' లేదా $(a\sec\theta, b\tan\theta)$

విశేషాంశము

(1) పరామితీయ రూపము అనునది పరామితి విధయైన శాంకవముపై అమరిన బిందు సముదాయమును తెలియజేయును. అదేవిధంగా పరామితి స్థిరరాశి మరియు చలరాశులు అను రెండు విధులను చేయును. కార్టీషియన్ రూపము అనునది శాంకవములు ఏర్పరచు బిందు సముదాయమును (బిందు పథము) తెలుపును. పరామితీయత్వము అనునది వక్రరేఖ యొక్క దిశా మార్గమును సూచించును.

(2) పరామితీయ అనునది ఏకైక సాధనగా నుండవలెనని ఆవశ్యకము లేదు.

(3) పరామితీయత్వమును ఉపయోగించుట ద్వారా చలరాశుల సంఖ్య కనీసము ఒక చలరాశిగా తగ్గించవచ్చును.

5.6 శాంకవాలుల స్పర్శరేఖలు మరియు అభిలంబములు (Tangents and Normals to Conics)

సమతల వక్రమునకు స్పర్శరేఖ అనునది ఆ వక్రమును ఏదేని ఒకే ఒక బిందువు వద్ద మాత్రమే తాకు సరళరేఖ అగును. మరియు స్పర్శరేఖకు లంబముగానుండి, స్పర్శబిందువు గుండా వెళ్ళు సరళరేఖను అభిలంబము అంటారు.

5.6.1 $y^2 = 4ax$ అను పరావలయమునకు స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబముల సమీకరణము

(i) స్పర్శరేఖ సమీకరణము యొక్క కార్టీషియన్ రూపము

$P(x_1, y_1)$ మరియు $Q(x_2, y_2)$ అనునవి $y^2 = 4ax$ అను పరావలయముపై ఏదేని రెండు బిందువులు అనుకొనుము.

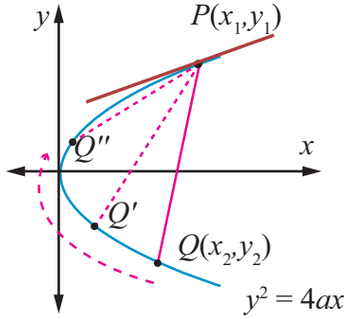
దీని వలన, $y_1^2 = 4ax_1$ మరియు $y_2^2 = 4ax_2$,

మరియు $y_1^2 - y_2^2 = 4a(x_1 - x_2)$ ను.

సూక్ష్మీకరించగా, $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4a}{y_1 + y_2}$, ఇది PQ అను జ్యా యొక్క వాలు.

దీని వలన $(y - y_1) = \frac{4a}{y_1 + y_2}(x - x_1)$, అని లభించును. ఇది

PQ జ్యా యొక్క సమీకరణమును తెలియజేయును.



పటము. 5.48

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 232 23-01-2023 15:16:16

ఇప్పుడు $Q \to P$ లేదా $y_2 \to y_1$ అయిన PQ జ్యా అనునది P బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖగా మారును.

కనుక (x_1, y_1) వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$$y - y_1 = \frac{4a}{2y_1}(x - x_1) \text{ ఇచ్చట } \frac{2a}{y_1} \text{ అనునది స్పర్శరేఖ వాలు} \qquad \ldots (1)$$

$$yy_1 - y_1^2 = 2ax - 2ax_1$$

$$yy_1 - 4ax_1 = 2ax - 2ax_1$$

$$\boxed{yy_1 = 2a(x + x_1)}$$

(ii) స్పర్శరేఖ సమీకరణపు పరామితి రూపము

పరావలయముపై $(at^2, 2at)$ అను బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$$y(2at) = 2a(x + at^2)$$

$$\boxed{yt = x + at^2}$$

(iii) అభిలంబ సమీకరణము యొక్క కార్టీషియన్ రూపము

సమీకరణము (1) నుండి, అభిలంబము యొక్క వాలు $-\frac{y_1}{2a}$ అగును.

కనుక అభిలంబ సమీకరణము అనునది

$$y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$$

$$2ay - 2ay_1 = -y_1x + y_1x_1$$

$$xy_1 + 2ay = y_1(x_1 + 2a)$$

$$\boxed{xy_1 + 2ay = x_1y_1 + 2ay_1}$$

(iv) అభిలంబ సమీకరణపు పరామితీయ రూపము

పరావలయముపై $(at^2, 2at)$ అను బిందువు వద్ద అభిలంబ సమీకరణము

$$x2at + 2ay = at^2(2at) + 2a(2at)$$

$$2a(xt + y) = 2a(at^3 + 2at)$$

$$\boxed{y + xt = at^3 + 2at}$$

సిద్ధాంతము 5.6

$y^2 = 4ax$ అను పరావలయమునకు ఇవ్వబడిన బిందువు నుండి మూడు అభిలంబములు గీయవచ్చును. వాటిలో ఒకటి ఎల్లప్పుడూ వాస్తవ విలువగా యుండును.

నిరూపణ

$y^2 = 4ax$ అనునది ఇవ్వబడిన పరావలయము (α, β) అనునది ఇవ్వబడిన బిందువు అనుకొనుము.

అభిలంబ సమీకరణపు పరామితీయ రూపము

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 233 23-01-2023 15:16:31

$$y = -tx + 2at + at^3 \quad \ldots (1)$$

m అనునది అభిలంబము యొక్క వాలు అయిన, $m = -t$.

కనుక (1)వ సమీకరణము $y = mx - 2am - am^3$ గా మారును.

ఇది (α, β) గుండా వెళ్ళును. కనుక

$$\beta = m\alpha - 2am - am^3$$

$$am^3 + (2a - \alpha)m + \beta = 0$$

అనునది m చలరాశిగా గల త్రిఘాత సమీకరణమును సూచించును. ఇందులో m మూడు విలువలు కలిగియుండును. అందుచేత పరావలయమునకు సాధారణముగా ఇవ్వబడిన బిందువు నుండి మూడు అభిలంబములు గీయగలము. వాస్తవ సమీకరణపు సంకీర్ణ మూలములు ఎల్లప్పుడూ సంయుగ్మ జతలుగా లభించును మరియు సమీకరణము (1) అనునది కనీసము ఒక వాస్తవ మూలము గల బేసి ఘాత సమీకరణము అగును. కనుక పరావలయమునకు గీయబడు అభిలంబములలో కనీసము ఒకటైనను వాస్తవముగా ఉండును.

5.6.2 దీర్ఘ వృత్తము మరియు అతిపరావలయమునకు స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబ సమీకరణములు (ఈ క్రింది వాటి నిరూపణ పాఠకుల కొరకై విడిచిపెట్టబడినది)

(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ అను దీర్ఘవృత్తమునకు స్పర్శరేఖ సమీకరణము

(i) (x_1, y_1) బిందువు వద్ద కార్టీషియన్ రూపము $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$

(ii) 'θ' వద్ద పరామితీయ రూపము $\frac{x\cos\theta}{a} + \frac{y\sin\theta}{b} = 1$.

(2) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ అను దీర్ఘవృత్తపు అభిలంబ సమీకరణము

(i) (x_1, y_1) బిందువు వద్ద కార్టీషియన్ రూపము $\frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_1} = a^2 - b^2$

(ii) 'θ' వద్ద పరామితీయ రూపము $\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2$

(3) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ అను అతిపరావలయ స్పర్శరేఖ సమీకరణము

(i) (x_1, y_1) బిందువు వద్ద కార్టీషియన్ రూపము $\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$

(ii) 'θ' వద్ద పరామితీయ రూపము $\frac{x\sec\theta}{a} - \frac{y\tan\theta}{b} = 1$

(4) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ అను అతిపరావలయపు అభిలంబ రూపము

(i) (x_1, y_1) బిందువు వద్ద కార్టీషియన్ రూపము $\frac{a^2x}{x_1} + \frac{b^2y}{y_1} = a^2 + b^2$

(ii) 'θ' వద్ద పరామితీయ రూపము $\frac{ax}{\sec\theta} + \frac{by}{\tan\theta} = a^2 + b^2$.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 234 23-01-2023 15:16:44

5.6.3 శాంకవాలులకు $y = mx + c$ అను రేఖ స్పర్శరేఖగా యుండుటకైన నిబంధన

(i) $y^2 = 4ax$ పరావలయము

(x_1, y_1) అను బిందువు $y^2 = 4ax$ అను పరావలయముపై గలదని అనుకొనుము. కావున $y_1^2 = 4ax_1$ ... (1)

$y = mx + c$ అనునది పరావలయ స్పర్శరేఖ అనుకొందాము. ... (2)

5.6.1 నుండి (x_1, y_1) వద్ద పరావలయ స్పర్శరేఖ సమీకరణము అనునది $yy_1 = 2a(x + x_1)$ ... (3)

సమీకరణములు (2) మరియు (3)లు ఒకే రేఖను తెలియజేయును, కావున వాటి గుణకములు అనుపాతములో ఉండును.

$$\frac{y_1}{1} = \frac{2a}{m} = \frac{2ax_1}{c}$$

$$\Rightarrow y_1 = \frac{2a}{m}, x_1 = \frac{c}{m}$$

అయిన సమీకరణము (1), $\left(\frac{2a}{m}\right)^2 = 4a\left(\frac{c}{m}\right)$ గా మారును.

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{a}{m}}$$

కనుక స్పర్శబిందువు $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ మరియు పరావలయ స్పర్శరేఖ సమీకరణము $y = mx + \frac{a}{m}$.

ఇదేవిధంగా దీర్ఘవృత్తము లేదా అతిపరావలయముకు $y = mx + c$ అను సరళ రేఖ స్పర్శరేఖగా ఉండుటకు నిబంధన పరావలయము నియమము మాదిరిగానే కనుగొనవచ్చును.

(ii) దీర్ఘవృత్తము $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

దీర్ఘవృత్తము $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ నకు $y = mx + c$ అను సరళరేఖ స్పర్శరేఖగా యుండుటకు నిబంధన $c^2 = a^2m^2 - b^2$,

ఇచ్చట స్పర్శబిందువు $\left(-\frac{a^2m}{c}, -\frac{b^2}{c}\right)$ మరియు స్పర్శరేఖ సమీకరణము $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$.

(iii) అతిపరావలయము $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

అతిపరావలయము $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ నకు $y = mx + c$ అను సరళరేఖ స్పర్శరేఖగా యుండుటకైన నిబంధన $c^2 = a^2m^2 - b^2$ దాని స్పర్శబిందువు $\left(-\frac{a^2m}{c}, -\frac{b^2}{c}\right)$ మరియు స్పర్శరేఖ సమీకరణము $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$.

గమనిక

(1) $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$, నందు, $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ లేదా $y = mx - \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ లలో ఏదేని ఒకటి మాత్రమే దీర్ఘవృత్తపు స్పర్శరేఖ అగును కాని రెండూనూ కాదు.

(2) $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ నందు, $y = mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ లేదా $y = mx - \sqrt{a^2m^2 - b^2}$ లలో ఏదేని ఒకటి మాత్రమే అతిపరావలయపు స్పర్శరేఖ అగును కాని రెండూనూ కాదు.

ఫలితములు (నిరూపణ పాఠకులకే వదలివేయబడినది)

(1) ఒక సమతలముపై ఏదేని ఒక బాహ్య బిందువు నుండి (i) ఒక పరావలయమునకు (ii) ఒక దీర్ఘవృత్తమునకు మరియు (iii) అతిపరావలయమునకు రెండు స్పర్శరేఖలను గీయవచ్చును.

(2) ఒక సమతలముపై ఏదేని ఒక బాహ్యబిందువు నుండి (i) ఒక దీర్ఘవృత్తము మరియు (ii) అతిపరావలయములకు నాలుగు అభిలంబములు గీయవచ్చును.

(3) ఈ క్రింది వక్రాల యొక్క లంబస్పర్శరేఖల ఖండన బిందువు యొక్క బిందుపథము

(i) $y^2 = 4ax$ అను పరావలయమునకు $x = -a$ (నియత రేఖ)

(ii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ అను దీర్ఘవృత్తమునకు $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ (అనునది దీర్ఘవృత్తమునకు నియత వృత్తము అగును)

(iii) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ అను అతిపరావలయమునకు $x^2 + y^2 = a^2 - b^2$ (అనునది అతిపరావలయమునకు నియత వృత్తము అగును).

ఉదాహరణ 5.29

$x^2 + 6x + 4y + 5 = 0$ అను పరావలయమునకు $(1, -3)$ వద్ద స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబముల సమీకరణములు కనుగొనుము.

సాధన

పరావలయ సమీకరణము $x^2 + 6x + 4y + 5 = 0$.

$$x^2 + 6x + 9 - 9 + 4y + 5 = 0$$

$$(x+3)^2 = -4(y-1) \quad \ldots (1)$$

$X = x + 3, Y = y - 1$ అయిన.

సమీకరణము (1) నిర్ధిష్ట రూపములోనికి మార్చగా,

$$X^2 = -4Y$$

స్పర్శరేఖ సమీకరణము $XX_1 = -2(Y + Y_1)$

$(1, -3)$ బిందువు వద్ద $X_1 = 1 + 3 = 4; Y_1 = -3 - 1 = -4$

కనుక స్పర్శరేఖ సమీకరణము $(1, -3)$ వద్ద

$$(x+3)4 = -2(y - 1 - 4)$$

$$2x + 6 = -y + 5 .$$

$$2x + y + 1 = 0 .$$

$(1, -3)$ వద్ద స్పర్శరేఖ వాలు -2, $(1, -3)$ వద్ద అభిలంబ వాలు $\frac{1}{2}$ అగును.

అందుచేత $(1, -3)$ వద్ద అభిలంబ సమీకరణము క్రింది విధంగా ఇవ్వబడినది

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 236 23-01-2023 15:17:06

$$y+3 = \frac{1}{2}(x-1)$$
$$2y+6 = x-1$$
$$x-2y-7 = 0.$$

ఉదాహరణ 5.30

$x^2+4y^2=32$ అను దీర్ఘ వృత్తమునకు $\theta=\frac{\pi}{4}$ గా నున్నప్పుడు స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబముల సమీకరణములు కనుగొనుము.

సాధన

దీర్ఘవృత్త సమీకరణము

$$x^2+4y^2 = 32$$
$$\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{8} = 1$$
$$a^2 = 32,\ b^2=8$$
$$a = 4\sqrt{2},\ b=2\sqrt{2}$$

$\theta=\frac{\pi}{4}$ గా నున్నప్పుడు స్పర్శరేఖా సమీకరణము.

$$\frac{x\cos\frac{\pi}{4}}{4\sqrt{2}}+\frac{y\sin\frac{\pi}{4}}{2\sqrt{2}} = 1 \qquad \left(\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}=1\right)$$
$$\frac{x}{8}+\frac{y}{4} = 1$$
$$x+2y-8 = 0.$$

అభిలంబ సమీకరణము

$$\frac{4\sqrt{2}x}{\cos\frac{\pi}{4}}-\frac{2\sqrt{2}y}{\sin\frac{\pi}{4}} = 32-8 \qquad \left(\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2\right)$$

అనగా

$$8x-4y = 24$$
$$2x-y-6 = 0.$$

మరొక పద్ధతి

$\theta=\frac{\pi}{4}$ వద్ద,

$$(a\cos\theta,\ b\sin\theta) = \left(4\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{4},\ 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)$$
$$= (4,2)$$

$\theta=\frac{\pi}{4}$ మరియు $(4,2)$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము ఒకే విధంగా ఉండును.

స్పర్శరేఖ సమీకరణపు కార్టీషియన్ రూపము $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2} = 1$

$$x+2y-8 = 0$$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 237 23-01-2023 15:17:19

స్పర్శరేఖ వాలు అనునది $-\frac{1}{2}$

అభిలంబపు వాలు అనునది 2

అభిలంబ సమీకరణము $y-2 = 2(x-4)$

$y-2x+6 = 0$.

అభ్యాసము 5.4

1. $2x^2+7y^2=14$ అను దీర్ఘవృత్తమునకు $(5,2)$ నుండి గీయబడు రెండు స్పర్శరేఖల సమీకరణములు కనుగొనుము.
2. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{64}=1$ అను అతిపరావలయమునకు $10x-3y+9=0$. అను సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉండు స్పర్శరేఖా సమీకరణములను కనుగొనుము.
3. $x-y+4=0$ అను సరళరేఖ $x^2+3y^2=12$ అను దీర్ఘవృత్తమునకు స్పర్శరేఖ అని నిరూపించుము. మరియు స్పర్శబిందువు యొక్క నిరూపకములను కూడా కనుగొనుము.
4. $y^2=16x$ అను పరావలయమునకు $2x+2y+3=0$ అను సరళ రేఖకు లంబంగా ఉండు స్పర్శరేఖ సమీకరణము కనుగొనుము.
5. $y^2=8x$ అను పరావలయమునకు $t=2$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణమును కనుగొనుము (సూచన: పరామితీయ రూపమును వినియోగించుము)
6. $12x^2-9y^2=108$ అను అతిపరావలయమునకు $\theta=\frac{\pi}{3}$ వద్ద స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబ సమీకరణములు కనుగొనుము. (సూచన: పరామితీయ రూపమును వినియోగించుము)
7. $y^2=4ax$ అను పరావలయముపై 't_1' మరియు 't_2' అను బిందువుల వద్ద ఏర్పడు స్పర్శరేఖల ఖండన బిందువు $\left[at_1t_2\,,\,a\left(t_1+t_2\right)\right]$ అని నిరూపించుము.
8. $y^2=4ax$ అను పరావలయమును 't_1' వద్ద అభిలంబము పరావలయము 't_2' వద్ద ఖండించిన $t_2=-\left(t_1+\frac{2}{t_1}\right)$ అని నిరూపించుము.

5.7 నిత్యజీవితములో శాంకవాలు అనువర్తనాలు (Real life Applications of Conics)

5.7.1 పరావలయము (Parabola)

పరావలయము యొక్క ముఖ్య అనువర్తనం కాంతి లేదా దూరవాణి తరంగాలను గ్రహించుట లేదా ప్రతిబింబించుటగా ఉండును. ఉదాహరణకు వాహనములలో **Headlights** యొక్క అడ్డుకోతలో .... లో కూడా పరావలయ అనువర్తనములను ఉపయోగించెదరు. హెడ్‌లైట్స్ (**Headlights**) నందలి బల్బును నాభి వద్ద అమర్చిన **Flash lights** మరియు బల్బు నుండి వచ్చు కాంతి పరావర్తనంచెంది సౌష్ఠవ సమాంతరముగా నుండును. (పటము 5.60). క్రీడా కార్యకలాపములయందు వినియోగించు ఉపగ్రహ గొడుగులు మరియు ఫీల్డ్ (**field**) సూక్ష్మగ్రాహకములు అక్షమునకు సమాంతరముగా

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 238 23-01-2023 15:17:27

లోనికి వచ్చు రేడియో లేదా శబ్ద తరంగములు అనునవి నాభి నుండి పరావర్తనం చెంది వాటి తీవ్రతను పెంచును. (పటము 5.59) అదేవిధంగా సౌరవంటలో ఒక పరావలయ అద్దం పోకల్ ఏరియాలో వ్రేలాడదీసి వంట పాత్రను అమర్చిన లోపలికి వచ్చు అక్షానికి సమాంతరముగా వచ్చే సూర్యకిరణాలు వంట చేయుటకు తగినంత ఉష్ణోగ్రతను ఉత్పత్తి చేసే దృష్టిలో ప్రతిబింబిస్తాయి. పరావలయ వంపు అతిగొప్ప కట్టడమునకు స్థిరత్వమును మరియు దానికి అందమైన ఆకృతిని ఇచ్చుటలో ప్రసిద్ధిచెందినవి. అందులో కొన్ని భారతదేశంలో, ఆంధ్రప్రదేశ్ రాష్ట్రంలో గోదావరి నదిపై గల వంతెన మీద తోరణాలు, ఫ్రాన్సు దేశంలో పారిస్ నగరంలో నిర్మింపబడిన ఈఫిల్ టవర్.



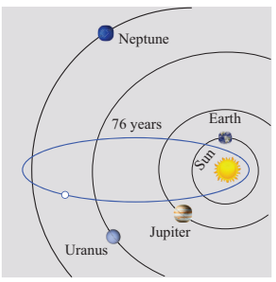
పటము. 5.49



పటము. 5.50

5.7.2 దీర్ఘవృత్తము (Ellipse)

జానస్ కెప్లర్ చెప్పినదాని ప్రకారం సౌర వ్యవస్థలో వున్న గ్రహాలు సూర్యుని ఒకానొక నాభిగా చేసుకొని దీర్ఘవృత్తాకార కక్ష్యలో తిరుగుతాయి. కొన్ని తోక చుక్కలు కూడా సూర్యుని నాభిగా చేసుకొని దీర్ఘవృత్తాకారంలో తిరుగుతాయు. ఉదాహరణకు 75 సంవత్సరాలకు ఒకసారి కనబడు Halley's తోకచుక్క $e \approx 0.97$ గల దీర్ఘవృత్తాకార కక్ష్యలో తిరుగుచున్నది. మన ఉపగ్రహము చంద్రుడు భూమిని నాభిగా చేసుకొని దీర్ఘవృత్తాకార కక్ష్యలో తిరుగును. ఇతర గ్రహాలు ఉపగ్రహాలు కూడా తమ గ్రహాల చుట్టూ దీర్ఘవృత్తాకార కక్ష్యలో తిరుగును.

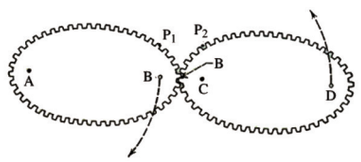


యొక్క దీర్ఘవృత్తాకార కక్ష్య

పటము. 5.51

దీర్ఘవృత్తాకార వంపు వాటి స్థిరత్వమునకు, అందమునకు ఉపయోగపడును. ముఖ్య భాగం యొక్క దీర్ఘాక్షము హ్రస్వాక్షము 2:1 నిష్పత్తిలో ఉండునట్లు దీర్ఘవృత్తాకారంలో అమర్చబడిన ఆవిరి బాయిలర్లు గొప్ప బలాన్ని కలిగియుంటాయి.

బోర్-సోమర్‌ఫీడ్ పరమాణు సిద్ధాంతము ఎలక్ట్రాన్ కక్ష్యలో వృత్తాకారంలో లేదా దీర్ఘవృత్తాకారంలో ఉంటుంది. కొన్ని సమయాలలో (అవసరమునకు అనువుగా) గేర్లు దీర్ఘవృత్తాకారంలో చేయబడును. (పటము 5.52)



పటము. 5.52

మనము నివసించే భూమాత యొక్క ఆకారం ఒక వాలిన గోళాకారము ఏమంటే దీర్ఘవృతం తన లఘు అక్షంపై భ్రమణము చేయడం వలన భూమధ్య రేఖ ప్రాంతం ఉబ్బియుండును. ధృవప్రాంతం సమతలంగా నుండును.

దీర్ఘవృత్తం యొక్క నాభి నుండి వెలువడు కాంతికిరణం లేదా ధ్వనినిదీర్ఘవృత్తంపై పరావర్తనము చెంది మరియొక నాభిని చేరును. ఇది దీర్ఘవృత్తం యొక్క పరావర్తన ధర్మమగును. దీనిని భౌతిక శాస్త్రం యొక్క పతన మరియు పరావర్తన కిరణాలు అను భావనను ఉపయోగించి నిరూపించవచ్చును.

ఒక ఆశ్చర్యకరమైనది, దీర్ఘవృత్త పరావర్తనమును ఉపయోగించు వైద్య పరికరము లిథోట్రిప్టర్ (పటము 5.4 మరియు 5.63) ఇది మూత్రపిండాలలోని రాళ్ళను కరిగించుటకు విద్యుదయస్కాంత సాంకేతిక పరిజ్ఞానమును లేదా అల్ట్రా సౌండ్‌ను ఉపయోగించి విద్యుత్ తరంగాలను ఉత్పత్తిచేయుచున్నది. ఆతరంగాలు దీర్ఘావృత్తాకారం యొక్క అడ్డుకోతలో ఒక నాభి వద్ద ఏర్పడి మరొక నాభి మూత్రపిండ రాళ్ళలో ప్రతిబింబిస్తుంది. ఈ ప్రకారం

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 239 23-01-2023 15:17:28

కోలుకొను సమయం సాధారణముగా శస్త్రచికిత్సకు అయ్యేదానికంటే తక్కువగా ఉంటుంది మరియు శస్త్ర చికిత్స లేకుండా చేయుట మరియు మరణశాతం తగ్గించుట దీని గొప్పతనం.

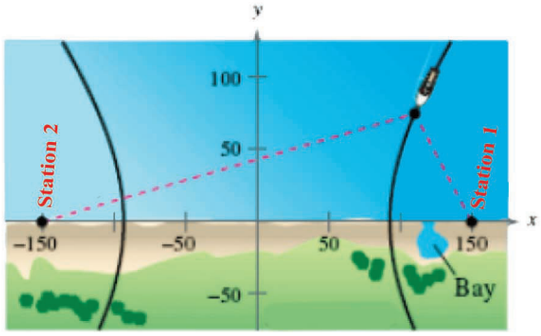
5.7.3 అతిపరావలయం (Hyperbola)

కొన్ని తోకచుక్కలు సూర్యుడుని నాభిగా చేసుకొని అతిపరావలయ కక్ష్యలో ప్రయాణిస్తున్నాయి. ఈ విధమైన తోక చుక్కలు, దీర్ఘవృత్తాకార కక్ష్యలో వచ్చు తోక చుక్కలు తగినంత దూరంలో వచ్చువిధంగా లేకుండా ఒకేఒకసారి మాత్రం సూర్యుని దగ్గరలో వచ్చును.

మనము అతిపరావలయమును ముంబయి విమానాశ్రయం యొక్క భవనములో (పటము 5.53) ప్లానిటోరియం అడ్డుకోతలలో, నౌకలు వుండు స్థలమును గుర్తించుటలో (పటము 5.54), ఆవిరియంత్రాలను శీతలీకరించు పెట్టెలలో లేదా అణువిద్యుత్ కేంద్రాలలో చూడవచ్చును.



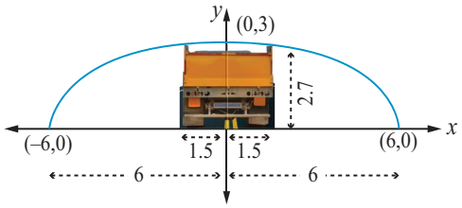
పటము. 5.53



పటము. 5.54

ఉదాహరణ 5.31

ఒక రహదారిలో ఉన్న అర్ధ దీర్ఘవృత్తాకార వంపు యొక్క ఎత్తు 3మీ మరియు వెడల్పు 12మీ ఒక సరకుల రవాణా వాహనము యొక్క వెడల్పు 3మీ మరియు ఎత్తు 2.7మీ అయిన ఆ వాహనము వంపు మార్గంలో వెళ్ళుటకు వీలగునా? (పటము 5.6)



పటము. 5.55

సాధన

సరకుల రవాణా వాహనము యొక్కవెడల్పు 3మీ అయినందువలన అది వంపుమార్గం ద్వారా వెళ్ళుటకు దారి యొక్క కేంద్రం నుండి 1.5మీ దూరంలో వంపు యొక్క ఎత్తును కనుగొనవలెను. ఈ ఎత్తు 2.7మీ లేదా తక్కువగా ఉన్నట్లయితే సరకు రవాణా వాహనం వంపుమార్గంలో వెళ్ళుటకు వీలుకాదు (పటము 5.6) ప్రక్క పటము నుండి $a=6$ మరియు $b=3$ లభించడంతో దీర్ఘవృత్తాకార సమీకరణము $\frac{x^2}{6^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$.

3మీ వెడల్పు గల వాహనము యొక్క అంచు కేంద్రం నుండి $x=1.5m$ మీలో ఉండును. కేంద్రం నుండి 1.5మీ దూరంలో వంపు యొక్క ఎత్తును కనుగొనుటకు $x=1.5$ మీ ని సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించి y ను కనుగొనవచ్చును.

$$\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$$

$$y^2=9\left(1-\frac{9}{144}\right)$$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 240 23-01-2023 15:17:32

$$= \frac{9(135)}{144} = \frac{135}{16}$$

$$y = \frac{\sqrt{135}}{4}$$

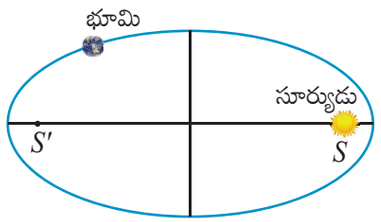
$$= \frac{11.62}{4}$$

$$= 2.90$$

ఇందువలన వంపు యొక్క కేంద్రం నుండి 1.5 మీ దూరంలో వంపు యొక్క ఎత్తు 2.90 మీ, సరకు రవాణా వాహనము ఎత్తు 2.7మీ . అయినందువలన అది దీర్ఘవృత్తాకార వంపులో వెళ్ళును.

ఉదాహరణ 5.32

సూర్యుని నుండి భూమికి గరిష్ట లేదా కనిష్ట దూరములు క్రమముగా 152×10^6 కి.మీ మరియు 94.5×10^6 కి.మీ దీర్ఘవృత్త కక్ష్య యొక్క ఒక నాభిలో సూర్యుడు కలడు మరొక నాభి నుండి సూర్యునికి మధ్యగల దూరము కనుగొనుము.



పటము. 5.56

సాధన

$AS = 94.5\times10^6$ కి.మీ, $SA' = 152\times10^6$ కి.మీ

$a + c = 152\times10^6$

$a - c = 94.5\times10^6$

తీసివేయగా $2c = 57.5\times10^6 = 575\times10^5$ కి.మీ

మరొక నాభినుండి సూర్యునికి గల దూరము $SS' = 575\times10^5$ కి.మీ.

ఉదాహరణ 5.33

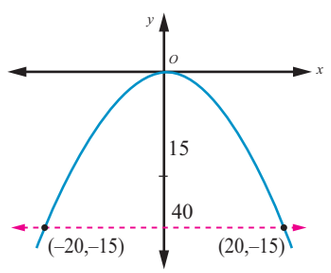
ఒక కాంక్రీటు వంతెన పరావలయ ఆకారంలో కలదు. రహదారిపై గల వంతెన పొడవు 40మీ మరియు దాని గరిష్ట ఎత్తు 15మీ అయిన ఆ పరావలయ వక్రము యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన

పటము నుండి $(0,0)$ శీర్షము మరియు పరావలయము క్రింది వైపుకు తెరచినట్లు ఉండును.

పరావలయ సమీకరణము $x^2 = -4ay$

$(-20,-15)$ మరియు $(20,-15)$ పరావలయముపై ఉండును.



పటము. 5.57

$$20^2 = -4a(-15)$$

$$4a = \frac{400}{15}$$

$$x^2 = \frac{-80}{3}\times y$$

కావున, సమీకరణము $3x^2 = -80y$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 241 23-01-2023 15:17:41

ఉదాహరణ 5.34

ఒక పరావలయ ఆకారపు సమాచరం అందించు ఆంటేనా (Antenna) నాభి దాని యొక్క శీర్షము నుండి 2మీ దూరంలో కలదు. శీర్షము నుండి 3మీ దూరంలో ఆంటేనా (Antenna) యొక్క వెడల్పు కనుగొనుము.

సాధన

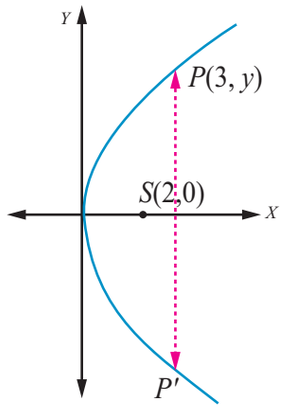
పరావలయము యొక్క సమీకరణము $y^2 = 4ax$.

నాభి, శీర్షముల మధ్యదూరము 2మీ అయిన $a = 2$

పరావలయము యొక్క సమీకరణము $y^2 = 8x$

పరావలయము పై ఒక బిందువు P అనుకొందాము. దీని x-నిరూపకము శీర్షము నుండి $3m$ మీ దూరములో ఉండును. కావున అది $P(3, y)$ అగును.

$$y^2 = 8\times 3$$
$$y = \sqrt{8\times 3}$$
$$= 2\sqrt{6}$$



పటము. 5.58

శీర్షము నుండి 3మీ॥ దూరంలో ఆంటేనా వెడల్పు $4\sqrt{6}\,m$ మీ అగును.

5.7.4 పరావలయం యొక్క పరావర్తన ధర్మము (Reflective property of parabola)

పరావలయ నాభి నుండి వచ్చు కాంతి లేదా శబ్ధము లేదా ధ్వని తరంగాలు పరావర్తనం తరువాత పరావలయ అక్షమునకు సమాంతరముగా వెళ్ళును (పటము 5.60). విపర్యయముగా పరావలయ అక్షమునకు సమాంతరముగా వచ్చు కిరణాలు పరావర్తనం చెంది పరావలయం యొక్క నాభి వైపు పోవును.

ఉదాహరణ 5.35

సౌరశక్తికి ఉపయోగించు పరావలయాకార దర్పణపు అడ్డుకోతవిభాగ సమీకరణము $y = \frac{1}{32}x^2$ ప్రతి పరావలయం యొక్క నాభివద్ద ఉష్ణ నాళము (heating tube) ఉంటుంది. ఈ ఉష్ణ నాళము పరావలయం యొక్క శీర్షము నుండి ఎంత ఎత్తులో అమర్చబడి యుండును?

సాధన

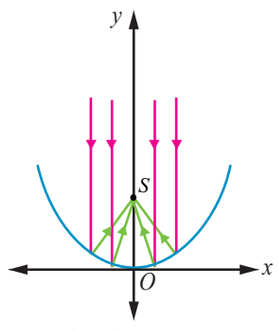
పరావలయము యొక్క సమీకరణము

$$y = \frac{1}{32}x^2$$

అనగా $x^2 = 32y$; శీర్షము $(0,0)$

$$= 4(8)y$$

$$\Rightarrow a = 8$$



పటము. 5.59

కావున ఈ నాళమును నాభి $(0, a)$ వద్ద అమర్చవలెను. కావున ఈ ఉష్ణ నాళమును పరావలయం యొక్క శీర్షము నుండి 8 యూనిట్ల ఎత్తులో అమర్చవలెను.

ఉదాహరణ 5.36

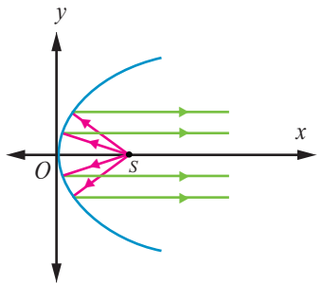
ఒక శోధించుదీపం పరావలయ పరావర్తనను కలిగియున్నది. (అడ్డుకోత ఒక గిన్నె ఆకారం). పరావలయం గిన్నె ఒక అంచె నుండి మరోక అంచెకు గల దూరం 40సెం.మీ మరియు లోతు 30సెం.మీ బల్బు నాభివద్ద అమర్చబడినది.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 242 23-01-2023 15:17:47

(1) పరావర్తనకు ఉపయోగించబడు పరావలయ సమీకరణము ఏది?

(2) కాంతి ఎక్కువ (గరిష్ట)దూరం కనబడుటకు బల్బును పరావలయ శీర్షముల నుండి ఎంత దూరంలో అమర్చవలెను?

సాధన



పటము. 5.60

శీర్షములు $(0,0)$ అయిన.

పరావలయం యొక్క సమీకరణము

$y^2 = 4ax$

(1) వ్యాసము 40సెం.మీ మరియు ఎత్తు 30సెం.మీ కావున పరావలయం పై గల ఒక బిందువు $(30,20)$ అగును.

$$20^2 = 4a \times 30$$

$$4a = \frac{400}{30} = \frac{40}{3}.$$

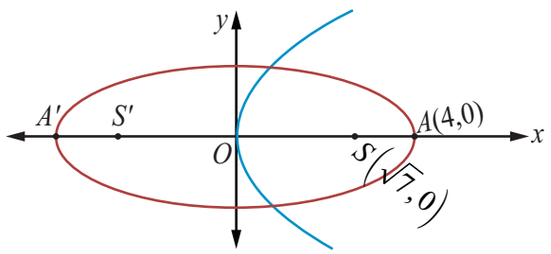
సమీకరణము $y^2 = \frac{40}{3}x$.

(2) బల్బు నాభి $(a,0)$ వద్ద గలదు.కావున బల్బు పరావలయం శీర్షముల నుండి $\frac{10}{3}$ సెం.మీ దూరంలో ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 5.37

ఒక కాంతి జనక కటక వ్యవస్థ యొక్క అమరికలో దీర్ఘవృత్తవిభాగపు సమీకరణము $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. ఈ వ్యవస్థ యొక్క పరావలయపు ప్రాంతం యొక్క నాభి దీర్ఘవృత్తాకారము యొక్క కుడి నాభి ఉమ్మడిగా ఉంది. ఈ పరావలయము శీర్షము మూలబిందువు వద్ద గలదు మరియు ఈ పరావలయము కుడి వైపున తరిచినట్లు ఉండును. ఈ పరావలయ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన



పటము. 5.61

ఇవ్వబడిన దీర్ఘవృత్తములో $a^2 = 16,\ b^2 = 9$

తర్వాత $c^2 = a^2 - b^2$

$c^2 = 16 - 9$

$= 7$

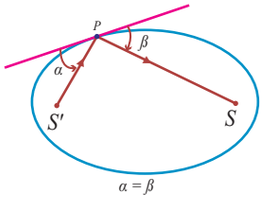
$c = \pm\sqrt{7}$

అందువలన నాభులు $F\left(\sqrt{7},0\right)$ మరియు $F'\left(-\sqrt{7},0\right)$ పరావలయం యొక్క నాభి $\left(\sqrt{7},0\right) \Rightarrow a = \sqrt{7}$.

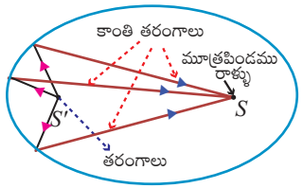
పరావలయం సమీకరణము $y^2 = 4\sqrt{7}x$.

5.7.5 దీర్ఘవృత్తము యొక్క పరావర్తన ధర్మము (Reflective Property of an Ellipse)

నాభి నుండి దీర్ఘవృత్తముపై గల ఏదైనా ఒక బిందువుకు గీయబడిన రేఖలు ఆ బిందువు ద్వారా వెళ్ళు స్పర్శరేఖతో చేయు కోణములు సమానము.



పటము. 5.62



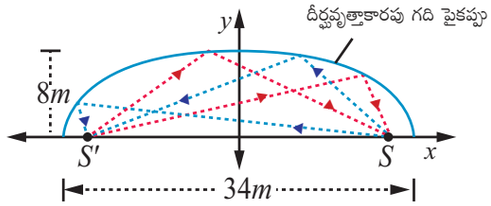
పటము. 5.63

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 243 23-01-2023 15:17:55

ఒక నాభి నుండి వచ్చు కాంతి లేదా శబ్దం లేదా ధ్వని తరంగాలు దీర్ఘవృత్తముపై ఏదైనా ఒక బిందువు వద్ద ఢీ కొట్టి మరొక నాభి వద్ద గ్రహించబడును (పటము 5.63).

ఉదాహరణ 5.38

34మీ॥ పొడవు గల ఒక గది పరావర్తనం చెందు విధంగా నిర్మించబడినది. ఆ గదిపైకప్పు దీర్ఘవృత్తాకారం పటము 5.64లో ఉన్న విధంగా కలదు. ఆ పైకప్పు ఎత్తు గరిష్ఠంగా 8మీ ॥ అయిన దాని నాభులు ఎక్కడ అమరి ఉండునని నిర్ణయించుము.



పటము. 5.64

సాధన

దీర్ఘవృత్తపు ఆకార పైకప్పు అర్ధ దీర్ఘాక్షము 17 మీ॥ దాని ఎత్తు అర్ధ హ్రస్వాక్షము 8మీ అందువలన

$$c^2 = a^2 - b^2 = 17^2 - 8^2$$

తరువాత $c = \sqrt{289-64} = \sqrt{225}$

$\simeq 15$

దీర్ఘ వృత్తాకారపు పైకప్పు నాభులు దీర్ఘాక్షము మీద కేంద్రమునకు ఇరువైపుల 15మీ॥ దూరంలో ఉండును.

శస్త్రచికిత్స అవసరంలేని వైద్యరంగ అద్భుతం (A non-invasive medical miracle)

లితోట్రిప్టర్, దీర్ఘవృత్తపు ఒక నాభి నుండి అధిక పౌనఃపున్యంతో కూడిన శబ్ద తరంగాలు వెలువరించబడును. దీర్ఘవృత్తపు మరొక నాభిలో రోగి యొక్క మూత్రపిండము నందలి రాళ్ళు ఉండునట్లు అమర్చబడును.

ఉదాహరణ 5.39

దీర్ఘవృత్త సమీకరణము $\frac{(x-11)^2}{484}+\frac{y^2}{64}=1$ (x మరియు y యొక్క విలువలు సెం.మీలలో కొలవబడును) రోగి యొక్క మూత్రపిండములోని రాళ్ళపై పరావర్తన శబ్దతరంగాలు పడునట్లు రోగి ఏ ప్రాంతంలో ఉండవలెను అని కనుగొనుము.

సాధన

దీర్ఘవృత్తము యొక్క సమీకరణము $\frac{(x-11)^2}{484}+\frac{y^2}{64}=1$. మూత్రపిండములోని రాళ్ళను కరిగించుటకు శబ్ద తరంగాల ఉత్పత్తి స్థలము రోగి యొక్క మూత్రపిండ రాళ్ళు నాభిలో ఉండునట్లు అమర్చవలెను.

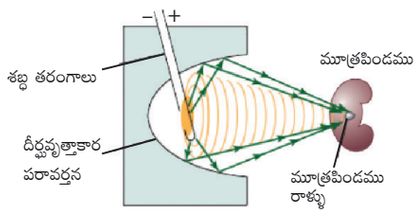
$a^2 = 484$ మరియు $b^2 = 64$

$c^2 = a^2 - b^2$

$= 484 - 64$

$= 420$

$c \simeq 20.5$



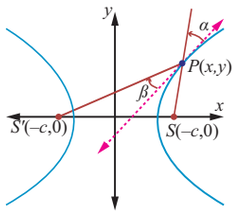
పటము. 5.65

రోగి యొక్క మూత్రపిండ రాళ్ళు దీర్ఘవృత్తం యొక్క దీర్ఘాక్షము కేంద్రం నుండి 20.5సెం.మీ దూరంలో ఉండవలెను.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 244 23-01-2023 15:18:01

5.7.6 అతిపరావలయం యొక్క పరావర్తన ధర్మం (Reflective Property of a Hyperbola)

అతిపరావలయంలో ఒక బిందువు నుండి నాభులకు గీయబడు రేఖలు ఆ బిందువువద్ద గల స్పర్శరేఖతో సమానమైన కోణాలను ఏర్పరచును (పటము 5.66).



పటము. 5.66

అతిపరావలయంలో ఒక నాభి నుండి ప్రయాణించు కాంతి లేదా శబ్దము లేదా ధ్వని తరంగాలు దీర్ఘవృత్తం లాగా మరొక నాభిలో తీసుకొనబడును. అది లోతట్టు సముద్రంలో ప్రయాణించు నౌకలు ఉండే ప్రదేశమును గుర్తించుటకు ఉపయోగపడుచున్నది. (పటము 5.54)

ఉదాహరణ 5.40

రెండు సముద్రతీర రక్షణ దళములు 600కి.మీ॥ దూరంలో $A(0,0)$ మరియు $B(0,600)$ అను బిందువువద్ద గలదు. P అను బిందువువద్ద గల నౌక నుండి పంపబడిన అపాయ సంకేతాలు రెండు దళములకు కొంత సమయము తేడాతో లభించినది. దీని నుండి నౌక దళము A కన్నా దళం B కు 200కి.మీ అధిక దూరములో ఉన్నట్లు కనుగొన్నారు.. కావున ఆ నౌక ఉండు ప్రదేశం ద్వారా వెళ్ళే అతిపరావలయం యొక్క సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన

రెండు సముద్ర తీర రక్షణ దళములు నాభులు అయినందువలన వాటి కేంద్రం $(0,300)$ అతిపరావలయ కేంద్రం అగును. కావున సమీకరణము $\frac{(y-300)^2}{a^2}-\frac{(x-0)^2}{b^2}=1$. ... (1)

a మరియు b, యొక్క విలువలను కనుగొనుటకు అతిపరావలయముపై గల రెండు బిందువులను ప్రతిక్షేపించవచ్చును.

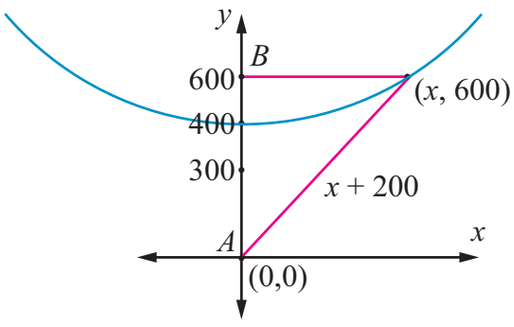
A అనునది B కంటే 200కి.మీ అధిక దూరంలో ఉన్నందువలన $(0,400)$ అతిపరావలయం మీద గల బిందువు $\frac{(400-300)^2}{a^2}-\frac{0}{b^2}=1$ $\frac{100^2}{a^2}=1$, $a^2=10000$

$(x,600)$ మరొక బిందువు $600^2+x^2=(x+200)^2$ అతిపరావలయం మీద

$$360000+x^2 = x^2+400x+40000$$

అనువిధంగా కలదు.

$$x = 800$$



పటము. 5.67

(1)ల ప్రతిక్షేపించగా $\frac{(600-300)^2}{10000}-\frac{(800-0)^2}{b^2} = 1$

$$9-\frac{640000}{b^2} = 1$$

$$b^2 = 80000$$

కావలసిన సమీకరణము $\frac{(y-300)^2}{10000}-\frac{x^2}{80000}=1$

ఈ అతిపరావలయంలో ఏదో ఒక బిందువులో ఆ నౌక కలదు. మూడవ ఒక రక్షణ దళమును ఉపయోగించిన దాని సరియైన స్థలమును కనుగొనవచ్చును.

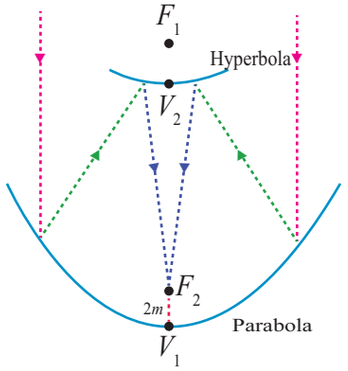
12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 245 23-01-2023 15:18:08

ఉదాహరణ 5.41

ఒక నిర్దిష్ట టలిస్కోపు Telescopes లో పరావలయ దర్పణము మరియు అతిపరావలయం దర్పణము రెండునూ కలదు. పటము 5.68లో గల Telescopes లో పరావలయం యొక్క శీర్షము నుండి 14 మీ॥ ఎత్తులో గల F_2 అను నాభిని అతిపరావలయం మరియ పరావలయంలు కలిసి పంచుకొంటున్నాయి. అతిపరావలయం యొక్క రెండవ నాభి పరావలయం యొక్క శీర్షము నుండి 2మీ॥ ఎత్తులో కలదు. అతిపరావలయం యొక్క శీర్షము F_2 కు 1మీ క్రింద కలదు. అతిపరావలయ దర్పణము యొక్క శీర్షము F_1 కు 1 మీ క్రింద గలదు.అతిపరావలయము యొక్క కేంద్రము ఆది బిందువుగా,నాభిలను y-అక్షములో గల అతిపరావలయ సమీకరణము కనుగొనుము.

సాధన

పరావలయము యొక్క శీర్షము V_1 మరియు అతిపరావలయము యొక్క శీర్షము V_2 అనుకొనుము.



పటము. 5.68

$$\overline{F_1F_2} = 14-2=12 \text{ మీ } 2c=12,\ c=6$$

కేంద్రము నుండి అతిపరావలయం శీర్షమునకు గల దూరం $a=6-1=5$

$$b^2 = c^2-a^2$$
$$= 36-25=11.$$

కావున అతిపరావలయం యొక్క సమీకరణము $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{11}=1$.

అభ్యాసము 5.5

1. ఒక వంతెనలో పరావలయ వంపు ఆకారములో గలదు. కేంద్రం వద్ద 10మీ॥ ఎత్తు, అడుగుభాగంలో 30మీ॥ వెడల్పు కలదు. కేంద్రమునకు ఇరువైపుల 6మీ॥ దూరంలో వంతెన ఎత్తును కనుగొనుము.

2. ఒక నాలుగు దారుల రహదారి కోసం కొండలో గల సొరంగ మార్గము యొక్క ద్వారము ఒక దీర్ఘవృత్తాకారంగా కలదు. రహదారి మొత్తం వెడల్పు (ద్వారము కాదు)16మీ. 4మీ ఎత్తు గల ట్రక్, సూమారుగా 5మీ గరిష్ట ఎత్తు గల ద్వారము గుండా సులభంగా వెళ్ళుటకు రహదారి అంచు వద్ద సరియగు ఎత్తు ఉండవలెను. ద్వారము వెడల్పు ఎంత?

3. ఒక వాటర్ ఫౌంటైన్ నందు నీటి యొక్క గరిష్ట ఎత్తు,ఆది బిందువు నుండి 0.5మీ॥ సమతల దూరంలో 4మీ॥ నీటి యొక్క మార్గము ఒక పరావలయం అయిన ఆది బిందువు నుండి 0.75మీ॥ సమతల దూరంలో గల నీటి యొక్క ఎత్తును కనుగొనుము.

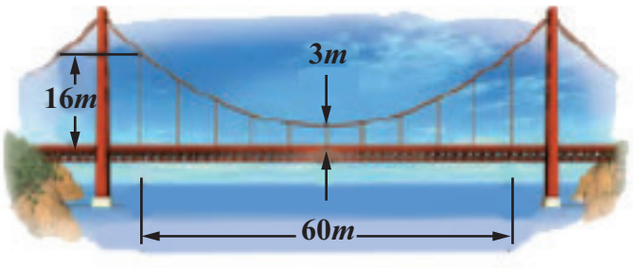
4. ఒక ఇంజనీరు అడ్డుకోత పరావలయముగా గల ఒక ఉపగ్రహ డిష్ (satellite dish) ను తయారుచేసెను. డిష్ పైభాగంలో 5మీ॥ వెడల్పు శీర్షము నుండి నాభి 1.2మీ॥ దూరంలో కలదు.

   (a) శీర్షమును ఆదిబిందువుగా x-అక్షాన్ని పరావలయం యొక్క సౌష్ఠవ అక్షంగాను కలిగిన నిరూపక అక్షాలను అనుసరించి పరావలయ సమీకరణము కనుగొనుము.

   (b) శీర్షము నుండి (satellite dish) యొక్క లోతును కనుగొనవలెను.

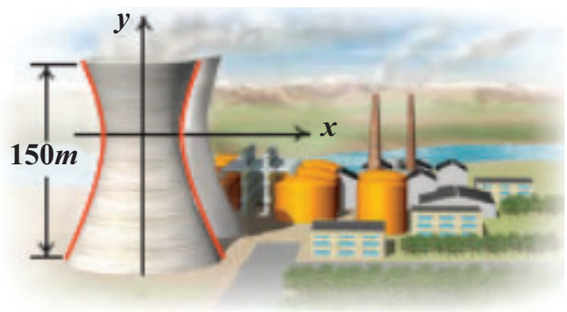
12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 246 23-01-2023 15:18:12

5. ఒక వ్రేలాడే వంతెన 60మీ॥ రహదారి భాగమునకు పరావలయ ఆకార కమ్మీలు పటములో ఉండునట్లు అమర్చబడియున్నవి. లంబాకార కమ్మీలు రహదారిలో ఒక్కొక్కదానికి 6మీ॥ దూరం ఉండునట్లు అమర్చబడినది. శీర్షము నుండి మొదటి రెండు లంబరేఖ కమ్మీల పొడవును కనుగొనుము.



పటము. 5.69

6. న్యూక్లియర్ రియాక్టర్‌ను చల్లబరుచు గొట్టం అడ్డుకోత అతిపరావలయ ఆకారములో కలదు. మరియు దాని సమీకరణము $\frac{x^2}{30^2}-\frac{y^2}{44^2}=1$ గొట్టం 150మీ॥ ఎత్తు కలదు మరియు అతిపరావలయం కేంద్రం నుండి గొట్టం పైభాగం దూరం కేంద్రం నుండి క్రిందిభాగాలకు గల దూరంలో సగంగా కలదు. గొట్టం పైభాగం మరియు క్రింది భాగం యొక్క వ్యాసమును కనుగొనుము.



పటము. 5.70

7. 1.2మీ॥ పొడవు గల కమ్మీ దాని చివరలు ఎల్లప్పుడు నిరూపక అక్షాలను తాకుతూ వెళ్ళునట్లు జరగుతున్నది. x-అక్షమును తాకే అంచు నుండి 0.3మీ॥ దూరంలో కమ్మీపై గల ఒక బిందువు P యొక్క బిందుపథము ఒక దీర్ఘవృత్తము.దాని ఉత్కేంద్రతను కనుగొనుము.

8. భూమిపై భాగం నుండి 7.5మీ॥ ఎత్తులో భూమికి సమాంతరంగా అమర్చబడిన ఒక నల్లి (కులాయి) నుండి వచ్చే నీటి మార్గము ఒక పరావలయమును ఏర్పరచుచున్నది. ఈ పరావలయ దారి యొక్క శీర్షము కులాయి నోటి వద్ద గలదు. కులాయి మట్టము నుండి 2.5 మీ॥ క్రింద నీటి ప్రవాహం అనునది కులాయి అంచు భాగంలో వెళ్ళు భూ లంబరేఖకు ఎత్తు 3మీ॥ దూరంలో కలదు. అయిన లంబరేఖ నుండి ఎంత దూరం తరువాత నీరు భూమిపై పడునో కనుగొనుము.

9. ఒక రాకెట్ బాంబ్ వదిలినప్పుడు అది ఒక పరావలయ దారిలో వెళ్ళును. దాని శిఖర ఎత్తు 4మీ॥ తాకునప్పుడు అది అంటించిన ప్రదేశం నుండి సమతల దూరం 6మీ॥ దూరంలో కలదు. చివరగా సమతలంలో ప్రారంభబిందువు నుండి 12మీ॥ దూరంలో భూమిని చేరుచున్నది. అయిన ప్రయాణ ప్రారంభ ప్రదేశంలో రాకెట్ భూమితో ఏర్పరచు ఊర్ధ్వకోణం కనుగొనుము.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 247 23-01-2023 15:18:13

10. A, B రెండు బిందువులు 10కి.మీ వ్యత్యాసం (మధ్యదూరం)లో కలదు. ఈ బిందువులో వేర్వేరు సమయాలలో వినపడిన పేలుడు శబ్ధం నుండి ధ్వని ఏర్పడిన ప్రదేశం A అనే బిందువు B అను బిందువు కంటే 6కి.మీ దగ్గరలో ఉన్నది అని నిర్ణయించబడినది. పేలుడు శబ్ధం ఏర్పడిన ప్రదేశం ఒక గుర్తించిన వక్రమునకు సంబంధించినది అని నిరూపించి దాని సమీకరణమును కనుగొనుము.

అభ్యాసము 5.6

6DPUC

ఈ క్రింది వాటికి సరియైన సమాధానమును వ్రాయుము:

1. $(1,5)$ మరియు $(4,1)$ ద్వారా పోవు మరియు y-అక్షాన్ని తాకే వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2-5x-6y+9+\lambda(4x+3y-19)=0$ అయిన λ విలువ

(1) $0,-\frac{40}{9}$ (2) 0 (3) $\frac{40}{9}$ (4) $\frac{-40}{9}$

2. నాభిలంబం యొక్క పొడవు 8 యూనిట్లు మరియు హ్రస్వాక్షం పొడవు నాభిల మధ్యగల దూరంలో సగముగా యుండిన అతిపరావలయ ఉత్కేంద్రత

(1) $\frac{4}{3}$ (2) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (3) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (4) $\frac{3}{2}$

3. వృత్తము $x^2+y^2=4x+8y+5$ రేఖ $3x-4y=m$ ను రెండు విభిన్న బిందువుల వద్ద ఖండించుచున్న

(1) $15<m<65$ (2) $35<m<85$ (3) $-85<m<-35$ (4) $-35<m<15$

4. x-అక్షమును $(1,0)$ అను బిందువులో తాకుతూ వెళ్ళే $(2,3)$ అను బిందువు ద్వారా వెళ్ళు వృత్తము యొక్క వ్యాసము.

(1) $\frac{6}{5}$ (2) $\frac{5}{3}$ (3) $\frac{10}{3}$ (4) $\frac{3}{5}$

5. $3x^2+by^2+4bx-6by+b^2=0$ అను వృత్తం యొక్క వ్యాసార్ధం

(1) 1 (2) 3 (3) $\sqrt{10}$ (4) $\sqrt{11}$

6. $x^2-8x-12=0$ మరియు $y^2-14y+45=0$ అను రేఖలతో ఏర్పడు చతురస్రంలో గీయబడు అతిపెద్ద వృత్తం యొక్క కేంద్రం

(1) $(4,7)$ (2) $(7,4)$ (3) $(9,4)$ (4) $(4,9)$

7. సరళరేఖ $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ కు సమాంతరంగా $2x+4y=3$ అను వృత్తం యొక్క లంబరేఖ సమీకరణము

(1) $x+2y=3$ (2) $x+2y+3=0$ (3) $2x+4y+3=0$ (4) $x-2y+3=0$

8. $P(x,y)$ అనునది నాభి బిందువులు $F_1(3,0)$ మరియు $F_2(-3,0)$ ను కలిగిన వక్రము $16x^2+25y^2=400$ మీద గల బిందువు అయిన PF_1+PF_2 యొక్క విలువ

(1) 8 (2) 6 (3) 10 (4) 12

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 248 23-01-2023 15:18:30

9. $x+y=6$ మరియు $x+2y=4$ అను సరళరేఖలను వ్యాసములుగా కలిగి బిందువు $(6,2)$ ద్వారా వెళ్ళు వృత్తము యొక్క వ్యాసార్ధం

(1) 10 (2) $2\sqrt{5}$ (3) 6 (4) 4

10. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ మరియు $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ అను అతిపరావలయ నాభులు ఒక చతుర్భుజం యొక్క శీర్షాలు అయిన ఆచతుర్భుజం యొక్క వైశాల్యము

(1) $4(a^2+b^2)$ (2) $2(a^2+b^2)$ (3) a^2+b^2 (4) $\frac{1}{2}(a^2+b^2)$

11. $y^2=4x$ అను పరావలయం యొక్క నాభిలంబము యొక్క అంత్య బిందువు గీయబడ్డ అభిలంబ రేఖలు $(x-3)^2+(y+2)^2=r^2$ అను వృత్తం యొక్క స్పర్శరేఖలు అయిన r^2 యొక్క విలువ

(1) 2 (2) 3 (3) 1 (4) 4

12. $x+y=k$ అను సరళరేఖ పరావలయం $y^2=12x$ యొక్క అభిలంబరేఖ సమీకరణము అయిన k యొక్క విలువ

(1) 3 (2) -1 (3) 1 (4) 9

13. దీర్ఘవృత్తము E_1 : $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ దీర్ఘచతురస్రం R లోపల దీర్ఘచతురస్రము యొక్క భుజములు దీర్ఘవృత్తము యొక్క అక్షములకు సమాంతరంగా ఉండునట్లు అమరియున్నది. ఆ దీర్ఘచతురస్రం యొక్క చుట్టు వృత్తముగా అమరిన మరొక దీర్ఘవృత్తము E_2, $(0,4)$ అను బిందువు ద్వారా వెళ్ళును అనిన ఆ దీర్ఘవృత్తము యొక్క ఉత్కేంద్రత

(1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{3}{4}$

14. $2x-y=1$ అను రేఖకు సమాంతరంగా $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ అను దీర్ఘవృత్తమునకు స్పర్శరేఖలు గీయబడిన స్పర్శబిందువులలో ఒకటి

(1) $\left(\frac{9}{2\sqrt{2}},\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ (2) $\left(\frac{-9}{2\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (3) $\left(\frac{9}{2\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (4) $\left(3\sqrt{3},-2\sqrt{2}\right)$

15. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ అను దీర్ఘవృత్తము యొక్క నాభులు ద్వారా పోవును మరియు $(0,3)$ అను బిందువును కేంద్రముగా కలిగిన దీర్ఘవృత్తము యొక్క సమీకరణము

(1) $x^2+y^2-6y-7=0$ (2) $x^2+y^2-6y+7=0$

(3) $x^2+y^2-6y-5=0$ (4) $x^2+y^2-6y+5=0$

16. C అను వృత్తకేంద్రము $(1,1)$ మరియు వ్యాసార్ధము 1 యూనిట్ అనుకొనుము. T అను వృత్తము యొక్క కేంద్రం $(0,y)$ గాను ఆదిబిందువు ద్వారా పోవును. మరియు C అను వృత్తమును బాహ్యంగాను తాకుతూ వెళ్ళిన వృత్తము T యొక్క వ్యాసార్ధము

(1) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{1}{4}$

17. కేంద్రము ఆదిబిందువుగాను దీర్ఘాక్షము ... అక్షముగాను గల దీర్ఘవృత్తమును జ్ఞప్తిలో ఉంచుకొనుము. దీని ఉత్కేంద్రత $\frac{3}{5}$ మరియు నాభిల మధ్యదూరం 6 అనిన ఆ దీర్ఘవృత్తములోపల దీర్ఘాక్షము మరియు హ్రస్వ అక్షములను కర్ణాలుగా తీసుకొని గీయబడు చతుర్భుజ వైశాల్యము

(1) 8 (2) 32 (3) 80 (4) 40

18. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ అను దీర్ఘవృత్తములో గీయబడు అతిపెద్ద దీర్ఘచతురస్రం యొక్క వైశాల్యం

(1) $2ab$ (2) ab (3) $\sqrt{ab}$ (4) $\frac{a}{b}$

19. దీర్ఘ వృత్తము యొక్క అర్ధలఘు అక్షము OB, F మరియు F' నాభులు మరియు FBF' ఒక లంబకోణం అయిన ఆ దీర్ఘవృత్తము యొక్క ఉత్కేంద్రతను కనుగొనుము.

(1) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

20. $(x-3)^2+(y-4)^2=\frac{y^2}{9}$ అను దీర్ఘవృత్తము యొక్క ఉత్కేంద్రత

(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

21. P అను బిందువు నుండి $y^2=4x$ అను పరావలయమునకు గీయబడు రెండు స్పర్శరేఖలు మధ్య గల కోణము లంబకోణం అయిన P యొక్క బిందుపథము

(1) $2x+1=0$ (2) $x=-1$ (3) $2x-1=0$ (4) $x=1$

22. $(1,-2)$ అను బిందువు ద్వారా మరియు $(3,0)$ అను బిందువు వద్ద x అక్షమును తాకి వెళ్ళు వృత్తము క్రింద ఇవ్వబడిన బిందువులలో ఏ బిందువు ద్వారా వెళ్ళును

(1) $(-5,2)$ (2) $(2,-5)$ (3) $(5,-2)$ (4) $(-2,5)$

23. $(-2,0)$ నుండి ఒక కదిలే బిందువుకు గల దూరము ఆ బిందువుకు సరళరేఖ $x=\frac{-9}{2}$ కు మధ్యగల దూరమునకు $\frac{2}{3}$ రెట్లు ఉండును అనిన ఆ బిందువు యొక్క బిందుపథము

(1) పరావలయము (2) అతిపరావలయము (3) దీర్ఘవృత్తము (4) వృత్తము

24. $x^2-(a+b)x-4=0$ అను సమీకరణము మూలముల విలువలు m యొక్క విలువలుగా ఉన్నప్పుడు $y=mx+2\sqrt{5}$ అను సరళరేఖ $16x^2-9y^2=144$ అను అతిపరావలయమును తాకుతూ వెళ్ళుచున్నది అనిన $(a+b)$ యొక్క విలువ

(1) 2 (2) 4 (3) 0 (4) -2

25. $x^2+y^2-8x-4y+c=0$ అను వృత్తంలోని వ్యాసము యొక్క ఒక బిందువు $(11,2)$ అనిన దాని మరొక బిందువు

(1) $(-5,2)$ (2) $(-3,2)$ (3) $(5,-2)$ (4) $(-2,5)$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 250 23-01-2023 15:19:04

పాఠ్యాంశములు

(1) వృత్త సమీకరణము యొక్క ప్రామాణిక రూపం $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$.

(i) కేంద్రము (h,k) (ii) వ్యాసార్ధము ' r '

(2) వృత్త సమీకరణము యొక్క సాధారణ రూపం $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.

(i) కేంద్రము $(-g,-f)$ (ii) వ్యాసార్ధము $=\sqrt{g^2+f^2-c}$

(3) $lx+my+n=0$ అను సరళరేఖ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ అను వృత్తము ఖండించుకొను బిందువులు ద్వారా వెళ్ళు వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2+2gx+2fy+c+\lambda(lx+my+n)=0, \lambda\in\mathbb{R}^1$.

(4) ఒక వృత్తము యొక్క వ్యాసము యొక్క అంత్యములు (x_1,y_1) మరియు (x_2,y_2) అయిన ఆ వృత్త సమీకరణము $(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$.

(5) (x_1,y_1) అను బిందువు వద్ద $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ అను వృత్తం యొక్క స్పర్శరేఖా సమీకరణము $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$

(6) (x_1,y_1) అను బిందువు వద్ద $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ అను వృత్తము యొక్క అభిలంబరేఖ సమీకరణము $yx_1-xy_1+g(y-y_1)-f(x-x_1)=0$.

పట్టిక 1
స్పర్శరేఖ మరియు అభిలంబము

వక్రము	సమీకరణము	స్పర్శరేఖా సమీకరణము	స్పర్శరేఖ
వృత్తము	$x^2+y^2=a^2$	(i) కార్టీషియన్ రూపం $xx_1+yy_1=a^2$ (ii) పరామితీయ రూపం $x\cos\theta+y\sin\theta=a$	(i) కార్టీషియన్ రూపం $xy_1-yx_1=0$ (ii) పరామితీయ రూపం $x\sin\theta-y\cos\theta=0$
పరావలయము	$y^2=4ax$	(i) $yy_1=2a(x+x_1)$ (ii) $yt=x+at^2$	(i) $xy_1+2y=2ay_1+x_1y_1$ (ii) $y+xt=at^3+2at$
దీర్ఘవృత్తము	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	(i) $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ (ii) $\frac{x\cos\theta}{a}+\frac{y\sin\theta}{b}=1$	(i) $\frac{a^2x}{x_1}+\frac{b^2y}{y_1}=a^2-b^2$ (ii) $\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2$
అతిపరావలయము	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	(i) $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1$ (ii) $\frac{x\sec\theta}{a}-\frac{y\tan\theta}{b}=1$	(i) $\frac{a^2x}{x_1}+\frac{b^2y}{y_1}=a^2+b^2$ (ii) $\frac{ax}{\sec\theta}+\frac{by}{\tan\theta}=a^2+b^2$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 251 23-01-2023 15:19:23

పట్టిక 2

$y = mx + c$ అను సరళరేఖ శాంకవాలులకు స్పర్శరేఖగా ఉండుటకు నిబంధన

శాంకవము	సమీకరణము	స్పర్శరేఖగా ఉండుటకు నిబంధన	స్పర్శబిందువు	స్పర్శరేఖ యొక్క సమీకరణము
వృత్తము	$x^2 + y^2 = a^2$	$c^2 = a^2(1+m^2)$	$\left(\frac{\mp am}{\sqrt{1+m^2}}, \frac{\pm a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$	$y = mx \pm \sqrt{1+m^2}$
పరావలయము	$y^2 = 4ax$	$c = \frac{a}{m}$	$\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$	$y = mx + \frac{a}{m}$
దీర్ఘవృత్తము	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c^2 = a^2m^2 + b^2$	$\left(\frac{-a^2m}{c}, \frac{b^2}{c}\right)$	$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$
అతిపరావలయము	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$c^2 = a^2m^2 - b^2$	$\left(\frac{-a^2m}{c}, \frac{-b^2}{c}\right)$	$y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$

పట్టిక 3

పరామితీయ రూపములు

శాంకవము	పరామితీయ సమీకరణము	పరామితి	పరామితీయ వ్యాప్తి	శాంకవము పై ఉన్న ఏదైనా బిందువు
వృత్తము	$x = a\cos\theta$ $y = a\sin\theta$	θ	$0 \le \theta \le 2\pi$	'θ' or $(a\cos\theta, a\sin\theta)$
పరావలయము	$x = at^2$ $y = 2at$	t	$-\infty < t < \infty$	't' or $(at^2, 2at)$
దీర్ఘవృత్తము	$x = a\cos\theta$ $y = b\sin\theta$	θ	$0 \le \theta \le 2\pi$	'θ' or $(a\cos\theta, b\sin\theta)$
అతిపరావలయము	$x = a\sec\theta$ $y = b\tan\theta$	θ	$-\pi \le \theta \le \pi$ except $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$	'θ' or $(a\sec\theta, b\tan\theta)$

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 252 23-01-2023 15:19:32

శాంకవము యొక్క సాధారణ సమీకరణము $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ నుండి శాంకవ రూపమును గుర్తించుట

ద్విఘాత సమీకరణము యొక్క రేఖాచిత్రము క్రింద వచ్చు నిబంధనలను అనుసరించి వృత్తము, పరావలయము, అతిపరావలయము, ఒక బిందువు దీర్ఘవృత్తము, శూన్యసమితి, ఏకరేఖ లేదా ఒక జత రేఖలు అగును. అప్పుడు

(1) $A = C = 1, B = 0, D = -2h, E = -2k, F = h^2 + k^2 - r^2$ అయిన సాధారణ సమీకరణము $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ గా లభించును. ఇది ఒక వృత్తం అగును.

(2) $B = 0$ మరియు A లేదా $C = 0$ అయిన, సాధారణ సమీకరణము మనము అభ్యసించిన విషయాలలో ఒక పరావలయము అగును.

(3) $A \neq C$ మరియు A మరియు C రెండు ఒకే గుర్తుగా ఉంటే సాధారణ సమీకరణము దీర్ఘవృత్తమును ఇచ్చును.

(4) $A \neq C$ మరియు A మరియు C అను రెండు ఒకదానికొకటి వ్యతిరేఖ గుర్తుగా ఉంటే సాధారణ సమీకరణము అతిపరావలయమును ఇచ్చును.

(5) $A = C$ మరియు $B = D = E = F = 0$ అయిన సాధారణ సమీకరణము $x^2 + y^2 = 0$ అను బిందువుగా మారును.

(6) $A = C = F$ మరియు $B = D = E = 0$ అయిన సాధారణ సమీకరణము $x^2 + y^2 + 1 = 0$ అను శూన్యసమితిని ఇచ్చును. ఇచ్చట వాస్తవ సాధన లేదు.

(7) $A \neq 0$ లేదా $C \neq 0$ మరియు మిగిలినవి 0 అయిన సాధారణ సమీకరణము నిరూపక అక్షముల సమీకరణమును ఇచ్చును.

(8) $A = -C$ మరియు మిగిలినవి 0, అయిన సాధారణ సమీకరణము $x^2 - y^2 = 0$ ఒక జత రేఖలను ఇచ్చును.

అంతర్జాల కృత్యము

https://ggbm.at/vchq92pg or Scan the QR Code

బ్రౌజర్‌ని ఓపన్ చేయుము. ఇవ్వబడిన URL లింకు టైపుచేయుము లేదా QR కోడును స్కేన్ చేయుము. 12th Standard Mathematics లో జియోజిబ్రా వర్క్‌బుక్ పుట తెరువబడును. ఈ పుస్తకములో ఎడమవైపు అనేక పాఠ్యపుస్తక అధ్యాయములకు సంబంధించినవి కనబడును. అందులో Two Dimensional Analytical Geometry-II అను అధ్యాయమును ఎంచుకొనుము. ఇప్పుడు ఈ అధ్యాయమునకు సంబంధించిన work sheets లను చూడవచ్చును. అందులో Conic Tracing ను ఎంచుకొనుము.

12th_Maths_Telugu_Vol1_CH 5_Analytical Geometry.indd 253 23-01-2023 15:19:38

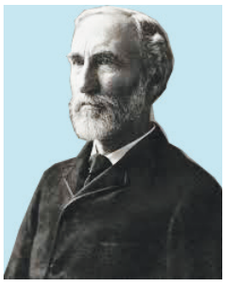
అధ్యాయము
6

సదిశ బీజగణిత అనువర్తనములు

"పరిమాణముల కలయిక యొక్క విజ్ఞాన శాస్త్రమే గణితశాస్త్రము. పరిమాణము అనేది ఏదేని ఒక విషయమును మరోకవిషయముకు సమానమా లేదా అసమానమా అని చెప్పుటకు వీలగునా. రెండు విషయములలో ప్రతి ఒక వాదనను మరోక దానితో భర్తీ చేయునప్పుడు ఆ రెండు విషయములు సమానము."

–హర్మన్ గుంథర్ గ్రాస్మన్

6.1 పరిచయము (Introduction)



Josiah Williard Gibbs
(1839 – 1903)

మన XI తరగతిలో సదిశలు (**vectors**) యొక్క భావనను మనము తెలుసుకొనియున్నాము. (***vectus*** కు లాటిన్‌లో అర్థము "మోసుకెళ్ళుటకు"). వెస్సెల్ (1745–1818) మరియు ఆర్గాండ్ (1768–1822) శాస్త్రవేత్తలు సంకీర్ణసంఖ్యలను ఒక నిరూపకతలంలో దిశారేఖాఖండముగా జ్యామితీయ వివరణ ఇవ్వడానికి ప్రయత్నించినప్పుడు వారి ఆలోచనల నుంచి సదిశల సిద్ధాంతము యొక్క ఆధునిక భావన ఉద్భవించినది. ఒక సదిశకు పరిమాణము మరియు దిశ గలదని మరియు ప్రారంభ బిందువుల స్థానముతో సంబంధం లేని రెండు సదిశలకు ఒకే పరిమాణము మరియు దిశ వున్నచో అవి ఎల్లప్పుడు సమానము అని మనము చూసియున్నాము.

ఏదేని సదిశను $\vec{a}$ లేదా $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ అను సంకేతంతో సూచించుట ద్వారా రెండు సదిశల సంకలము, సదిశల అదిశా గుణకారము, బిందు లబ్ధము మరియు క్రాస్ లబ్ధములను కూడ మనము అభ్యసించియున్నాము. కొంత ఎక్కువ ఆసక్తితో దత్తసదిశ యొక్క దిశ, పరిమాణము మరియు అన్ని ఇతర భావనలను అవగాహన చేసుకొనుటకు సదిశల యొక్క జ్యామితీయ పరిచయంను పునశ్చరణ చేసుకొందాము. ఇది సరళరేఖలు మరియు తలముల సమీకరణములను చర్చించుటకు ఉపయోగకరంగా ఉంటుంది. ప్రసిద్ధి చెందిన గణిత శాస్త్రవేత్తలు అయిన గ్రాస్మన్, హమిల్టన్, క్లిఫర్డ్ మరియు గిబ్స్ అనువారు సదిశల బిందు మరియు క్రాస్ లబ్ధములను పరిచయం చేసిన మార్గదర్శకులు.

భౌతికశాస్త్రములో సదిశ బీజగణితం యొక్క కొన్ని ప్రత్యక్ష అనువర్తనములు గలదు మరియు భౌతికశాస్త్రము, ఇంజనీరింగ్ మరియు వైద్య శాస్త్రములో సదిశా బీజగణితంతో పాటు సదిశల కలనగణితం యొక్క అనువర్తనములు అనేకము గలదు. వానిలో కొన్నింటిని క్రిందివ్వబడినది.

- ఒక త్రిమితీయ సమాంతరచతుర్భుజం (parallelepiped) యొక్క ఘనపరిమాణమును గణించుటకు అదిశా త్రికలబ్ధము ఉపయోగబడును.
- యాంత్రికశాస్త్రములో గల జరిగిన పని మరియు భ్రామకము (torque) లను కనుగొనుటకు వరుసగా బిందు మరియు క్రాస్ లబ్ధములు ఉపయోగబడును.
- సదిశల అలక (curl) మరియు అవసరణము (divergence) లను పరిచయం చేయుటకు కలనగణితంతో బాటు సదిశాబీజగణితము ఉపయోగబడును. విద్యుదయస్కాంత శాస్త్రము హైడ్రోడైనమిక్స్, రక్తప్రసారము, రాకెట్ ప్రయోగం మరియు ఉపగ్రహకక్ష్యలను గురించి అభ్యసించుటలో అలక మరియు అవసరణము మిక్కిలి ఉపయోగడును.
- అంతరిక్షములో రెండు విమానముల మధ్యదూరము మరియు వాటి మార్గముల మధ్య కోణములను కనుగొనుటకు బిందులబ్ధము మరియు సదిశా లబ్ధము ఉపయోగబడును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 254 10-03-2022 11:22:39

- ఇంటి పైకప్పు వాలును అనుసరించి మరియు సూర్యుని దిశ ఆధారంగా అధిక సౌరశక్తి ఉత్పత్తి అగునట్లు సౌర ఫలకాలను జాగ్రత్తగా అమర్చుటకు సదిశల బిందులబ్ధము ఉపయోగబడును. సదిశా బీజగణితమునుపయోగించి సౌర ఫలకాలు ఉత్పత్తి చేయు సౌరశక్తిని గణించవచ్చును.
- కృత్రిమ ఉపగ్రహ ఫలకాల మధ్య దూరము మరియు కోణములను కొలుచుటకు, విభిన్న పరిశ్రమలలో గల గొట్టముల నెట్‌వర్క్ నిర్మాణంలో మరియు కట్టడ నిర్మాణ రంగంలో బీమ్స్ మరియు నిర్మాణాల మధ్యదూరము మరియు కోణములను గణించుటలో సదిశాబీజగణితము ఉపయోగిపడును.

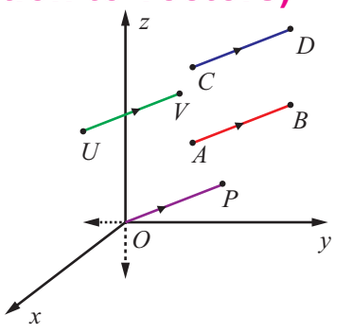
అభ్యసన లక్ష్యాలు:

ఈ పాఠ్యాంశమును ముగించినపుడు విద్యార్థులు నేర్చుకొనవలసినవి:-

- రెండు మరియు మూడు సదిశల అదిశా మరియు సదిశా లబ్ధములను ఉపయోగించుట.
- రేఖా గణితము, త్రికోణమితి మరియు భౌతికశాస్త్రము యొక్క సమస్యలను సాధించుట.
- రేఖ యొక్క పరామితి, పరామితికాని మరియు కార్టీషియన్ రూప సమీకరణములను కనుగొనుట.
- తలము యొక్క పరామితి, పరామితికాని మరియు కార్టీషియన్ రూప సమీకరణములను కనుగొనుట.
- రేఖలకు మధ్యగల కోణము మరియు అతలీయ సరళ రేఖల (skew lines) మధ్య దూరమును కనుగొనుట.
- ఒక బిందువు యొక్క ప్రతిబింబ నిరూపకములను కనుగొనుట.

6.2 సదిశల రేఖాగణిత పరిచయము (Geometric introduction to vectors)

త్రిపరిమాణ అంతరాళము $\mathbb{R}^3$ లో $\vec{v}$ అను సదిశ, $A=(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$ ను తొలి బిందువుగా $B=(b_1,b_2,b_3)\in\mathbb{R}^3$ ను అంత్య బిందువుగా గల ఒక దిశా రేఖాఖండమును సూచించును. దీనిని $\overrightarrow{AB}$ అని సూచిస్తారు. AB అను రేఖా ఖండపు పొడవు $\vec{v}$ అను సదిశ యొక్క పరిమాణమగును మరియు A నుండి B యొక్క దిశ $\vec{v}$ అను సదిశ దిశ అగును. కావున, ఒక సదిశను $\vec{v}$ లేదా $\overrightarrow{AB}$ అని గుర్తించవచ్చును. $\mathbb{R}^3$ లో గల $\overrightarrow{AB}$ మరియు $\overrightarrow{CD}$ అను రెండు సదిశలు సమానమని చెప్పుటకు కావలసిన మరియు సరిపోవు నిబంధన AB పొడవు CD పొడవుకు సమానము మరియు A నుంచి B కు గల దిశ, C నుంచి D కు గల దిశకు సమాంతరముగా ఉండును. $\overrightarrow{AB}$ మరియు $\overrightarrow{CD}$ సమానము అయిన $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ మరియు $\overrightarrow{CD}$ ను $\overrightarrow{AB}$ యొక్క స్థానమార్పు (**translate**) అంటారు.



పటము. 6.1

$\mathbb{R}^3$ లో గల అన్ని సదిశలు $\overrightarrow{AB}$ లో ఎక్కడైనను చలింపజేసి, $V\in\mathbb{R}^3$ బిందువును ఆది బిందువుగాను $V\in\mathbb{R}^3$ అను బిందువును అంత్య బిందువుగా గల ఇక సదిశకు సమానము దీనిని $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{UV}$ అని విధంగా వ్రాయవచ్చును. ప్రత్యేకంగా $\mathbb{R}^3$ యొక్క ఆది బిందువు O అయిన, $P\in\mathbb{R}^3$ అనుబిందువును. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OP}$ గా కనుగొనదము $\overrightarrow{OP}$ అను సదిశ P బిందువుకు స్థాన సదిశ అనబడును. పైగా ఇవ్వబడిన ఏదైనా ఒక సదిశ $\vec{v}$ నకు, $P\in\mathbb{R}^3$ అను ఏకైక బిందువును $\overrightarrow{OP}=\vec{v}$ అనునట్లు చూచెదము. $\overrightarrow{AB}$ అను సదిశ యొక్క ఆది బిందువు A ను అంత్య బిందువు B ను ఏకంగా అమరిన, $\overrightarrow{AB}$ ఆ సదిశ శూన్య సదిశ అగును. $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ మరియు $\vec{0}$ అను బిందువుల యొక్క స్థాన సదిశములు క్రమముగా $(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 255 10-03-2022 11:22:40

మరియు $(0,0,0)$, అను సంకేతములతో గుర్తించెదము. ఇవ్వబడిన ఒక బిందువు $(a_1,a_2,a_3)\in\mathbb{R}^3$, $a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ యొక్క స్థాన సదిశ (a_1,a_2,a_3), అగును. ఇది $(0,0,0)$ అను బిందువును ఆది బిందువుగాను, (a_1,a_2,a_3) అను బిందువును అంత్య బిందువుగాను గల రేఖాఖండము అగును. అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలు అదిశలు అనబడును.

ఇవ్వబడిన సదిశ $\overrightarrow{AB}$ ఈ సదిశా పొడవును గణించుటకు

$$\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$ ఉపయోగబడును.

A అనునది (a_1,a_2,a_3) మరియు B అనునది (b_1,b_2,b_3). అయిన $\overrightarrow{AB}$ సదిశ పొడవు అగును. ప్రత్యేకముగా (b_1,b_2,b_3), యొక్క స్థాన సదిశ $\vec{b}$ అయిన, దీని పొడవు $\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$ అగును. పొడవు 1గా గల సదిశ యూనిట్ సదిశ **(unit vector)** అనబడును. యూనిట్ సదిశను సూచించుటకు $\hat{u}$ అను గుర్తును ఉపయోగించెదము. $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ అనునవి యూనిట్ సదిశలు అనియూ, పొడవు 0 గల ఏకైక సదిశ $\vec{0}$ అనియూ గుర్తించుకొనవలయును.

త్రిపరిమాణ ప్రదేశములో సదిశల మొత్తము మరియు అదిశల లబ్ధములు ఈ క్రింది విధముగా నిర్వచింపబడును.

$$\vec{a}+\vec{b} = (a_1+b_1)\hat{i}+(a_2+b_2)\hat{j}+(a_3+b_3)\hat{k}.$$

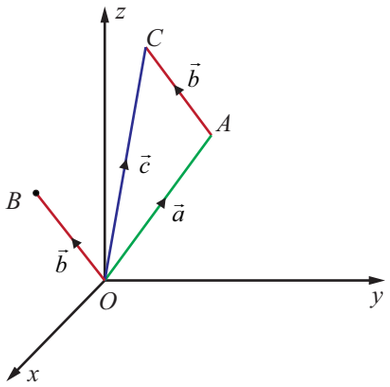
$$\alpha\vec{a} = (\alpha a_1)\hat{i}+(\alpha a_2)\hat{j}+(\alpha a_3)\hat{k};$$

ఇచ్చట $\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$, $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}\in\mathbb{R}^3$ మరియు $\alpha\in\mathbb{R}$ అయిన,

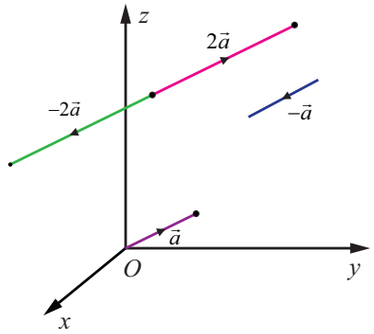
$\vec{a}+\vec{b}$ యొక్క జ్యామితీయ వివరణకు, $A=(a_1,a_2,a_3)$ మరియు $B=(b_1,b_2,b_3)$ అను నిరూపకముల యొక్క స్థాన సదిశలు క్రమముగా $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అనుకొనుము. A అను బిందువును ఆది బిందువుగాను, అనుగుణమైన ఒక బిందువు $(c_1,c_2,c_3)\in\mathbb{R}^3$ అంత్య బిందువుగా గల సదిశకు స్థాన సదిశ $\vec{b}$ ను జరిపిన (c_1,c_2,c_3) పటము (6.2), (c_1,c_2,c_3) బిందువు యొక్క స్థాన సదిశ $\vec{c}$ అనునది $\vec{a}+\vec{b}$ ను సూచించును.

$\alpha\vec{a}$ అను సదిశ $\vec{a}$ అను సదిశకు సమాంతరముగా గల సదిశ అగును. $\alpha>1$ అయిన α యొక్క పొడవు $0<\alpha<1$ రెట్లు అధికరించబడును. $\vec{a}$ అయిన α యొక్క పొడవు $\alpha<0$ రెట్లు తగ్గించబడును. $\alpha\vec{a}$ అయిన $|\alpha|$ యొక్క పరిమాణము $\vec{a}$ యొక్క పరిమాణము లాగా $\vec{a}$ రెట్లుగాను $\alpha=-1$ యొక్క దిశ $\alpha\vec{a}=-\vec{a}$ యొక్క దిశకు వ్యతిరేక దిశలోను ఉండును. ప్రత్యేకముగా $\vec{a}$ అను సదిశ పొడవుకు సమానముగాను మరియు $\vec{a}$ యొక్క దిశకు వ్యతిరేక దిశలో అమరును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 256 10-03-2022 11:22:41



పటము. 6.2



పటము. 6.3

6.3 అదిశా లబ్ధము మరియు సదిశా లబ్ధము:- (Scalar Product and Vector Product)

ముందు తరగతి యందు నేర్చుకొన్న అదిశ లబ్ధము మరియు సదిశ లబ్ధమును గురించి గుర్తుకు తెచ్చుకొనెదము.

నిర్వచనము 6.1

$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ అను రెండు సదిశల యొక్క అదిశా లబ్ధము (లేదా బిందు లబ్ధము ను $\vec{a}\cdot\vec{b}$ గా సూచిస్తారు.) $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, అని లెక్కించడును. మరియు $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ అను రెండు సదిశల సదిశా లబ్ధము (లేదా cross product) ను $\vec{a}\times\vec{b}$ గా సూచిస్తారు.

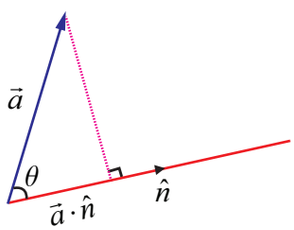
$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$ అని గణించబడును.

గమనిక:

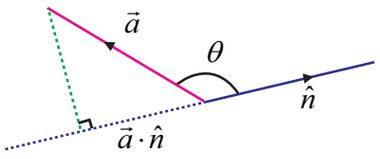
$\vec{a}\cdot\vec{b}$ అనునది ఒక అదిశ మరియు $\vec{a}\times\vec{b}$ అనునది ఒక సదిశ అగును.

6.3.1 జ్యామితీయ వివరణ (Geometrical interpretation)

$\vec{a}$ అనునది ఏదైనా ఒక సదిశ మరియు $\hat{n}$ ఒక యూనిట్ సదిశ అయిన $\hat{n}$ పైన $\vec{a}$ యొక్క విక్షేపం (projection) $\vec{a}\cdot\hat{n}$ అగును. $\vec{a}$ మరియు $\hat{n}$ అను వాటికి మధ్యగల కోణము లఘు కోణము(పటము 6.4) అయిన, $\vec{a}\cdot\hat{n}$ యొక్క విలువ ధనాత్మకమగును. $\vec{a}$ మరియు $\hat{n}$ అను వాటికి మధ్యగల కోణము గురుకోణమైన, $\vec{a}\cdot\hat{n}$ యొక్క విలువ ఋణాత్మకమగును (పటము 6.5)



ధనాత్మక బిందు లబ్ధము
పటము. 6.4



ఋణాత్మక బిందు లబ్ధము
పటము. 6.5

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 257 10-03-2022 11:22:43

$\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అనునవి ఏవైనా రెండు శూన్యేతర సదిశలైన,

$|\vec{a}\cdot\vec{b}| = \left||\vec{b}|\,\vec{a}\cdot\left(\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)\right| = \left||\vec{a}|\,\vec{b}\cdot\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}\right)\right|$ అని వ్రాయవచ్చును.

కనుక, $|\vec{a}\cdot\vec{b}|$ అనునది $\vec{b}$ యొక్క దిశలో $|\vec{b}|\,\vec{a}$ యొక్క విక్షేపమును పొందునపుడు లభించు రేఖాఖండము యొక్క పొడవు లేదా $\vec{a}$ యొక్క దిశలో $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ యొక్క విక్షేపమును పొందునపుడు లభించు రేఖాఖండము పొడవు అగును. మరియు θ ఇక్కడ $\vec{a}$ అనునది $\vec{b}$ అను సదిశలకు మధ్యగల కోణమగును.

$\vec{a}\times\vec{b}$ అనునది, $\vec{0}$ గానో లేదా $\vec{a}$, $\vec{b}$ అను సదిశలకు సమాంతరముగా వున్న తలమునకు లంబముగాను, $\vec{a}$, $\vec{b}$ అను సదిశలను ఒక బిందువులో ఖండించు ఆసన్న భుజములుగా కలిగిన సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యమును పరిమాణముగాగల సదిశము అగును. $\vec{a}$, $\vec{b}$ అను శూన్యేతర సదిశలకు మధ్యగల కోణము θ అయిన, $\vec{a}\times\vec{b}$ యొక్క పరిమాణమును $|\vec{a}\times\vec{b}|$ అను సూత్రమును ఉపయోగించి కనుగొనవచ్చును.

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}||\sin\theta|$, ఇక్కడ θ అనునది $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ ల మధ్య కోణము.

ఒకే ప్రారంభ బిందువును కలిగిన రెండు సదిశలను ఆసన్న అంత్యములు (coterminus) అని అంటారు.

విశేషాంశములు

(1) $\vec{a},\vec{b}$ అను రెండు శూన్యేతర సదిశల మధ్యగల కోణము $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)$.

(2) $\vec{a},\vec{b}$ అను రెండు సదిశలకు మధ్యగల కోణము 0 లేదా π అయిన, ఆ సదిశలు సమాంతరములు.

(3) $\vec{a},\vec{b}$ అను రెండు సదిశల మధ్యగల కోణము $\frac{\pi}{2}$ లేదా $\frac{3\pi}{2}$ అయిన, ఆ సదిశలు లంబములగును.

ధర్మము:-

(1) $\vec{a},\vec{b}$ అనునవి ఏదైనా రెండు సదిశలైన, తరువాత

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ గా ఉంటే, ఉంటే మాత్రమే (if and only if) $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అనునవి ఒకదానికొకటి లంబమగును.
- $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ గా ఉంటే, ఉంటే మాత్రమే (if and only if) $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అనునవి సమాంతరమగును.

(2) $\vec{a},\vec{b}$ మరియు $\vec{c}$ అనునవి ఏవైనా మూడు సదిశలు మరియు α ఒక అదిశ అయిన,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a},\ (\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c},\ (\alpha\vec{a})\cdot\vec{b} = \alpha(\vec{a}\cdot\vec{b}) = \vec{a}\cdot(\alpha\vec{b});$$
$$\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a}),\ (\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c},\ (\alpha\vec{a})\times\vec{b} = \alpha(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{a}\times(\alpha\vec{b}).$$

6.3.2 తలంలో త్రికోణమితి యొక్క బిందు మరియు సదిశా లబ్ధములు అనువర్తనాలు:- (Application of dot and cross products in plane Trigonometry)

తలములో త్రికోణమితి ద్వారా కొన్ని సూత్రములను ఉత్పాదించుటకు మనము రెండు సదిశల బిందు మరియు సదిశా లబ్ధముల భావనను ఉపయోగిస్తాము.

ఉదాహరణ 6.1 కొసైన్ సూత్రము (Cosine formulae)

సామాన్యమైన సంకేతములతో, త్రిభుజము ABC లో, సదిశా పద్ధతిని ఉపయోగించి క్రింది వాటిని నిరూపించుము.

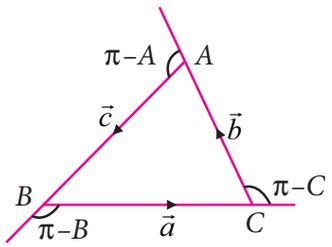
(i) $a^2 = b^2+c^2-2bc\cos A$ (ii) $b^2 = c^2+a^2-2ca\cos B$

(iii) $c^2 = a^2+b^2-2ab\cos C$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 258 10-03-2022 11:22:46

సాధన:-

సామాన్య సంకేతములతో, త్రిభుజము ABC నందు $\overrightarrow{BC}=\vec{a}, \overrightarrow{CA}=\vec{b}$ మరియు $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ అనుకొనుము.



పటము. 6.6

కావున, $|\overrightarrow{BC}|=a, |\overrightarrow{CA}|=b, |\overrightarrow{AB}|=c$ మరియు $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$.

$$\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB}.$$

బిందు లబ్ధమును ఉపయోగించిన, మనము పొందునది.

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=(-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB})\cdot(-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB})$$

$$\Rightarrow \quad |\overrightarrow{BC}|^2=|\overrightarrow{CA}|^2+|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \quad a^2=b^2+c^2+2bc\cos(\pi-A)$$

$$\Rightarrow \quad a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

ఇదేవిధముగా ఫలితములు (ii) మరియు (iii) లను నిరూపించవచ్చును. ■

ఉదాహరణ 6.2

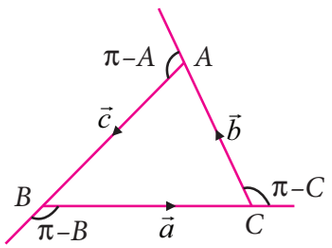
సామాన్య సంకేతములతో త్రిభుజము ABC లో, సదిశా పద్ధతిని ఉపయోగించి క్రింది వాటిని నిరూపించుము.

(i) $a=b\cos C+c\cos B$ (ii) $b=c\cos A+a\cos C$

(iii) $c=a\cos B+b\cos A$

సాధన:-

సామాన్య సంకేతములతో త్రిభుజము ABC నందు, $\overrightarrow{BC}=\vec{a}, \overrightarrow{CA}=\vec{b}$ మరియు $\overrightarrow{AB}=\vec{c}$ అనుకొనుము.



పటము. 6.7

కావున, $|\overrightarrow{BC}|=a, |\overrightarrow{CA}|=b, |\overrightarrow{AB}|=c$ మరియు $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\vec{0}$

కావున, $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{AB}$

బిందు లబ్ధమును ఉపయోగించిన, మనము పొందునది.

$$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{BC}|^2=-|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{CA}|\cos(\pi-C)-|\overrightarrow{BC}||\overrightarrow{AB}|\cos(\pi-B)$$

$$\Rightarrow \quad a^2=ab\cos C+ac\cos B$$

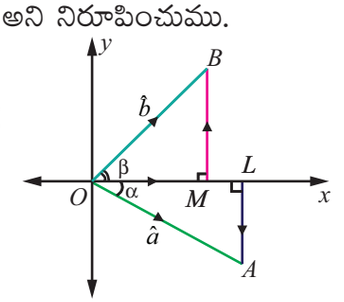
కావున $a=b\cos C+c\cos B$ ఇదే విధంగా ఫలితము (ii) మరియు (iii) లను ఇదేవిధముగా నిరూపించవచ్చును. ■

ఉదాహరణ 6.3

సదిశా పద్ధతిని ఉపయోగించి, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$ అని నిరూపించుము.

సాధన:-

$\hat{a}=\overrightarrow{OA}$ మరియు $\hat{b}=\overrightarrow{OB}$ అను యూనిట్ సదిశలు x-అక్షము ధనాత్మక దిశలో క్రమముగా α, β అను కోణములను ఏర్పరచునని అనుకొనుము. ఇక్కడ A, B అనునవి పటము 6.8లో చూపబడినవి. AL మరియు BM అను వాటిని x-అక్షమునకు లంబముగా గీయుము.



పటము. 6.8

కావున, $|\overrightarrow{OL}|=|\overrightarrow{OA}|\cos\alpha=\cos\alpha, |\overrightarrow{LA}|=|\overrightarrow{OA}|\sin\alpha=\sin\alpha$.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 259 10-03-2022 11:22:57

$$\overrightarrow{OL} = |\overrightarrow{OL}|\,\hat{i} = \cos\alpha\hat{i},\ \overrightarrow{LA} = \sin\alpha(-\hat{j}).$$

కావున, $\hat{a} = \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LA} = \cos\alpha\hat{i} - \sin\alpha\hat{j}$. ... (1)

ఇదే విధముగా,, $\hat{b} = \cos\beta\hat{i} + \sin\beta\hat{j}$ ... (2)

$\hat{a}$ మరియు $\hat{b}$ సదిశలకు మధ్య గల కోణము $\alpha+\beta$ అయిన,

$$\hat{a}\cdot\hat{b} = |\hat{a}|\,|\hat{b}|\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha+\beta) \quad \ldots (3)$$

మరొక విధముగా, సమీకరణము (1) మరియు (2) ల నుండి

$$\hat{a}\cdot\hat{b} = (\cos\alpha\hat{i} - \sin\alpha\hat{j})\cdot(\cos\beta\hat{i} + \sin\beta\hat{j}) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta. \quad \ldots (4)$$

సమీకరణములు (3) మరియు (4)ల నుండి, $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

ఉదాహరణ 6.4

సామాన్య సంకేతములతో త్రిభుజము ABC లో సదిశా పద్ధతిని ఉపయోగించి $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ అని నిరూపించుము.

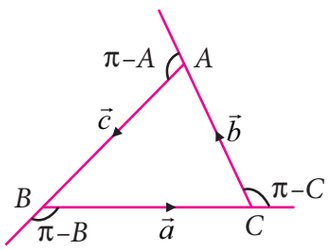
సాధన:-

సామాన్య సంకేతములతో త్రిభుజము ABC నందు $\overrightarrow{BC} = \vec{a}, \overrightarrow{CA} = \vec{b}$ మరియు $\overrightarrow{AB} = \vec{c}$ అయిన, $|\overrightarrow{BC}| = a, |\overrightarrow{CA}| = b,$ మరియు $|\overrightarrow{AB}| = c$ అనుకొనుము.

కావున, ΔABC, $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = 0$, ఇరువైపు $\overrightarrow{BC}$ లో సదిశా లబ్ధము చేయగా. $\overrightarrow{BC}\times(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$

సూక్ష్మీకరించగా

$$\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}. \quad \ldots (1)$$



పటము. 6.9

ఇదే విధముగా $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$, అయిన,

$$\overrightarrow{CA}\times(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}.$$

సూక్ష్మీకరించగా $\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{AB}$ ... (2)

సమీకరణములు (1) మరియు (2)ల నుండి,

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}.$$

కావున, $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}|.$

$$ca\sin(\pi - B) = bc\sin(\pi - A) = ab\sin(\pi - C).$$

కనుక, $ca\sin B = bc\sin A = ab\sin C$. దీనిని abc, తో భాగించిన,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \text{ (లేదా) } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ అని పొందవచ్చును.}$$

ఉదాహరణ 6.5

సదిశా పద్ధతిని ఉపయోగించి $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ అని నిరూపించుము.

సాధన:-

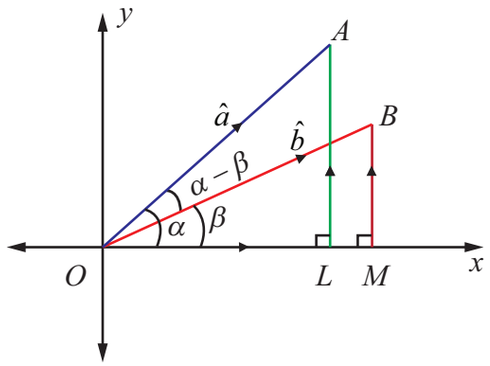
x- అక్షము ధనాత్మక దిశలో $\hat{a} = \overrightarrow{OA}$, $\hat{b} = \overrightarrow{OB}$ అను యూనిట్ సదిశలు క్రమముగా α, β అను

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 260 10-03-2022 11:22:58

కోణములను ఏర్పరచునని అనుకొనుము. ఇక్కడ A, B లను పటము 6.10 లో చూపబడినది. కావున $\hat{a} = \cos\alpha\hat{i} + \sin\alpha\hat{j}$ మరియు $\hat{b} = \cos\beta\hat{i} + \sin\beta\hat{j}$

$\hat{a}$ మరియు $\hat{b}$ సదిశలకు మధ్యగల కోణము $\alpha - \beta$ మరియు $\hat{b}, \hat{a}, \hat{k}$ అను సదిశలు కుడిచేతి పద్ధతిలో అమరియున్నందువలన,

$$\hat{b}\times\hat{a} = |\hat{b}||\hat{a}|\sin(\alpha-\beta)\hat{k} = \sin(\alpha-\beta)\hat{k} \quad \ldots (1)$$



పటము. 6.10

మరొక విధముగా,

$$\hat{b}\times\hat{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \end{vmatrix} = (\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta)\hat{k} \quad \ldots (2)$$

కావున, సమీకరణములు (1) మరియు (2)ల నుండి

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta .$$

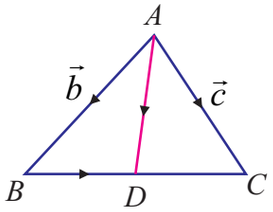
6.3.3 రేఖాగణితములో బిందు మరియు సదిశా లబ్ధముల అనువర్తనాలు. (Application of dot and cross products in Geometry)

ఉదాహరణ 6.6 అపోలోనియస్ సిద్ధాంతము (Apollonius's theorem)

త్రిభుజము ABCలో BC అనుభుజము యొక్కమధ్యబిందువు D అయిన, $|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = 2(|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2)$ అని సదిశా పద్ధతిలో నిరూపించుము.

సాధన:-

ఆది బిందువు A అయిన, B యొక్క స్థాన సదిశ $\vec{b}$ మరియు C యొక్క స్థాన సదిశ $\vec{c}$ అనుకొనుము. BC యొక్క మధ్య బిందువు D అగుట వలన D యొక్క స్థాన సదిశ $\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}$ అగును. కావున.



పటము. 6.11

ఇప్పుడు, $|\overrightarrow{AD}|^2 = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AD} = \left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right) = \frac{1}{4}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c})$. ... (1)

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{\vec{b}+\vec{c}}{2} - \vec{b} = \frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}.$$

కావున, $|\overrightarrow{BD}|^2 = \overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{BD} = \left(\frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\vec{c}-\vec{b}}{2}\right) = \frac{1}{4}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{c})$ ... (2)

సమీకరణములు (1) మరియు (2)ల మొత్తము కనుగొనుట వలన మనము పొందునది,

కావున, $|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 = \frac{1}{4}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{b}\cdot\vec{c}) + \frac{1}{4}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - 2\vec{b}\cdot c) = \frac{1}{2}(|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2)$

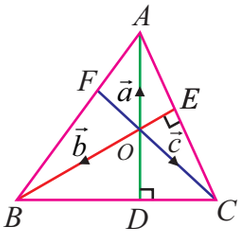
$\Rightarrow$ $|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2 = \frac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2)$.

$|\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{AC}|^2 = 2(|\overrightarrow{AD}|^2 + |\overrightarrow{BD}|^2)$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 261 10-03-2022 11:22:59

ఉదాహరణ 6.7

సదిశా పద్ధతిని ఉపయోగించి ఒక త్రిభుజము యొక్క శీర్షముల నుండి దానికి ఎదురుగా గల భుజములకు గీయబడు లంబ రేఖలు అనుషక్తము (attitudes) అని నిరూపించుము.



పటము. 6.12

సాధన:-

త్రిభుజము ABC నందు, AD, BE అను లంబరేఖల ఖండన బిందువు 0 అగును. CO ను AB వద్ద ఖండించునట్లు F ను పొడిగించుము. ఆది బిందువు 0 అనుకొనుము. $\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$ మరియు $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ అనుకొనుము.

$\overrightarrow{AD}$ అనునది $\overrightarrow{BC}$ కు లంబము అగుట వలన, $\overrightarrow{OA}$ అనునది $\overrightarrow{BC}$ కు లంబము అగును. కావున $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$. కావున $\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{b} = 0. \quad \ldots (1)$$

ఇదేవిధంగా, $\overrightarrow{BE}$ అనునది $\overrightarrow{CA}$ నకు లంబమగుట వలన, $\overrightarrow{OB}$ అనునది $\overrightarrow{CA}$ నకు లంబమగును. $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ కనుక $\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{c} = 0. \quad \ldots (2)$$

సమీకరణములు (1) మరియు (2)ల మొత్తము కనుగొనుట వలన మనము పొందునది

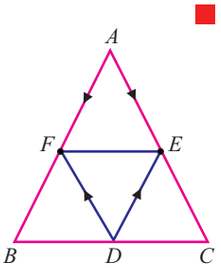
$\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}=0$, కావున $\vec{c}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$.

కాబట్టి, $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{BA}=0$. కనుక $\overrightarrow{BA}$ అనునది $\overrightarrow{OC}$ నకు లంబమగుట వలన, $\overrightarrow{CF}$ అనునది $\overrightarrow{AB}$ నకు లంబమగును. కనుక C నుండి భుజము AB నకు గీయబడు లంబరేఖ 0 గుండా పోవును. కావున, ఒక త్రిభుజము యొక్క లంబరేఖలు అనుషక్తములు. ■

ఉదాహరణ 6.8

త్రిభుజము ABC, లో BC, CA మరియు AB అను భుజముల మధ్య బిందువులు క్రమముగా D, E, F అయిన,

ΔDEF యొక్క వైశాల్యము = $\frac{1}{4}$ (ΔABC యొక్క వైశాల్యము) అని సదిశా పద్ధతిలో నిరూపించుము.



పటము. 6.13

సాధన:-

త్రిభుజము ABC లో ఆదిబిందువు A అనుకొనుము. కావున, D, E, F అను బిందువుల యొక్క స్థాన సదిశలు క్రమముగా $\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}, \frac{\overrightarrow{AC}}{2}, \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$ అగును. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ అను సదిశలు ఆసన్న భుజములుగా గల సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క వైశాల్యము $|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ అయిన, త్రిభుజము ΔABC యొక్క వైశాల్యము $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$ అగును. ఇదేవిధంగా ΔDEF

ΔDEF నకు తీసుకొనుము. $= \frac{1}{2}|\overrightarrow{DE}\times\overrightarrow{DF}|$

$$= \frac{1}{2}|(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD})\times(\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AD})|$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{\overrightarrow{AB}}{2}\times\frac{\overrightarrow{AC}}{2}\right|$$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 262 10-03-2022 11:23:00

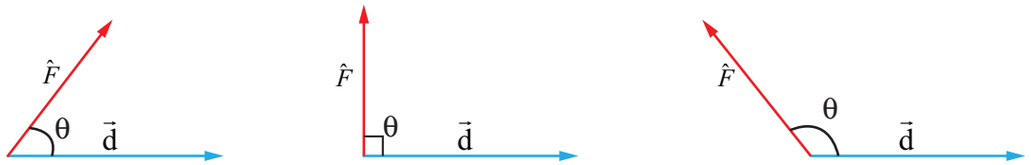
$$= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|\right)$$

$$= \frac{1}{4}\ (\ \Delta ABC \text{ యొక్క వైశాల్యము}).$$

6.3.4 భౌతికశాస్త్రములో బిందు మరియు సదిశా లబ్ధముల ప్రయోజనములు. (Application of dot and cross product in Physics)

నిర్వచనము 6.2

బలము $\vec{F}$ యొక్క చర్య వలన ఒక కణము (particle) ఒక బిందువు నుండి మరొక బిందువునకు చలించునపుడు దాని స్థానభ్రంశ సదిశ $\vec{d}$ అయిన, ఆ బలము చేసిన పని $w=\vec{F}\cdot\vec{d}$ అగును.



పటము. 6.14

ఒక బలము (force) ఏర్పరచు కోణము అల్ప కోణము, లంబకోణము మరియు గురుకోణము అయిన, ఆ బలము చేయు పని క్రమముగా ధనాత్మకము, శూన్యము, మరియు ఋణాత్మకము అగును.

ఉదాహరణ 6.9

ఒక కణము (particle) $(4,-3,-2)$ అను బిందువు నుండి $(6,1,-3)$ అను బిందువునకు $2\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k}$ మరియు $-\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$ అను స్థిరమైన బలము యొక్క చర్య వలన చలించబడిన, ఆ బలము చేసిన మొత్తము పనిని కనుగొనుము.

సాధన:-

ఇవ్వబడిన బలముల ఫలిత బలము $\vec{F}=(2\hat{i}+5\hat{j}+6\hat{k})+(-\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k})=\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$.

A, B అనునవి గుర్తించు బిందువులు క్రమముగా $(4,-3,-2)$, $(6,1,-3)$ అనుకొనుము. కణము యొక్క స్థానభ్రంశ సదిశ $\vec{d}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(6\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k})-(4\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k})=2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$

కావున, బలము చేసిన మొత్తము పని $w=\vec{F}\cdot\vec{d}=(\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k})\cdot(2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k})=9$ప్రమాణములు.

ఉదాహరణ 6.10

ఒక కణము $(1,3,-1)$ అను బిందువు నుండి $(4,-1,\lambda)$ అను బిందువుకు $3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ మరియు $2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ అను బలముల యొక్క చర్యల వలన చలించబడును. ఆ బలములు చేసిన పని 16 ప్రమాణములు అయిన, λ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన:-

ఇవ్వబడిన బలముల ఫలిత బలము $\vec{F}=(3\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})+(2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})=5\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$.

కణము యొక్క స్థానభ్రంశ సదిశ

$$\vec{d}=(4\hat{i}-\hat{j}+\lambda\hat{k})-(\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})=(3\hat{i}-4\hat{j}+(\lambda+1)\hat{k}).$$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 263 10-03-2022 11:23:01

ఆ బలములు చేసిన పని 16 ప్రమాణములు అయిన,

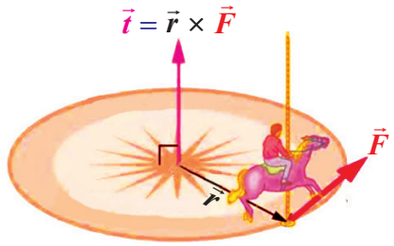
$$\vec{F}\cdot\vec{d}=16.$$

అందువలన $(5\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})\cdot(3\hat{i}-4\hat{j}+(\lambda+1)\hat{k}=16\Rightarrow\lambda+20=16.$

కావున, $\lambda=-4$ అని పొందెదము.

నిర్వచనము 6.3

$\vec{F}$ అను బలభ్రామకము, $\vec{r}$ ను స్థిర సదిశగా కలిగిన బిందువులో గల కణముపై ప్రయోగించుట వలన, ఆ కణముపై గల మెలిశక్తి (**torque**) లేదా భ్రామకము (**moment**) $\vec{t}=\vec{r}\times\vec{F}$ అగును. బల భ్రామకము అనునది పరిభ్రమణ బలం అని కూడా పిలువబడును.



గొడుగు-రాట్నము

పటము. 6.15

ఉదాహరణ 6.11

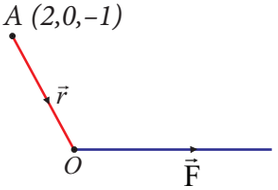
$2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, అను బలము ఆది బిందువు గుండా పోవుచున్నదనిన, $(2,0,-1)$ అను బిందువును బట్టి ఆ బలము యొక్క పరిభ్రమణ బలము యొక్క పరిమాణము మరియు దిశ కొసైన్ లను కనుగొనుము.

సాధన:-

$(2,0,-1)$ అను బిందువు యొక్క స్థిర సదిశ $\overrightarrow{OA}=2\hat{i}-\hat{k}$ అయిన, $\vec{r}=\overrightarrow{AO}=-2\hat{i}+\hat{k}$

ఇవ్వబడిన బలము $\vec{F}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ కనుక, పరిభ్రమణ బలము

$$\vec{t}=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\-2&0&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=-\hat{i}-2\hat{k}.$$



పటము. 6.16

కాబట్టి, పరిభ్రమణ బలము యొక్క పరిమాణము $=|-\hat{i}-2\hat{k}|=\sqrt{5}$ మరియు దిశ కొసైన్ (direction cosines) లు $-\frac{1}{\sqrt{5}},0,-\frac{2}{\sqrt{5}}$ అగును.

అభ్యాసము 6.1

1. ఒక వృత్తము యొక్క కేంద్రము నుండి ఆ వృత్తం యొక్క ఒక జ్యా మధ్య బిందువుకు గీయబడు రేఖ ఆ జ్యాకు లంబముగా ఉండునని సదిశా పద్ధతిలో నిరూపించుము.
2. ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజము యొక్క ఆధార భుజమునకు గీయబడు మధ్యగత రేఖ ఆ భుజమునకు లంబము అని సదిశా పద్ధతిలో నిరూపించుము.
3. సదిశా పద్ధతిలో, ఒక అర్ధ వృత్తములో అమరు కోణము లంబకోణము అని నిరూపించుము.
4. ఒక రాంబస్ యొక్క కర్ణములు ఒకదానికొకటి లంబ సమద్విఖండన చేయును అని సదిశా పద్ధతిలో నిరూపించుము.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 264 10-03-2022 11:23:01

5. ఒక సమాంతర చతుర్భుజము యొక్క కర్ణములు సమానమైన, ఆ సమాంతర చతుర్భుజము ఒక దీర్ఘ చతురస్రము అని సదిశా పద్ధతిలో నిరూపించుము.

6. సదిశా పద్ధతిలో, AC మరియు BD అనునవి కర్ణములుగా గల చతుర్భుజము $ABCD$ వైశాల్యము $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{BD}|$ అని నిరూపించుము.

7. ఒకే ఆధార భుజముపై అమరిన రెండు సమాంతర రేఖలకు మధ్య గల సమాంతర చతుర్భుజముల వైశాల్యములు సమానములు అని సదిశా పద్ధతిలో నిరూపించుము.

8. ΔABC యొక్క గురుత్వ కేంద్రము (గరిమనాభి) G అయిన, సదిశా పద్ధతిలో (ΔGAB వైశాల్యము) = (ΔGBC వైశాల్యము) = (ΔGCA వైశాల్యము) $=\frac{1}{3}$ (ΔABC వైశాల్యము) అని నిరూపించుము.

9. సదిశా పద్ధతిని ఉపయోగించి $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$ అని నిరూపించుము.

10. సదిశా పద్ధతిని ఉపయోగించి $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ అని నిరూపించుము.

11. ఒక కణము $(1,2,3)$ అను బిందువు నుండి $(5,4,1)$ అను బిందువునకు $8\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k}$ మరియు $6\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ అను స్థిర బలముల చర్యల వలన చలింపజేసిన, ఆ బలములు చేసిన మొత్తము పనిని కనుగొనుము.

12. క్రమముగా $5\sqrt{2}$ మరియు $10\sqrt{2}$ ప్రమాణముల పరిమాణము గల $3\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}$ మరియు $10\hat{i}+6\hat{j}-8\hat{k}$ అను సదిశల దిశలలో అమరిన బలములు, ఒక కణము $4\hat{i}-3\hat{j}-2\hat{k}$ అను సదిశను స్థాన సదిశగా గల బిందువు నుండి $6\hat{i}+\hat{j}-3\hat{k}$ అను సదిశను స్థాన సదిశగా గల బిందువునకు జరిపిన, ఆ బలములు చేసిన పనిని కనుగొనుము.

13. $3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}$ అను బలము $2\hat{i}-3\hat{j}+4\hat{k}$ అను సదిశను స్థాన సదిశగా గల బిందువు గుండా పోవుచున్నదనిన, $4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ అను సదిశను స్థాన సదిశగా గల బిందువును బట్టి ఆ బలము బల భ్రామకము యొక్క పరిమాణము మరియు దిశ కొసైన్‌లను కనుగొనుము.

14. $8\hat{i}-6\hat{j}-4\hat{k}$ అను సదిశను స్థాన సదిసలుగా గల బిందువులో పోవుచున్న $-3\hat{i}+6\hat{j}-3\hat{k}$, $4\hat{i}-10\hat{j}+12\hat{k}$ మరియు $4\hat{i}+7\hat{j}$ బలముల పరిభ్రమణ బలమును $18\hat{i}+3\hat{j}-9\hat{k}$ అను సదిశను స్థాన సదిశగా గల బిందువును బట్టి బల భ్రామకమును కనుగొనుము.

6.4 అదిశా త్రికలబ్ధము (Scalar triple product)

నిర్వచనము 6.4

$\vec{a},\vec{b}$ మరియు $\vec{c}$ అనునవి ఇవ్వబడిన మూడు సదిశలు అయిన, $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ అనునది $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ సదిశల యొక్క అదిశా త్రికలబ్ధము అనబడును. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ ఒక అదిశ అగును.

విశేషాంశము

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ అనునది ఒక అదిశ అయినందువలన $(\vec{a}\cdot\vec{b})\times\vec{c}$ అనునది అర్థము లేనిది.

గమనిక:

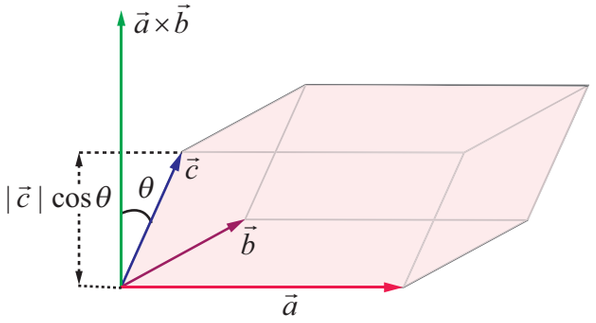
$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అనునవి ఇవ్వబడిన మూడు సదిశలు అయిన, క్రింద ఇవ్వబడినవి వాటి అదిశా త్రికలబ్ధములగును.

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$, $(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$, $(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$, $\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$, $\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$,
$(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}$, $(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}$, $(\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot(\vec{c}\times\vec{b})$, $\vec{b}\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$, $\vec{c}\cdot(\vec{b}\times\vec{a})$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 265 10-03-2022 11:23:02

అదిశా త్రికలబ్ధము యొక్క రేఖాగణిత వివరణ:

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ అనునది అదిశ త్రికలబ్ధము $\vec{a},\vec{b}$ మరియు $\vec{c}$ అను మూడు సదిశలు ఒకే బిందువులో ఖండించు అంచులుగా కలిగి ఏర్పడు సమాంతర ఫలకము యొక్క ఘనపరిమాణము అగును. $(\vec{a}\times\vec{b})$ అనునది $\vec{a}$, $\vec{b}$ అను సదిశల ద్వారా ఏర్పడు సమాంతర చతుర్భుజ వైశాల్య పరిమాణమగును. తరువాత, $(\vec{a}\times\vec{b})$ అను సదిశ యొక్క దిశ అనునది $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అను సదిశలకు సమాంతరముగా అమరియున్న తలమునకు లంబమగును.



పటము. 6.17

కనుక, $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}| = |\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$ అగును. ఇక్కడ, θ అనునది $\vec{a}\times\vec{b}$ మరియు $\vec{c}$ అను వాటికి మధ్యగల కోణము అగును. పటము 6.17 లో నుండి $\vec{a},\vec{b}$ మరియు $\vec{c}$ అను మూడు సదిశలను ఒకే బిందువు వద్ద ఖండించు అంచులుగా కలిగి ఏర్పడు సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క ఎత్తు $|\vec{c}||\cos\theta|$ అని చూపెదము. కనుక, $|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|$ అనునది సమాంతర ఫలకము యొక్క ఘనపరిమాణమగును.

అదిశా త్రికలబ్ధము కనుగొనుటకు క్రింది సిద్ధాంతము ఉపయోగపడును.

సిద్ధాంతము 6.1

$\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ మరియు $\vec{c} = c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$, అయిన

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

నిరూపణ

అదిశా త్రికలబ్ధము నిర్వచనం ప్రకారము,

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}\cdot\vec{c}$$

$$= \left[(a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}\right]\cdot(c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k})$$

$$= (a_2b_3-a_3b_2)c_1+(a_3b_1-a_1b_3)c_2+(a_1b_2-a_2b_1)c_3$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

కావున, సిద్ధాంతము నిరూపించబడినది. ■

6.4.1 అదిశా త్రికలబ్ధము యొక్క ధర్మములు. (Properties of the scalar triple product)

సిద్ధాంతము 6.2

$\vec{a},\vec{b}$, మరియు $\vec{c}$, అను ఏవైనా మూడు సదిశలయిన, $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 266 10-03-2022 11:23:03

నిరూపణ

$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ మరియు $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k}$. అనుకొనుము.

$$\text{కావున, } \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \text{ by } R_1 \leftrightarrow R_3$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \text{ by } R_2 \leftrightarrow R_3$$

$$= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\,.$$

కావున, సిద్ధాంతము నిరూపించబడినది. ■

గమనిక:

సిద్ధాంతము 6. 2 ప్రకారము, అదిశా త్రికలబ్ధములో బిందు మరియు సదిశా లబ్ధముల కుండలీకరణాలలో వున్న సదిశల మధ్య సదిశాలబ్ధము కుండలీకరణాలు వెలుపల బిందు లబ్ధము ఉండునట్లు సదిశల క్రమము మారకుండా స్థాన మార్పు చేయవచ్చును.

$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$, ఎందుకనగా '.' మరియు '×' సంకేతములను స్థాన మార్పు చేయవచ్చును.

$= (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$, బిందు లబ్ధము వినమయ ధర్మమగును.

$= \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})$, అయిన '.' మరియు '×' గుర్తులను స్థాన మార్పు చేయవచ్చును.

$= (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}$, బిందు లబ్ధము వినిమయమగును.

$= \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$, అయిన '.' మరియు '×' గుర్తులను స్థాన మార్పు చేయవచ్చును.

సంకేతము

$\vec{a},\vec{b}$, $\vec{c}$ అను ఏవైనా మూడు సదిశలయిన, అదిశా త్రికలబ్ధము $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ అను దానిని $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ అని గుర్తించెదము.

$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ అను దానిని పెట్టె $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అని చదవవలయును. అదిశల త్రికలబ్ధములో విలువల పరిమాణము ఒక పెట్టె యొక్క (దీర్ఘ చతురస్రాకార సమాంతర ఫలకము) ఘనపరిమాణమును సూచించిన, ఈ లబ్ధమును **పెట్టె లబ్ధము (లేదా) అదిశా త్రికలబ్ధము (box product)** అని పిలువబడుచున్నది.

గమనిక:

(1) $$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}]$$

$$[\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}].$$

అందువలన, అదిశా త్రికలబ్ధములో గల సదిశలను అదే వరుసలో వృత్త క్రమ పద్ధతిలో మార్పు చేసిన, అదిశా త్రికలబ్ధము యొక్క విలువ మారదు. కనుక, $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}]$

(2) అదిశా త్రికలబ్దములో వున్న ఏవైనా రెండు సదిశలను స్థాన మార్పు చేసిన, అదిశా త్రికలబ్ద విలువ (−1) చే గుణించబడును. అనగా,

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = [\vec{c},\vec{a},\vec{b}] = -[\vec{a},\vec{c},\vec{b}] = -[\vec{c},\vec{b},\vec{a}] = -[\vec{b},\vec{a},\vec{c}].$$

సిద్ధాంతము 6.3

అదిశా త్రికలబ్దము, సదిశల మొత్తము మరియు అదిశా లబ్దము వంటి వాటి ధర్మములను సంతృప్తిపరచును. అనగా,

$$\begin{aligned}
[(\vec{a}+\vec{b}),\vec{c},\vec{d}] &= [\vec{a},\vec{c},\vec{d}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{d}];\\
[\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}] &= \lambda[\vec{a},\vec{b},\vec{c}], \forall\lambda\in\mathbb{R}\\
[\vec{a},(\vec{b}+\vec{c}),\vec{d}] &= [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]+[\vec{a},\vec{c},\vec{d}];\\
[\vec{a},\lambda\vec{b},\vec{c}] &= \lambda[\vec{a},\vec{b},\vec{c}], \forall\lambda\in\mathbb{R}\\
[\vec{a},\vec{b},(\vec{c}+\vec{d})] &= [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]+[\vec{a},\vec{b},\vec{d}];\\
[\vec{a},\vec{b},\lambda\vec{c}] &= \lambda[\vec{a},\vec{b},\vec{c}], \forall\lambda\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

నిరూపణ

అదిశా లబ్దము మరియు సదిశా లబ్దముల ధర్మములను ఉపయోగించిన,

$$\begin{aligned}
[(\vec{a}+\vec{b}),\vec{c},\vec{d}] &= ((\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c})\cdot\vec{d}\\
&= (\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{d}\\
&= (\vec{a}\times\vec{c})\cdot\vec{d}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{d}\\
&= [\vec{a},\vec{c},\vec{d}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\\
[\lambda\vec{a},\vec{b},\vec{c}] &= ((\lambda\vec{a})\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\lambda(\vec{a}\times\vec{b}))\cdot\vec{c} = \lambda((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}) = \lambda[\vec{a},\vec{b},\vec{c}].
\end{aligned}$$

ఈ సిద్ధాంతము యొక్క మొదటి ఫలితమును ఉపయోగించి, క్రింది ఫలితములను పొందవచ్చును.

$$\begin{aligned}
[\vec{a},(\vec{b}+\vec{c}),\vec{d}] &= [(\vec{b}+\vec{c}),\vec{d},\vec{a}] = [\vec{b},\vec{d},\vec{a}]+[\vec{c},\vec{d},\vec{a}]\\
&= [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]+[\vec{a},\vec{c},\vec{d}]\\
[\vec{a},\lambda\vec{b},\vec{c}] &= [\lambda\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = \lambda[\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = \lambda[\vec{a},\vec{b},\vec{c}].
\end{aligned}$$

ఇదే విధముగా, ఇతర సమీకరణములను నిరూపించవచ్చును. ■

శూన్యేతర మూడు సదిశలు ఒక తల సదిశలు అయిన, వాటిలో ఏదైనా ఒక సదిశను ఇతర రెండు సదిశల యొక్క సరళ కలయిక (linear combination) గా వ్రాయవచ్చునని 11 వ తరగతిలో నేర్చుకొన్నాము. ఇప్పుడు సతలీయం (coplanar) ధర్మములను అదిశా త్రికలబ్దమును ఉపయోగించి కనుగొనెదము.

సిద్ధాంతము 6.4

మూడు శూన్యేతర సదిశల యొక్క అదిశా త్రికలబ్దము శూన్యముగా ఉన్నప్పుడు, మరియు ఉన్నప్పుడు మాత్రమే ఆ మూడు సదిశలు సతలీయం అగును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 268 10-03-2022 11:23:12

నిరూపణ

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అనునవి మూడు శూన్యేతర సదిశలు అనుకొనుము.

$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=0 \Leftrightarrow$ $\vec{c}$ అనునది $\vec{a}\times\vec{b}$ నకు లంబముగా నుండును.

$\Leftrightarrow$ $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అను రెండు సదిశలకు సమాంతరముగా గల తలములో $\vec{c}$ ఉండును.

$\Leftrightarrow$ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ సతలీయం (coplanar)అగును. ■

సిద్ధాంతము 6.5

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అను మూడు సదిశలు సతీలీయములుగా ఉండుటకు అవసరమైన మరియు కావలసిన నిబంధన కనీసము ఒకటైన శూన్యము కానిది గాను మరియు $r,s,t\in\mathbb{R}$ అని ఉండునట్లు, $r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}=\vec{0}$ అను అదిశలను కనుగొనవచ్చునని అనబడును.

నిరూపణ

$\vec{a}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k},\ \vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k},\ \vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ సతలీయములు అనుకొనుము.

$\Leftrightarrow \left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right]=0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$ అని ఉండునట్లు కనీసము ఒకటైనా శూన్యం కానిదిగా ఉన్న

$r,s,t\in\mathbb{R}$ అని అదిశలను చూచెదము. $\Leftrightarrow$ $r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}=\vec{0}$ అని ఉండునట్లు కనీసము ఒకటైనా శూన్యము కానిదిగా గల $a_1r+a_2s+a_3t=0,\ b_1r+b_2s+b_3t=0,\ c_1r+c_2s+c_3t=0$ అని అదిశలను చూడెదము. ■

సిద్ధాంతము 6.6

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ మరియు $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ అను మూడు సదిశలను కలిగిన ఏదైనా రెండు వ్యవస్థలు (systems) మరియు $\vec{p}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z_1\vec{c},\ \vec{q}=x_2\vec{a}+y_2\vec{b}+z_2\vec{c},$ అయిన $\vec{r}=x_3\vec{a}+y_3\vec{b}+z_3\vec{c}$ అగును.

$$\left[\vec{p},\vec{q},\vec{r}\right]=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right].$$

గమనిక:

సిద్ధాంతము 6.6 ప్రకారము $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అనునది సతలీయము కాని (non-coplanar) సదిశలు మరియు

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}\neq 0,\ \text{అయిన,}$$

$\vec{p}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z_1\vec{c},\ \vec{q}=x_2\vec{a}+y_2\vec{b}+z_2\vec{c},$ మరియు $\vec{r}=x_3\vec{a}+y_3\vec{b}+z_3\vec{c}$ అను మూడు సదిశలు సతలీయము కాని (అసతలీయము) సదిశలగును.

ఉదాహరణ 6.12

$\vec{a} = -3\hat{i} - \hat{j} + 5\hat{k}, \vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}, \vec{c} = 4\hat{j} - 5\hat{k}$ అయిన $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ ను కనుగొనుము.

సాధన:-: మూడు సదిశల అదిశా త్రికలబ్ధము యొక్క నిర్వచనము ప్రకారము,

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -3 .$$

ఉదాహరణ 6.13

$2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}, \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ మరియు $3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ అను సదిశలను ఒక చివర ఖండించు సహావసానికలు (coterminus)గా గల సమాంతర ఫలకము యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.

సాధన:-

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ అను సదిశలను ఒక బిందువు వద్ద ఖండించు సహావసానికలుగా గల సమాంతర ఫలకము యొక్క ఘనపరిమాణము $|[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]|$ అగును. ఇక్కడ.

$\vec{a} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}, \vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}, \vec{c} = 3\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$.

కావున $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -7$, అగుట వలన, సమాంతర ఫలకము యొక్క ఘనపరిమాణము $|-7| = 7$ ఘన(ప్రమాణములు అగును.

ఉదాహరణ 6.14

$\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}, 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ మరియు $3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ అను సదిశలు సతలీయము (coplanar) అని నిరూపించుము.

సాధన:-

ఇక్కడ, $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}, \vec{b} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}, \vec{c} = 3\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ అను సదిశలు సతలీయముగా వుండుటకు అవసరమగు మరియు కావలసిన నిబంధన $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$ అగును. ఇక్కడ, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$

కావున, ఇవ్వబడిన మూడు సదిశలు సతలీయము అగును.

ఉదాహరణ 6.15

$2\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}, 3\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}, \hat{i} + m\hat{j} + 4\hat{k}$ అను సదిశలు సతలీయము అయిన, m యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన:-

ఇవ్వబడిన సదిశలు సతలీయం అగుటవలన $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & m & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m = -3$.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 270 10-03-2022 11:23:13

ఉదాహరణ 6.16

$(6,-7,0), (16,-19,-4), (0,3,-6), (2,-5,10)$ అను నాలుగు బిందువులు ఒకే తలములో అమరునని నిరూపించుము.

సాధన:-

$A=(6,-7,0), B=(16,-19,-4), C=(0,3,-6), D=(2,-5,10)$ అనుకొనుము. A,B,C,D అను నాలుగు బిందువులు ఒకే తలములో అమరునని నిరూపించుటకు, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ అను మూడు సదిశలు సతలీయము అగునని నిరూపించవలయును.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(16\hat{i}-19\hat{j}-4\hat{k})-(6\hat{i}-7\hat{j})=10\hat{i}-12\hat{j}-4\hat{k}$$

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=-6\hat{i}+10\hat{j}-6\hat{k}$ మరియు $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=-4\hat{i}+2\hat{j}+10\hat{k}$.

$$[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}] = \begin{vmatrix} 10 & -12 & -4 \\ -6 & 10 & -6 \\ -4 & 2 & 10 \end{vmatrix} = 0.$$

కనుక, $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ అను సదిశలు సతలీయం అగును. కావున, $A,B,C,$ మరియు D అను నాలుగు బిందువులు ఒకే తలములో అమరుచున్నవి.

ఉదాహరణ 6.17

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అను సదిశలు సతలీయం అయిన $\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}$ అను సదిశలును సతలీయం అని నిరూపించుము.

సాధన:-

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అను సదిశల సతలీయం $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0$. అదిశా త్రికలబ్ధముల ధర్మములను ఉపయోగించి,

$$\begin{aligned}
[\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}] &= [\vec{a},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}]+[\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{c}+\vec{a}] \\
&= [\vec{a},\vec{b},\vec{c}+\vec{a}]+[\vec{a},\vec{c},\vec{c}+\vec{a}]+[\vec{b},\vec{b},\vec{c}+\vec{a}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{c}+\vec{a}] \\
&= [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]+[\vec{a},\vec{b},\vec{a}]+[\vec{a},\vec{c},\vec{c}]+[\vec{a},\vec{c},\vec{a}]+[\vec{b},\vec{b},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{b},\vec{a}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{c}]+[\vec{b},\vec{c},\vec{a}] \\
&= [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]+[\vec{a},\vec{b},\vec{c}] = 2[a,b,c] = 0.
\end{aligned}$$

కావున, $\vec{a}+\vec{b}, \vec{b}+\vec{c}, \vec{c}+\vec{a}$ అను సదిశలు సతలీయం అగును.

ఉదాహరణ 6.18

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అను మూడు సదిశలు అయిన $[\vec{a}+\vec{c}, \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ అని నిరూపించుము.

సాధన:-

సిద్ధాంతము 6.6ను ఉపయోగించి దీనిని నిరూపించవచ్చును.

$$[\vec{a}+\vec{c},\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$$

$$= [\vec{a},\vec{b},\vec{c}].$$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 271 10-03-2022 11:23:14

అభ్యాసము 6.2

1. $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}, \vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}, \vec{c}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$, అయిన $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ ను కనుగొనుము.
2. $-6\hat{i}+14\hat{j}+10\hat{k}$, $14\hat{i}-10\hat{j}-6\hat{k}$ మరియు $2\hat{i}+4\hat{j}-2\hat{k}$ అను సదిశలతో గుర్తించు ఒక చివర ఖండించు సహావసానికలుగా గల సమాంతర ఫలకము యొక్క ఘనపరిమాణమును కనుగొనుము.
3. $7\hat{i}+\lambda\hat{j}-3\hat{k}, \hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}, ,-3\hat{i}+7\hat{j}+5\hat{k}$ అను సదిశలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించు సహవసానికలుగా గల సమాంతర ఫలకము యొక్క ఘనపరిమాణము 90ఘన.ప్ర అయున λ విలువను కనుగొనుము.
4. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అను సతలీయము కాని (non-coplanar) సదిశలను ఒక చివర ఖండించు సహవసానికలుగా గల సమాంతర ఫలకము యొక్క ఘనపరిమాణము 4 ఘన.ప్ర అయిన $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{b}\times\vec{c})+(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}\times\vec{a})+(\vec{c}+\vec{a})\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.
5. $\vec{b}$, మరియు $\vec{c}$ అను సదిశల వలన ఏర్పడు చతుర్భుజమును ఆసన్న భుజముగా కలిగి $\vec{a}=-2\hat{i}+5\hat{j}+3\hat{k}, \hat{b}=\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}$ మరియు $\vec{c}=-3\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$ అను సదిశల ద్వారా ఏర్పడు సమాంతర ఫలకము యొక్క ఎత్తును కనుగొనుము.
6. $2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}, \hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ మరియు $3\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ అను మూడు సదిశలు సతలీయం అగునా అని సరిచుడుము.
7. $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}, \vec{b}=\hat{i}$ మరియు $\vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ అనుకొనుము. $c_1=1$ మరియు $c_2=2$ అయిన $\vec{a},\vec{b}$ మరియు $\vec{c}$ అను సదిశలు సతలీయంగా ఉండిన c_3 యొక్క విలువను కనుగొనుము.
8. $\vec{a}=\hat{i}-\hat{k}, \vec{b}=x\hat{i}+\hat{j}+(1-x)\hat{k}, \vec{c}=y\hat{i}+x\hat{j}+(1+x-y)\hat{k}$, అయిన, $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ అనునది x లేదా y ను బట్టి అమరదు అని నిరూపించుము.
9. $a\hat{i}+a\hat{j}+c\hat{k}, \hat{i}+\hat{k}$ మరియు $c\hat{i}+c\hat{j}+b\hat{k}$ అను సదిశలు సతలీయైన a మరియు b అనువాటి గుణశ్రేడి సరాసరి c అగునని నిరూపించుము.
10. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అను మూడు శూన్యేతర సదిశలలో $\vec{a}$, $\vec{b}$ అను సదిశలకు లంబమైన యూనిట్ సదిశ $\vec{c}$ అనుకొనుము. $\vec{a}$, $\vec{b}$ అను సదిశలకు మధ్య గల కోణము $\frac{\pi}{6}$ అయిన $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2=\frac{1}{4}|\vec{a}|^2\,|\vec{b}|^2$ అని నిరూపించుము.

6.5 సదిశల త్రికలబ్ధము (Vector triple product)

నిర్వచనము 6.5

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అనునవి ఏవైనా మూడు సదిశలైన, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ అనునది ఈ మూడు సదిశల "సదిశా త్రికలబ్ధము" అని పిలువబడును.

గమనిక:

$\vec{a},\vec{b},c$ అనునవి ఏవైనా మూడు సదిశలైన,

$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}, (\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{a}, (\vec{c}\times\vec{a})\times\vec{b}, \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}), \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}), \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})$ అనునవి సదిశా త్రికలబ్ధమగును. సదిశా లబ్ధములలో బాగుగా తెలిసిన ధర్మముల ఫలితములుగా క్రింద వచ్చు సిద్ధాంతమును పొందెదము.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 272 10-03-2022 11:23:16

సిద్ధాంతము 6.7

సదిశా త్రికలబ్ధము క్రింద వచ్చు ధర్మములను సంతృప్తిపరచుచున్నది.

(1) $(\vec{a}_1+\vec{a}_2)\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{a}_1\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{a}_2\times(\vec{b}\times\vec{c}),\ (\lambda\vec{a})\times(\vec{b}\times\vec{c})=\lambda(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})),\ \lambda\in\mathbb{R}$

(2) $\vec{a}\times((\vec{b}_1+\vec{b}_2)\times\vec{c}) = \vec{a}\times(\vec{b}_1\times\vec{c})+\vec{a}\times(\vec{b}_2\times\vec{c}),\ \vec{a}\times((\lambda\vec{b})\times\vec{c})=\lambda(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})),\ \lambda\in\mathbb{R}$

(3) $\vec{a}\times(\vec{b}\times(\vec{c}_1+\vec{c}_2)) = \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}_1)+\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}_2),\ \vec{a}\times(\vec{b}\times(\lambda\vec{c}))=\lambda(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})),\ \lambda\in\mathbb{R}$

విశేషాంశము

సదిశా త్రికలబ్ధము సహచ్యర ధర్మమును తృప్తిపరచదు. అనగా $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అను సదిశలకు $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

న్యాయపరచుట

$\vec{a}=\hat{i},\ \vec{b}=\hat{i},\ \vec{c}=\hat{j}$ అనుకొనుము. $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\hat{i}\times(\hat{i}\times\hat{j})=\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$ అయిన $(\hat{i}\times\hat{i})\times\hat{j}=\vec{0}\times\hat{j}=\vec{0}$ కావున, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.

సదిశా త్రికలబ్ధమును, అదిశా లబ్ధము ద్వారా వివరించుటకు ఒక సులభమైన సూత్రమును క్రింద వచ్చు సిద్ధాంతము ద్వారా ఇవ్వబడును.

సిద్ధాంతము 6.8 సదిశా త్రికలబ్ధము యొక్క విస్తరణ (Vector Triple product expansion)

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అనునవి ఏవైనా మూడు సదిశలైన, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ అగును.

నిరూపణ

నిరూపక అక్షములను క్రింది విధముగా ఎన్నుకొనెదము.

$\vec{a}$ చర్యనొందు సరళరేఖ దిశలో x-అక్షమును, $\vec{a}$ గుండా పోవు $\vec{b}$ సదిశకు సమాంతరమైన తలములో ఉండునట్లు y అక్షమును మరియు $\vec{a}$, $\vec{b}$ అనునవి ఉన్న తలమునకు లంబముగా z-అక్షమును ఎన్నుకొనుము.

$$\vec{a} = a_1\hat{i}$$
$$\vec{b} = b_1\hat{i}+b_2\hat{j}$$
$$\vec{c} = c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = a_1\hat{i}\times\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\ b_1&b_2&0\\ c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}$$
$$= a_1\hat{i}\times\left(b_2c_3\hat{i}-b_1c_3\hat{j}+(b_1c_2-b_2c_1)\hat{k}\right)$$
$$= -a_1b_1c_3\hat{k}+a_1(b_2c_1-b_1c_2)\hat{j} \quad \ldots(1)$$
$$(\vec{a}.\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}.\vec{b})\vec{c} = a_1c_1\times\left(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}\right)-a_1b_1\left(c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}\right)$$
$$= a_1(b_2c_1-b_1c_2)\hat{j}-a_1b_1c_3\hat{k} \quad \ldots(2)$$

సమీకరణము (1) మరియు (2)ల నుండి

$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(a\cdot\vec{b})\vec{c}$ అని లభించును.

గమనిక:

(1) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\alpha\vec{b}+\beta\vec{c}$ ఇక్కడ $\alpha=\vec{a}\cdot\vec{c}$ మరియు $\beta=-(\vec{a}\cdot\vec{b})$ అగును. కనుక, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ అనునది $\vec{b}$ మరియు $\vec{c}$ అను సదిశలకు సమాంతర తలములో ఉండును.

(2) ఇంకను,

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} &= -\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})\\ &= -[(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}]\\ &= (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}\end{aligned}$$

కనుక, $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ అనునది $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అను సదిశలు సమాంతర తలములో ఉండును.

(3) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ అను సదిశలో కుండలీకరణ గుర్తులో గల $\vec{b}$ అను సదిశను మధ్యలో గల సదిశ అనియు, $\vec{a}$ అను సదిశను మధ్యలో లేని సదిశ అనియు తీసుకొనుము. అదేవిధంగా $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, లో $\vec{b}$ అనునది సదిశకు మధ్యలో గల సదిశగాను $\vec{c}$ అనునది సదిశకు మధ్యలేని సదిశగాను తీసుకొనవలెను. ఇప్పుడు ఈ సదిశల సదిశా త్రికలబ్ధము

$$\lambda \text{ (మధ్యన గల సదిశ) } -\mu \text{ (మధ్యన లేని సదిశ)}$$

అని అమరుటను చూడవచ్చును. ఇక్కడ λ అనునది మధ్యలో లేని సదిశ యొక్క బిందు లబ్ధమగును. మరియు μ అనునది మధ్యలో లేని సదిశల తప్ప మిగిలిన సదిశల బిందు లబ్ధమగునని తెలుసుకొనుము.

6.6 జాకోబి యొక్క తత్సమము మరియు లాగ్రేంజ్ యొక్క తత్సమము (Jacobi's Identity and Lagrange's Identity)

సిద్ధాంతము 6.9 జాకోబి యొక్క తత్సమము (Jacobi's identity)

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, అనునవి ఏవైనా మూడు సదిశలైన $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}$ అగును.

నిరూపణ

సదిశా త్రికలబ్ధము యొక్క విస్తరణను ఉపయోగించి క్రింది వాటిని పొందెదము.

$$\begin{aligned}\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) &= (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}\\ \vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a}) &= (\vec{b}\cdot\vec{a})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}\\ \vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) &= (\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}\,.\end{aligned}$$

ఈ సమీకరణముల మొత్తమును కనుగొనుటకు రెండు సదిశల అదిశా లబ్ధముల యొక్క వినిమయ ధర్మమును ఉపయోగించిన, $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}$ అని పొందుదుము. ■

సిద్ధాంతము 6.10 లాగ్రేంజ్ యొక్క తత్సమము (Lagrange's identity)

$\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$, అనునవి ఏవైనా నాలుగు సదిశలైన $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d}\\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}$.

నిరూపణ

అదిశా త్రికలబ్ధములో బిందు మరియు సదిశ గుర్తులను పరస్పర మార్పు చేయవచ్చును కావున

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) &= \vec{a}\cdot(\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d}))\\ &= \vec{a}\cdot((\vec{b}\cdot\vec{d})\vec{c}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{d}) \text{ (సదిశా త్రికలబ్ధ విస్తరణ)}\end{aligned}$$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 274 10-03-2022 11:23:27

$$= (\vec{a}\cdot\vec{c})(\vec{b}\cdot\vec{d}) - (\vec{a}\cdot\vec{d})(\vec{b}\cdot\vec{c})$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{a}\cdot\vec{d} \\ \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix}$$

ఉదాహరణ 6.19

$[\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}] = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2$ అని నిరూపించుము.

సాధన:-

అదిశా త్రికలబ్ధము యొక్క నిర్వచనమును ఉపయోగించి మనము పొందునది,

$$[\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot[(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})]. \quad \ldots (1)$$

$(\vec{b}\times\vec{c})$ ను సదిశా త్రికలబ్ధము యొక్క మొదటి సదిశగా తీసుకొని

$$(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a}) = ((\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a})\vec{c} - ((\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{c})\vec{a} = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{c}.$$

ఈ విలువను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా, మనము పొందునది,

$$[\vec{a}\times\vec{b},\vec{b}\times\vec{c},\vec{c}\times\vec{a}] = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot([\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{c}) = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}](\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]^2.$$

ఉదాహరణ 6.20

$(\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}))\vec{a} = (\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})$ అని నిరూపించుము.

సాధన:-

ఇవ్వబడిన సమీకరణము యొక్క కుడివైపు గల సదిశలో $(\vec{a}\times\vec{b})$ ను సదిశా త్రికలబ్ధము యొక్క మొదటి సదిశగా తీసుకొని $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})$ యొక్క విస్తరణను చూసెదము. కనుక

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c}) = ((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c})\vec{a} - ((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{a})\vec{c} = (\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}))\vec{a}.$$

ఉదాహరణ 6.21

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, అనునవి ఏవైనా నాలుగు సదిశలయిన,

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d} = [\vec{a},\vec{c},\vec{d}]\vec{b} - [\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\vec{a}.$$

సాధన:-

$\vec{p} = (\vec{a}\times\vec{b})$ అను తీసుకొని $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})$ విస్తరణను చూసెదము.

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= \vec{p}\times(\vec{c}\times\vec{d}) \\ &= (\vec{p}\cdot\vec{d})\vec{c} - (\vec{p}\cdot\vec{c})\vec{d} \\ &= ((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{d})\vec{c} - ((\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c})\vec{d} = [\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c} - [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d}\end{aligned}$$

ఇదే విధంగా $\vec{q} = \vec{c}\times\vec{d}$ అని తీసుకొనిన

$$\begin{aligned}(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) &= (\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{q} \\ &= (\vec{a}\cdot\vec{q})\vec{b} - (\vec{b}\cdot\vec{q})\vec{a} \\ &= [\vec{a},\vec{c},\vec{d}]\vec{b} - [\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\vec{a}\end{aligned}$$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 275 10-03-2022 11:23:34

ఉదాహరణ 6.22

$\vec{a}=-2\hat{i}+3\hat{j}-2\hat{k}, \vec{b}=3\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}, \vec{c}=2\hat{i}-5\hat{j}+\hat{k}$ అయిన, $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ మరియు $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ లను కనుగొనుము, అవి సమానమగునా అని తెలుపుము.

సాధన:-

నిర్వచనం ప్రకారం, $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 7\hat{i}-7\hat{k}$.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 7 & 0 & -7 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -35\hat{i}-21\hat{j}-35\hat{k}. \quad \ldots (1)$$

$$\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 14\hat{i}+3\hat{j}-13\hat{k}.$$

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -2 & 3 & -2 \\ 14 & 3 & -13 \end{vmatrix} = -33\hat{i}-54\hat{j}-48\hat{k}. \quad \ldots (2)$$

కావున సమీకరణములు (1) మరియు (2)ల నుండి $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} \neq \vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ అని కనుగొనవచ్చును. ■

ఉదాహరణ 6.23

$\vec{a}=\hat{i}-\hat{j}, \vec{b}=\hat{i}-\hat{j}-4\hat{k}, \vec{c}=3\hat{j}-\hat{k}$ మరియు $\vec{d}=2\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}$, అయిన

(i) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=[\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c}-[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d}$

(ii) $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=[\vec{a},\vec{c},\vec{d}]\vec{b}-[\vec{b},\vec{c},\vec{d}]\vec{a}$ అని సరిచూడుము.

సాధన:- (i)

నిర్వచనం ప్రకారం

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 4\hat{i}+4\hat{j},\ \vec{c}\times\vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 8\hat{i}-2\hat{j}-6\hat{k}$$

తరువాత, $$(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & 4 & 0 \\ 8 & -2 & -6 \end{vmatrix} = -24\hat{i}+24\hat{j}-40\hat{k} \quad \ldots (1)$$

మరోకవిధముగా

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c}-[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d} = 28(3\hat{j}-\hat{k})-12(2\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k}) = -24\hat{i}+24\hat{j}-40\hat{k} \quad \ldots (2)$$

సమీకరణములు (1) మరియు (2)ల నుండి, తత్సమము (i) తృప్తిపరచబడినది.

తత్సమము (ii) ను సరిచూచుటకు విద్యార్థుల అభ్యసనకు విడువబడినది. ■

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 276 10-03-2022 11:23:34

అభ్యాసము 6.3

1. $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}, \vec{b}=2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}, \vec{c}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$, అయిన (i) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ (ii) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$లను కనుగొనుము.
2. ఏదైనా ఒక సదిశ $\vec{a}$, $\hat{i}\times(\vec{a}\times\hat{i})+\hat{j}\times(\vec{a}\times\hat{j})+\hat{k}\times(\vec{a}\times\hat{k})=2\vec{a}$ అని నిరూపించుము.
3. $[\vec{a}-\vec{b}, \vec{b}-\vec{c}, \vec{c}-\vec{a}]=0$అని నిరూపించుము
4. $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}, \vec{b}=3\hat{i}+5\hat{j}+2\hat{k}, \vec{c}=-\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$, అయిన

   (i) $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$ (ii) $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ అని సరిచూడుము.
5. $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$, $\vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}-4\hat{k}$, $\vec{c}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ అయిన $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{a}\times\vec{c})$యొక్క విలువను కనుగొనుము.
6. $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ అనునవి సతలీయము అయిన $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{0}$ అని నిరూపించుము.
7. $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}, \vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}, \vec{c}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ మరియు $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=l\vec{a}+m\vec{b}+n\vec{c}$ అయిన, l,m,n ల విలువలను కనుగొనుము.
8. $\hat{a},\hat{b},\hat{c}$ అను మూడు యూనిట్ సదిశలలో $\hat{b}$ మరియు $\hat{c}$ అనునవి సమాంతరము కాని సదిశలు మరియు $\hat{a}\times(\hat{b}\times\hat{c})=\frac{1}{2}\hat{b}$ అయిన, $\hat{a}$ మరియు $\hat{c}$ అను సదిశలకు మధ్య గల కోణమును కనుగొనుము.

6.7 త్రిపరిమాణ రేఖాగణితములో సదిశల ప్రయోజనములు (Application of Vectors to 3-Dimensional Geometry)

త్రిపరిమాణ తలములో సరళ రేఖలు మరియు తలముల గురించి అభ్యసించుటకు సదిశలు ఒక సొగసైన విధానాన్ని అందిస్తాయి. అన్ని సరళరేఖలు మరియు తలములు $\mathbb{R}^3$ కి ఉపసమితులగును. ఒక సరళరేఖను సూక్ష్మంగా రేఖ అని పిలిచెదము. $\mathbb{R}^3$ లో గల బిందువుల సమితి P లో గల సరేఖీయములు కాని A, B, మరియు C అను ఏవైనా మూడు బిందువులలో, ఏవైనా రెండు బిందువుల గుండా పోవు రేఖ P యొక్క ఉపసమితిగా అమరునట్లు గల బిందువులు అమరిన వైశాల్యము ఒక తలమగును.కనీసము ఒక సామాన్య బిందువును మరియు ఒక తలములో గల ఒక బిందువు మరొక తలముపై అమరునట్లు కనీసము ఒక బిందువునైనా పొందిన రెండు తలములు ఖండించుకొను తలములు అనబడును. స్పష్టంగా అదే బిందువును కలిగిన రెండు తలములు ఏకీభవించిన తలములు అనబడును. సామాన్య బిందువును పొందని రెండు తలములు సమాంతర తలము లగును. అయిన, అవి ఏకీభవించిన తలములుగా ఉండును. ఇదేవిధంగా, ఖండించుకొను రెండు తలముల యొక్క సామాన్య బిందువుల సమితి ఒక సరళరేఖ అగునని తెలియుచున్నది. ఈ పాఠ్యభాగములో సదిశలను ఉపయోగించి సరళరేఖ మరియు తలముల సదిశ మరియు కార్టీషియన్ సమీకరణములను కనుగొనవచ్చును. ఒక రేఖాగణిత ఆకారము యొక్క సమీకరణమును ఆ ఆకారముపై గల ఒక్కొక్క బిందువు స్థాన సదిశలను తృప్తిపరచిన, ఆ సమీకరణము ఆ ఆకారము యొక్క సదిశ సమీకరణము అనబడును. ఒక సమీకరణము సదిశ సమీకరణముగానో లేదా కార్టీషియన్ సమీకరణముగానో ఉండవచ్చును.

6.7.1 ఒక సరళరేఖ యొక్క వివిధ రకముల సమీకరణ రూపములు (Different forms of equation of a straight line)

ఒక సరళరేఖ సమీకరణమును ప్రత్యేకముగా క్రింద వచ్చు రెండు పద్ధతులలో కనుగొనవచ్చును.

- రేఖపై గల ఒక బిందువు, సరళరేఖ యొక్క దిశను ఇచ్చునప్పుడు

• రేఖపై గల రెండు బిందువులు ఇచ్చినప్పుడు

ఒక రేఖ యొక్క సమీకరణమును సదిశ మరియు కార్టీషియన్ రూపములో కనుగొనవచ్చును. ఒకరేఖపై P అను స్థానదిశగా గల ఏదైనా ఒక బిందువు $\vec{r}$ ను తీసుకొని, ఇవ్వబడిన నిబంధనలను $\vec{r}$ అను సదిశ తృప్తిపరచునట్లు ఒక సంబంధము లభించుచున్నది. ఈ విధమైన సంబంధము అనునది రేఖ యొక్క సదిశ సమీకరణము అనబడును. ఒక సరళరేఖ సదిశ సమీకరణము పరామితులను కలిగియుండిన పరామితియ రూప లేదా పరామితియ సదిశ సమీకరణము అనియు, పరామితులు లేనియెడల పరామితియ రూపం కాని రూపము లేదా పరామితియం కాని సదిశ సమీకరణము అనియు పిలువబడెను.

6.7.2 సరళరేఖపై గల ఒక బిందువు మరియు సరళరేఖ దిశ ఇచ్చినపుడు రేఖ సమీకరణము (A point on the straight line and the direction of the straight line are given)

అ) పరామితియ రూప సదిశ సమీకరణము (Parametric form of vector equation)

సిద్ధాంతము 6.11

స్థాన దిశ $\vec{a}$ గా గల స్థానబిందువు గుండా పోవుచూ ఇవ్వబడిన $\vec{b}$ నకు సమాంతరంగా గల సరళరేఖ యొక్క సదిశ సమీకరణము $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ ఇక్కడ $t \in \mathbb{R}$

నిరూపణ

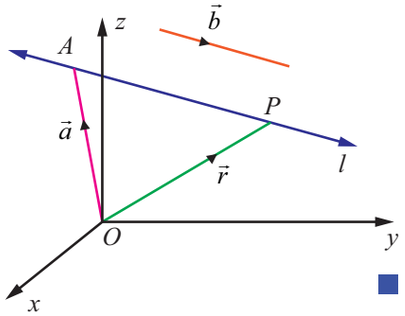
ఇవ్వబడిన స్థానదిశ $\vec{a}$ గా గల బిందువు A మరియు $\vec{r}$ అనునది రేఖపై గల ఏదైనా ఒక బిందువు P యొక్క స్థానదిశ అయిన, $\overrightarrow{AP} = \vec{r} - \vec{a}$ కు సమాంతరము అగుటవలన,

$\overrightarrow{AP}$ అనునది $\vec{b}$, కు సమాంతరము కావున

$$\vec{r} - \vec{a} = t\vec{b}, t \in \mathbb{R} \quad \ldots (1)$$

లేక $$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}, t \in \mathbb{R} \quad \ldots (2)$$

ఇది ఇవ్వబడిన రేఖ యొక్క పరామితిలను సదిశ సమీకరణము అగును.



పటము. 6.18

విశేషాంశము

ఈ రేఖపై గల ఏదైనా ఒక బిందువు యొక్క స్థానదిశ $\vec{a} + t\vec{b}$ అగును.

ఆ) పరామితియ కాని సదిశ సమీకరణము (Non-parametric form of vector equation)

$\overrightarrow{AP}$ అనునది $\vec{b}$ కు సమాంతరమగుట వలన, $\overrightarrow{AP} \times \vec{b} = \vec{0}$ అగును.

అనగా, $(\vec{r} - \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{0}$.

ఇది రేఖ యొక్క పరామితియ కాని సదిశ సమీకరణము అనబడును.

ఇ) కార్టీషియన్ సమీకరణము (Cartesian equation)

A అను బిందువు యొక్క నిరూపకములు (x_1, y_1, z_1), P అను బిందువు యొక్క నిరూపకములు (x, y, z) మరియు $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ అనుకొనుము. తరువాత, $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ మరియు $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ అయిన సమీకరణము (1)లో ప్రతిక్షేపించగా, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ అనువాటి గుణకములను పోల్చిన,

$$x - x_1 = tb_1, y - y_1 = tb_2, z - z_1 = tb_3 \quad \ldots (4)$$

సమీకరణము (4)ను

$$\frac{x - x_1}{b_1} = \frac{y - y_1}{b_2} = \frac{z - z_1}{b_3} \text{ అని వ్రాసెదము} \quad \ldots (5)$$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 278 10-03-2022 11:23:37

ఈ సమీకరణము (x_1, y_1, z_1) అను బిందువు ద్వారా పోవు b_1, b_2, b_3 దిశా నిష్పత్తులను కలిగిన సదిశలకు సమాంతరమైన రేఖ యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణములు లేదా సౌష్ఠవ సమీకరణములు అని పిలువబడును.

విశేషాంశము

(i) సరళరేఖ (5)పై గల ప్రతి బిందువు $(x_1 + tb_1, y_1 + tb_2, z_1 + tb_3)$ అను రూపములో ఉండును. ఇక్కడ $t \in \mathbb{R}$

(ii) ఒక రేఖ యొక్క దిశా కొసైన్‌లు ఆ రేఖ యొక్క దిశా నిష్పత్తులకు అనుపాతములో ఉండిన, రేఖ యొక్క దిశా కొసైన్‌లు l, m, n అయిన సరళరేఖ యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణములు

$$\frac{x-x_1}{l} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n} \text{ అగును.}$$

(iii) సమీకరణము (5) లో b_1, b_2, b_3 వీటిలో ఒకటి లేదా రెండుల విలువలు శూన్యముగా (సున్నగా) వుండిన సమీకరణములను మనము సున్నతో భాగించునట్లు అర్థము కాదు. ఆలోచన కాదు. అయితే హారములో సున్నగా గల సమీకరణము యొక్క భాగపు విలువ సున్నాకు సమానమగును. ఉదాహరణకు, $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$ మరియు $b_3 = 0$ అయిన, $\frac{x-x_1}{b_1} = \frac{y-y_1}{b_2} = \frac{z-z_1}{0}$ అనుదానిని $\frac{x-x_1}{b_1} = \frac{y-y_1}{b_2}, z - z_1 = 0$ అని వ్రాయవచ్చును.

(iv) x - అక్షము యొక్క దిశా కొసైన్‌లు 1, 0, 0 అగును. కావున x - అక్షము యొక్క సమీకరణములు $\frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{0}$ లేదా $x = t, y = 0, z = 0$, ఇక్కడ $t \in \mathbb{R}$ అగును.

అదేవిధంగా y -అక్షము మరియు z -అక్షము యొక్కసమీకరణములు క్రమముగా $\frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{0}$ మరియు $\frac{x-0}{0} = \frac{y-0}{0} = \frac{z-0}{1}$ అగును.

6.7.3 ఇవ్వబడిన రెండు బిందువుల గుండా పోవు సరళరేఖ సమీకరణము
(Straight Line passing through two given points)

అ) పరామితీయ సదిశ సమీకరణము (Parametric form of vector equation)

సిద్ధాంతము 6.12

ఇవ్వబడిన స్థానదిశలు $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ గా గల రెండు బిందువుల గుండా పోవు సరళరేఖల యొక్క పరామితీయ సదిశ సమీకరణము $\vec{r} = \vec{a} + t(\vec{b} - \vec{a}), t \in \mathbb{R}$.

ఆ) పరామితీయ కాని సదిశ సమీకరణము (Non-parametric form of vector equation)

పై గల సమీకరణమును పరామితీయకాని సదిశ సమీకరణము

$(\vec{r} - \vec{a}) \times (\vec{b} - \vec{a}) = \vec{0}$ అని వ్రాయవచ్చును.

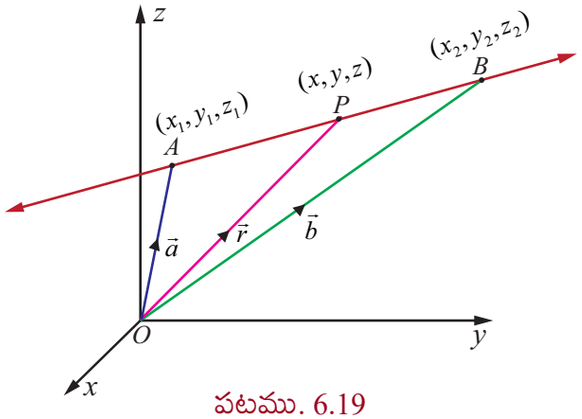
ఇ) కార్టీషియన్ సమీకరణము (Cartesian form of equation)

A, B అను బిందువుల అక్షదూరముల క్రమముగా (x_1, y_1, z_1) మరియు (x_2, y_2, z_2) అనుకొనుము. P యొక్క అక్షదూరములు (x, y, z) అనుకొనుము. తరువాత $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, $\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$ మరియు $\vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$ అని సిద్ధాంతము 6.12లో గల సమీకరణములో ప్రతిక్షేపించి, $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ అనువాటి గుణకములను పోల్చిన, $x - x_1 = t(x_2 - x_1), y - y_1 = t(y_2 - y_1), z - z_1 = t(z_2 - z_1)$ అని పొందెదము. కనుక

(x_1, y_1, z_1) మరియు (x_2, y_2, z_2) అను రెండు బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖ యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణము.

$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$ అని లభించును.

ఈ సమీకరణము నుండి $(x_1, y_1, z_{1)}$ మరియు (x_2, y_2, z_2) అను బిందువుల గుండా పోవు సరళరేఖ యొక్క దిశా కొసైన్‌లు $x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1$ అగునని కనుగొనెదము. ఇంకను వీటికి అనులోమాను అనుపాతముగా గల ఏదైనా మూడు సంఖ్యలు, ప్రత్యేకముగా $x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2$ అనునవి ఈ రేఖ యొక్క దిశాకొసైన్‌లుగా అమరుటను చూడవచ్చును.



పటము. 6.19

ఉదాహరణ 6.24

ఒక సరళరేఖ $(1, 2, -3)$ అను బిందువు ద్వారా పోవుచున్నది మరియు $4\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}$ అను సదిశకు సమాంతరముగా వుండిన యెడల, ఆ రేఖ యొక్క (i) పరామితీయ సదిశ సమీకరణము (ii) పరామితీయ కాని సదిశ సమీకరణము (iii) కార్టీషియన్ సమీకరణములను కనుగొనుము.

సాధన:-

కావలసిన రేఖ $(1, 2, -3)$ అను బిందువు గుండా పోవుచున్నది. కావున, ఈ బిందువు యొక్క స్థాన సదిశ $\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ అగును.

$\vec{a} = \hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$, $\vec{b} = 4\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}$ అనుకొనుము. తర్వాత

(i) కావలసిన రేఖ యొక్క పరామితీయ సదిశ సమీకరణము $\vec{r} = \vec{a}+t\vec{b}, t \in \mathbb{R}$, ఇక్కడ $t \in \mathbb{R}$ అగును.

కావున, $\vec{r} = (\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})+t(4\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}), t \in \mathbb{R}$

(ii) కావలసిన రేఖ యొక్క పరామితీయ కాని సదిశ సమీకరణము $(\vec{r}-\vec{a})\times\vec{b} = \vec{0}$, ఇక్కడ అగును.

కావున,, $(\vec{r}-(\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}))\times(4\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}) = \vec{0}$.

(iii) కావలసిన రేఖ యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణము $\frac{x-x_1}{b_1} = \frac{y-y_1}{b_2} = \frac{z-z_1}{b_3}$.

ఇక్కడ $(x_1, y_1, z_1) = (1, 2, -3)$ మరియు కావలసిన రేఖ యొక్క దిశా నిష్పత్తులు $4, 5, -7$ అనువాటికి అనులోమానుపాతమగును. కావున కావలసిన సరళరేఖ యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణము $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{5} = \frac{z+3}{-7}$.

ఉదాహరణ 6.25

ఒక సరళరేఖ యొక్క పరామితీయ సదిశ సమీకరణము $\vec{r} = (3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k})+t(2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k})$ అయిన ఆ రేఖ యొక్క (i) దిశా కొసైన్‌లు (ii) పరామితీయ కాని సదిశ సమీకరణము (iii) కార్టీషియన్ సమీకరణములను కనుగొనుము.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 280 10-03-2022 11:23:39

సాధన:-

ఇవ్వబడిన సదిశ సమీకరణమును $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ అను రేఖా సమీకరణమును పోల్చిన మనకు లభించునది $\vec{a}=3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k}$ మరియు $\vec{b}=2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}$ కనుక

(i) $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ అయిన, రేఖ యొక్క దిశా నిష్పత్తులు b_1,b_2,b_3 అగును. కావున, ఇవ్వబడిన రేఖ యొక్క దిశా నిష్పత్తులు $2,-1,3$ అను వాటికి అనులోమానుపాతమగును. కావున ఇవ్వబడిన రేఖ యొక్క దిశా కొసైన్‌లు $\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{-1}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}$ అగును.

(ii) రేఖ యొక్క పరామితీయ కాని సదిశ సమీకరణము $(\vec{r}-\vec{a})\times\vec{b}=\vec{0}$
కావున, $(\vec{r}-(3\hat{i}-2\hat{j}+6\hat{k}))\times(2\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k})=\vec{0}$.

(iii) ఇక్కడ $(x_1,y_1,z_1)=(3,-2,6)$ మరియు రేఖ యొక్క దిశా నిష్పత్తులు $2,-1,3$ అను వాటికి అనులోమానుపాతమగును.

కావున, రేఖ యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణము $\frac{x-3}{2}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-6}{3}$ అగును. ■

ఉదాహరణ 6.26

$(-4,2,-3)$ అను బిందువు ద్వారా పోవు $\frac{-x-2}{4}=\frac{y+3}{-2}=\frac{2z-6}{3}$ అను రేఖకు సమాంతరమైన రేఖ యొక్క పరామితీయ సదిశ సమీకరణము మరియు కార్టీషియన్ సమీకరణములను కనుగొనుము.

సాధన:-

ఇవ్వబడిన సమీకరణములను $\frac{x+2}{-4}=\frac{y+3}{-2}=\frac{z-3}{3/2}$ అని వ్రాసి, $\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$ తో పోల్చిన, పొందునది. $\vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}=-4\hat{i}-2\hat{j}+\frac{3}{2}\hat{k}=-\frac{1}{2}(8\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k})$. దీని నుండి $\vec{b}$ అనునది $8\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}$ అను సదిశకు సమాంతరమైనదని వివరముగా తెలుసుకొనవచ్చును.

$$\vec{r}=(-4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})+t(8\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}),\ t\in\mathbb{R}.$$

కావున, కావలసిన సరళరేఖ $(-4\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})$ అను బిందువు ద్వారా పోవుటతో $(8\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k})$, అను సదిశకు సమాంతరముగా ఉన్నది. అందువలన కావలసిన రేఖ యొక్క పరామితీయ సదిశ సమీకరణము. ఇంకను, కావలసిన రేఖ యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణములు

$$\frac{x+4}{8}=\frac{y-2}{4}=\frac{z+3}{-3}\text{ అగును.}$$ ■

ఉదాహరణ 6.27

$(-5,7,-4)$ మరియు $(13,-5,2)$ అను బిందువుల గుండా పోవు సరళరేఖ యొక్క పరామితీయ సదిశ సమీకరణము మరియు కార్టీషియన్ సమీకరణములను కనుగొనుము మరియు ఈ సరళరేఖ xy- తలమును ఖండించు బిందువును కనుగొనుము.

సాధన:-

కావలసిన సరళరేఖ $(-5,7,-4)$ మరియు $(13,-5,2)$ అను బిందువుల గుండాపోవును. కనుక, ఈ బిందువులను కలుపు రేఖ యొక్క దిశా నిష్పత్తులు $18,-12,6$ అగును. అనగా $3,-2,1$ అగును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 281 10-03-2022 11:23:40

కావున సరళరేఖ $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ కు సమాంతరముగా ఉండును. కావున

- కావలసిన రేఖ యొక్క పరామితీయ సమీకరణము $\vec{r}=(-5\hat{i}+7\hat{j}-4\hat{k})+t(3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$ లేదా $\vec{r}=(13\hat{i}-5\hat{j}+2\hat{k})+s(3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$ అగును. ఇక్కడ $s, t\in\mathbb{R}$ అగును.
- కావలసిన రేఖ యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణము $\frac{x+5}{3}=\frac{y-7}{-2}=\frac{z+4}{1}$ లేదా $\frac{x-13}{3}=\frac{y+5}{-2}=\frac{z-2}{1}$
- ఈ సరళరేఖలో గల ఏదైనా ఒక బిందువు యొక్క అమరిక

$$(3t-5,-2t+7,t-4) \text{ లేదా } (3s+13,-2s-5,s+2)$$

సరళరేఖ xy-తలమును ఖండించిన, ఖండన బిందువు యొక్క z-నిరూపకము సున్నా అగును. కావున, $t-4=0$ అనగా $t=4$ అగును. అందువలన, సరళరేఖ xy-తలమును ఖండించు బిందువు $(7,-1,0)$ అగును.

ఉదాహరణ 6.28

$\frac{x+3}{2}=\frac{y-1}{2}=-z$ అను సరళరేఖ నిరూపక అక్షములతో ఏర్పడు కోణములను కనుగొనుము.

సాధన:-

ఇవ్వబడిన సరళరేఖకు సమాంతరముగా గల యూనిట్ సదిశ $\hat{b}$ అనుకొనుము. తరువాత, $\hat{b}=\frac{2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}}{|2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}|}=\frac{1}{3}(2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})$. కావున $\hat{b}$ యొక్క దిశా కొసైన్‌ల యొక్క నిర్వచనము ప్రకారము

$$\cos\alpha=\frac{2}{3},\ \cos\beta=\frac{2}{3},\ \cos\gamma=-\frac{1}{3},$$

ఇచ్చట, α,β,γ అనునవి క్రమముగా ధనాత్మక x- అక్షము, ధనాత్మక y-అక్షము మరియు ధనాత్మక z- అక్షములతో $\hat{b}$ ఏర్పరచు కోణములు అగును. ఇవ్వబడిన సరళరేఖ నిరూపక అక్షములతో ఏర్పరచు కోణములు, $\hat{b}$ క్రమముగా నిరూపక అక్షములతో ఏర్పరచు కోణములు సమానము అగుట వలన $\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right),\ \beta=\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right),\ \gamma=\cos^{-1}\left(\frac{-1}{3}\right)$ అని పొందెదము.

6.7.4 రెండు సరళరేఖల మధ్య గల కోణము (Angle between two straight lines)

అ) సదిశ రూపము (Vector form)

$\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ మరియు $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ అను రెండు సరళరేఖలకు మధ్య గల లఘు కోణము $\vec{b}$ మరియు $\vec{d}$ అను సదిశలకు మధ్యగల కోణము ఒకటే అగును. అనగా $\cos\theta=\frac{|\vec{b}\cdot\vec{d}|}{|\vec{b}||\vec{d}|}$ లేదా $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{|\vec{b}\cdot\vec{d}|}{|\vec{b}||\vec{d}|}\right)$

విశేషాంశము

(i) $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ మరియు $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ అను రెండు రేఖలు సమాంతరములు $\Leftrightarrow\theta=0\Leftrightarrow\cos\theta=1\Leftrightarrow|\vec{b}\cdot\vec{d}|=|\vec{b}|\,|\vec{d}|$.

(ii) ఇవ్వబడిన $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ మరియు $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ అను రెండు రేఖలు సమాంతరముగా వుండుటకు అవసరమైనది మరియు కావలసిన నిబంధన $\vec{b}=\lambda\vec{d}$, λ ఒక అదిశ అనబడును.

(iii) ఇవ్వబడిన $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ మరియు $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ అను రెండు రేఖలు ఒకదానికొకటి లంబముగా వుండుటకు అవసరమైన మరియు కావలసిన నిబంధన $\vec{b}\cdot\vec{d}=0$ అగును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 282 10-03-2022 11:23:42

ఆ) కార్టీషియన్ రూపము (Cartesian form)

రెండు సరళరేఖల కార్టీషియన్ సమీకరణములు $\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$ మరియు $\frac{x-x_2}{d_1}=\frac{y-y_2}{d_2}=\frac{z-z_2}{d_3}$ అయిన, ఈ రెండు రేఖలకు మధ్యగల లఘుకోణము θ అనునది

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{|b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3|}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}\sqrt{d_1^2+d_2^2+d_3^2}}\right)$$ అగును.

విశేషాంశము

(i) b_1,b_2,b_3 మరియు d_1,d_2,d_3 అను దిశా కొసైన్‌లుగా గల ఇవ్వబడిన రెండు రేఖలు సమాంతరంగా నుండుటకు కావలసిన మరియు అవసరమైన నిబంధన $\frac{b_1}{d_1}=\frac{b_2}{d_2}=\frac{b_3}{d_3}$ గా ఉండును.

(ii) b_1,b_2,b_3 మరియు d_1,d_2,d_3 అను దిశా కొసైన్‌లుగా గల ఇవ్వబడిన రెండు సరళరేఖలు ఒక దానికొకటి లంబముగా నుండుటకు కావలసిన మరియు అవసరమైన నిబంధన $b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3=0$ గా ఉండును.

(iii) ఇవ్వబడిన రెండు సరళరేఖల దిశా కొసైన్‌లు l_1,m_1,n_1 మరియు l_2,m_2,n_2 అయిన, ఇవ్వబడిన రేఖలకు మధ్య గల కోణము $\cos\theta=|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|$ అగును.

ఉదాహరణ 6.29

$\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k})+t(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})$ అను రేఖకు $(5,1,4)$ మరియు $(9,2,12)$ అను బిందువులను కలుపు రేఖకు మధ్యగల కోణమును కనుగొనుము.

సాధన:-

$\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k})+t(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})$ అను రేఖ $2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ అను సదిశకు సమాంతరముగా ఉండును.

$(5,1,4)$ మరియు $(9,2,12)$ అను బిందువులను కలుపు సరళరేఖ దిశా నిష్పత్తులు $4,1,8$ అగుటవలన, ఈ రేఖ $4\hat{i}+\hat{j}+8\hat{k}$ అను సదిశకు సమాంతరముగా ఉండును.

కావున, ఇవ్వబడిన ఈ రెండు రేఖలకు మధ్యగల లఘు కోణము

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{|\vec{b}\cdot\vec{d}|}{|\vec{b}||\vec{d}|}\right),$$ ఇక్కడ $\vec{b}=2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ మరియు $\vec{d}=4\hat{i}+\hat{j}+8\hat{k}$

కావున, $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{|(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})\cdot(4\hat{i}+\hat{j}+8\hat{k})|}{|2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}||4\hat{i}+\hat{j}+8\hat{k}|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$. ■

ఉదాహరణ 6.30

$\frac{x-4}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-2}$ మరియు $\frac{x-1}{4}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-2}{2}$ అను రెండు సరళరేఖలకు మధ్యగల లఘుకోణము కనుగొనుము. ఈ రెండు సమాంతరమా లేదా లంబమా అని కనుగొనుము.

సాధన:-

ఇవ్వబడిన సరళరేఖల యొక్క సమీకరణములను

$$\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$$ మరియు $\frac{x-x_2}{d_1}=\frac{y-y_2}{d_2}=\frac{z-z_2}{d_3}$

అనువాటిని పోల్చిన, $(b_1,b_2,b_3)=(2,1,-2)$ మరియు $(d_1,d_2,d_3)=(4,-4,2)$. కావున, ఇవ్వబడిన రెండు రేఖలకు మధ్యగల లఘు కోణము

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|(2)(4)+(1)(-4)+(-2)(2)|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}}\right)=\cos^{-1}(0)=\frac{\pi}{2}$$

కావున, ఇవ్వబడిన రెండు సరళ రేఖలు లంబమగును.

ఉదాహరణ 6.31

$A(6,7,5)$ మరియు $B(8,10,6)$ అను బిందువుల గుండా పోవు సరళరేఖ అనునది $C(10,2,-5)$ మరియు $D(8,3,-4)$ అను బిందువుల ద్వారా వెళ్ళు సరళరేఖకు లంబమైనదని నిరూపించుము.

సాధన:-

$A(6,7,5)$ మరియు $B(8,10,6)$ అను బిందువుల గుండా వెళ్ళు సరళరేఖ $\vec{b}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ అను సదిశకు సమాంతరముగా అమరును. ఇంకా, $C(10,2,-5)$ మరియు $D(8,3,-4)$ అను బిందువుల గుండా వెళ్ళు సరళరేఖ $\vec{d}=\overrightarrow{CD}=-2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ అను సదిశకు సమాంతరముగా వుండును. కావున. ఈ రెండు రేఖలకు మధ్యగల కోణము $\vec{b}$ మరియు $\vec{d}$ లకు మధ్యగల కోణమునకు సమానమగును.

$$\vec{b}\cdot\vec{d} = (2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})\cdot(-2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})=0.$$

అయిన, $\vec{b}$ మరియు $\vec{d}$ అను సదిశలు లంబములగును. కావున, రెండు సరళరేఖలు లంబములగును.

మరొక పద్ధతి

$A(6,7,5)$ మరియు $B(8,10,6)$ అను బిందువులను కలుపు సరళరేఖ యొక్క దిశా నిష్పత్తులు $(b_1,b_2,b_3)=(2,3,1)$ అగును. ఇంకా, $C(10,2,-5)$ మరియు $D(8,3,-4)$ అను బిందువులను కలుపు సరళరేఖ యొక్క దిశా నిష్పత్తులు $(d_1,d_2,d_3)=(-2,1,1)$ అగును. $b_1d_1+b_2d_2+b_3d_3=(2)(-2)+(3)(1)+(1)(1)=0$ అయిన, ఈ రెండు రేఖలు లంబములగును.

ఉదాహరణ 6.32

$\frac{x-1}{4}=\frac{2-y}{6}=\frac{z-4}{12}$ మరియు $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{3}=\frac{5-z}{6}$ అను రేఖలు సమాంతరమైనవని నిరూపించుము.

సాధన:-

$\frac{x-1}{4}=\frac{2-y}{6}=\frac{z-4}{12}$ అను రేఖ $4\hat{i}-6\hat{j}+12\hat{k}$ అను సదిశకు సమాంతరముగా ఉండును మరియు $\frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{3}=\frac{5-z}{6}$ అను $-2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$ రేఖ సదిశకు సమాంతరముగా ఉండును.

$4\hat{i}-6\hat{j}+12\hat{k}=-2(-2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k})$ అయిన, రెండు సదిశలు సమాంతరము అగును. కావున, ఇవ్వబడిన రెండు సరళరేఖలు సమాంతరమగును.

అభ్యాసము 6.4

1. $4\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k}$ అను సదిశను స్థాన సదిశగా గల బిందువు ద్వారా వెళుతూ, $2\hat{i}-6\hat{j}+7\hat{k}$ అను సదిశకు సమాంతరంగా ఉండే సరళరేఖ యొక్క పరామితీయ కాని సదిశ సమీకరణము మరియు కార్టీషియన్ సమీకరణములను కనుగొనుము.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 284 10-03-2022 11:23:44

2. $(-2,3,4)$ అను బిందువు ద్వారా వెళుతూ $\frac{x-1}{-4}=\frac{y+3}{5}=\frac{8-z}{6}$ అను రేఖకు సమాంతరంగా ఉండే సరళరేఖ యొక్క పరామితీయ సదిశ సమీకరణము మరియు కార్టీషియన్ సమీకరణములను కనుగొనుము.

3. $(6,7,4)$ మరియు $(8,4,9)$ అను బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖ xz మరియు yz తలములను ఖండించు బిందువులను కనుగొనుము.

4. $(5,6,7)$ మరియు $(7,9,13)$ అను బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖ యొక్క దిశా కొసైన్‌లను కనుగొనుము. ఇంకను, ఇవ్వబడిన ఈ రెండు బిందువుల గుండా పోవు సరళరేఖ యొక్క పరామితీయ సదిశ సమీకరణము మరియు కార్టీషియన్ సమీకరణములను కనుగొనుము.

5. క్రింది రేఖలకు మధ్యగల లఘు కోణములను కనుగొనుము.

(i) $\vec{r}=(4\hat{i}-\hat{j})+t(\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}),\ \vec{r}=(\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k})+s(-\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k})$

(ii) $\frac{x+4}{3}=\frac{y-7}{4}=\frac{z+5}{5},\ \vec{r}=4\hat{k}+t(2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$.

(iii) $2x=3y=-z$ మరియు $6x=-y=-4z$.

6. $A(7,2,1), B(6,0,3)$ మరియు $C(4,2,4)$ అనునవి ΔABC యొక్క శీర్షములు అయిన, $\angle ABC$ ను కనుగొనుము.

7. $(2,1,4)$ మరియు $(a-1,4,-1)$ అను బిందువులను కలుపు సరళరేఖ $(0,2,b-1)$ మరియు $(5,3,-2)$ అను బిందువులను కలుపు సరళరేఖకు సమాంతరమైన, a మరియు b విలువలను కనుగొనుము.

8. $\frac{x-5}{5m+2}=\frac{2-y}{5}=\frac{1-z}{-1}$ మరియు $x=\frac{2y+1}{4m}=\frac{1-z}{-3}$ అను సరళరేఖలు ఒక దానికొకటి లంబమైన, m యొక్క విలువను కనుగొనుము.

9. $(2,3,4),(-1,4,5)$ మరియు $(8,1,2)$ అను బిందువులు సరేఖీయములని చూపుము.

6.7.5 రెండు సరళరేఖల యొక్క ఖండన బిందువు (Point of intersection of two straight lines)

$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{a_2}=\frac{z-z_1}{a_3}$ మరియు $\frac{x-x_2}{b_1}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{b_3}$ అనునవి రెండు సరళరేఖలైన, ఈ రేఖలపై గల ప్రతిబిందువు క్రమముగా $(x_1+sa_1, y_1+sa_2, z_1+sa_3)$ మరియు $(x_2+tb_1, y_2+tb_2, z_2+tb_3)$ అగును. ఇవ్వబడిన రేఖలు ఖండించుకొనిన, ఒక సామాన్య బిందువు ఉండవలయును. అనగా రేఖల ఖండన బిందువులో కొన్ని s, t విలువకు

$$(x_1+sa_1, y_1+sa_2, z_1+sa_3) = (x_2+tb_1, y_2+tb_2, z_2+tb_3)$$

కావున, $x_1+sa_1 = x_2+tb_1, y_1+sa_2 = y_2+tb_2, z_1+sa_3 = z_2+tb_3$

ఈ మూడు సమీకరణములలో ఏదైనా రెండు సమీకరణములను సాధించుట వలన పొందు s మరియు t యొక్క విలువలు మిగిలిన సమీకరణమును సంతృప్తిపరచిన, ఇవ్వబడిన రేఖలు ఖండించు రేఖలగును. ఆ విధంగా లేనియెడల, అవి ఖండించని రేఖలగును. s విలువను, (లేదా t విలువను) ప్రతిక్షేపించిన, రెండు రేఖల ఖండన బిందువు లభించును. సరళరేఖా సమీకరణములను సదిశా రూపములో ఇచ్చినచో వానిని కార్టీషియన్ రూపంలో వ్రాసి మరియు పై పద్ధతిని అనుసరించి ఖండనబిందువును కనుగొనుము.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 285 10-03-2022 11:23:46

ఉదాహరణ 6.33

$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ మరియు $\frac{x-4}{5}=\frac{y-1}{2}=z$ అను రేఖల ఖండన బిందువును కనుగొనుము.

సాధన:-

$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}=s$ అనుకొనుము. ఈ రేఖలో గల ఏదైనా ఒక బిందువు యొక్క రూపము $(2s+1, 3s+2, 4s+3)$ అగును. $\frac{x-4}{5}=\frac{y-1}{2}=z=t$ అనుకొనుము. ఈ రేఖలో గల ఏదైనా బిందువు యొక్క రూపము $(5t+4, 2t+1, t)$ అగును. ఖండన బిందువు వద్ద కొన్ని s మరియు t విలువలకు

$$(2s+1, 3s+2, 4s+3) = (5t+4, 2t+1, t)$$

కావున, $2s-5t=3$, $3s-2t=-1$ మరియు $4s-t=-3$. మొదటి రెండు సమీకరణములను సాధించిన $t=-1$, $s=-1$ అని లభించును. ఈ s మరియు t విలువలు మూడవ సమీకరణమును సంతృప్తిపరచును. కావున, ఇవ్వబడిన రేఖలు ఖండించుకొనును. t లేదా s ల విలువను సంబంధ బిందువులలో ప్రతిక్షేపించిన, రేఖల ఖండన బిందువు $(-1,-1,-1)$ అని లభించును. ■

6.7.6 రెండు సరళరేఖలకు మధ్యగల కనిష్ఠ దూరము
(Shortest distance between two straight lines)

రెండు సరళ రేఖల ఖండన బిందువును ఏవిధంగా కనుగొనుట అనియు మరియు రెండు రేఖలు సమాంతరమైనవా? లేదా? అని ఎట్లు తీర్మానించుట అని అభ్యసించాము.

నిర్వచనము 6.6

రెండు సరళరేఖలు ఒకే తలములో అమరిన, అవి సతలీయమని అంటారు.

గమనిక:

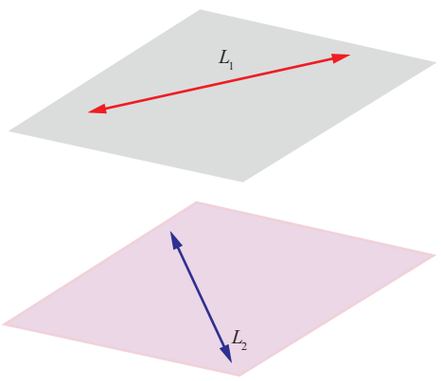
రెండు సరళరేఖలు సమాంతర రేఖలుగానో లేదా ఖండించుకొను రేఖలుగానో ఉండిన, అవి సతలీయములు.

నిర్వచనము 6.7

ఒక అంతరాళములో గల రెండు రేఖలు సమాంతరములు కాక మరియు ఖండించుకొననివి అయిన వానిని అతలీయరేఖలు(అసొష్టవరేఖలు) అంటారు.

గమనిక:

రెండు సరళరేఖలు అతలీయ రేఖలైన, ఆ రేఖలు ఒకే తలములో ఉండదు.



పటము. 6.20

సమాంతరములేని రెండు సరళరేఖలు ఒకదానికొకటి ఖండించుకొనిన, ఆ రేఖలకు మధ్యగల దూరము సున్నా అగును. ఒకదానికొకటి ఖండించుకొనక సమాంతరముగా గల రెండు సరళరేఖలకు మధ్యగల కనిష్ఠ దూరము అనునది, ఈ రెండు సమాంతర రేఖలకు లంబముగా గల రేఖాఖండము యొక్క పొడవగును. ఇదేవిధంగా, ఒక తలంలో అమరని రేఖలకు లంబమైన

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 286 10-03-2022 11:23:47

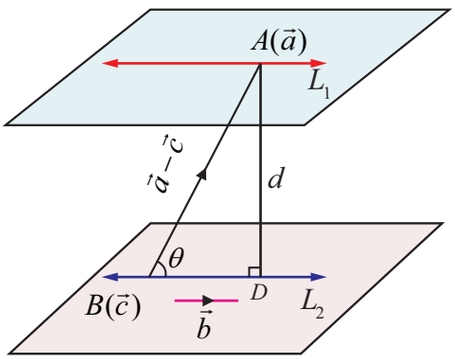
రేఖాఖండము యొక్క పొడవు అతలీయరేఖల మధ్య కనిష్టదూరంగా నిర్వచింపబడుచున్నది. రెండు సరళరేఖలు సమాంతరములు లేదా అతలీయములు.

సిద్ధాంతము 6.13

$\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ మరియు $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{b}$ అను రెండు సమాంతర రేఖలకు మధ్యగల కనిష్ఠ దూరము $d=\frac{|(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b}|}{|\vec{b}|}$, ఇక్కడ $|\vec{b}|\neq 0$

నిరూపణ

ఇవ్వబడిన $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ మరియు $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{b}$ అను రెండు సమాంతర రేఖలను వరుసగా L_1 మరియు L_2 అని గుర్తించెదము. L_1 మరియు L_2 లపై గల A మరియు B అను బిందువుల యొక్క స్థాన సదిశలు క్రమముగా $\vec{a}$ మరియు $\vec{c}$ అనుకొనుము. ఇవ్వబడిన రెండు రేఖలు $\vec{b}$ కు సమాంతరమైనవి.



పటము. 6.21

AD అనునది ఇవ్వబడిన రెండు రేఖలకు లంబము అనుకొనుము. $\overrightarrow{AB}$ మరియు $\vec{b}$ అను సదిశలకు మధ్యగల లఘు కోణము θ అయిన,

$$\sin\theta=\frac{|\overrightarrow{AB}\times\vec{b}|}{|\overrightarrow{AB}|\,|\vec{b}|}=\frac{|(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b}|}{|\vec{c}-\vec{a}||\vec{b}|} \quad \ldots (1)$$

అయిన, లంబకోణ త్రిభుజము ABD లో నుండి,

$$\sin\theta=\frac{d}{AB}=\frac{d}{|\overrightarrow{AB}|}=\frac{d}{|\vec{c}-\vec{a}|} \quad \ldots (2)$$

సమీకరణములు (1) మరియు (2)ల నుండి $d=\frac{|(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b}|}{|\vec{b}|}$, ఇక్కడ $|\vec{b}|\neq 0$.

సిద్ధాంతము 6.14

$\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ మరియు $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ అను అతలీయ రేఖలకు మధ్యగల కనిష్ఠ దూరము

$$\delta=\frac{|(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})|}{|\vec{b}\times\vec{d}|}, \text{ ఇక్కడ } |\vec{b}\times\vec{d}|\neq 0$$

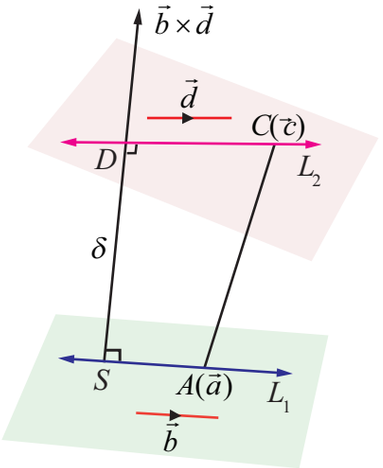
నిరూపణ

ఇవ్వబడిన $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ మరియు $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ అను ఒక తలములో అమరని రేఖలను క్రమముగా L_1 మరియు L_2 అని గుర్తించెదము.

L_1 మరియు L_2 అను రేఖలపై గల A మరియు C అను రెండు బిందువుల స్థాన సదిశలు క్రమముగా $\vec{a}$ మరియు $\vec{c}$ అనుకొనుము.

ఇవ్వబడిన రెండు ఒక తలములో అమరని రేఖల యొక్క సమీకరణముల నుండి, L_1 అను రేఖ $\vec{b}$ నకు సమాంతరముగా, L_2 అను రేఖ $\vec{d}$ నకు సమాంతరముగా ఉండుటను తెలుసుకొనవచ్చును. అందువలన $\vec{b}\times\vec{d}$ అనునది L_1 మరియు L_2 అను రెండు రేఖలకు లంబమగును.

SD అనునది L_1 మరియు L_2 అను రెండు రేఖలకు లంబముగా గల రేఖాఖండము అనుకొనుము. కావున $\overrightarrow{SD}$ అనునది $\vec{b}$ మరియు $\vec{d}$ అను రెండు సదిశలకు లంబమైన సదిశయగును. అందువలన, $\overrightarrow{SD}$ అనునది $\vec{b}\times\vec{d}$ నకు సమాంతరమైన సదిశయగును.



పటము. 6.22

కావున, $\dfrac{\vec{b}\times\vec{d}}{|\vec{b}\times\vec{d}|}$ అనునది $\overrightarrow{SD}$ యొక్క దిశలో గల యూనిట్ సదిశ అగును. ఇంకా, కనిష్ఠ దూరము $|\overrightarrow{SD}|$ అనునది, $\overrightarrow{SD}$ పై గల $\overrightarrow{AC}$ యొక్క విక్షేపణ అగును. అనగా,

$\delta = |\overrightarrow{SD}| = |\overrightarrow{AC}|$. ($\overrightarrow{SD}$ యొక్క దిశలో గల యూనిట్ సదిశ)

$$= \left|(\vec{c}-\vec{a})\cdot\frac{\vec{b}\times\vec{d}}{|\vec{b}\times\vec{d}|}\right|$$

$$\delta = \frac{|(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})|}{|\vec{b}\times\vec{d}|}, \text{ ఇక్కడ } |\vec{b}\times\vec{d}|\neq 0.$$

విశేషాంశము

(i) సిద్ధాంతము 6.14 నుండి $\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ మరియు $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ అనునవి ఒక దానికొకటి ఖండన రేఖలు (అనగా, ఒక తలములో అమరు రేఖలు) అయిన, $(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})=0$ అగును.

(2) $\dfrac{x-x_1}{b_1}=\dfrac{y-y_1}{b_2}=\dfrac{z-z_1}{b_3}$ మరియు $\dfrac{x-x_2}{d_1}=\dfrac{y-y_2}{d_2}=\dfrac{z-z_2}{d_3}$ అయిన రేఖలు ఒక దానికొకటి ఖండించుకొనిన (అనగా ఒక తలములో అమరు రేఖలు) అయిన

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}=0$$

ఉదాహరణ 6.34

$\vec{r}=(\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+t(2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})$ మరియు $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+3}{4}$ అను రేఖలు ఖండించుకొను బిందువు గుండా పోవుచూ, మరియు ఈ రెండు రేఖలకు లంబమైన సరళరేఖ యొక్క పరామితీయ సదిశ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన:-

$\vec{r}=(\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+t(2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k})$ అను రేఖ యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణము

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z+1}{2}=s \text{ (అనుకొనిన)}$$

ఈ రేఖపై గల ఏదైనా ఒక బిందువు యొక్క అమరిక $(2s+1,\ 3s+3,\ 2s-1)$ ... (1)

రెండవ రేఖ యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణము $\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+3}{4}=t$ (అనుకొనిన)

ఈ రేఖపై గల ఏదైనా ఒక బిందువు యొక్క అమరిక $(t+2,\ 2t+4,\ 4t-3)$ ... (2)

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 288 10-03-2022 11:23:52

ఇవ్వబడిన రేఖలు ఖండించుకొనిన, ఒక సామాన్య బిందువు ఉండవలయును. కనుక కొన్ని $s,t \in \mathbb{R}$ లకు, $(2s+1,\ 3s+3,\ 2s-1) = (t+2,\ 2t+4, 4t-3)$.

x, y మరియు z యొక్క నిరూపకములను సమానము చేసిన,

$$2s-t=1,\ 3s-2t=1 \text{ మరియు } s-2t=-1.$$

ఈ రెండు సమీకరణములలో మొదటి రెండు సమీకరణములను సాధించిన $s=1$ మరియు $t=1$ అని లభించును. s మరియు t యొక్క ఈ విలువలు మూడవ సమీకరణమును సంతృప్తిపరచును. కావున, ఇవ్వబడిన రేఖలు ఖండన రేఖలగును.

ఇప్పుడు s యొక్క విలువను సమీకరణము (1) లో లేదా t యొక్క విలువను సమీకరణము (2)లో ప్రతిక్షేపించిన, ఈ రెండు రేఖల యొక్క ఖండన బిందువు $(3,6,1)$ అని లభించును.

$\vec{b} = 2\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$ మరియు $\vec{d} = \hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$ అని తీసుకొనిన, $\vec{b}\times\vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 8\hat{i}-6\hat{j}+\hat{k}$ అని లభించును. ఈ సదిశ ఇవ్వబడిన రెండు రేఖలకు లంబమైన సదిశ అగును. కావున, కావలసిన సరళరేఖ $(3,6,1)$ అను బిందువు గుండా పోవుచు రెండు సరళరేఖలకు లంబమగును. కావున, కావలసిన సరళరేఖ $(3,6,1)$ అను బిందువు గుండా పోవుచు $8\hat{i}-6\hat{j}+\hat{k}$ అను సదిశకు సమాంతరముగాను ఉండును. కావున, కావలసిన సరళరేఖ యొక్క సదిశ సమీకరణము

$$\vec{r} = (3\hat{i}+6\hat{j}+\hat{k}) + m(8\hat{i}-6\hat{j}+\hat{k}),\ m \in \mathbb{R}.$$

ఉదాహరణ 6.35

$\vec{r} = (2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}) + t(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})$, $\vec{r} = (2\hat{j}-3\hat{k}) + s(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$ అను ఒక జత సరళరేఖలు సమాంతర రేఖలగునా? అని కనుగొనుము. తరువాత, ఆ రేఖలకు మధ్యగల కనిష్ఠ దూరమును కనుగొనుము.

సాధన:-

ఇవ్వబడిన రెండు సమీకరణములను

$\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ మరియు $\vec{r} = \vec{c} + s\vec{d}$ తో పోల్చిన,

$\vec{a} = 2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k},\ \vec{b} = 2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k},\ \vec{c} = 2\hat{j}-3\hat{k},\ \vec{d} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ అగును.

$\vec{b}$ ను $\vec{d}$ యొక్క అదిశా లబ్ధముగా వ్రాయుటకు వీలుకాదని స్పష్టముగా తెలియుచున్నది. కావున ఈ రెండు సదిశలు సమాంతర సదిశలు కావు. అందువలన రెండు రేఖలు సమాంతర రేఖలు కావు.

రెండు రేఖలకు మధ్యగల కనిష్ఠ దూరము

$$\delta = \frac{|(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})|}{|\vec{b}\times\vec{d}|}$$

ఇప్పుడు, $\vec{b}\times\vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 289 10-03-2022 11:23:53

ఇంకను, $(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d}) = (-2\hat{i}-4\hat{j}-6\hat{k})\cdot(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}) = 0$.

కావున, రెండు రేఖలకు మధ్య గల కనిష్ఠ దూరము సున్న అగును, కావున, ఇవ్వబడిన రేఖలు ఒక దానికొకటి ఖండన రేఖలగును.

ఉదాహరణ 6.36

$\vec{r} = (2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})+t(-2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$ మరియు $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{2}$ అను రేఖలకు మధ్యగల కనిష్ఠ దూరమును కనుగొనుము.

సాధన:-

ఇవ్వబడిన రెండు రేఖల యొక్క పరామితీయ సదిశ సమీకరణములు క్రమముగా

$$\vec{r} = (2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k})+t(-2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$$

మరియు $\vec{r} = (3\hat{i}-2\hat{k})+t(2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k})$ అగును.

ఈ సమీకరణములను $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$, $\vec{r}=\vec{c}+s\vec{d}$ తో పోల్చిన,

$\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$, $\vec{b}=-2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$, $\vec{c}=3\hat{i}-2\hat{k}$, $\vec{d}=2\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ అగును.

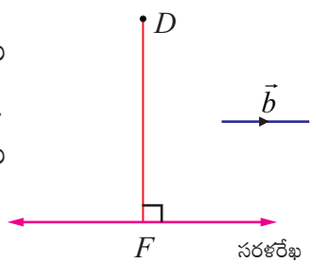
ఇక్కడ $\vec{b}$ అనునది $\vec{d}$ యొక్క అదిశా లబ్ధముగా అమరియుండుటను చూడవచ్చును. కావున, ఈ రెండు రేఖలు సమాంతరమైన రేఖలగును. రెండు సమాంతర సరళరేఖలకు మధ్య గల కనిష్ఠ దూరము $d=\frac{|(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b}|}{|\vec{b}|}$ అగును.

$$(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -3 & -6 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 12\hat{i}+14\hat{j}-5\hat{k}$$

కావున, $d = \frac{|12\hat{i}+14\hat{j}-5\hat{k}|}{|-2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}|} = \frac{\sqrt{365}}{3}$.

ఉదాహరణ 6.37

$(-1,2,3)$ అను బిందువు నుండి $\vec{r}=(\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k})+t(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$ అను సరళరేఖకు గీయబడిన లంబపాదము యొక్క నిరూపకములను కనుగొనుము. తరువాత ఇవ్వబడిన బిందువు నుండి సరళరేఖకు గల కనిష్ఠ దూరమును కనుగొనుము.



పటము. 6.23

సాధన:-

$\vec{r}=(\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k})+t(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k})$ అను సమీకరణమును $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ తో పోల్చిన $\vec{a}=\hat{i}-4\hat{j}+3\hat{k}$ మరియు $\vec{b}=2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}$ అగును. ఇవ్వబడిన $(-1,2,3)$ అను బిందువును D, అనియు, రేఖపై గల $(1,-4,3)$ అను బిందువును F అనియు గుర్తించవచ్చును. F అనునది D నుండి ఇవ్వబడిన సరళరేఖకు గీయబడిన లంబపాదము అయిన, F అను బిందువు యొక్క అమరిక $(2t+1,\ 3t-4, t+3)$ అగును మరియు $\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OD}=(2t+2)\hat{i}+(3t-6)\hat{j}+t\hat{k}$.

$\vec{b}$ అను సదిశ $\overrightarrow{DF}$ నకు లంబము కావున

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 290 10-03-2022 11:23:54

$$\vec{b}\cdot\overrightarrow{DF} = 0 \Rightarrow 2(2t+2)+3(3t-6)+1(t)=0 \Rightarrow t=1$$

కావున, F యొక్క నిరూపకములు $(3,-1,4)$ అగును.

ఇవ్వబడిన బిందువు నుండి ఇవ్వబడిన రేఖకు గల లంబ దూరము (కనిష్ఠ దూరము)

$$DF = |\overrightarrow{DF}| = \sqrt{4^2+(-3)^2+1^2} = \sqrt{26} \text{ ప్రమాణములు.}$$

అభ్యాసము 6.5

1. $(5,2,8)$ అను బిందువు ద్వారా వెళుతూ, $\vec{r}=(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})+s(2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$ మరియు $\vec{r}=(2\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k})+t(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k})$ అను రేఖలకు లంబముగా ఉండే సరళరేఖ యొక్క పరామితీయ సదిశ సమీకరణము మరియు కార్టీషియన్ సమీకరకణములను కనుగొనుము.
2. $\vec{r}=(6\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k})+s(\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})$ మరియు $\vec{r}=(3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k})+t(2\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k})$ అను రేఖలు అతలీయరేఖలని చూపుము. మరియు ఆ రేఖలకు మధ్య గల కనిష్ఠ దూరమును కనుగొనుము.
3. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{4}$ మరియు $\frac{x-3}{1}=\frac{y-m}{2}=z$ అను రేఖలు ఒక బిందువు వద్ద ఖండించుకొనిన, m విలువను కనుగొనుము.
4. $\frac{x-3}{3}=\frac{y-3}{-1}, z-1=0$ మరియు $\frac{x-6}{2}=\frac{z-1}{3}, y-2=0$ అను రేఖలు ఖండించుకొనును అని చూపుము మరియు ఖండన బిందువును కనుగొనము.
5. $x+1=2y=-12z$ మరియు $x=y+2=6z-6$ అను రేఖలు అతలీయాలు అని చూపుము మరియు వాటిమధ్య గల కనిష్ఠ దూరమును కనుగొనుము.
6. $(-1,2,1)$ అను బిందువు గుండా వెళుతూ $\vec{r}=(2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k})+t(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k})$ అను సరళరేఖకు సమాంతరమైన సరళరేఖ యొక్క పరామితీయ సదిశ సమీకరణమును కనుగొనుము మరియు ఆ రేఖలకు మధ్యగల కనిష్ఠదూరంను కనుగొనుము.
7. $(5,4,2)$ అను బిందువు నుండి $\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{3}=\frac{z-1}{-1}$ అను సరళరేఖకు గీయబడు లంబపాదమును కనుగొనుము మరియు ఈ లంబ రేఖ యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము.

6.8 ఒక తలము యొక్క సమీకరణపు వివిధ రూపాలు

ఒక తలము యొక్క భావనను ముందే అభ్యసించియున్నాము.

నిర్వచనము 6.8

ఒక తలమునకు లంబముగాగల సదిశను ఆ తలంనకు అభిలంబము అగును..

గమనిక:

ఒక తలము యొక్క అభిలంబరేఖ అనునది ఆ తలములో గల ఒక్కొక్క సరళరేఖకు లంబము అగును.

ఈ క్రింది వానిలో ఏదేని ఒకటి ఇచ్చిన, తలము ఏకైకమగును.

- తలమునకు అభిలంబ యూనిట్ సదిశ మరియు ఆది బిందువు నుండి ఆ తలమునకు గల దూరము
- తలముపై గల బిందువు మరియు తలము యొక్క ఒక అభిలంబరేఖ

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 291 10-03-2022 11:23:56

- తలంపై సరేఖీయములుకాని మూడు బిందువులు (non-collinear)
- తలముపై గల ఒక బిందువు మరియు తలమునకు సమాంతరముగా గల రెండు సమాంతరముకాని రేఖలు లేదా సమాంతరముకాని సదిశలు
- తలముపై రెండు విభన్న బిందువులు మరియు తలంనకు సమాంతరంగా గల ఒక సరళరేఖ లేదా శూన్యేతర సదిశ, కాని ఇది ఈ రెండు బిందువులను కలుపురేఖకు సమాంతరము కాదు.

తలము యొక్క సదిశ మరియు కార్టీషియన్ సమీకరణములను పైన తెలిపిన వివరములను ఉపయోగించి కనుగొనవచ్చును.

6.8.1 తలము యొక్క ఒక అభిలంబము మరియు ఆది బిందువు నుండి తలమునకు గల దూరము ఇచ్చినప్పుడు తలము యొక్క సమీకరణము
(Equation of a plane when a normal to the plane and the distance of the plane from the origin are given)

అ) తలము యొక్క అభిలంబరూప సదిశ సమీకరణము (Vector equation of a plane in normal form)

సిద్ధాంతము 6.15

ఆది బిందువు నుండి తలమునకు గల దూరము p మరియు తలమునకు అభిలంబముగా గల యూనిట్ సదిశ $\hat{d}$ అయిన, తలము యొక్క సమీకరణము $\vec{r}\cdot\hat{d}=p$ అగును.

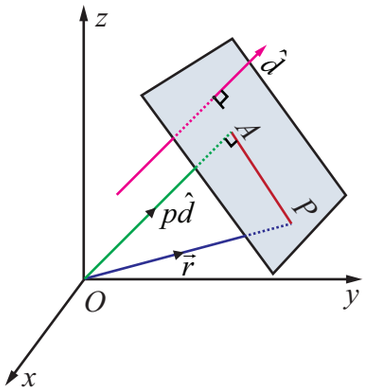
నిరూపణ

ఆది బిందువు నుండి p లంబ దూరములో గల తలమును తీసుకొనుము.

ఆదిబిందువు O నుండి తలమునకు గీసిన లంబపాదము A అనుకొనుము.

$\hat{d}$ యొక్క దిశలో గల యూనిట్ లంబ సదిశ $\overrightarrow{OA}$ అనుకొనుము.

తర్వాత, $\overrightarrow{OA}=p\hat{d}$ అగును.



పటము. 6.24

$\vec{r}$ అనునది తలములో గల ఏదైనా ఒక బిందువు P యొక్క స్థాన సదిశ అయిన $\overrightarrow{AP}$ అనునది $\overrightarrow{OA}$ కు లంబమగును.

కావున, $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{OA}=0 \Rightarrow (\vec{r}-p\hat{d})\cdot p\hat{d}=0$

$\Rightarrow (\vec{r}-p\hat{d})\cdot\hat{d}=0$

$$\vec{r}\cdot\hat{d}=p. \qquad \ldots (1)$$

ఈ సమీకరణము, తలము యొక్క అభిలంబరూప సదిశ సమీకరణము అనబడును. ■

ఆ) తలము యొక్క అభిలంబరూప కార్టీషియన్ సమీకరణము
(Cartesian equation of a plane in normal form)

$\hat{d}$ యొక్క దిశా కొసైన్‌లు l,m,n అనుకొనుము. కావున, $\hat{d}=l\hat{i}+m\hat{j}+n\hat{k}$ అగును.

దీనిని సమీకరణము (1)లో ప్రతిక్షేపించిన,

$$\vec{r}\cdot(l\hat{i}+m\hat{j}+n\hat{k})=p$$

P అనునవి (x,y,z) అయిన, $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ అగును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 292 10-03-2022 11:23:57

కావున, $(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot(l\hat{i}+m\hat{j}+n\hat{k})=p$ లేదా $lx+my+nz=p$ ... (2)

సమీకరణము (2) అనునది తలము యొక్క అభిలంబ రూప కార్టీషియన్ సమీకరణము అనబడును.

విశేషాంశములు

(i) ఆదిబిందువు ద్వారా తలము పోయిన, $p=0$ అగును. కావున, తలము యొక్క సమీకరణము $lx+my+nz=0$.

(ii) $\vec{d}$ అనునది తలమునకు లంబ సదిశ అయిన, $\hat{d}=\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}$ అనునది తలమునకు అభిలంబ యూనిట్ సదిశ అగును. కావున, తలము యొక్క సదిశా సమీకరణము $\vec{r}\cdot\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}=p$ లేదా $\vec{r}\cdot\vec{d}=q$, ఇక్కడ $q=p|\vec{d}|$

, $\vec{r}\cdot\vec{d}=q$ అను సమీకరణము తలము యొక్క ప్రామాణిక రూప సదిశ సమీకరణము అగును .

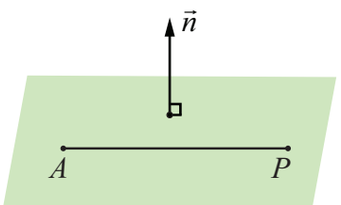
గమనిక:

$\vec{r}\cdot\vec{d}=q$ అను ప్రామాణిక రూప సమీకరణములో $\vec{d}$ అనునది యూనిట్ అభిలంబ సదిశగానో, q అనునది లంబదూరముగానో ఉండవలసిన అవసరము లేదు.

6.8.2 ఒక సదిశకు లంబముగా మరియు ఇవ్వబడిన ఒక బిందువు ద్వారా పోవు తలము యొక్క సమీకరణము (Equation of a plane perpendicular to a vector and passing through a given point)

అ) సదిశ సమీకరణము (Vector form of equation)

$\vec{a}$ అను సదిశను స్థాన సదిశగా గల బిందువు A గుండా వెళుతూ $\vec{n}$ కు లంబముగా గల తలముగా తీసుకొనుము.



పటము. 6.25

తలముపై గల ఏదైనా ఒక బిందువు P యొక్క స్థాన సదిశ $\vec{r}$ అనుకొనుము.

కావున $\overrightarrow{AP}$ అనునది $\vec{n}$ కు లంబమగును.

$\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$, దీని నుంచి $(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0$ . ... (1)

ఈ సమీకరణము $\vec{a}$ అను సదిశకు స్థాన సదిశగా గల బిందువు గుండా వెళుతూ $\vec{n}$ కు లంబముగా గల తలము యొక్క సదిశ సమీకరణముగును.

గమనిక:

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow \vec{r}\cdot\vec{n}=\vec{a}\cdot\vec{n} \Rightarrow \vec{r}\cdot\vec{n}=q, \text{ ఇక్కడ } q=\vec{a}\cdot\vec{n}.$$

ఆ) కార్టీషియన్ సమీకరణము (Cartesian form of equation)

a,b,c అనునవి $\vec{n}$ యొక్క దిశా నిష్పత్తులైన, $\vec{n}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ అగును. A యొక్క నిరూపకాలు (x_1,y_1,z_1) అనుకొనుము. కావున, సమీకరణము (1) నుండి

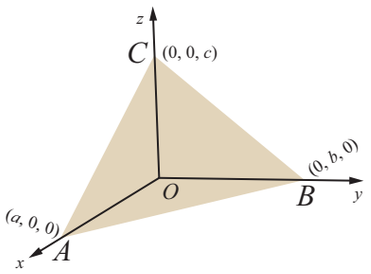
$((x-x_1)\hat{i}+(y-y_1)\hat{j}+(z-z_1)\hat{k})\cdot(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k})=0$.

$$a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1) = 0$$

ఇది (x_1,y_1,z_1) అను బిందువు గుండా వెళుతూ a,b,c అను వాటిని దిశా నిష్పత్తులుగా గల సదిశకు లంబముగా గల తలము యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణమగును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 293 10-03-2022 11:24:00

6.8.3 తలము యొక్క అంతరఖండ రూప సమీకరణము (Intercept form of the equation of a plane)



పటము. 6.26

$\vec{r}\cdot\vec{n}=q$ అను తలము $OA=a, OB=b, OC=c$ అను అంతర ఖండములను ఏర్పరచునట్లు నిరూపాక్షములను A,B,C అను బిందువులలో ఖండించునని అనుకొనుము. కావున, A యొక్క స్థాన సదిశ $a\hat{i}$ అగును. A అను ఈ బిందువు ఇవ్వబడిన తలముపై ఉండుట వలన, $a\hat{i}\cdot\vec{n}=q$ అగును. దీని నుండి $\hat{i}\cdot\vec{n}=\frac{q}{a}$ అగును. ఇదేవిధంగా $b\hat{j}$ మరియు $c\hat{k}$ అను సదిశలు ఇవ్వబడిన తలములో ఉండిన, $\hat{j}\cdot\vec{n}=\frac{q}{b}$ మరియు $\hat{k}\cdot\vec{n}=\frac{q}{c}$ అని లభించును. $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, $\vec{r}\cdot\vec{n}=q$ లో ప్రతిక్షేపించిన, మనము పొందునది $x\hat{i}\cdot\vec{n}+y\hat{j}\cdot\vec{n}+z\hat{k}\cdot\vec{n}=q$. కావున, $x\left(\frac{q}{a}\right)+y\left(\frac{q}{b}\right)+z\left(\frac{q}{c}\right)=q$.

q చే భాగించగా లభించునది, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

ఇది a,b,c అను అంతర ఖండములు క్రమముగా x,y,z అక్షములలో ఏర్పరచు తలము యొక్క అంతరఖండ సమీకరణము అగును.

సిద్ధాంతము 6.16

x,y,z లో పరిమాణం 1 గా గల $ax+by+cz+d=0$ అను సామాన్య సమీకరణము ఒక తలమును సూచించును.

నిరూపణ

$ax+by+cz+d=0$ అను సమీకరణమును సదిశ సమీకరణముగా

$(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k})=-d$ లేదా $\vec{r}\cdot\vec{n}=-d$ అని వ్రాయవచ్చును.

ఈ సమీకరణము ఒక తలము యొక్క ప్రామాణిక రూప సదిశ సమీకరణమగును. కావున, ఇవ్వబడిన సమీకరణము $ax+by+cz+d=0$ అనునది ఒక తలమును సూచించును. ఇక్కడ $\vec{n}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ అను సదిశ తలమునకు అభిలంబ సదిశ అగును. ■

గమనిక:

ఒక తలము యొక్క సామాన్య రూప సమీకరణము $ax+by+cz+d=0$ లో గల a,b,c అనునవి తలము యొక్క అభిలంబరేఖ యొక్క దిశా నిష్పత్తులు అగును.

ఉదాహరణ 6.38

ఆది బిందువు నుండి 12 ప్రమాణముల దూరములో మరియు $6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ అను సదిశకు లంబముగా గల తలము యొక్క సదిశ మరియు కార్టీషియన్ సమీకరణములను కనుగొనుము.

సాధన:-

ఇక్కడ, $\vec{d}=6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ మరియు $p=12$ అనుకొనుము.

$6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$ అను సదిశ యొక్క దిశలో గల యూనిట్ సదిశ $\hat{d}$ అయిన

$$\hat{d}=\frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}=\frac{1}{7}(6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}).$$

$\vec{r}$ అనునది తలములో గల ఏదైనా ఒక బిందువు (x,y,z) యొక్క స్థాన సదిశ అయిన, తలము యొక్క లంబరేఖ సదిశ సమీకరణము $\vec{r}\cdot\hat{d}=p$ ను ఉపయోగించిన, $\vec{r}\cdot\frac{1}{7}(6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})=12$.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 294 10-03-2022 11:24:02

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ను పై సమీకరణము నందు ప్రతిక్షేపించినలభించునది $(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot \frac{1}{7}(6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) = 12$. బిందు లబ్దమును ఉపయోగించి సూక్ష్మీకరించిన, లభించు $6x + 2y - 3z = 84$ సమీకరణము కావలసిన తలము యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణమగును.

ఉదాహరణ 6.39

ఒక తలము యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణము $3x - 4y + 3z = -8$ అయిన, తలము యొక్క సదిశ సమీకరణమును ప్రామాణిక రూపములో కనుగొనుము.

సాధన:-

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ అనునది తలములో గల ఏదైనా ఒక బిందువు (x, y, z) యొక్క స్థాన సదిశ అనుకొనుము. ఇవ్వబడిన సమీకరణమును $(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (3\hat{i} - 4\hat{j} + 3\hat{k}) = -8$ లేదా $(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \cdot (-3\hat{i} + 4\hat{j} - 3\hat{k}) = 8$ అని వ్రాయవచ్చును. ఇది ఇవ్వబడిన తలము యొక్క ప్రామాణిక రూప సదిశ సమీకరణము $\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}) = 8$

ఉదాహరణ 6.40

$\vec{r} \cdot (3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}) = 5$ అను తలము యొక్క అభిలంబ దిశా కొసైన్‌లు మరియు ఆదిబిందువు నుండి తలమునకు గీయబడు లంబము యొక్క పొడవును కనుగొనుము.

సాధన:-

$\vec{d} = 3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}$ మరియు $q = 5$ అనుకొనుము.

$3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k}$ యొక్క దిశలో గల యూనిట్ సదిశ $\hat{d}$ అయిన, $\hat{d} = \frac{1}{13}(3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k})$ అగును.

ఇవ్వబడిన సమీకరణమును 13చే భాగించగా,

$$\vec{r} \cdot \left(\frac{3}{13}\hat{i} - \frac{4}{13}\hat{j} + \frac{12}{13}\hat{k} \right) = \frac{5}{13}$$

ఇది $\vec{r} \cdot \hat{d} = p$ అను తలముపై యొక్క లంబరేఖ సమీకరణమగును.

ఈ సమీకరణము నుండి $\hat{d} = \frac{1}{13}(3\hat{i} - 4\hat{j} + 12\hat{k})$ అనునది ఆది బిందువు నుండి తలమునకు గీయబడు యూనిట్ లంబ సదిశ అగును. కావున, $\hat{d}$ యొక్క దిశా కొసైన్‌లు $\frac{3}{13}, \frac{-4}{13}, \frac{12}{13}$ మరియు ఆది బిందువు నుండి తలమునకు గీయబడు లంబము యొక్క పొడవు $\frac{5}{13}$ అగును.

ఉదాహరణ 6.41

$4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ అను సదిశను స్థాన సదిశగా గల బిందువు గుండా పోవుచూ $2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ అను సదిశకు లంబమైన తలము యొక్క సదిశ మరియు కార్టీషియన్ సమీకరణములను కనుగొనుము.

సాధన:-

ఇవ్వబడిన బిందువు యొక్క స్థాన సదిశ $\vec{a} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ మరియు $\vec{n} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ అనుకొనుము. ఇవ్వబడిన బిందువు గుండా వెళుతూ, ఇవ్వబడిన సదిశకు లంబముగా గల తలము యొక్క సదిశ సమీకరణము $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot \vec{n} = 0$ లేదా $\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{a} \cdot \vec{n}$

కావున, కావలసిన తలము యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుటకు ఈ సమీకరణములో $\vec{a} = 4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ మరియు $\vec{n} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ ను ప్రతిక్షేపించిన,

$$\vec{r} \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}) = (4\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k})$$

$\vec{r}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k})=3$ ఇది కావాలసిన తలము యొక్క సదిశారూప సమీకరణము అగును $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ అయిన కావలసిన తలము యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణము $2x-y+z=3$ అగును.

ఉదాహరణ 6.42

ఒక చలించు తలము నిరూపాక్షములలో ఏర్పరచు అంతరఖండముల విలోమముల మొత్తము ఒక స్థిరసంఖ్యగా వుండునట్లు చలించుచున్నదనిన, ఆ తలము అనునది ఒక స్థిర బిందువు గుండా పోవుచున్నదని చూపుము.

సాధన:-

x,y,z అక్షములలో క్రమముగా a,b,c అను అంతరఖండములను ఏర్పరచు తలము యొక్క సమీకరణము $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. అగును. నిరూపాక్షములతో ఏర్పరచు అంతరఖండముల విలోమముల మొత్తము ఒక స్థిర సంఖ్య అయినందువలన $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=k$ అగును. ఇక్కడ, k ఒక స్థిర సంఖ్య. దీనిని $\frac{1}{a}\left(\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{b}\left(\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{c}\left(\frac{1}{k}\right)=1$ అని వ్రాయవచ్చును.

ఈ సమీకరణము $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ అను తలము $\left(\frac{1}{k},\frac{1}{k},\frac{1}{k}\right)$ అను స్థిర బిందువు గుండా వెళుచున్నదని చూపుచున్నది.

అభ్యాసము 6.6

1. ఆది బిందువు నుండి 7 ప్రమాణములు దూరములో ఉండు మరియు అభిలంబము యొక్క దిశా నిష్పత్తులు $3,-4,5$ లను గల తలము యొక్క సదిశ సమీకరణమును కనుగొనుము.

2. $12x+3y-4z=65$ అను తలము యొక్క అభిలంబ దిశా కొసైన్‌లను కనుగొనుము. మరియు తలము యొక్క పరామితీయముకాని సదిశ సమీకరణము మరియు ఆదిబిందువు నుండి తలమునకు గీయబడు లంబము యొక్క పొడవును కనుగొనుము.

3. $2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}$ అను స్థాన సదిశను కలిగిన బిందువు గుండా వెళుతూ $\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}$ అను సదిశకు లంబమైన తలము యొక్క సదిశ మరియు కార్టీషియన్ సమీకరణములను కనుగొనుము.

4. $(-1,1,2)$ గుండా పోతూ $3\sqrt{3}$ పరిమాణంగల అభిలంబమును కలిగిన తలము నిరూపక్షాములతో సమాన లఘుకోణాలు చేయుచున్నది. ఈ తలము సమీకరణమును కనుగొనుము?

5. $\vec{r}\cdot(6\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k})=12$ అను తలము నిరూపాక్షములతో ఏర్పరచు అంతరఖండములను కనుగొనుము.

6. ఒక తలము నిరూపాక్షములను క్రమముగా A,B,C అను బిందువులలో ఖండించుకొనిన ఏర్పడు త్రిభుజము ABC యొక్క గరిమనాభి (గురుత్వకేంద్రము) (u,v,w) అయిన, తలము యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 296 10-03-2022 11:24:04

6.8.4 ఇవ్వబడిన సరేఖీయాలు కాని మూడు బిందువుల గుండా పోవు తలము యొక్క సమీకరణము (Equation of a plane passing through three given non-collinear points)

అ) పరామితీయ సదిశ సమీకరణము (Parametric form of vector equation)

సిద్ధాంతము 6.17

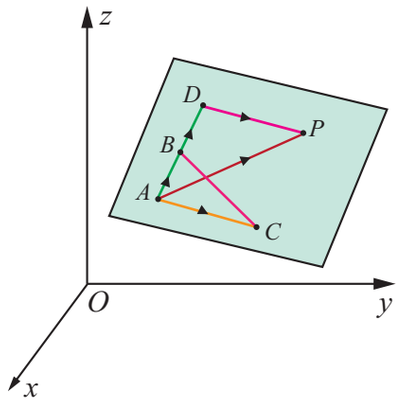
$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అనునవి సరేఖీయములుకాని మూడు బిందువుల యొక్క స్థానసదిశలైన, ఇవ్వబడిన ఈ మూడు బిందువులు గుండా పోవు తలము యొక్క పరామితీయ సదిశ సమీకరణము

$$\vec{r}=\vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a}),\ \text{ఇక్కడ}\ \vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{c}\neq\vec{0}\ \text{మరియు}\ s,t\in\mathbb{R}\ \text{అగును.}$$

నిరూపణ

తలంపై సరేఖీయంకాని బిందువులు A,B మరియు Cలు అనుకొందాము మరియు వీని స్థానసదిశలు వరుసగా $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ కావున, వీటిలో కనీసము రెండు సదిశలు శూన్యేతర సదిశలుగా ఉండును. మనము $\vec{b}\neq\vec{0}$ మరియు $\vec{c}\neq\vec{0}$ అనుకొనుము. తలముపై గల ఏదైనా ఒక బిందువు P యొక్క స్థానసదిశ $\vec{r}$ అనుకొనుము. $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$ కు సమాంతముగా మరియు $\overrightarrow{DP}$, అనునది $\overrightarrow{AC}$కు సమాంతరం అగునట్లు పొడిగించిన AB పై D బిందువును తీసుకొందాము. కావున

$$\overrightarrow{AD}\ =\ s(\vec{b}-\vec{a}),\ \overrightarrow{DP}=t(\vec{c}-\vec{a}).$$



పటము. 6.27

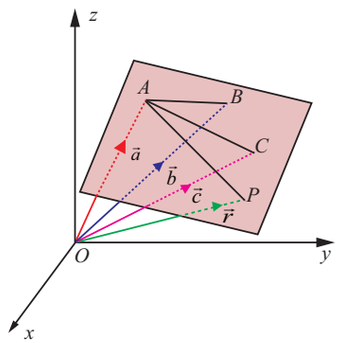
త్రిభుజము ADP, లో

$\overrightarrow{AP}\ =\ \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}$ లేదా $\vec{r}-\vec{a}=s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})$, ఇక్కడ $\vec{b}\neq\vec{0},\ \vec{c}\neq\vec{0}$ మరియు $s,t\in\mathbb{R}$. అనగా, $\vec{r}\ =\ \vec{a}+s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})$.

ఇది ఇవ్వబడిన సరేఖీయములు కాని మూడు బిందువుల గుండా పోవు తలము యొక్క పరామమితీయ సదిశ సమీకరణమగును. ■

ఆ) పరామితీయకాని సదిశ సమీకరణము (Non-parametric form of vector equation)

తలంపై సరేఖీయంకాని బిందువులు A,B మరియు Cలు అనుకొందాము మరియు వీని స్థానసదిశలు వరుసగా $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ కావున వీటిలో కనీసము రెండు సదిశలైనా శూన్యేతరముగా ఉండును. మనము $\vec{b}\neq\vec{0}$ మరియు $\vec{c}\neq\vec{0}$ అని అనుకొందుము. కావున, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ మరియు $\overrightarrow{AC}=\vec{c}-\vec{a}$ అగును. $(\vec{b}-\vec{a})$ మరియు $(\vec{c}-\vec{a})$ అను సదిశలు అగును తలముపై ఉన్నవి. మరియు $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అను సరేఖీయములు కాని సదిశలు అగుట వలన, $\overrightarrow{AB}$ అనునది $\overrightarrow{AC}$ నకు సమాంతరముగా ఉండదు. కావున, $(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})$ అను సదిశకు లంబమైన తలము యొక్క సమీకరణమగును.



పటము. 6.28

తలంపై గల ఏదేని $P(x,y,z)$ బిందువు యొక్క స్థానసదిశ $\vec{r}$ అయున $\vec{a}$ స్థానస దిశగా గల బిందువు A ద్వారా పోతూ $(\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a})$ అను సదిశకు లంబముగా గల తలం సమీకరణము

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot((\vec{b}-\vec{a})\times(\vec{c}-\vec{a}))\ =\ 0\ \ \text{లేదా}\ \ [\vec{r}-\vec{a},\vec{b}-\vec{a},\vec{c}-\vec{a}]=0$$

ఇది సరేఖీయములు కాని మూడు బిందువుల గుండా పోవు తలము యొక్క పరామితీయకాని సదిశ సమీకరణమగును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 297 10-03-2022 11:24:05

ఇ) కార్టీషియన్ సమీకరణము (Cartesian form of equation)

$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అను స్థాన సదిశలను కలిగిన సరేఖీయములుకాని మూడు బిందువులు A,B,C అనువాటి నిరూపాక్షములు క్రమముగా $(x_1,y_1,z_1),(x_2,y_2,z_2)$, మరియు (x_3,y_3,z_3) అగును మరియు $\vec{r}$ అను సదిశను స్థాన సదిశగా గల p అను బిందువు యొక్క నిరూపాక్షములు (x,y,z) అయిన,

$$\vec{a}=x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k},\ \vec{b}=x_2\hat{i}+y_2\hat{j}+z_2\hat{k},\ \vec{c}=x_3\hat{i}+y_3\hat{j}+z_3\hat{k} \text{ మరియు } \vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}.$$

ఈ సదిశలను ఉపయోగించి, సరేఖీయములు కాని మూడు బిందువులు గుండా పోవు తలము యొక్క పరామితీయము కాని సదిశ సమీకరణమును ఈ క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0$$

ఇదియే సరేఖీయములుకాని మూడు బిందువుల గుండా పోవు తలము యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణమగును.

6.8.5 ఇవ్వబడిన ఒక బిందువు గుండా పోవుచు మరియు సమాంతరము కాని రెండు సదిశలకు సమాంతరముగా గల తలము యొక్క సమీకరణము. (Equation of a plane passing through a given point and parallel to two given non-parallel vectors)

అ) పరామితీయ సదిశ సమీకరణము (Parametric form of vector equation)

$\vec{a}$ అను స్థాన సదిశను కలిగిన ఇవ్వబడిన బిందువు A గుండా పోవుచు మరియు ఇవ్వబడిన సమాంతరము కాని $\vec{b}$, $\vec{c}$ అను రెండు సదిశలకు సమాంతరముగా ఒక తలముగలదని అనుకొనుము. తలముపై గల ఏదైనా ఒక బిందువు P యొక్క స్థాన సదిశ $(\vec{r}-\vec{a})$ అయిన, $\vec{b}$ మరియు $\vec{c}$ అనునవి సతలీయములు. కావున $(\vec{r}-\vec{a})$ అను సదిశ $\vec{b}$ మరియు $\vec{c}$ అను సదిశలు అమరు తలములో ఉండును. కావున, $s,t\in\mathbb{R}$ అగునట్లు $\vec{r}-\vec{a}=s\vec{b}+t\vec{c}$ అను అదిశలను కనుగొనవచ్చును. దీని నుండి

$$\vec{r} = \vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}, \text{ ఇక్కడ } s,t\in\mathbb{R} \qquad \ldots (1)$$

ఇది ఇవ్వబడిన ఒక బిందువు గుండా పోవుచు మరియు సమాంతరము కాని రెండు సదిశలకు సమాంతరమైన తలము యొక్క పరామితీయ సదిశ సమీకరణమగును.

ఆ) పరామితీయ కాని సదిశ సమీకరణము (Non-parametric form of vector equation)

సమీకరణము (1)ను క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{c}) = 0 \qquad \ldots (2)$$

ఇది ఇవ్వబడిన ఒక బిందువు గుండా పోవుచు మరియు ఇవ్వబడిన సమాంతరము కాని రెండు సదిశలకు సమాంతరమైన తలము యొక్క పరామితీయకాని సదిశ సమీకరణమగును.

ఇ) కార్టీషియన్ సమీకరణము (Cartesian form of equation)

$\vec{a}=x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k},\ \vec{b}=b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k},\ \vec{c}=c_1\hat{i}+c_2\hat{j}+c_3\hat{k}$ మరియు $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ అయిన, సమీకరణము (2)ను క్రిందివిధంగా వ్రాయవచ్చును.

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 298 10-03-2022 11:24:06

ఇది ఇవ్వబడిన ఒక బిందువు గుండా పోవుచు, మరియు సమాంతరముకాని రెండు సదిశలకు సమాంతరమగు తలము యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణమగును.

6.8.6 ఇవ్వబడిన రెండు వేర్వేరు బిందువుల గుండా పోవుచు ఒక శూన్యేతర సదిశకు సమాంతరముగా గల తలము యొక్క సమీకరణము (Equation of a plane passing through two given distinct points and is parallel to a non-zero vector)

అ) పరామితీయ సదిశ సమీకరణము (Parametric form of vector equation)

$\vec{a}$, $\vec{b}$ అను స్థాన సదిశలను కలిగిన రెండు వేర్వేరు బిందువులు A మరియు B గుండా పోవుచూ $\vec{c}$ అను శూన్యేతర సదిశకు సమాంతరమగును. తలము యొక్క పరామితీయ సదిశ సమీకరణము

$$\vec{r} = \vec{a} + s(\vec{b} - \vec{a}) + t\vec{c} \quad \text{లేదా} \quad \vec{r} = (1-s)\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \qquad \ldots (1)$$

ఇందు, $s, t \in \mathbb{R}, (\vec{b} - \vec{a})$ మరియు $\vec{c}$ అనునవి సమాంతర సదిశలుకావు.

ఆ) పరామితీయకాని సదిశ సమీకరణము (Non-parametric form of vector equation)

సమీకరణము (1) ను పరామితీయకాని సదిశ సమీకరణముగా క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$$(\vec{r} - \vec{a}) \cdot ((\vec{b} - \vec{a}) \times \vec{c}) = 0 \qquad \ldots (2)$$

ఇక్కడ, $(\vec{b} - \vec{a})$ మరియు $\vec{c}$ అనునవి సమాంతర సదిశలు కావు క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

ఇ) కార్టీషియన్ సమీకరణము (Cartesian form of equation)

$\vec{a} = x_1\hat{i} + y_1\hat{j} + z_1\hat{k}$, $\vec{b} = x_2\hat{i} + y_2\hat{j} + z_2\hat{k}$, $\vec{c} = c_1\hat{i} + c_2\hat{j} + c_3\hat{k} \neq \vec{0}$ మరియు $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$, అయిన సమీకరణము (2)ను క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

కావలసిన తలము యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణమగును.

ఉదాహరణ 6.43

$(0,1,-5)$ అను బిందువు ద్వారా పోవుచూ $\vec{r} = (\hat{i} + 2\hat{j} - 4\hat{k}) + s(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ మరియు $\vec{r} = (\hat{i} - 3\hat{j} + 5\hat{k}) + t(\hat{i} + \hat{j} - \hat{k})$ అను రేఖలకు సమాంతరముగా ఉండిన తలము యొక్క పరామితీయకాని సదిశ సమీకరణము మరియు కార్టీషియన్ సమీకరణములను కనుగొనుము.

సాధన:-

కావలసిన తలము $\vec{b} = 2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k}$, $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$ అను సదిశలకు సమాంతరముగా, $(0,1,-5)$ ను స్థాన సదిశగా గల $\vec{a}$ అను బిందువు గుండా పోవుటను చూడవచ్చును. మరియు $\vec{b}$ మరియు $\vec{c}$ అనునవి సమాంతర సదిశలు కావని తెలుసుకొనవచ్చును. కావలసిన తలము యొక్క పరామితీయకాని సదిశ సమీకరణము $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$. ...(1)

ఇప్పుడు $\vec{a} = \hat{j} - 5\hat{k}$ మరియు $\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -9\hat{i} + 8\hat{j} - \hat{k}$ అను సమీకరణము (1)లో ప్రతిక్షేపించన,

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 299 10-03-2022 11:24:07

$$(\vec{r}-(\hat{j}-5\hat{k}))\cdot(-9\hat{i}+8\hat{j}-\hat{k}) = 0,$$
$$\vec{r}\cdot(-9\hat{i}+8\hat{j}-\hat{k}) = 13.$$

$\vec{r} = x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ అనునది తలముపై గల ఏదైనా ఒక బిందువు యొక్క స్థాన సదిశ అయిన, పై సమీకరణము నుండి తలము యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణమును $-9x+8y-z=13$ లేదా $9x-8y+z+13=0$ అని పొందెదము.

ఉదాహరణ 6.44

$(-1,2,0)$, $(2,2-1)$ అను బిందువుల గుండా పోవుచూ $\frac{x-1}{1}=\frac{2y+1}{2}=\frac{z+1}{-1}$ అను రేఖకు సమాంతరముగా గల తలము యొక్క పరామితీయ సదిశ సమీకరణము, పరామితీయకాని సదిశ సమీకరణము మరియు కార్టీషియన్ సమీకరణములను కనుగొనుము.

సాధన:-

కావలసిన తలము ఇవ్వబడిన రేఖకు సమాంతరమగుట వలన, ఆ తలము $\vec{c}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ అను సదిశకు సమాంతరముగా మరియు $\vec{a}=-\hat{i}+2\hat{j}$, $\vec{b}=2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$. అను బిందువుల ద్వారా పోవును.

- తలము యొక్క పరామితీయ సదిశ సమీకరణము $\vec{r}=\vec{a}+s\left(\vec{b}-\vec{a}\right)+t\vec{c}$ ఇక్కడ $s,\ t\in\mathbb{R}$.
  $\vec{r}=\left(-\hat{i}+2\hat{j}\right)+s\left(3\hat{i}-\hat{k}\right)+t\left(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}\right)$, ఇక్కడ $s,t\in\mathbb{R}$.
- తలము యొక్క పరామితీయకాని సదిశ సమీకరణము $(\vec{r}-\vec{a})\cdot((\vec{b}-\vec{a})\times\vec{c})=0$

  ఇక్కడ, $(\vec{b}-\vec{a})\times\vec{c}=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\3&0&-1\\1&1&-1\end{vmatrix}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$,

  కావున, $(\vec{r}-(-\hat{i}+2\hat{j}))\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})=0\Rightarrow\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})=3$
- $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ అనునది తలముపై గల ఏదైనా ఒక బిందువు యొక్క స్థాన సదిశ అయిన, పైన గల సమీకరణము నుండి తలము యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణమును $x+2y+3z=3$ అని పొందుదుము.

అభ్యాసము 6.7

1. $(2,3,6)$ అను బిందువు గుండా పోవుచూ, $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}$ మరియు $\frac{x+3}{2}=\frac{y-3}{-5}=\frac{z+1}{-3}$ అను రేఖలకు సమాంతరముగా గల తలము యొక్క పరామితీయకాని సదిశ సమీకరణము మరియు కార్టీషియన్ సమీకరణములను కనుగొనుము.
2. $(2,2,1)$, మరియు $(9,3,6)$ అను బిందువుల గుండా పోవుచూ, $2x+6y+6z=9$ అను తలమునకు లంబముగా అమరు తలము యొక్క పరామితీయకాని సదిశ సమీకరణము మరియు కార్టీషియన్ సమీకరణములను కనుగొనుము.
3. $(2,2,1)$, మరియు $(1,-2,3)$ అను బిందువుల ద్వారా పోవుచూ, $(2,1,-3)$ మరియు $(-1,5,-8)$ అను బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖకు సమాంతరముగా గల తలము యొక్క పరామితీయ సదిశ సమీకరణము మరియు కార్టీషియన్ సమీకరణములను కనుగొనుము.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 300 10-03-2022 11:24:07

4. $(1,-2,4)$ అను బిందువు గుండా పోవుచూ, $x+2y-3z=11$ అను తలమునకు లంబముగాను $\frac{x+7}{3}=\frac{y+3}{-1}=\frac{z}{1}$ అను రేఖకు సమాంతరముగా అమరు తలము యొక్క పరామితీయకాని సదిశ సమీకరణము మరియు కార్టీషియన్ సమీకరణములను కనుగొనుము.

5. $\vec{r}=(\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k})+t(2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k})$ అను రేఖను కలిగిన $\vec{r}\cdot(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k})=8$ అను తలమునకు లంబమగు తలము యొక్క పరామితీయ సదిశ కార్టీషియన్ సమీకరణములను కనుగొనుము.

6. $(3,6,-2),(-1,-2,6)$ మరియు $(6, 4, -2)$ అను ఏకరేఖీయములు కాని బిందువుల ద్వారా పోవు తలము యొక్క పరామితీయ, పరామితీయకాని సదిశ మరియు కార్టీషియన్ సమీకరణములను కనుగొనుము.

7. $\vec{r}=\left(6\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)+s\left(-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}\right)+t\left(-5\hat{i}-4\hat{j}-5\hat{k}\right)$. అను తలము యొక్క పరామితీయకాని సదిశ మరియు కార్టీషియన్ సమీకరణములను కనుగొనుము.

6.8.7 ఒక రేఖ ఒక తలముపై అమరుటకు నిబంధన (Condition for a line to lie in a plane)

ఇవ్వబడిన ఒక రేఖపై గల ఒక్కొక్క బిందువు తలముపై కలదనిన, తలము యొక్క లంబరేఖ ఇవ్వబడిన సరళరేఖకు లంబముగా అమరునని, ఆ సరళరేఖ తలముపై అమరును. అనగా

(i) $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ అను రేఖ $\vec{r}\cdot\vec{n}=d$ అను తలముపై ఉండిన, $\vec{a}\cdot\vec{n}=d$ మరియు $\vec{b}\cdot\vec{n}=0$ అగును.

(ii) $\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=\frac{z-z_1}{c}$ అను రేఖ $Ax+By+Cz+D=0$ అను తలముపై ఉండిన, $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ మరియు $aA+bB+cC=0$ అగును.

ఉదాహరణ 6.45

$\frac{x-3}{-4}=\frac{y-4}{-7}=\frac{z+3}{12}$ అను రేఖ $5x-y+z=8$ అను తలములో అమరునా? అని సరిచూడుము.

సాధన:-

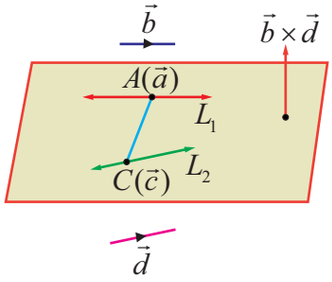
ఇక్కడ $(x_1,y_1,z_1)=(3,4,-3)$ మరియు రేఖ యొక్క దిశా నిష్పత్తులు $(a,b,c)=(-4,-7,12)$ అగును. తలము యొక్క లంబరేఖ దిశా నిష్పత్తులు $(A,B,C)=(5,-1,1)$ అగును.

ఇవ్వబడిన బిందువు $(x_1,y_1,z_1)=(3,4,-3)$ అనునది $5x-y+z=8$ అను తలమును తృప్తిపరచును. కనుక అయిన, $aA+bB+cC=(-4)(5)+(-7)(-1)+(12)(1)=-1\neq 0$. తలము యొక్క లంబరేఖ ఇవ్వబడిన రేఖకు లంబముకాదు. కావున, ఇవ్వబడిన రేఖ అనునది ఇవ్వబడిన తలముపై అమరదు. ■

6.8.8 రెండు రేఖలు ఒకే తలములో అమరుటకు నిబంధనలు (Condition for coplanarity of two lines)

అ) సదిశ నిబంధన (Condition in vector form)

$\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ మరియు $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ అనునవి ఇవ్వబడిన రెండు సమాంతరము కాని ఒక తలములో అమరు రేఖలు అనుకొనుము. కనుక, అవి ఒకే తలములో ఉండును. $\vec{a}$ మరియు $\vec{c}$ అనువాటిని స్థానసదిశగా గల రెండు బిందువులు A మరియు C అనుకొనుము. కావున A మరియు C అను ఈ రెండు బిందువులు తలముపై అమరును. $\vec{b}$ మరియు $\vec{d}$ అను సదిశలు



పటము. 6.29

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 301 10-03-2022 11:24:08

తలమునకు సమాంతరముగా గల సదిశలగుట వలన, $\vec{b}\times\vec{d}$ అనునది తలమునకు లంబముగా అమరును. కావున, $\overrightarrow{AC}$ అనునది $\vec{b}\times\vec{d}$ నకు లంబమగును. అనగా,

$$\left(\vec{c}-\vec{a}\right)\cdot\left(\vec{b}\times\vec{d}\right) = 0$$

ఇదియే రెండు సరళరేఖలు ఒకే తలములో అమరుటకు కావలసిన నిబంధన అగును.

ఆ) కార్టీషియన్ రూప నిబంధన (Condition in Cartesian form)

$\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$ మరియు $\frac{x-x_2}{d_1}=\frac{y-y_2}{d_2}=\frac{z-z_2}{d_3}$ అను రేఖలు ఒకే తలములో అమరిన,

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

ఇదియే, ఇవ్వబడిన రెండు రేఖలు ఒకే తలములో అమరుటకు కావలసిన కార్టీషియన్ రూప నిబంధన అగును.

6.8.9 ఒకే తలములో అమరు సమాంతరము కాని రెండు రేఖలను కలిగిన తలము యొక్క సమీకరణము (Equation of plane containing two non-parallel coplanar lines)

అ) పరామితీయ సదిశ సమీకరణము (Parametric form of vector equation)

$\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ మరియు $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ అనునవి ఒకే తలములో అమరు సమాంతరము కాని రెండు రేఖలు అనుకొనుము. కావున, $\vec{b}\times\vec{d}\neq\vec{0}$ అగును. $\vec{r_0}$ అనుసదిశను స్థాన సదిశగా కలిగిన తలములోగల ఏదైనా ఒక బిందువు P అనుకొనుము. కావున, $\vec{r_0}-\vec{a},\vec{b},\vec{d}$ మరియు $\vec{r_0}-\vec{c},\vec{b},\vec{d}$ అనునవి ఒక తలములో గల సదిశలగును. అందువలన $\vec{r_0}-\vec{a}=t\vec{b}+s\vec{d}$ లేదా $\vec{r_0}-\vec{c}=t\vec{b}+s\vec{d}$ అగును. కావున, కావలసిన తలము యొక్క పరామితీయ సదిశ సమీకరణము $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}+s\vec{d}$ లేదా $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{b}+s\vec{d}$ అగును.

ఆ) పరామితీయకాని సదిశ సమీకరణము (Non-parametric form of vector equation)

$\vec{r}=\vec{a}+s\vec{b}$ మరియు $\vec{r}=\vec{c}+t\vec{d}$ అనునవి ఒకే తలములో అమరు సమాంతరము కాని రెండు రేఖలు అనుకొనుము. కావున, $\vec{b}\times\vec{d}\neq\vec{0}$ అగును. $\vec{r_0}$ అను సదిశను స్థాన సదిశగా కలిగిన తలములో గల ఏదైనా ఒక బిందువు P అనుకొనుము. కావున, $\vec{r_0}-\vec{a},\vec{b},\vec{d}$ లేదా $\vec{r_0}-\vec{c},\vec{b},\vec{d}$ అగును. కావున, $\left(\vec{r_0}-\vec{a}\right).\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)=0$ లేదా $\left(\vec{r_0}-\vec{c}\right).\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)=0$ అనునవి కావలసిన తలము యొక్క పరామితీయకాని సదిశ సమీకరణమగును.

ఇ) కార్టీషియన్ సమీకరణము (Cartesian form of equation of plane)

$\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$ మరియు $\frac{x-x_2}{d_1}=\frac{y-y_2}{d_2}=\frac{z-z_2}{d_3}$ అను ఒకే తలములో అమరు రెండు రేఖలను కలిగిన తలము యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{లేదా}$$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 302 10-03-2022 11:24:17

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

ఉదాహరణ 6.46

$\vec{r} = \left(-\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}\right)+s\left(3\hat{i}+5\hat{j}+7\hat{k}\right)$ మరియు $\vec{r} = \left(2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}\right)+t\left(\hat{i}+4\hat{j}+7\hat{k}\right)$ అను రేఖలు సతలీయములు అని చూపుము మరియు ఈ రేఖలను కలిగిన తలము యొక్క పరామితీయకాని సదిశ సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన:-

ఇవ్వబడిన రెండు రేఖల సమీకరణములను

$$\vec{r} = \vec{a}+t\vec{b},\ \vec{r} = \vec{c}+s\vec{d}$$

$\vec{a} = -\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}, \vec{b} = 3\hat{i}+5\hat{j}+7\hat{k}, \vec{c} = 2\hat{i}+4\hat{j}+6\hat{k}$ మరియు $\vec{d} = \hat{i}+4\hat{j}+7\hat{k}$ తో పోల్చిన

రెండు రేఖలు ఒకే తలములో అమరు రేఖలుగా ఉండుటకు నిబంధన $(\vec{c}-\vec{a})\cdot\left(\vec{b}\times\vec{d}\right)=0$

ఇక్కడ, $\vec{b}\times\vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 7\hat{i}-14\hat{j}+7\hat{k}$ మరియు $\vec{c}-\vec{a} = 3\hat{i}+7\hat{j}+11\hat{k}$

ఇప్పుడు, $(\vec{c}-\vec{a})\cdot\left(\vec{b}\times\vec{d}\right) = \left(3\hat{i}+7\hat{j}+11\hat{k}\right)\cdot\left(7\hat{i}-14\hat{j}+7\hat{k}\right)=0$. అగును.

కావున, ఇవ్వబడిన రెండు రేఖలు ఒకే తలములో అమరును. ఇప్పుడు, ఈ రెండు రేఖలు అమరు తలము యొక్క పరామితీయకాని సదిశ సమీకరణమును కనుగొనవచ్చును. ఒకే తలములో అమరు రెండు రేఖలను కలిగిన తలము యొక్క సదిశ సమీకరణము

$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot\left(\vec{b}\times\vec{d}\right) = 0 \text{ అగును.}$$

$\left(\vec{r}-\left(-\hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}\right)\right)\cdot\left(7\hat{i}-14\hat{j}+7\hat{k}\right)=0$ అను సమీకరణమగును. అనగా $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}\right)=0$ అగును. ఇదియే, కావలసిన తలము యొక్క పరామితీయకాని సదిశ సమీకరణములగును. ■

అభ్యాసము 6.8

1. $\vec{r} = (5\hat{i}+7\hat{j}-3\hat{k})+s(4\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k})$ మరియు $\vec{r} = \left(8\hat{i}+4\hat{j}+5\hat{k}\right)+t\left(7\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}\right)$ అను రేఖలు సతలీయములు అని చూపుము. మరియు ఈ రేఖలు అమరు తలము యొక్క పరామితీయకాని సదిశ సమీకరణమును కనుగొనుము.
2. $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{3}$ మరియు $\frac{x-1}{-3}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-5}{1}$ అను రేఖలు సతలీయములు అని చూపుము. మరియు ఈ రేఖలు అమరు తలమును కనుగొనుము.
3. $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{m^2}$ మరియు $\frac{x-3}{1}=\frac{y-2}{m^2}=\frac{z-1}{2}$ అను రేఖలు, సతలీయములైన m యొక్క వేర్వేరు విలువలను కనుగొనుము.
4. $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{\lambda}=\frac{z}{2}$ మరియు $\frac{x+1}{5}=\frac{y+1}{2}=\frac{z}{\lambda}$ అను రేఖలు సతలీయములైన λ యొక్క విలువను కనుగొనుము. మరియు ఈ రెండు రేఖలను కలిగిన తలము యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 303 10-03-2022 11:24:19

6.8.10 రెండు తలముల మధ్య గల కోణము (Angle between two planes)

రెండు తలములకు మధ్యగలకోణము ఆ తలములలో ఉన్న లంబరేఖలకు మధ్య ఉన్న కోణమునకు సమానమగును.

సిద్ధాంతము 6.18

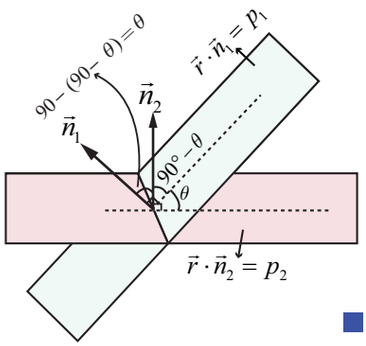
$\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = p_1$ మరియు $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = p_2$ అను రెండు తలములకు మధ్య ఉన్న లఘుకోణము θ అయిన

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right)$$

నిరూపణ

$\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = p_1$ మరియు $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = p_2$ అను రెండు తలములకు మధ్యగల లఘు కోణము θ అనునది ఆ తలముల లంబ సదిశలు $\vec{n}_1$ మరియు $\vec{n}_2$ అను వాటికి మధ్యగల కోణముఅగును. కావున

$$\cos\theta = \left(\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right) \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right) \quad \ldots (1)$$



పటము. 6.30

విశేషాంశము

(i) $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = p_1$ మరియు $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = p_2$ అను రెండు తలములు ఒకదానికి మరొకటి లంబంగా ఉన్నందువలన $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2 = 0$ అగును.

(ii) $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = p_1$ మరియు $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = p_2$ అను రెండు తలములు సమాంతరమైన $\vec{n}_1 = \lambda\vec{n}_2$. ఇక్కడ λ ఒక అదిశ అగును.

(iii) $\vec{r}\cdot\vec{n} = p$ అను తలమునకు సమాంతరముగా ఉన్న తలము యొక్క సమీకరణము $\vec{r}\cdot\vec{n} = k,\ k\in\mathbb{R}$ అగును.

సిద్ధాంతము 6.19

$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ మరియు $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ అను తలములకు మధ్యగల లఘుకోణం θ అయిన $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right)$

నిరూపణ

$\vec{n}_1$ మరియు $\vec{n}_2$ అను తలములందు అభిలంబ సదిశలు వరుసగా $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ మరియు $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$ అనుకొనుము. తరువాత $\vec{n}_1 = a_1\hat{i} + b_1\hat{j} + c_1\hat{k}$ మరియు $\vec{n}_2 = a_2\hat{i} + b_2\hat{j} + c_2\hat{k}$ అగును.

కావున సిద్ధాంతం 6.18 నుండి సమీకరణము (1)ని ఉపయోగించి, తలముల మధ్యగల లఘుకోణము θ అయిన

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}\right)$$ అని పొందవచ్చును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 304 10-03-2022 11:24:22

విశేషాంశము

(i) $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ మరియు $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ అను తలములు ఒకదానికి ఒకటి లంబములైన $a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$ అగును.

(ii) $a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0$ మరియు $a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0$ అను తలములు సమాంతరం అయిన $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$ అగును.

(iii) $ax+by+cz=p$ అను తలమునకు సమాంతంగా గల తలము యొక్క సమీకరణము $ax+by+cz=k$, $k\in\mathbb{R}$ అగును.

ఉదాహరణ 6.47

$\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right)=11$ మరియు $4x-2y+2z=15$ అను తలములకు మధ్యగల లఘుకోణమును కనుగొనుము.

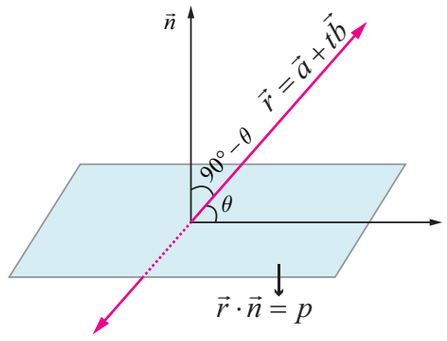
సాధన:-

$\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right)=11$ మరియు $4x-2y+2z=15$ అను తలములందు అభిలంబ సదిశలు వరుసగా $\vec{n}_1=2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$ మరియు $\vec{n}_2=4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ అగును. ఇవ్వబడిన తలముల మధ్యగల లఘుకోణము θ అయితే

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{\left|\left(2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right)\cdot\left(4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}\right)\right|}{\left|2\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right|\left|4\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}\right|}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$$

6.8.11 ఒక రేఖకు మరియు తలమునకు మధ్య గల కోణము (Angle between a line and a plane)

ఒక రేఖకు మరియు ఒక తలమునకు మధ్య కోణము ఆ తలము నుండి అభిలంబరేఖకు మరియు ఇచ్చిన రేఖకు మధ్యగల కోణము యొక్క సంపూర్ణ కోణమగును.



పటము. 6.31

$\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ అనునది రేఖ యొక్క సమీకరణము మరియు $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ అనునది తలము యొక్క సమీకరణము అనుకొనుము. అయితే $\vec{b}$ అనునది ఇవ్వబడిన రేఖకు సమాంతరంగా మరియు $\vec{n}$ అనునది ఇవ్వబడిన తలమునకు అభిలంబముగా ఉండును. ఇవ్వబడిన రేఖకు మరియు తలమునకు మధ్యగల లఘుకోణము θ అయిన, $\vec{n}$ కు, $\vec{b}$ కు మధ్యగల లఘుకోణము $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$ అగును. కావున

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta=\frac{|\vec{b}\cdot\vec{n}|}{|\vec{b}||\vec{n}|}$$

కావున, రేఖకు తలమునకు మధ్య గల లఘుకోణం $\theta=\sin^{-1}\left(\frac{|\vec{b}\cdot\vec{n}|}{|\vec{b}||\vec{n}|}\right)$ ... (1)

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 305 10-03-2022 11:24:24

$\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$ మరియు $ax+by+cz=p$ అనునవి క్రమముగా రేఖ మరియు తలముల సమీకరణములు అయిన $\vec{b}=a_1\hat{i}+b_1\hat{j}+c_1\hat{k}$ మరియు $\vec{n}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ అగును. ఈ విలువలను సమీకరణం (1)లో ప్రతిక్షేపించిన, ఇవ్వబడిన రేఖకు తలమునకు మధ్యగల లఘుకోణము θ లభించును.

$$\theta=\sin^{-1}\left(\frac{|aa_1+bb_1+cc_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}\right)$$

విశేషాంశము

(i) సరళరేఖ తలమునకు లంబముగా ఉన్న ఈ సరళరేఖ తలము యొక్క అభి లంబరేఖకు సమాంతరంగా ఉండును. $\vec{b}$ అనేది $\vec{n}$ కు లంబంగా ఉండును. అయితే $\vec{b}=\lambda\vec{n}$ ఇక్కడ $\lambda\in\mathbb{R}$ అగును. దీని నుండి $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}$ లభించును.

(ii) ఒక సరళరేఖ, తలమునకు సమాంతరం అయిన, ఈ సరళరేఖ తలము యొక్క అభిలంబ రేఖకు లంబముగా ఉండును. కావున $\vec{b}\cdot\vec{n}=0\Rightarrow aa_1+bb_1+cc_1=0$ అగును.

ఉదాహరణ 6.48

$\vec{r}=\left(2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k}\right)+t\left(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)$ అనే రేఖకు . $2x-y+z=5$ అనే తలమునకు మధ్యగల కోణమును కనుగొనుము.

సాధన:-

$\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ అనే రేఖకు అభిలంబ సదిశ $\vec{n}$ కలిగిన తలమునకు మధ్యగల కోణము $\theta=\sin^{-1}\left(\frac{|\vec{b}\cdot\vec{n}|}{|\vec{b}||\vec{n}|}\right)$ అగును.

ఇక్కడ $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ మరియు $\vec{n}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ అవును.

అందువలన $$\theta=\sin^{-1}\left(\frac{|\vec{b}\cdot\vec{n}|}{|\vec{b}||\vec{n}|}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{\left|\left(\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)\cdot\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)\right|}{\left|\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right|\left|2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right|}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

6.8.12 ఒక బిందువు నుండి తలమునకు గల దూరము (Distance of a point from a plane)

అ) తలము యొక్క సదిశ సమీకరణము (Equation of a plane in vector form)

సిద్ధాంతము 6.20

$\vec{u}$ అను స్థాన సదిశ బిందువు నుండి $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ అను తలమునకు మధ్యగల లంబదూరము

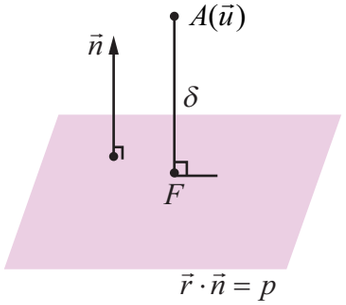
$$\delta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}-p|}{|\vec{n}|}.$$

నిరూపణ

A అను బిందువు యొక్క స్థానసదిశ $\vec{u}$ అయిన

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 306 10-03-2022 11:24:24

$\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ అను తలమునకు A అను బిందువు నుండి గీయబడిన లంబ ఆధారము F అగును. మరియు F అను వాటిని కలుపు రేఖ, తలము యొక్క అభిలంబరేఖ $\vec{n}$ కు సమాంతరం అయిన దాని సమీకరణము $\vec{r}=\vec{u}+t\vec{n}$ అగును.



పటము. 6.32

అయితే F అనునది $\vec{r}=\vec{u}+t\vec{n}$ అను రేఖ $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ అను తలముల ఖండన బిందువు అగును. $\vec{r}_1$ అనునది F యొక్క స్థాన సదిశ అయిన, $\vec{r}_1=\vec{u}+t_1\vec{n}$, $t_1\in\mathbb{R}$ మరియు $\vec{r}_1\cdot\vec{n}=p$ అగును. ఈ సమీకరణముల నుండి $\vec{r}_1$ ను తీసివేసిన వచ్చునది

$(\vec{u}+t_1\vec{n})\cdot\vec{n}=p$ ఇప్పుడు $t_1=\dfrac{p-(\vec{u}\cdot\vec{n})}{|\vec{n}|^2}$.

ఇప్పుడు $$\overrightarrow{FA}=\vec{u}-(\vec{u}+t_1\vec{n}) \;=\; -t_1\vec{n}=\left(\frac{(\vec{u}\cdot\vec{n})-p}{|\vec{n}|^2}\right)\vec{n}$$

A అను బిందువు నుండి ఇవ్వబడిన తలమునకు మధ్య గల లంబ దూరము

$$\delta \;=\; |\overrightarrow{FA}|=\left|\left(\frac{(\vec{u}\cdot\vec{n})-p}{|\vec{n}|^2}\right)\vec{n}\right|=\left|\frac{(\vec{u}\cdot\vec{n})-p}{|\vec{n}|}\right|$$

F అనునది లంబ ఆధారము AF యొక్క స్థాన సదిశగా ఇవ్వబడినది

$$\vec{r}_1 \;=\; \vec{u}+t_1\vec{n} \quad \text{లేదా}$$

$$\vec{r}_1 \;=\; \vec{u}+\left(\frac{p-\vec{u}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|^2}\right)\vec{n}$$

D7PJE

ఆ) తలము యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణము (Equation of a plane in Cartesian form)

$\vec{u}$ అను స్థాన సదిశ కలిగిన బిందువు $A(x_1,y_1,z_1)$ మరియు ఇవ్వబడిన తలము కార్టీషియన్ సమీకరణము $ax+by+cz=p$ అయితే, $\vec{u}=x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k}$ మరియు $\vec{n}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ అగును. ఈ సదిశలను $\delta=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{n}-p|}{|\vec{n}|}$ లో ప్రతిక్షేపించగా ఇవ్వబడిన తలమునకు మరియు బిందువుకు మధ్య గల దూరము.

$$\delta=\left|\frac{ax_1+by_1+cz_1-p}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|=\frac{|ax_1+by_1+cz_1-p|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$ అని లభించుచున్నది.

విశేషాంశము

ఆది బిందువు నుండి $ax+by+cz+d=0$ అను తలమునకు మధ్యగల లంబ దూరము

$$\delta=\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

ఉదాహరణ 6.49

$(2,5,-3)$ అను బిందువు నుండి $\vec{r}\cdot\left(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}\right)=5$ అను తలమునకు మధ్య గల దూరమును కనుగొనుము.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 307 10-03-2022 11:24:26

సాధన:-

ఇవ్వబడిన సమీకరణమును $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ లో ప్రతిక్షేపించుము మనకు $\vec{n}=6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ అనునది లభించును.

$\vec{u}$ అనే స్థానసదిశను కలిగిన బిందువు నుండి $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ అనే తలమునకు మధ్య గల లంబ దూరము $\delta=\dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{n}-p|}{|\vec{n}|}$ అగును. కావున $\vec{u}=(2,5,-3)=2\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k}$ మరియు $\vec{n}=6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ మరలా ప్రతిక్షేపించగా మనకు లభించునది

$$\delta=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}-p|}{|\vec{n}|}=\frac{\left|\left(2\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k}\right)\cdot\left(6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}\right)-5\right|}{\left|6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}\right|}=2 \text{ ప్రమాణములు.}$$

ఉదాహరణ 6.50

$A(4,1,2)$ మరియు $B(7,5,4)$ బిందువుల గుండా పోవు సరళరేఖ $x-y+z=5$ అనే తలము ఖండించు బిందువునకు మరియు $(5,-5,-10)$ అనే బిందువునకు మధ్య గల దూరమును కనుగొనుము.

సాధన:-

$A(4,1,2)$ మరియు $B(7,5,4)$ అను బిందువులును కలుపు రేఖా సమీకరణము

$$\frac{x-4}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{2}=t \quad \text{(అనుకొనుము).}$$

ఈ రేఖపై ఏదైనా ఒక బిందువు $(3t+4,4t+1,2t+2)$ అగును. రేఖ మరియు ఖండన బిందువును కనుగొనుటకు $x=3t+4, y=4t+1, z=2t+2$ అని $x-y+z=5$ నందు ప్రతిక్షేపించినపుడు $t=0$ పొందుచున్నాము. కావున సరళరేఖ, తలము ఖండన బిందువు (4, 1, 2) అగును. కావున (4, 1, 2) మరియు $(5,-5,-10)$ అను బిందువుల మధ్యగల దూరము

$$\sqrt{(4-5)^2+(1+5)^2+(2+10)^2}=\sqrt{181} \text{ ప్రమాణములు.}$$

6.8.13 సమాంతరమైన రెండు తలములకు మధ్యగల దూరము (Distance between two parallel planes)

సిద్ధాంతము 6.21

$ax+by+cz+d_1=0$ మరియు $ax+by+cz+d_2=0$ అను రెండు సమాంతరమైన తలములకు మధ్యగల దూరము $\dfrac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

నిరూపణ

$A(x_1,y_1,z_1)$ అను తలముపై గల ఏదైనా ఒక బిందువు $ax+by+cz+d_2=0$ అనుకొనుము. తర్వాత,

$ax_1+by_1+cz_1+d_2=0 \Rightarrow ax_1+by_1+cz_1=-d_2$

$A(x_1,y_1,z_1)$ అను బిందువు నుండి $ax+by+cz+d_1=0$ అను తలమునకు మధ్య గల దూరము

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 308 10-03-2022 11:24:27

$$\delta = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d_1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

కావున, $ax+by+cz+d_1=0$ మరియు $ax+by+cz+d_2=0$ అను సమాంతరమైన రెండు తలములకు మధ్య గల దూరము $\delta = \frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

ఉదాహరణ 6.51

$x+2y-2z+1=0$ మరియు $2x+4y-4z+5=0$ అను రెండు సమాంతర తలములకు మధ్య గల దూరమును కనుగొనుము.

సాధన:-

$ax+by+cz+d_1=0$ మరియు $ax+by+cz+d_2=0$ అను సమాంతర తలములకు మధ్య గల దూరము $\delta = \frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. రెండవ సమీకరణమును $x+2y-2z+\frac{5}{2}=0$ అని వ్రాసిన, $a=1, b=2, c=-2, d_1=1, d_2=\frac{5}{2}$ అని లభించును. ఈ విలువలను సూత్రములో ప్రతిక్షేపించిన,

$$\delta = \frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{\left|1-\frac{5}{2}\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-2^2)}} = \frac{1}{2}$$ ప్రమాణములు అని కావలసిన దూరము లభించినది.

ఉదాహరణ 6.52

$\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}\right)=6$ మరియు $\vec{r}\cdot\left(6\hat{i}-3\hat{j}-6\hat{k}\right)=27$ అను తలములకు మధ్య గల దూరమును కనుగొనుము.

సాధన:-

$\vec{u}$ అను తలముపై గల ఏదైనా ఒక బిందువు యొక్క స్థానసదిశ $\vec{r}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k})=6$ అనుకొనుము. తరువాత, $\vec{u}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k})=6$. ... (1)

ఇవ్వబడిన రెండు తలములకు మధ్య గల దూరము δ అయిన, δ అనునది $\vec{u}$ అను బిందువు నుండి $\vec{r}\cdot(6\hat{i}-3\hat{j}-6\hat{i})=27$ అను తలముకు మధ్య గల లంబదూరమగును.

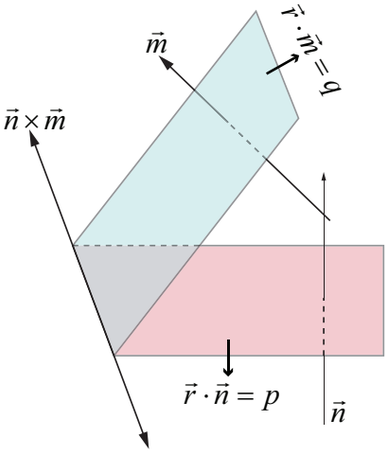
$$\vec{r}\cdot(6\hat{i}-3\hat{j}-6\hat{i})=27 \text{ ప్రమాణము.}$$

కావున, $\delta = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}-p|}{|\vec{n}|} = \left|\frac{\vec{u}\cdot(6\hat{i}-3\hat{j}-6\hat{k})-27}{\sqrt{6^2+(-3)^2+(-6)^2}}\right| = \left|\frac{3(\vec{u}\cdot(2\hat{i}-\hat{j}-2\hat{k}))-27}{9}\right| = \left|\frac{(3(6)-27}{9}\right| = 1$ ప్రమాణము.

6.8.14 రెండు తలముల ఖండన రేఖ సమీకరణము (Equation of line of intersection of two planes)

$\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ మరియు $\vec{r}\cdot\vec{m}=q$ అనునవి సమాంతరము కాని రెండు తలములు అనుకొనుము. $\vec{n}$ మరియు $\vec{m}$ అను సదిశలు క్రమముగా ఇవ్వబడిన తలములకు లంబమగును. మరియు ఈ తలముల యొక్క ఖండన రేఖ అనునది $\vec{n}$ మరియు $\vec{m}$ అను రెండు సదిశలకు లంబమగును. కావున $\vec{n}\times\vec{m}$ అను సదిశకు సమాంతరముగాను $\vec{n}\times\vec{m}=l_1\hat{i}+l_2\hat{j}+l_3\hat{k}$ అనుకొనుము.

$a_1x+b_1y+c_1z=p$ మరియు $a_2x+b_2y+c_2z=q$ అను రెండు తలముల యొక్క సమీకరణములను తీసుకొనెదము. ఇవ్వబడిన ఈ రెండు తలముల యొక్క ఖండన రేఖ కనీసము ఒక నిరూపాక్ష తలమునైనా ఖండించును. మన వసతికి ఖండనరేఖ ఖండించు నిరూపాక్ష తలమును $z=0$ అని అనుకొనుము. $z=0$ అను ఇవ్వబడిన తలము యొక్క సమీకరణములలో ప్రతిక్షేపించి $a_1x+b_1y-p=0$ మరియు $a_2x+b_2y-q=0$ అను సమీకరణములను పొందెదము. ఈ రెండు సమీకరణముల సాధనలను కనుగొనుట వలన x మరియు y ల విలువలను క్రమముగా x_1 మరియు y_1 అని పొందవచ్చును. కావున, $(x_1, y_1, 0)$ సదిశకు సమాంతరముగా గల రేఖపై గల ఒక బిందువు $l_1\hat{i}+l_2\hat{j}+l_3\hat{k}$ అగును. కావున, ఖండన రేఖ సమీకరణము $\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{l_2}=\frac{z-0}{l_3}$ అగును.



పటము. 6.33

6.8.15 రెండు తలముల ఖండన రేఖల గుండా పోవు తలము యొక్క సమీకరణము (Equation of a plane passing through the line of intersection of two given planes)

సిద్ధాంతము 6.22

$\vec{r}\cdot\vec{n}_1=d_1$ మరియు $\vec{r}\cdot\vec{n}_2=d_2$ అను తలముల ఖండన రేఖ గుండా పోవు తలము యొక్క సదిశ సమీకరణము $(\vec{r}\cdot\vec{n}_1-d_1)+\lambda(\vec{r}\cdot\vec{n}_2-d_2)=0$ అగును. ఇక్కడ $\lambda\in\mathbb{R}$

నిరూపణ

క్రింద వచ్చు సమీకరణమును తీసుకొనెదము.

$$(\vec{r}\cdot\vec{n}_1-d_1)+\lambda(\vec{r}\cdot\vec{n}_2-d_2)=0 \quad \ldots (1)$$

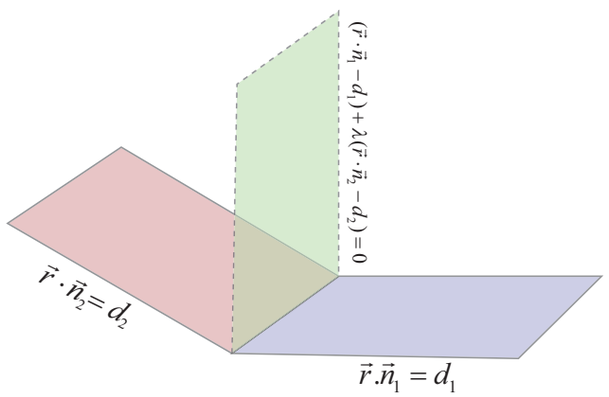
ఈ సమీకరణమును,

$$\vec{r}\cdot(\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2)-(d_1+\lambda d_2)=0 \quad \ldots (2)$$

అని వ్రాయవచ్చును. $\vec{n}=\vec{n}_1+\lambda\vec{n}_2$, మరియు $d=(d_1+\lambda d_2)$ అనుకొనుము.

కావున, సమీకరణము (2) అనునది,

$$\vec{r}\cdot\vec{n}=d \quad \ldots (3)$$



పటము. 6.34

సమీకరణము (3) అనునది ఒక తలమును సూచించును. కావున, సమీకరణము (1) ను ఒక తలమును సూచించును.

ఇవ్వబడిన తలముల ఖండనరేఖపై గల ఏదైనా ఒక బిందువు యొక్క స్థానసదిశ $\vec{r}_1$ అనుకొనుము. తరువాత $\vec{r}\cdot\vec{n}_1=d_1$ అనునది $\vec{r}\cdot\vec{n}_2=d_2$ మరియు $\vec{r}_1$ అను రెండు తలముల సమీకరణములను తృప్తిపరచును. కావున

$$\vec{r}_1\cdot\vec{n}_1 = d_1 \quad \ldots (4)$$

మరియు $$\vec{r}_2\cdot\vec{n}_2 = d_2 \quad \ldots (5)$$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 310 10-03-2022 11:24:30

సమీకరణములు (4) మరియు (5)ల నుండి $\vec{r}_1$ అనునది సమీకరణము (1)ను తృప్తిపరచుటను చూడవచ్చును. కావున, ఇవ్వబడిన తలముల యొక్క ఖండన రేఖపై గల ఏ ఒక్క బిందువును తలము (1)పై అమరునని చూడవచ్చును. కావున, తలము (1) అనునది ఇవ్వబడిన తలముల ఖండనరేఖ గుండా పోవునని నిరూపించబడినది.

$a_1x+b_1y+c_1z=d_1$ మరియు $a_2x+b_2y+c_2z=d_2$ అను రెండు తలముల ఖండనరేఖ గుండా పోవు తలము యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణము

$(a_1x+b_1y+c_1z-d_1)+\lambda(a_2x+b_2y+c_2z-d_2)=0$ అగును.

ఉదాహరణ 6.53

$\vec{r}\cdot\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)+1=0$ మరియు $\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}\right)=2$ అను తలముల ఖండన రేఖ గుండా మరియు $(-1,2,1)$ అను బిందువు గుండా పోవు తలము యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన:-

$\vec{r}\cdot\vec{n}_1=d_1$ మరియు $\vec{r}\cdot\vec{n}_2=d_2$ అను తలముల ఖండన రేఖ గుండా పోవు తలము యొక్క సమీకరణము $(\vec{r}\cdot\vec{n}_1-d_1)+\lambda(\vec{r}\cdot\vec{n}_2-d_2)=0$ అగును.

ఈ సమీకరణములో $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$, $\vec{n}_1=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, మరియు $\vec{n}_2=2\hat{i}-3\hat{j}+5\hat{k}$, $d_1=1$, $d_2=-2$ అని ప్రతిక్షేపించగా, ఇవ్వబడిన తలముల యొక్క ఖండన రేఖ గుండా పోవును.

$(x+y+z+1)+\lambda(2x-3y+5z-2)=0$ అను తలము యొక్క సమీకరణము లభించును.

ఈ తలము $(-1,2,1)$ అను బిందువు గుండా పోవుట వలన, $\lambda=\frac{3}{5}$ అని లభించును. కావున, కావలసిన తలము యొక్క సమీకరణము $11x-4y+20z=1$ అగును.

ఉదాహరణ 6.54

$2x+3y-z+7=0$ మరియు $x+y-2z+5=0$ అను తలములు ఖండన రేఖ గుండా పోవుచు $x+y-3z-5=0$ అను తలమునకు లంబముగా గల తలము యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము.

సాధన:-

$2x+3y-z+7=0$ మరియు $x+y-2z+5=0$ అను తలములు ఖండనరేఖ ద్వారా పోవు తలము యొక్క సమీకరణము $(2x+3y-z+7)+\lambda(x+y-2z+5)=0$ లేదా

$$(2+\lambda)x+(3+\lambda)y+(-1-2\lambda)z+(7+5\lambda)=0$$

ఈ తలము ఇవ్వబడిన $x+y-3z-5=0$ తలమునకు లంబముగా ఉండిన, ఈ రెండు తలముల లంబరేఖలు ఒకదానికొకటి లంబమగును. కావున

$$(1)(2+\lambda)+(1)(3+\lambda)+(-3)(-1-2\lambda)z=0$$

కావున, కావలసిన తలము యొక్క సమీకరణము $\lambda=-1$

$$(2x+3y-z+7)-(x+y-2z+5)=0\Rightarrow x+2y+z+2=0\ .$$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 311 10-03-2022 11:24:30

6.9 ఒక తలములో ఒక బిందువు యొక్క ప్రతిబింబము (Image of a Point in a Plane)

ఇవ్వబడిన బిందువు A యొక్క స్థాన సదిశ $\vec{u}$ అనుకొనుము. తలము యొక్క సమీకరణము $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ తీసుకొనుము. ఒక తలములో ప్రతిబింబము కనుగొనవలసిన A అను బిందువు యొక్క ప్రతిబింబ బిందువు A' యొక్క స్థాన సదిశ $\vec{v}$ అనుకొనుము. తరువాత $\overrightarrow{AA'}$ అనునది తలమునకు లంబము అగును. కావున $\overrightarrow{AA'}$ అనునది $\vec{n}$ కు సమాంతరముగా ఉండును. తరువాత

$$\overrightarrow{AA'}=\lambda\vec{n} \text{ లేదా } \vec{v}-\vec{u}=\lambda\vec{n} \Rightarrow \vec{v}=\vec{u}+\lambda\vec{n} \quad \ldots (1)$$

M యొక్క మధ్య బిందువు AA' అనుకొనుము. కావున M యొక్క స్థాన సదిశ $\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2}$ అగును. కాని M అనునది తలము మీద అమరియున్నది.

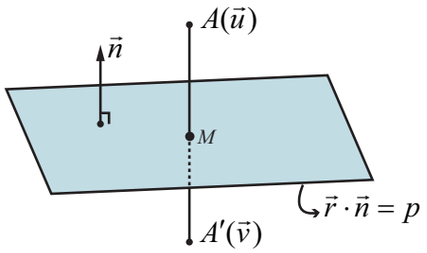
కావున, $\left(\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2}\right)\cdot\vec{n}=p$. ... (2)

సమీకరణము (1)ను (2)లో ప్రతిక్షేపించిన,

$$\left(\frac{\vec{u}+\lambda\vec{n}+\vec{u}}{2}\right)\cdot\vec{n}=p \Rightarrow \lambda=\frac{2\left[p-(\vec{u}\cdot\vec{n})\right]}{|\vec{n}|^2}$$

కావున A' యొక్క స్థానసదిశ

$$\vec{v}=\vec{u}+\frac{2[p-(\vec{u}\cdot\vec{n})]}{|\vec{n}|^2}$$



పటము. 6.35

గమనిక:

M యొక్క మధ్య బిందువు AA' అనునది A అను బిందువు నుండి $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ అను తలమునకు నిర్మించబడు లంబ ఆధారము అగును. కావున లంబ ఆధారము M యొక్క స్థాన సదిశ

$$\frac{\vec{u}+\vec{v}}{2}=\frac{\vec{u}}{2}+\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\frac{2[p-(\vec{u}\cdot\vec{n})}{|\vec{n}|^2}\vec{n}\right)$$

6.9.1 తలములో ఒక బిందువు యొక్క ప్రతిబింబపు నిరూపకాలు (The coordinates of the image of a point in a plane)

తలములో ప్రతిబింబము కనుగొనవలసిన బిందువు (a_1,a_2,a_3) యొక్క స్థాన సదిశ $\vec{u}$ అనుకొనుము. తరువాత $\vec{u}=a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$ అగును.

ఇవ్వబడిన తలము యొక్క సమీకరణము $ax+by+cz=d$ అనుకొనుము. ఈ సమీకరణమును సదిశ సమీకరణముగా $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ అని వ్రాయవచ్చును. ఇక్కడ $\vec{n}=a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}$ అగును. కావున ప్రతిబింబ బిందువు యొక్క స్థానసదిశ

$$\vec{v}=\vec{u}+\frac{2\left[p-(\vec{u}\cdot\vec{n})\right]}{|\vec{n}|^2}\vec{n} \text{ అగును.}$$

If $\vec{v}=v_1\hat{i}+v_2\hat{j}+v_3\hat{k}$, అయిన $v_1=a_1+2a\alpha, v_2=a_2+2a\alpha, v_3=a_3+2a\alpha$ అగును.

ఇక్కడ $\alpha=\frac{2\left[p-(aa_1+ba_2+ca_3)\right]}{a^2+b^2+c^2}$ అగును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 312 10-03-2022 11:24:33

ఉదాహరణ 6.55

$\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ అను స్థానసదిశను కలిగిన బిందువు యొక్క ప్రతిబింబ బిందువును $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}\right)=38$ అను తలములో కనుగొనుము.

సాధన:-

ఇక్కడ $\vec{u}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $\vec{n}=\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$, $p=38$ అగును. $\vec{u}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ అను బిందువు యొక్క ప్రతిబింబ బిందువు $\vec{v}$ యొక్క స్థానసదిశ $\vec{v}=\vec{u}+\frac{2\left[p-(\vec{u}\cdot\vec{n})\right]}{|\vec{n}|^2}\vec{n}$ అగును.

$$\vec{v}=\left(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}\right)+\frac{2\left[38-\left(\left(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}\right)\right)\right]}{\left(\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}\right)}\left(\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}\right).$$

అంటే $\vec{v}=\left(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}\right)+2\left(\frac{38-17}{21}\right)\left(\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}\right)=3\hat{i}+6\hat{j}+11\hat{k}$.

కావున $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ అను స్థాన సదిశను కలిగిన బిందువు యొక్క స్థానసదిశ $3\hat{i}+6\hat{j}+11\hat{k}$ అగును. ■

గమనిక:

$\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ అను స్థానసదిశను కలిగిన బిందువు నుండి ఇవ్వబడిన తలమునకు నిర్మించబడు లంబ ఆధారము యొక్క స్థాన సదిశ $\frac{(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})+(3\hat{i}+6\hat{j}+11\hat{k})}{2}=2\hat{i}+4\hat{j}+7\hat{k}$.

6.10 ఒక సరళరేఖ మరియు ఒక తలము సంధించు బిందువు (Meeting Point of a Line and a Plane)

సిద్ధాంతము 6.23

$\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ అను సరళరేఖ $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ అను తలము సంధించు బిందువు యొక్క సదిశ $\vec{a}+\left(\frac{p-(\vec{a}\cdot\vec{n})}{\vec{b}\cdot\vec{n}}\right)\vec{b}$ ఇక్కడ $\vec{b}\cdot\vec{n}\neq 0$

నిరూపణ

ఇవ్వబడిన $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ అను తలమునకు సమాంతరము కాని ఇవ్వబడిన సరళరేఖ సమీకరణము $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ అనుకొనుము. కావున $\vec{b}\cdot\vec{n}\neq 0$.

తలమును సరళరేఖ సంధించు బిందువు యొక్క స్థానసదిశ $\vec{u}$ అనుకొనుము. $\vec{u}$ యొక్క కొన్ని విలువలకు, అంటే $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ అను విలువకు $\vec{r}\cdot\vec{n}=p$ అనునది t అను సరళరేఖ సమీకరణమును మరియు t_1 అను తలము యొక్క సమీకరణము రెండింటిని సంతృప్తిపరచును. అందువలన

$\vec{u}=\vec{a}+t\vec{b}$ ... (1)

$\vec{u}\cdot\vec{n}=p$ ...(2)

సమీకరణము (1)ను (2)లో ప్రతిక్షేపించగా మనము పొందునది

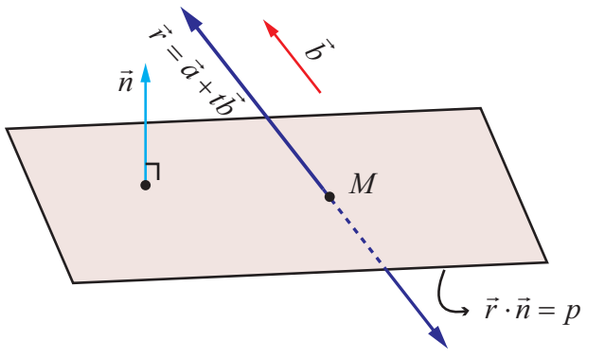
$$\left(\vec{a}+t_1\vec{b}\right)\cdot\vec{n}=p$$

లేదా $\vec{a}\cdot\vec{n}+t_1\left(\vec{b}\cdot\vec{n}\right)=p$

లేదా $t_1 = \dfrac{p-(\vec{a}\cdot\vec{n})}{\vec{b}\cdot\vec{n}}$ ...(3)

సమీకరణము (3)ను (1)లో ప్రతిక్షేపించిన మనము పొందునది

$$\vec{u} = \vec{a} + \left(\frac{p-(\vec{a}\cdot\vec{n})}{\vec{b}\cdot\vec{n}}\right)\vec{b},\ \vec{b}\cdot\vec{n} \neq 0$$



పటము. 6.36

ఉదాహరణ 6.56

$\vec{r} = \left(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}\right) + t\left(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}\right)$ అను సరళరేఖ $x - y + z - 5 = 0$ అను తలమును సంధించు (ఖండించు) బిందువు యొక్క నిరూపకాలను కనుగొనుము.

సాధన:-

ఇక్కడ, $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k},\ \vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}$.

ఇవ్వబడిన తలము యొక్క సదిశ సమీకరణము $\vec{r}\cdot\left(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right) = 5$. కావున $\vec{n} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ మరియు $p = 5$ అగును.

$\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ అను సరళరేఖ $\vec{r}\cdot\vec{d} = p$ అను తలమును ఖండించు బిందువు యొక్క స్థానసదిశ

$$\vec{u} = \vec{a} + \left(\frac{p-(\vec{a}\cdot\vec{n})}{\vec{b}\cdot\vec{n}}\right)\vec{b} \text{ ఇక్కడ } \vec{b}\cdot\vec{n} \neq 0$$

మరియు $\vec{b}\cdot\vec{n} \neq 0$ అనుదానిని స్పష్టముగా చూడవచ్చును

ఇప్పుడు, $\dfrac{p-\vec{a}\cdot\vec{n}}{\vec{b}\cdot\vec{n}} = \dfrac{5-\left(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right)}{\left(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right)} = 0$. కావున ఇవ్వబడిన సరళరేఖ మరియు తలము ఖండించుకొను బిందువు యొక్క స్థానసదిశ

$$\vec{r} = \left(2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}\right) + (0)\left(3\hat{i} + 4\hat{j} + 2\hat{k}\right) = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$

అంటే ఇవ్వబడిన సరళరేఖ మరియు తలము ఖండించు బిందువు $(2,-1,2)$ అగును.

మరియొక పద్ధతి:

ఇవ్వబడిన సరళరేఖ కార్టీషియన్ సమీకరణము $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{4} = \dfrac{z-2}{2} = t$ అనుకొనుము.

ఈ సరళరేఖ గల ఏదేని ఒక బిందువు యొక్క అమరిక $(3t+2, 4t-1, 2t+2)$ అగును. ఇవ్వబడిన సరళరేఖ మరియు తలము ఒకదానికొకటి ఖండించుకొనిన ఈ బిందువు $x - y + z - 5 = 0$ అను తలముపై అమరియుండును.

అందువలన, $(3t+2) - (4t-1) + (2t+2) - 5 = 0 \Rightarrow t = 0$.

కావున ఇవ్వబడిన సరళరేఖ తలమును $(2,-1,2)$ అను బిందువు వద్ద ఖండించును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 314 10-03-2022 11:24:36

అభ్యాసము 6.9

1. $\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}-7\hat{j}+4\hat{k}\right)=3$ మరియు $3x-5y+4z+11=0$ అను తలముల ఖండన బిందువు మరియు $(-2,1,3)$ అను బిందువుల ద్వారా వెళ్ళు తలము యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము.

2. $x+2y+3z=2$ మరియు $x-y+z=3$ అను తలముల ఖండన బిందువు గుండా వెళుతూ, $(3,1,-1)$ అను బిందువు నుండి $\frac{2}{\sqrt{3}}$ దూరములో గల తలము యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము.

3. $\vec{r}=\left(2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}\right)+t\left(\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}\right)$ అను సరళరేఖకు $\vec{r}\cdot\left(6\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}\right)=8$ అను తలమునకు మధ్యగల కోణమును కనుగొనుము.

4. $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}\right)=3$ మరియు $2x-2y+z=2$ అను తలములకు మధ్యగల కోణమును కనుగొనుము.

5. $(3,4,-1)$ అను బిందువు ద్వారా వెళుతూ, $2x-3y+5z+7=0$ అను తలమునకు సమాంతరముగా గల తలము యొక్క సమీకరణమును కనుగొనుము. మరియు ఈ రెండు తలములకు మధ్యగల దూరమును కనుగొనుము.

6. $(1,-2,3)$ అను బిందువు నుండి $x-y+z=5$ అను తలమునకు నిర్మించబడు లంబము యొక్క పొడవును కనుగొనుము.

7. $x-1=\frac{y}{2}=z+1$ అను సరళరేఖ, $2x-y+2z=2$ అను తలమును ఖండించు బిందువును కనుగొనుము మరియు సరళరేఖ మరియు తలమునకు మధ్యగల కోణమును కనుగొనుము.

8. $(4,3,2)$ అను బిందువు నుండి $x+2y+3z=2$ అను తలమునకు గీయబడు లంబ ఆధారము యొక్క నిరూపకాలు మరియు లంబము యొక్క పొడవును కనుగొనుము.

అభ్యాసము 6.10

G58SL

సరియైన లేదా మిక్కిలి సరియైన సమాధానమును ఎన్నుకొనుము.

1. $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అనునవి సమాంతర సదిశలు అయిన $[\vec{a},\vec{c},\vec{b}]$ యొక్క విలువ
(1) 2 (2) -1 (3) 1 (4) 0

2. $\vec{\gamma}$ మరియు $\vec{\beta}$ అనునవి ఏర్పరచు తలములో $\vec{\alpha}$ అమరియుండిన
(1) $[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}]=1$ (2) $[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}]=-1$ (3) $[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}]=0$ (4) $[\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}]=2$

3. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$, అయిన, $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$ యొక్క విలువ
(1) $|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|$ (2) $\frac{1}{3}|\vec{a}|\,|\vec{b}|\,|\vec{c}|$ (3) 1 (4) -1

4. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అనునవి మూడు సదిశలు అయిన $\vec{a}$ అనునది $\vec{b}$ కు లంబముగా గలదు మరియు $\vec{c}$ సమాంతరముగా ఉండునట్లు ఉండిన $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ అనునది
(1) $\vec{a}$ (2) $\vec{b}$ (3) $\vec{c}$ (4) $\vec{0}$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 315 10-03-2022 11:24:37

5. $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=1$, అయిన $\frac{\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})}{(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}}+\frac{\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})}{(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}}+\frac{\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})}{(\vec{c}\times\vec{b})\cdot\vec{a}}$ యొక్క విలువ

(1) 1 (2) -1 (3) 2 (4) 3

6. $\hat{i}+\hat{j},\ \hat{i}+2\hat{j},\ \hat{i}+\hat{j}+\pi\hat{k}$ అను సదిశలను శీర్షములుగా కలిగిన సమాంతర ఫలకము యొక్క ఘనపరిమాణము

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{\pi}{3}$ (3) π (4) $\frac{\pi}{4}$

7. $\vec{a}$, $\vec{b}$ అనునవి యూనిట్ సదిశలు అయిన మరియు $[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{a}\times\vec{b}]=\frac{1}{4}$ అయిన $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ మధ్య గల కోణము

(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\pi}{4}$ (3) $\frac{\pi}{3}$ (4) $\frac{\pi}{2}$

8. $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k},\ \vec{b}=\hat{i}+\hat{j},\ \vec{c}=\hat{i}$ మరియు $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}$, అయిన $\lambda+\mu$ యొక్క విలువ

(1) 0 (2) 1 (3) 6 (4) 3

9. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అనునవి సతలీయముకాని, శూన్యేతర సదిశలైన మరియు $[\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}]=3$ అయిన $\{[\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}]\}^2$ యొక్క విలువ

(1) 81 (2) 9 (3) 27 (4)18

10. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అనునవి సతలీయముకాని యూనిట్ సదిశలు అయిన మరియు $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\frac{\vec{b}+\vec{c}}{\sqrt{2}}$ అయిన $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$, మధ్య గల కోణము

(1) $\frac{\pi}{2}$ (2) $\frac{3\pi}{4}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) π

11. $\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}$ అనువాటిని ఆసన్న అంచులుగా కలిగిన సమాంతర ఫలకము యొక్క ఘనపరిమాణము 8 ఘ.ప్ర అయిన, $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{b}\times\vec{c}),(\vec{b}\times\vec{c})\times(\vec{c}\times\vec{a})$ మరియు $(\vec{c}\times\vec{a})\times(\vec{a}\times\vec{b})$ అను వాటిని ఆసన్న అంచులుగా కలిగిన సమాంతర ఫలకము యొక్క ఘనపరిమాణము

(1) 8 ఘ.ప్ర (2) 512 ఘ.ప్ర (3) 64 ఘ.ప్ర (4) 24 ఘ.ప్ర

12. $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ అను సదిశలు మరియు $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=\vec{0}$ అనుకొనుము. $\vec{a},\vec{b}$ అను ఒక జత సదిశల ద్వారాను $\vec{c},\vec{d}$ అను ఒక జత సదిశల ద్వారాను ఏర్పడు తలములు క్రమముగా P_1 మరియు P_2 అయిన ఆ తలముల మధ్యగల కోణము

(1) 0° (2) 45° (3) 60° (4) 90°

13. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అను మూడు సదిశలు మరియు $\vec{b}\cdot\vec{c}\neq0$ మరియు $\vec{a}\cdot\vec{b}\neq0$ గా ఉండునని అనుకొనుము $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, అయిన $\vec{a}$ మరియు $\vec{c}$ అనునవి.

(1) లంబము (2) సమాంతరము

(3) మధ్యకోణము $\frac{\pi}{3}$ (4) మధ్యకోణము $\frac{\pi}{6}$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 316 10-03-2022 11:24:40

14. $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k},\ \vec{b}=\hat{i}+2\hat{j}-5\hat{k},\ \vec{c}=3\hat{i}+5\hat{j}-\hat{k}$, అయితే $\vec{a}$ కు లంబముగాను $\vec{b}$ మరియు $\vec{c}$ అను సదిశలు ఏర్పరచు తలములో గల సదిశ

(1) $-17\hat{i}+21\hat{j}-97\hat{k}$ (2) $17\hat{i}+21\hat{j}-123\hat{k}$

(3) $-17\hat{i}-21\hat{j}+97\hat{k}$ (4) $-17\hat{i}-21\hat{j}-97\hat{k}$

15. $\frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}, z=2$ మరియు $\frac{x-1}{1}=\frac{2y+3}{3}=\frac{z+5}{2}$ అను రేఖల మధ్య గల కోణము

(1) $\frac{\pi}{6}$ (2) $\frac{\pi}{4}$ (3) $\frac{\pi}{3}$ (4) $\frac{\pi}{2}$

16. $\frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-5}=\frac{z+2}{2}$ అను రేఖ $x+3y-\alpha z+\beta=0$, అను తలముపై అమరియుండిన (α,β) యొక్క విలువ

(1) $(-5,5)$ (2) $(-6,7)$ (3) $(5,-5)$ (4) $(6,-7)$

17. $\vec{r}=(\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k})+t(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k})$ అను రేఖకు $\vec{r}\cdot(\hat{i}+\hat{j})+4=0$ అను తలమునకు మధ్య గల కోణము

(1) $0°$ (2) $30°$ (3) $45°$ (4) $90°$

18. $\vec{r}=(6\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k})+t(-\hat{i}+4\hat{k})$ అను రేఖ $\vec{r}.(\hat{i}+\hat{j}-\hat{k})=3$ అను తలమును సంధించు బిందువు యొక్క నిరూపకాలు

(1) $(2,1,0)$ (2) $(7,-1,-7)$ (3) $(1,2,-6)$ (4) $(5,-1,1)$

19. ఆది బిందువు నుండి $3x-6y+2z+7=0$ అను తలమునకు మధ్య గల దూరము

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

20. $x+2y+3z+7=0$ మరియు $2x+4y+6z+7=0$ అను తలములకు మధ్య గల దూరము

(1) $\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$ (2) $\frac{7}{2}$ (3) $\frac{\sqrt{7}}{2}$ (4) $\frac{7}{2\sqrt{2}}$

21. ఒక రేఖ యొక్క దిశాకొసైన్లు $\frac{1}{c},\frac{1}{c},\frac{1}{c}$, అయిన

(1) $c=\pm3$ (2) $c=\pm\sqrt{3}$ (3) $c>0$ (4) $0<c<1$

22. $\vec{r}=(\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k})+t(6\hat{j}-\hat{k})$ అను సదిశ సమీకరణము ఏర్పరచు సరళరేఖపైన గల బిందువులు

(1) $(0,6,-1)$ మరియు $(1,-2,-1)$ (2) $(0,6,-1)$ మరియు $(-1,-4,-2)$

(3) $(1,-2,-1)$ మరియు $(1,4,-2)$ (4) $(1,-2,-1)$ మరియు $(0,-6,1)$

23. ఆది బిందువు నుండి $(1,1,1)$ అను బిందువుకు మధ్య గల దూరము $x+y+z+k=0$ అను తలము నుండి ఆ బిందువుకు మధ్య గల దూరములో సగముగా ఉండిన, k యొక్క విలువ

(1) ±3 (2) ±6 (3) $-3,9$ (4) $3,-9$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 317 10-03-2022 11:24:43

24. $\vec{r}.(2\hat{i}-\lambda\hat{j}+\hat{k})=3$ మరియు $\vec{r}.(4\hat{i}+\hat{j}-\mu\hat{k})=5$ అను తలములు సమాంతరము అయిన λ మరియు μ యొక్క విలువలు

(1) $\frac{1}{2},-2$ (2) $-\frac{1}{2},2$ (3) $-\frac{1}{2},-2$ (4) $\frac{1}{2},2$

25. ఆది బిందువు నుండి $2x+3y+\lambda z=1,\ \lambda>0$ అను తలమునకు నిర్మించబడు లంబము యొక్క పొడవు $\frac{1}{5}$ అయిన λ యొక్క విలువ

(1) $2\sqrt{3}$ (2) $3\sqrt{2}$ (3) 0 (4) 1

పాఠ్య సారాంశము

1. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}.$ అనునవి మూడు సదిశలు అయిన $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ అనునది అదిశా త్రికలబ్ధము అగును.
2. $\vec{a},\vec{b},$ మరియు $\vec{c}$ అను మూడు సదిశలు ఒకే బిందువులో సంధించు ఆసన్న భుజములను కలిగిన సమాంతర ఫలకము యొక్క ఘనపరిమాణము $\left|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}\right|$ అగును.
3. శూన్యము కాని మూడు సదిశల అదిశా త్రికలబ్ధము శూన్యముగా ఉన్నప్పుడు మాత్రమే ఆమూడు సదిశలు సతలీయము అగును.
4. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ అను మూడు సదిశలు సతలీయముగా ఏర్పడుటకు అవసరమైన మరియు కావలసిన నిబంధన, కనీసము ఒక సదిశ శూన్యము కాకుండా మరియు $r,s,t\in\mathbb{R}$ గా అమరియుండు $r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}=\vec{0}$ అను అదిశలలో పొందవచ్చును.
5. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ మరియు $\vec{p},\vec{q},\vec{r}$ అను మూడు సదిశలను కలిగిన ఏవేని రెండు వ్యవస్థలు మరియు $\vec{p}=x_1\vec{a}+y_1\vec{b}+z_1\vec{c},\quad \vec{q}=x_2\vec{a}+y_2\vec{b}+z_2\vec{c},$ మరియు, $\vec{r}=x_3\vec{a}+y_3\vec{b}+z_3\vec{c},$ అయిన $\left[\vec{p},\vec{q},\vec{r}\right]=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}\left[\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right].$
6. $\vec{a},\vec{b},\vec{c},$ అను ఏవేని మూడు సదిశలకు $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ అనునది సదిశా త్రిక లబ్ధము అని పిలువబడును.
7. $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ అనునవి ఏవేని మూడు సదిశలు అయిన $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ అగును.
8. $\vec{a}$ ను స్థాన సదిశగా కలిగి ఇవ్వబడిన బిందువు గుండా వెళ్ళుచూ సదిశ $\vec{b}$ కు సమాంతరముగా గల సదిశ సమీకరణము $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ ఇక్కడ $t\in\mathbb{R}.$ అగును.
9. (x_1,y_1,z_1) అను బిందువు గుండా వెళ్ళుచూ, b_1,b_2,b_3 అను దిశా నిష్పత్తులను కలిగిన సదిశకు సమాంతరముగా గల సరళరేఖ యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణము $\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$.
10. $\frac{x-x_1}{b_1}=\frac{y-y_1}{b_2}=\frac{z-z_1}{b_3}$ అను సరళరేఖ మీద గల ఏదేని ఒక బిందువు $(x_1+tb_1,\ y_1+tb_2,\ z_1+tb_3)$,$t\in\mathbb{R}.$ అను రూపములో ఉండును.
11. ఇవ్వబడిన $\vec{a}$ మరియు $\vec{b}$ అను స్థాన సదిశలను కలిగిన రెండు బిందువుల ద్వారా వెళ్ళు సరళరేఖ యొక్క పరామితీయ సమీకరణము $\vec{r}=\vec{a}+t\left(\vec{b}-\vec{a}\right),t\in\mathbb{R}.$

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 318 10-03-2022 11:24:47

12. (x_1, y_1, z_1) మరియు (x_2, y_2, z_2) అను రెండు బిందువుల గుండా వెళ్ళు సరళరేఖ యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణము $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

13. $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ మరియు $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ అను రెండు సరళరేఖలకు మధ్యగల కోణము $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{b}\cdot\vec{d}|}{|\vec{b}||\vec{d}|}\right)$

14. రెండు సరళరేఖలు ఒకే తలములో అమరియుండిన, వాటిని సతలీయము అంటారు.

15. ఒక తలములో సమాంతరముగా లేకుండా ఒకదానికొకటి ఖండించకుండా ఉండిన రెండు సరళరేఖలను అతలీయ రేఖలు అంటారు.

16. అతలీయ రేఖలకు మధ్యగల మిక్కిలి కనిష్ఠ దూరము ఆ రెండు రేఖల మధ్యగల లంబము యొక్క పొడవు అగును.

17. $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ మరియు $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ అను అతలీయ రేఖలకు మధ్యగల మిక్కిలి కనిష్ఠ దూరము

$\delta = \frac{\left|(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})\right|}{\left|\vec{b}\times\vec{d}\right|}$, ఇక్కడ $|\vec{b}\times\vec{d}| \neq 0$ అగును.

18. $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ మరియు $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ అను రెండు సరళరేఖలు ఒకదానికొకటి ఖండించుకొనిన $(\vec{c}-\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d}) = 0$ అగును.

19. $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ మరియు $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{b}$ అను సమాంతర రేఖలకు మధ్యగల మిక్కిలి కనిష్ఠ దూరము $d = \frac{\left|(\vec{c}-\vec{a})\times\vec{b}\right|}{\left|\vec{b}\right|}$ ఇక్కడ $|\vec{b}| \neq 0$ అగును.

20. $\frac{x-x_1}{b_1} = \frac{y-y_1}{b_2} = \frac{z-z_1}{b_3}$ మరియు $\frac{x-x_2}{d_1} = \frac{y-y_2}{d_2} = \frac{z-z_2}{d_3}$ అను సరళరేఖలు ఒకదానికొకటి ఖండించుకొనిన $\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0$ అగును.

21. ఒక సరళరేఖకు లంబముగాఉండు రేఖను ఆతలము యొక్క లంబము (లేదా) అభిలంబము అంటారు.

22. ఆది బిందువు నుండి తలమునకు మధ్యగల దూరము p మరియు తలమునకు లంబముగా గల యూనిట్ సదిశ $\hat{d}$ అయిన తలము యొక్క సమీకరణము $\vec{r}\cdot\hat{d} = p$ అగును. (అభిలంబ రూపము)

23. అభిలంబ రూపము తలము యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణము $lx + my + nz = p$ అగును.

24. $\vec{a}$ అను సదిశను స్థాన సదిశగా కలిగిన బిందువు గుండా వెళ్ళుచూ, $\vec{n}$ కు లంబముగా గల తలము యొక్క సదిశ సమీకరణము $(\vec{r}-\vec{a})\cdot\vec{n} = 0$ అగును.

25. (x_1, y_1, z_1) అను బిందువు గుండా వెళ్ళుచూ, a,b,c అను దిశా నిష్పత్తులను కలిగిన అభిలంబముగా గల తలము యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణము $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1) = 0$ అగును.

26. x, y, z అను అక్షములలో క్రమముగా a,b,c అను అంతర ఖండములతో ఏర్పరచు $\vec{r}\cdot\vec{n} = q$ అను తలము యొక్క అంతరఖండ సమీకరణము $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1$ అగును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 319 10-03-2022 11:24:49

27. సరేఖీయములుకాని $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ అను మూడు సదిశలను స్థానసదిశగా కలిగిన బిందువుల గుండా వెళ్ళు తలము యొక్క పరామితీయ సదిశ సమీకరణము $\vec{r} = \vec{a} + s\left(\vec{b} - \vec{a}\right) + t\left(\vec{c} - \vec{a}\right)$ అగును.

28. సరేఖీయములుకాని మూడు బిందువుల ద్వారా వెళ్ళు తలము యొక్క కార్టీషియన్ సమీకరణము

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0 .$$

29. ఒక సరళరేఖ మీద గల ప్రతిబిందువు తలముపై ఉండిన మరియు తలము యొక్క అభిలంబరేఖకు లంబముగా ఉండిన యెడల, ఆ సరళరేఖ తలముపై ఉండును.

30. $\left(\vec{c} - \vec{a}\right) \cdot \left(\vec{b} \times \vec{d}\right) = 0$ అయిన $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ మరియు $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ అను సమాంతరముకాని రెండు సరళరేఖలు సతలీయము అగును.

31. $\frac{x - x_1}{b_1} = \frac{y - y_1}{b_2} = \frac{z - z_1}{b_3}$ మరియు $\frac{x - x_2}{d_1} = \frac{y - y_2}{d_2} = \frac{z - z_2}{d_3}$ అను సరళరేఖలు సతలీయము అయిన $\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = 0$ అగును.

32. $\vec{r} = \vec{a} + s\vec{b}$ మరియు $\vec{r} = \vec{c} + t\vec{d}$ అను ఒకే తలములో అమరియుండు సమాతరముకాని రెండు సరళరేఖలను కలిగిన తలము యొక్క పరామితీయకాని సదిశ సమీకరణము $\left(\vec{r} - \vec{a}\right) \cdot \left(\vec{b} \times \vec{d}\right) = 0$ లేదా $\left(\vec{r} - \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{b} \times \vec{d}\right) = 0$ అగును.

33. $\vec{r} \cdot \vec{n}_1 = p_1$ మరియు $\vec{r} \cdot \vec{n}_2 = p_2$ అను తలములకు మధ్య గల లఘుకోణము θ అయిన $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right)$ అగును.

34. $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ అను సరళరేఖకు $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$ అను తలమునకు మధ్య గల లఘుకోణము θ అయిన $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{|\vec{b} \cdot \vec{n}|}{|\vec{b}||\vec{n}|}\right)$ అగును.

35. $\vec{u}$ అను స్థాన సదిశను కలిగిన బిందువు నుండి $\vec{r} \cdot \vec{n} = p$ అను తలమునకు మధ్య గల లంబ దూరము $\delta = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n} - p|}{|\vec{n}|}$ అగును.

36. (x_2, y_1, z_1) అను బిందువు నుండి $ax + by + cz = p$ అను తలమునకు మధ్య గల లంబదూరము $\delta = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - p|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ అగును.

37. ఆది బిందువు నుండి $ax + by + cz + d = 0$ అను తలమునకు మధ్య గల లంబదూరము $\delta = \frac{|d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ అగును.

38. $ax + by + cz + d_1 = 0$ మరియు $ax + by + cz + d_2 = 0$ అను సమాంతరమైన రెండు తలములకు మధ్య గల దూరము $\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ అగును.

12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 320 10-03-2022 11:24:52

39. $\vec{r}\cdot\vec{n}_1 = d_1$ మరియు $\vec{r}\cdot\vec{n}_2 = d_2$ అను తలముల యొక్క ఖండన రేఖ గుండా వెళ్ళు తలము యొక్క సమీకరణము $(\vec{r}\cdot\vec{n}_1 - d_1) + \lambda(\vec{r}\cdot\vec{n}_2 - d_2)$ ఇక్కడ $\lambda \in \mathbb{R}$ అగును.

40. $a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ మరియు $a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ అను తలముల యొక్క ఖండన రేఖ గుండా వెళ్ళు తలము యొక్క సమీకరణము $(a_1x + b_1y + c_1z - d_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2z - d_2) = 0$ అగును.

41. $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{b}$ అను సరళరేఖ, $\vec{r}\cdot\vec{n} = p$ అను తలము ఖండించుకొను బిందువు యొక్క స్థానసదిశ $\vec{u} = \vec{a} + \left(\frac{p - (\vec{a}\cdot\vec{n})}{\vec{b}\cdot\vec{n}}\right)\vec{b}$, ఇక్కడ $\vec{b}\cdot\vec{n} \neq \vec{0}$ అగును.

42. $\vec{u}$ అను సదిశను స్థాన సదిశగా కలిగిన బిందువుకు $\vec{r}\cdot\vec{n} = p$ అను తలములో ప్రతిబింబము యొక్క స్థానసదిశ $\vec{v}$ అయిన $\vec{v} = \vec{u} + \frac{2\left[p - (\vec{u}\cdot\vec{n})\right]}{|n|^2}\vec{n}$ అగును.

సంగణక కృత్యము (ICT CORNER)

https://ggbm.at/vchq92pg లేక Scan ను QR Code చేయుము.

Browser బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్ చేయుము. URL లింక్‌ను ఈ క్రింది విధంగా టైపు చేయుము. లేదా QR code. సంకేతమును స్కాన్ చేయుము. జియోజింబ్రా యొక్క " 12th Standard Mathematics " అను పుట తెరపై కనబడును. ఈ వర్క్‌షీట్ పాఠ్యపుస్తకము యొక్క ఎడమ ప్రక్క మీ పాఠ్యాంశమునకు సంబంధించిన అధ్యాయములు కనబడును. అందులో "Applications of Vector Algebra" అను అధ్యాయమును ఎంచుకొనుము. ఇప్పుడు ఈ పాఠ్యాంశమునకు సంబంధించిన పలు వర్క్‌షీట్‌లు ఈ పుటలో చూడవచ్చును. " Scalar Triple Product " అను అభ్యాసమును ఎంచుకొనుము.



12th_Maths_Telugu_Medium_Chapter_6.indd 321 10-03-2022 11:24:53

జవాబులు

అభ్యాసము 1.1

1. (i) $\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{bmatrix}$ (iii) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & +2 & 2 \end{bmatrix}$

2. (i) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ (ii) $\frac{1}{28}\begin{bmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 6 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{bmatrix}$ (iii) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 9 & -5 & -1 \end{bmatrix}$ 4. $A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$

8. $\pm\begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 9. $\pm\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 6 & 2 & -6 \\ -3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$ 10. $\begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ 13. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 15. HELP

అభ్యాసము 1.2

1. (i) 1 (ii) 2 (iii) 2 (iv) 3 (v) 3 2. (i) 2 (ii) 3 (iii) 3

3. (i) $\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \\ -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

అభ్యాసము 1.3

1. (i) $x = -11, y = 4$ (ii) $x = 2, y = -4$
   (iii) $x = 2, y = 3, z = 4$ (iv) $x = 3, y = -2, z = 1$
2. $x = 2, y = 1, z = -1$ 3. ₹ 18000, ₹ 600
4. 18 రోజులు, 36 రోజులు 5. ₹ 2000, ₹ 1000, ₹ 3000

అభ్యాసము 1.4

1. (i) $x = -2, y = 3$ (ii) $x = \frac{1}{2}, y = 3$
   (iii) $x = 2, y = 3, z = 4$ (iv) $x = 1, y = 3, z = 3$
2. 84 3. 50% ఆమ్లము అనునది 6 లీటర్లు, 25% ఆమ్లము అనునది 4 లీటర్లు
4. పంపు A : 15 నిమిషములు, పంపు B : 30 నిమిషములు
5. ₹ 30/-, ₹ 10/-, ₹ 30/-, అవును

అభ్యాసము 1.5

1. (i) $x = -1, y = 4, z = 4$ (ii) $x = 3, y = 1, z = 2$
2. $a = 2, b = 1, c = 6$ 3. ₹ 30000, ₹ 15000, ₹ 20000
4. $a = 1, b = 3, c = -10$, అవును

12th_Maths_EM_Vol1_Answers.indd 322 23-01-2023 15:36:33

అభ్యాసము 1.6

1. (i) $x=y=z=1$ (ii) $x=\frac{1}{10}(7-5t), y=\frac{1}{10}(5t-1), z=t, t\in\square$

   (iii) సాధన లేదు (iv) $x=\frac{1}{2}(s-t+2), y=s, z=t \text{ and } s,t\in\square$

2. (i) $k=1$ (ii) $k\neq 1, k\neq -2$ (iii) $k=-2$

3. (i) $\lambda = 5$ మరియు $\mu\neq 9$ (ii) $\lambda\neq 5$ మరియు $\mu\in\square$ (iii) $\lambda=5, \mu=9$

అభ్యాసము 1.7

1. (i) $x=-t, y=-2t, z=t, t\in\square$ (ii)అల్పమైన సాధన మాత్రమే ఉండును.

2. (i) $\lambda\neq 8$ (ii) $\lambda=8$

3. $2C_2H_6+7O_2\rightarrow 6H_2O+4CO_2$

అభ్యాసము 1.8

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(2)	(3)	(2)	(3)	(4)	(2)	(4)	(4)	(2)	(1)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(2)	(4)	(1)	(2)	(4)	(3)	(2)	(1)	(4)	(4)
21	22	23	24	25					
(2)	(4)	(4)	(4)	(1)					

అభ్యాసము 2.1

1. $-1-i$ 2. $1+i$ 3. 0 4. 0

5. 1 6. $1-i$

అభ్యాసము 2.2

1. (i) $4+i$ (ii) $8-i$ (iii) $7+5i$ (iv) $1+17i$ (v) $15+8i$ (vi) $15+8i$

3. $x=-1$, $y=1$

అభ్యాసము 2.3

3. $-z_1=-2-5i$, $z_1^{-1}=\frac{1}{29}(2-5i)$

   $-z_2=3+4i$, $z_2^{-1}=\frac{1}{25}(-3+4i)$

   $-z_3=-1-i$, $z_3^{-1}=\frac{1}{2}(1-i)$

అభ్యాసము 2.4

1. (i) $7-5i$ (ii) $\frac{5}{4}(1-i)$ (iii) $\frac{2}{5}-\frac{14i}{5}$

2. (i) $\frac{x}{x^2+y^2}$ (ii) y (iii) $-y-4$

3. $\frac{1}{25}(-1-2i), \frac{1}{5}(-11+2i)$ (4) $\frac{1}{2}(7-i)$ 6. (i) 6 (ii) 3

12th_Maths_EM_Vol1_Answers.indd 323 23-01-2023 15:36:34

అభ్యాసము 2.5

1. (i) $\frac{2}{5}$ (ii) $2\sqrt{2}$ (iii) 32 (iv) 50

3. $11+6i$

8. 10 10. (i) $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ (ii) $\pm\left(\sqrt{2}+i2\sqrt{2}\right)$ (iii) $\pm(2-3i)$

అభ్యాసము 2.6

3. (i) $y^2=3$ (ii) $x-y=0$ (iii) $x+y=0$ (iv) $x^2+y^2=1$

4. (i) $2+i,3$ (ii) $-1+2i,1$ (iii) $2-4i,\frac{8}{3}$

5. (i) $x^2+y^2-8x-240=0$ (ii) $6x+1=0$

అభ్యాసము 2.7

1. (i) $4\left(\cos\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right), k\in\mathbb{Z}$

(ii) $2\sqrt{3}\left(\cos\left(2k\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(2k\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right), k\in\mathbb{Z}$

(iii) $2\sqrt{2}\left(\cos\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(2k\pi-\frac{3\pi}{4}\right)\right), k\in\mathbb{Z}$

(iv) $\sqrt{2}\left(\cos\left(2k\pi+\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(2k\pi+\frac{5\pi}{12}\right)\right), k\in\mathbb{Z}$

2. (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ (ii) $\frac{-i}{2}$

అభ్యాసము 2.8

3. 1 5. $3\,\mathrm{cis}\frac{\pi}{3}, -3, 3\,\mathrm{cis}\frac{5\pi}{3}$ 7. -1

9. (i) $2\sqrt{2}\,e^{\frac{i\pi}{12}}$ (ii) $2\sqrt{2}\,e^{\frac{i5\pi}{12}}$ (iii) $2\sqrt{2}\,e^{\frac{i5\pi}{4}}$

అభ్యాసము 2.9

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(1)	(1)	(1)	(2)	(3)	(1)	(4)	(1)	(1)	(1)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(2)	(2)	(4)	(2)	(2)	(3)	(1)	(3)	(4)	(4)
21	22	23	24	25					
(2)	(3)	(4)	(1)	(1)					

అభ్యాసము 3.1

1. 60

2. (i) $x^3-6x^2+11x-6=0$ (ii) $x^3-3x+2=0$ (iii) $x^3-4x^2-4x+16=0$

3. (i) $x^3+4x^2+12x+32=0$ (ii) $4x^3+3x^2+2x+1=0$ (ii) $x^3-2x^2+3x-4=0$

12th_Maths_EM_Vol1_Answers.indd 324 23-01-2023 15:36:34

4. $2,3,\frac{1}{3}$ 5. 10 6. $6,4,-1$ 7. $\sum\frac{\alpha}{\beta\gamma}=\frac{2ac-b^2}{ad}$

8. $2x^2-3x-20=0$ 11. $x^3+x-12=0$

అభ్యాసము 3.2

1. $k<0$ అయితే ఆ బహుపదికి వాస్తవ మూలములు కలవు.

   $k=0$ or $k=8$ మూలములు వాస్తవములు మరియు సమానము.

   $0<k<8$ మూలములు కల్పితములు.

   $k>8$ మూలములు వాస్తవములు మరియు సమానములు కావు.

2. $x^2-4x+7=0$ 3. $x^2-6x+13=0$ 4. x^4-16x^2+4

అభ్యాసము 3.3

1. $-3,3,\frac{1}{2}$ 2 . $\frac{2}{3},\frac{4}{3},2$ 3. $\frac{2}{3},2,6$ 4. $k=2,\ 2,\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

5. $1-2i,1+2i,\sqrt{3},-\sqrt{3},\frac{1+\sqrt{37}}{2},\frac{1-\sqrt{37}}{2}$ 6. (i) $1,\frac{1}{2},3$ (ii) $-1,\frac{1}{2},\frac{3}{4}$ 7. $\pm3,\pm\sqrt{5}$

అభ్యాసము 3.4

1. (i) $\{-2,3,-7,8\}$ (ii) $3,3,3+\sqrt{17},3-\sqrt{17}$ 2. $\left\{1,-2,\frac{-1+2\sqrt{5}}{2},\frac{-1-2\sqrt{5}}{2}\right\}$

అభ్యాసము 3.5

1. (i) $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2},n\in\mathbb{Z}$, సాధన లేదు $\sin x=4$ (ii) $2,-\frac{1}{4},\frac{2}{3}$

2. (i) $x=1$ (ii) అకరణీయ మూలములు లేవు 3. 4^n 4. $\frac{b^2}{4a},\frac{9a^3}{b^2}$

5. (i) $2,3,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$ (ii) $+1,-1,\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$

6. $2,3$ 7. $\frac{1}{3},3,-\frac{1}{2}$ మరియు -2

అభ్యాసము 3.6

1. దీనికి నాలుగు ధనాత్మక మూలములు మరియు రెండు ఋణాత్మక మూలములు ఉండును.
2. రెండు ధనాత్మక మూలములు ఉండును; కాని ఋణాత్మక మూలములు లేవు.
4. ఒక ధనాత్మక మూలము మరియు ఒక ఋణాత్మక మూలము ఉండును.
5. ధనాత్మక వాస్తవ మూలములు మరియు ఋణాత్మక వాస్తవ మూలములు లేవు.

అభ్యాసము 3.7

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(4)	(1)	(3)	(1)	(3)	(4)	(1)	(3)	(1)	(2)

12th_Maths_EM_Vol1_Answers.indd 325 23-01-2023 15:36:36

అభ్యాసము 4.1

1. (i) $x = n\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \pm10$ (ii) $x = (4n-1)\frac{\pi}{2},\ n = 0, \pm1$

2. (i) 1, $\frac{2\pi}{7}$ (ii) 1, 6π (iii) 4, π 4. (i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $-\frac{\pi}{4}$

5. $x = 0$ 6. (i) $\{-1, 1\}$ (ii) $[0, 1]$ 7. $\frac{\pi}{3}$

అభ్యాసము 4.2

1. (i) $x = (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm5, -6$ (ii) $x = (2n+1)\pi,\ n = 0, \pm1, \pm2, -3$

2. $-\frac{\pi}{6} \notin [0, \pi]$ 3. సత్యము 4. $\frac{\pi}{3}$

5. (i) $\frac{5\pi}{6}$ (ii) $-\frac{\pi}{6}$ (iii) $\frac{24\pi}{119}$ 6. (i) $[-5, 5]$ (ii) $[-1, 1]$

7. $0 < x < \frac{1}{3}$ 8. (i) 0 (ii) $\frac{17\pi}{12}$

అభ్యాసము 4.3

1. (i) $[-3, 3]$ (ii) $\mathbb{R}$ 2. (i) $\frac{\pi}{4}$ (ii) $-\frac{\pi}{6}$

3. (i) $\frac{7\pi}{4}$ (ii) 1947 (iii) –0.2021 4. (i) ∞ (ii) $-\frac{2\sqrt{5}}{25}$ (iii) $\frac{24}{25}$

అభ్యాసము 4.4

1. (i) $\frac{\pi}{6}$ (ii) $\frac{\pi}{6}$ (iii) $-\frac{\pi}{4}$ 2.(i) $-\frac{\pi}{3}$ (ii) $\cot^{1}(2)$ $\frac{\pi}{6}$ (iii) $-\frac{5\pi}{6}$

అభ్యాసము 4.5

1. (i) $-\frac{\pi}{2}$ (ii) $-\frac{\pi}{4}$ (iii) $5 - 2\pi$

2. (i) $\sqrt{2x - x^2}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{9x^2 - 6x + 2}}$ (iii) $\frac{2x+1}{\sqrt{3 - 4x - 4x^2}}$

3. (i) $\frac{\pi}{6}$ (ii) 0 (iii) $\frac{17}{6}$ 8. $\frac{\pi}{4}$

9. (i) $x = 13$ (ii) $x = \frac{a-b}{1+ab}$ (iii) $x = n\pi + \frac{\pi}{4},\ n \in z$

(iv) $x = \sqrt{3}$

10. 3

12th_Maths_EM_Vol1_Answers.indd 326 23-01-2023 15:36:37

అభ్యాసము 4.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(3)	(2)	(3)	(1)	(2)	(1)	(3)	(1)	(4)	(4)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(3)	(2)	(2)	(1)	(3)	(3)	(2)	(2)	(4)	(4)

అభ్యాసము 5.1

1. $x^2+y^2\pm10y=0$ 2. $(x-2)^2+(y+1)^2=50$
3. $x^2+y^2+4x+4y+4=0$ or $x^2+y^2+20x+20y+100=0$ 4. $x^2+y^2-4x-6y-12=0$
5. $x^2+y^2-5x+3y-22=0$ 6. $x^2+y^2=1$
7. $x^2+y^2-6x-4y+4=0$ 8. ±12
9. $x-5y+8=0,\ 5x+y-12=0$ 10. బాహ్య భాగం, అంతర భాగం, బాహ్య భాగం
11. (i) $(0,-2),0$ (ii) $(-3,2),3$ (iii) $\left(\frac{1}{2},-1\right),\frac{\sqrt{17}}{2}$ (iv) $\left(\frac{3}{2},-1\right),\frac{3}{2}$
12. $p=q=3,\ (1,0),5$

అభ్యాసము 5.2

1. (i) $y^2=16x$ (ii) $3x^2=-4y$ (iii) $(y+2)^2=12(x-1)$ (iv) $y^2=16x$

2. (i) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{27}=1$ (ii) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ (iii) $\frac{16x^2}{625}+\frac{y^2}{25}=1$ (iii) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{16}=1$

3. (i) $\frac{9x^2}{16}-\frac{9y^2}{20}=1$ (ii) $\frac{(x-2)^2}{12}-\frac{(y-1)^2}{24}=1$ (iii) $\frac{x^2}{16}-\frac{9y^2}{64}=1$

4.

	శీర్షము	నాభి	అభిలంబ సమీకరణము	నాభిలంబపు పొడవు
i.	$(0,0)$	$(4,0)$	$x=-4$	16
ii.	$(0,0)$	$(0,6)$	$y=-6$	24
iii.	$(0,0)$	$(-2,0)$	$x=2$	8
iv.	$(1,-2)$	$(1,-4)$	$y=0$	8
v.	$(1,2)$	$(3,2)$	$x=-1$	8

12th_Maths_EM_Vol1_Answers.indd 327 23-01-2023 15:36:38

5.

	శాంకవము రకములు	కేంద్రము	శీర్షము	నాభి	అభిలంబము
i.	దీర్ఘవృత్తము	$(0,0)$	$(\pm5,0)$	$(\pm4,0)$	$x=\pm\frac{25}{4}$
ii.	దీర్ఘవృత్తము	$(0,0)$	$(0,\pm\sqrt{10})$	$(0,\pm\sqrt{7})$	$y=\pm\frac{10}{\sqrt{7}}$
iii.	అతిపరావలయము	$(0,0)$	$(\pm5,0)$	$(\pm13,0)$	$x=\pm\frac{25}{13}$
iv.	అతిపరావలయము	$(0,0)$	$(0,\pm4)$	$(0,\pm5)$	$y=\pm\frac{16}{5}$

8.

	శాంకవము రకములు	కేంద్రము	శీర్షము	నాభి	అభిలంబము
i.	దీర్ఘవృత్తము	$(3,4)$	$(3,21),(3,-13)$	$(3,12),(3,-4)$	$y\ \frac{321}{8}$, $y\ \frac{257}{8}$
ii.	దీర్ఘవృత్తము	$(-1,2)$	$(-11,2),(9,2)$	$(-7,2),(5,2)$	$x=\frac{47}{3}$, $x=\frac{-53}{3}$
iii.	అతిపరావలయము	$(-3,4)$	$(-18,4),(12,4)$	$(-20,4),(14,4)$	$x=\frac{174}{17}$, $x=\frac{-276}{17}$
iv.	అతిపరావలయము	$(-1,2)$	$(-1,7),(-1,-3)$	$(-1,2+\sqrt{41})$ $(-1,2-\sqrt{41})$	$y=\frac{25}{\sqrt{41}}+2$, $y=\frac{-25}{\sqrt{41}}+2$
v.	దీర్ఘవృత్తము	$(4,-2)$	$(4,-2+3\sqrt{2})$, $(4,-2-3\sqrt{2})$	$(4,-2+\sqrt{6})$, $(4,-2-\sqrt{6})$	$y=-2+3\sqrt{6}$, $y=-2-3\sqrt{6}$
vi.	అతిపరావలయము	$(2,-3)$	$(3,-3),(1,-3)$	$(2+\sqrt{10}-3)$, $(2-\sqrt{10},-3)$	$x=\frac{1}{\sqrt{10}}+2$, $x=\frac{-1}{\sqrt{10}}+2$

12th_Maths_EM_Vol1_Answers.indd 328 23-01-2023 15:36:38

అభ్యాసము 5.3

1. అతిపరావలయము 2 వృత్తము 3. దీర్ఘవృత్తము 4. వృత్తము 5. అతిపరావలయము
6. పరావలయము

అభ్యాసము 5.4

1. $x-y-3=0, x-9y+13=0$ 2. $10x-3y+32=0,\ 10x-3y-32=0$
3. $(-3,1)$ 4. $x-y+4=0$
5. $x-2y+8=0$ 6. $4x-3y-6=0, 3x+4y-42=0$

అభ్యాసము 5.5

1. 8.4 m 2. 26.6 m 3. 3 m
4. $y^2=4.8x,\ 1.3m$ 5. $3.52m,\ 5.08m$ 6. 90.82m, 148.91m
7. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 8. $3\sqrt{3}m$ 9. $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$ 10. $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$

అభ్యాసము 5.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(1)	(3)	(4)	(3)	(3)	(1)	(1)	(3)	(2)	(2)	(1)	(4)	(3)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	---
(3)	(1)	(4)	(4)	(1)	(1)	(2)	(2)	(3)	(3)	(3)	(2)	---

అభ్యాసము 6.1

11. 80 యూనిట్స్ 12. 69 యూనిట్స్
13. $\sqrt{179}, \frac{3}{\sqrt{179}}, \frac{-11}{\sqrt{179}}, \frac{-7}{\sqrt{179}}$ 14. $-96\hat{i}+115\hat{j}+15\hat{k}$

అభ్యాసము 6.2

1. 24 2. 720 ఘన ప్రమాణాలు 3. -5
4. ± 12 5. $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ 6. సమ 7. 2

అభ్యాసము 6.3

1. (i) $-2\hat{i}+14\hat{j}-22\hat{k}$ (ii) $22\hat{i}+14\hat{j}+2\hat{k}$ 5. -74
7. $l=0,\ m=10,\ n=-3$ 8. $\theta=\frac{\pi}{3}$

అభ్యాసము 6.4

1. $\left(\vec{r}-\left(4\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k}\right)\right)\times\left(2\hat{i}-6\hat{j}+7\hat{k}\right)=\vec{0},\ \frac{x-4}{2}=\frac{y-3}{-6}=\frac{z+7}{7}$
2. $\vec{r}=\left(-2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right)+t\left(-4\hat{i}+5\hat{j}-6\hat{k}\right),\ \frac{x+2}{-4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-4}{-6}$

12th_Maths_EM_Vol1_Answers.indd 329 23-01-2023 15:36:39

3. $\left(\frac{32}{3},0,\frac{47}{3}\right),(0,16,-11)$

4. $\left(\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{6}{7}\right)$, $\vec{r}=\left(5\hat{i}+6\hat{j}+7\hat{k}\right)+t\left(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}\right)$ or

$\vec{r}=\left(7\hat{i}+9\hat{j}+13\hat{k}\right)+t\left(2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}\right)$,

$\frac{x-5}{2}=\frac{y-6}{3}=\frac{z-7}{6}$ or $\frac{x-7}{2}=\frac{y-9}{3}=\frac{z-13}{6}$

5. (i) $0°$ (ii) $\frac{\pi}{6}$ (iii) $\frac{\pi}{2}$ 6. $\frac{\pi}{2}$ 7. $a=18, b=\frac{2}{3}$ 8. 1

అభ్యాసము 6.5

1. $\vec{r}=\left(5\hat{i}+2\hat{j}+8\hat{k}\right)+t\left(2\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}\right), t\in\mathbb{R}$, $\frac{x-5}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-8}{-2}$

2. $\frac{7}{\sqrt{5}}$ యూనిట్స్ 3. $\frac{9}{2}$ 4. $(6,2,1)$ 5. 2 యూనిట్స్

6. $\frac{\sqrt{83}}{\sqrt{6}}$ యూనిట్స్ 7. $(1,6,0)$, $\frac{x-5}{-4}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-2}{-2}$

అభ్యాసము 6.6

1. $\vec{r}\cdot\left(\frac{3\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}}{5\sqrt{2}}\right)=7$ 2. $\frac{12}{13},\frac{3}{13},\frac{-4}{13}$; $\vec{r}.\left(\frac{12\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k}}{13}\right)=5$; 5

3. $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}+3\hat{j}+5\hat{k}\right)=35$; $x+3y+5z=35$ 4. $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)=2$; $x+y+z=2$

5. x -అంతర ఖండము $=2$, y- అంతర ఖండము $=3$, z- అంతర ఖండము $=-4$ 6. $\frac{x}{u}+\frac{y}{v}+\frac{z}{w}=3$

అభ్యాసము 6.7

1. $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}-2\hat{j}+4\hat{k}\right)=20$; $x-2y+4z-20=0$
2. $\vec{r}\cdot\left(3\hat{i}+4\hat{j}-5\hat{k}\right)=9$; $3x+4y-5z-9=0$
3. $\vec{r}=\left(2\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}\right)+s\left(-\hat{i}-4\hat{j}+2\hat{k}\right)+t\left(3\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}\right)s,t\in\mathbb{R}$;

   $12x-11y-16z+14=0$
4. $\vec{r}\cdot\left(\hat{i}+10\hat{j}+7\hat{k}\right)=9$; $x+10y+7z-9=0$
5. $r=\left(\hat{i}-\hat{j}+3\hat{k}\right)+s\left(2\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}\right)+t\left(\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}\right)s,t\in\mathbb{R}$; $9x-2y-5z+4=0$
6. $\vec{r}=\left(3\hat{i}+6\hat{j}-2\hat{k}\right)+s\left(-4\hat{i}-8\hat{j}+8\hat{k}\right)+t\left(3\hat{i}-2\hat{j}\right)s,t\in\mathbb{R}$; $\vec{r}\cdot\left(2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\right)=16$;

   $2x+3y+4z-16=0$
7. $\vec{r}\cdot\left(3\hat{i}+5\hat{j}-7\hat{k}\right)=6$; $3x+5y-7z-6=0$

అభ్యాసము 6.8

1. $\vec{r}\cdot\left(17\hat{i}-47\hat{j}-24\hat{k}\right)=-172$ 2. $x+2y-z-4=0$
3. $m=\pm\sqrt{2}$ 4. $-2,2$, $y+z+1=0$, $y-z+1=0$

12th_Maths_EM_Vol1_Answers.indd 330 23-01-2023 15:36:39

అభ్యాసము 6.9

1. $15x-47y+28z-7=0$
2. $5x-11y+z-17=0$
3. $\sin^{-1}\left(\frac{8}{21}\right)$
4. $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{6}}\right)$
5. $2x-3y+5z+11=0, \frac{4}{\sqrt{38}}$
6. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ యూనిట్స్
7. $(2,2,0)$, $\text{Sin}^{-1}\left(\frac{2}{3\sqrt{6}}\right)$
8. $(3,1,-1); \sqrt{14}$ యూనిట్స్.

అభ్యాసము 6.10

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(4)	(3)	(1)	(2)	(1)	(3)	(1)	(1)	(1)	(2)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(3)	(1)	(2)	(4)	(4)	(2)	(3)	(4)	(2)	(1)
21	22	23	24	25					
(2)	(3)	(4)	(3)	(1)					

12th_Maths_EM_Vol1_Answers.indd 331 23-01-2023 15:36:40

పదకోశములు

అధ్యాయము 1
మాత్రికలు మరియు నిర్ధారకముల అనువర్తనములు

Adjoint matrix	అనుబంద మాత్రిక
Inverse matrix	విలోమ మాత్రిక
Rank	కోటి
Elementary transformation	ప్రాథమిక పరివర్తనములు
Echelon form	ఎకిలాన్ రూపము
Trivial solution	అల్పమైన సాధన
Non-trivial solution	అల్పము కాని సాధన
Augmented matrix	విస్తరించబడిన మాత్రక
Consistent	స్థిరమైనది
Pivot	పివోట్

అధ్యాయము 2
సంకీర్ణ సంఖ్యలు

Complex numbers	సంకీర్ణ సంఖ్యలు
Imaginary unit	కల్పిత ప్రమాణము
Rectangular form	దీర్ఘచతురస్రకార రూపము
Argand Plane	ఆర్గాండ్ తలము
Conjugate of a complex number	సంకీర్ణ సంఖ్య యొక్క సంయుగ్మము
Upper bound	ఎగువ హద్దు
Lower bound	దిగువ హద్దు
Polar form	ధ్రువ రూపము
Exponential form	ఘాతాంక రూపము
Trigonometric form	త్రికోణమితీయ రూపము
Absolute value	పరమమూల్యము
Modulus	మాపము
Argument or amplitude	కోణాంకము
Principal argument	ప్రధాన కోణాంకము
Euler's form	ఆయిలర్స్ రూపము

అధ్యాయము 3
సమీకరణముల సిద్ధాంతము

Complex conjugate root theorem	సంయుగ్మ సంకీర్ణ మూల సిద్ధాంతము
Leading coefficient	ప్రధాన గుణకము
Leading term	ప్రధాన పదము
Monic polynomial	ఏకఘాత బహుపది
Non-polynomial equation	బహుపది కాని సమీకరణము

12th_Maths_EM_Vol1_Glossary.indd 332 10-03-2022 12:36:02

Non real complex number	కల్పిత సంకీర్ణ సంఖ్యలు
Quartic polynomial	ద్విఘాత బహుపది
Radical solution	మౌళిక సాధన
Rational root Theorem	అకరణీయ మూల సిద్ధాంతము
Reciprocal equation	విలోమ సమీకరణము
Reciprocal polynomial	విలోమ బహుపది
Simple root	సాధారణ మూలము
Zero polynomial	శూన్య బహుపది

అధ్యాయము 4
విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు

Inverse trigonometric functions	విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు
Principal value	ప్రధాన విలువలు
Amplitude	వ్యాప్తి
Period	ఆవర్తనము
Principal domain	ప్రధాన ప్రదేశము
Periodic function	ఆవర్తన ప్రమేయము
Reciprocal inverse identities	విలోమ వ్యుత్రమాల సర్వసమానతలు
Reflection identities	పరావర్తన సర్వసమానతలు
Cofunction inverse identities	సహ ప్రమేయాల విలోమ సర్వసమానతలు

అధ్యాయము 5
ద్విపరిమాణ రేఖాగణితము

Circle	వృత్తము
Parabola	పరావలయము
Ellipse	దీర్ఘవృత్తం
Hyperbola	అతిపరావలయము
Algebraic techniques	బీజీయ పద్ధతులు
Geometrical problems	జ్యామితీయ సమస్యలు
Astronomy	శాంకవాలు
Conics	శాంఖవాలు
Focus	నాభి
Directrix	నియతరేఖ
Eccentricity	ఉత్కేంద్రత
Focal chord	నాభిజ్యా

12th_Maths_EM_Vol1_Glossary.indd 333 10-03-2022 12:36:03

Vertex	శీర్షము
Latus rectum	నాభిలంబము
Major axis	దీర్ఘ అక్షము
Minor axis	దీర్ఘాక్షము
Transverse axis	తిర్యగాక్షము
Conjugate axis	సంయుగ్మాక్షము
Auxiliary circle	పరివృత్తము
Incircle	అంతరవృత్తము
Asymptotes	అనంత స్పర్శరేఖలు
Degenerate forms	శిధిలాకార రూపములు
Double napped cone	శీర్షాభిముఖ ద్విశంఖువు
Parametric equation	పరామితీయ సమీకరణము
Director circle	దిశా వ త్తము
Elliptic orbit	దీర్ఘవృత్తాకార కక్ష్య
Reflective property	పరావర్తన ధర్మములు

అధ్యాయము 6

సదిశా బిజగణితము మరియు వాటి అనువర్తనాలు

Box product	అదిశా త్రికలబ్ధము
Line of intersection	ఖండన రేఖలు
Moment	భ్రామకము
Normal	అభిలంబము
Parallelepiped	సమాంతర ఫలకం
Parameter	పరామితులు
Plane	తలము
Rotaional force	పరిభ్రమణ బలము
Skew lines	అతలీయ రేఖలు (అసౌష్టవ రేఖలు)
Torque	బలభ్రామకము
Triple product	త్రిక లబ్ధము

12th_Maths_EM_Vol1_Glossary.indd 334 10-03-2022 12:36:03

CLASS 12 - MATHEMATICS - VOLUME 1
TELUGU MEDIUM

Academic Coordinators

K. Chandrasekaran,
Lecturer, DIET, Chennai.

Dr. M.Ethirajulu,
Senior Lecturer,
SCERT, Chennai-6.

Reviewers

G. Kiran Kumar Reddy
P.G. Asst Mathematics
S.K.D.T Hr.Sec.School,
Villivakkam, Chennai-49

Y.Narayanappa
P.G. Asst (Mathematics)
G.H.S.S,Nallur.

K.V.Chandrakala
P.G. Asst (Mathematics)
G.H.S.S, Bukkasagaram,
Krishnagiri District.

List of Translators

J.Krishnamoorthy, B.T.Asst,
G.H.S, Deveerapalli

Y.S. Venkateshmurthy, B.T.Asst,
G.H.S, Bagalur

B.R.Venkatesulu, B.T.Asst,
G.H.S, Bukkasagaram

T.Govindarajulu, B.T.Asst,
G.H.S, Moranapalli

Velamnagaraju, B.T.Asst,
G.H.S, Muthalli

V.Sudhakar, B.T.Asst,
G.H.S, A.Settipalli

K.Chokkalingam, B.T.Asst,
G.H.S, Barigai

R.Ilayaraja, B.T.Asst,
G.H.S.S,Berigai

V.S. Manjunath, B.T.Asst,
G.H.S, Shoolageri

D.Sudhakar, B.T.Asst,
G.G.H.S.S, Pedhabelagandapalli

K.Janakiraman, B.T.Asst,
G.G.H.S, Thalli

R.Manjunath, B.T.Asst,
G.H.S, Athimugam

E. Gurumurthy, B.T.(Maths),
S.K.P.D.Boys. Hr.Sec.School,
Sowcarpet, Chennai-1.

S. Sathyanarayana,
B.T.(Maths),
Kesari Hr.Sec.School,
Mylapore, Chennai-4.

K. Chandra Sekara Varma,
B.T.(Maths),
S.K.D.T Hr.Sec.School,
Villivakkam Chennai-49.

ICT Coordinator

D. Vasu Raj, P.G.T & HOD,
Dept of Mathematics,
KRM Public School,Chennai.

EMIS Technology Team

R.M. Satheesh
State Coordinator Technical,
TN EMIS, Samagra Shiksha.

K.P. Sathya Narayana
IT Consultant,
TN EMIS, Samagra Shikaha

R. Arun Maruthi Selvan
Technical Project Consultant,
TN EMIS, Samagra Shiksha

Wrapper Design
Kathir Arumugam

In-House QC
Rajesh Thangappan

Coordination
Ramesh Munisamy

This book has been printed on 80 G.S.M.
Elegant Maplitho Paper.
Printed by Web Offset at :

12th_Maths_EM_Text Book Dev Team.indd 335 10-03-2022 12:33:18

NOTES

12th_Maths_EM_Text Book Dev Team.indd 336 10-03-2022 12:33:18