GOVERNMENT OF TAMIL NADU

ഹയർസെക്കന്ററി ഒന്നാം വർഷം

HIGHER SECONDARY FIRST YEAR

ഗണിതം

MATHEMATICS

വാല്യം - II

VOLUME - II

MALAYALAM MEDIUM

Department of School Education

Untouchability is Inhuman and a Crime

Mal_11th-Std-Maths-Vol 2-FM.indd 1 3/16/2023 3:58:58 PM

Government of Tamil Nadu

First Edition - 2022

Revised Edition - 2023

Reprint - 2024

(Published under new syllabus)

Content Creation

State Council of Educational
Research and Training

© SCERT 2022

Printing & Publishing

Tamil Nadu Textbook and Educational
Services Corporation

www.textbooksonline.tn.nic.in

EE_Malayalam_FM.indd 2 03-01-2024 10:33:53

ഉള്ളടക്കം

ഗണിതശാസ്ത്രം വാല്യം-II

അധ്യായം 7 – മാട്രിക്സുകളും ഡിറ്റർമിനന്റുകളും		പേജ് നമ്പർ	മാസം
7.1	ആമുഖം	1	
7.2	മാട്രിക്സുകൾ	2	ഒക്ടോബർ
7.3	ഡിറ്റർമിനന്റുകൾ	20	
അധ്യായം 8 – സദിശ ബീജഗണിതം			
8.1	ആമുഖം	47	
8.2	അദിശകളും സദിശകളും	49	
8.3	ഒരു സദിശത്തിന്റെ പ്രാതിനിധ്യം കൂടാതെ വിവിധതരം സദിശകളും	49	
8.4	സദിശകളുടെ ബീജഗണിതം	51	
8.5	സ്ഥാന സദിശം	56	ഒക്ടോബർ
8.6	സദിശകളുടെ വിഘടനം	60	
8.7	കോസൈനുകളുടെ ദിശയും അംശബന്ധങ്ങളുടെ ദിശയും	63	
8.8	സദിശകളുടെ ഗുണനം	69	
അധ്യായം 9 – അവകലന കലനം - പരിധികളും തുടർച്ചാപ്രതിഭാസവും			
9.1	ആമുഖം	86	
9.2	പരിധികൾ	88	നവംബർ
9.3	തുടർച്ചാപ്രതിഭാസം	118	
അധ്യായം 10 – അവകലന കലനം - അവകലനവും അവകലന രീതികളും			
10.1	ആമുഖം	135	
10.2	അവകലജത്തിന്റെ ആശയം	136	നവംബർ
10.3	ഡിഫറൻഷ്യബിലിറ്റിയും തുടർച്ചാപ്രതിഭാസവും	144	
10.4	അവകലന നിയമങ്ങൾ	148	
അധ്യായം 11 – സമാകലകലനം			
11.1	ആമുഖം	182	
11.2	ന്യൂട്ടൻ ലെബ്നിസ് സമകലം	184	
11.3	സമാകലനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന നിയമങ്ങൾ	186	
11.4	$\int f(ax+b)dx$ എന്ന തരത്തിലുള്ള സമാകലങ്ങൾ	188	ഡിസംബർ
11.5	സമാകലങ്ങുടെ ഗുണങ്ങൾ	190	
11.6	ലളിതമായ പ്രയോഗങ്ങൾ	192	
11.7	സമാകലനത്തിന്റെ രീതികൾ	196	

Mal_11th-Std-Maths-Vol 2-FM.indd 3 3/16/2023 3:58:59 PM

അധ്യായം 12 – സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തത്തിന് ഒരു ആമുഖം

12.1	ആമുഖം	232	
12.2	അടിസ്ഥാന നിർവ്വചനങ്ങൾ	232	
12.3	പരിമിത സാമ്പിൾ സ്പെയിസ്	234	
12.4	സംഭാവ്യത	237	
12.5	സംഭാവ്യതയുടെ ചില അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തങ്ങൾ	247	ഡിസംബർ
12.6	നിബന്ധന പ്രകാരമുള്ള സംഭാവ്യത	251	
12.7	ഒരു സംഭവത്തിന്റെ ആകെ സംഭാവ്യത	259	
12.8	ബെയ്സ് സിദ്ധാന്തം	261	

ഉത്തരങ്ങൾ 271

പദപരിചയം 281

പരിശോധനാ പുസ്തകങ്ങൾ 283

061IV

E-book

DIYA1

Assessment

Mal_11th-Std-Maths-Vol 2-FM.indd 4 3/16/2023 3:58:59 PM

അദ്ധ്യായം **7**

മാട്രിക്സുകളും ഡിറ്റർമിനന്റുകളും

EOZIV

"ഗണിതശാസ്ത്രം യുക്തിയുടെ സംഗീതമാണ്"

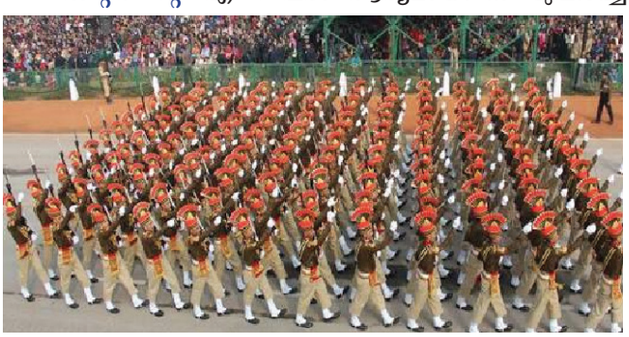
- സിൽവെസ്റ്റർ

7.1 ആമുഖം

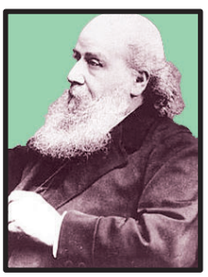
മാട്രിക്സുകളുടെയും ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെയും ആരംഭം കുറിച്ചത് ബി.സി. രണ്ടാം നൂറ്റാണ്ടിലാണ്. 17-ാം നൂറ്റാണ്ടിന്റെ അവസാനം ഈ ആശയം വീണ്ടും പ്രത്യക്ഷപ്പെടുകയും വികസനം പുരോഗമിക്കുകയും ചെയ്തു. രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളുടെ പഠനത്തിൽ കൂടെയാണ് മാട്രിക്സുകളും ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെയും ആരംഭം കുറിച്ചത് എന്നതിൽ ഒട്ടും അതിശയമില്ല. ബാബിലോണിയർ ഏകകാല രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളിലേയ്ക്ക് നയിക്കുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾ പഠിക്കുകയും അവയിൽ ചിലത് കളിമൺ ഗുളികളായി സംരക്ഷിക്കുകയും ചെയ്തിട്ടുണ്ട്. അവ ഇന്നും നിലനിൽക്കുന്നു.

രേഖീയ സമവാക്യങ്ങൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിന് ഒതുക്കമുള്ളതുമായ രീതികൾ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിനുള്ള ശ്രമങ്ങളാണ് മാട്രിക്സുകളുടെ ഉത്ഭവത്തിന് കാരണമായത്. ജ്യാമിതീയ രൂപങ്ങളുടെ രൂപാന്തരത്തെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനത്തോടൊപ്പവും ഇത് ആരംഭിച്ചു, 1850-ൽ ജെയിംസ് ജോസഫ് സിൽവസ്റ്റർ എന്ന ഇംഗ്ലീഷ് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനാണ് മാട്രിക്സ് എന്ന വാക്ക് കണ്ടുപിടിച്ചത്. ഇത് കണക്കിലെ ഒരു ശക്തമായ ഉപകരണമാണ് മാട്രിക്സ് (ഇത്‌ലാറ്റിൻ പദത്തിലെ M$\bar{a}$ter എന്നാൽ അമ്മ-കോലിന്റെ നിഘണ്ടു).

പൊതുവായി, മാട്രിക്സ് എന്നത് വസ്തുക്കളുടെ ദീർഘ ചതുരാകൃതിയിലുള്ള ക്രമീകരണമാണ്. നമ്മുടെ ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ മാട്രിക്സുകളുടെ ഉപയോഗം കാണാവുന്നതാണ്. ഉദാഹരണം: സൈനികപരേഡ്, സ്കൂൾ അസംബ്ലി, സസ്യങ്ങൾ.



ഡിറ്റർമിന്റ് എന്ന പദം ആദ്യമായി കണ്ടുപിടിച്ചത് **ചതുർഭുജ രൂപങ്ങളെക്കുറിച്ചുള്ള പഠനത്തിൽ കാൽ. എഫ് ഗോസ്** ആണ്. പക്ഷേ അദ്ദേഹത്തിന്റെ ആശയം ആധുനിക ഡിറ്റർമിന്റുമായി വ്യത്യാസമായിരുന്നു. തന്റെ ഡിസ്കിസിഷൻസ് അരിത്തമെറ്റിക് എന്നതിൽ ഗോസ് ചതുർഭുജ രൂപങ്ങളുടെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ ദീർഘ ചതുരാകൃതിയിലുള്ള ശ്രേണിയായി അവതരിപ്പിച്ചു. അവിടെ അദ്ദേഹം മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനം വിവരിച്ചു.



സിൻവസ്റ്റർ (1814 - 1897)

1812-ൽ കോച്ചി ഡിറ്റർമിനന്റിനെ വിശദമായി ഉപയോഗിച്ചു. അദ്ദേഹം മൈനറും അഡ്ജോയിന്റും പുതിയ ഫലങ്ങൾ നർകി. ആർതർ കെയ്‌ലി മാട്രിക്സുകളുടെ വികസനത്തിൽ പ്രധാന സംഭാവനകൾ നൽകി. 1841-ൽ അദ്ദേഹം ഡിറ്റർമിനന്റ് സിദ്ധാന്തം പ്രസിദ്ധീകരിച്ചു. അതിൽ അദ്ദേഹം ശ്രേണികളുടെ രണ്ട് വശങ്ങളിലും ഡിറ്റർമിനന്റിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നതായി രണ്ട് ലംബ രേഖകൾ ഉപയോഗിച്ചു. അത് ഇപ്പോൾ സ്റ്റാന്റേർഡ് ചിഹ്നമായി തുടരുന്നു. 1958-ൽ അദ്ദേഹം **മെമോയർ ഓൺ ദ തിയറി ഓഫ്**

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 1 3/16/2023 5:13:54 PM

മാട്രിസസ്സ് പ്രസിദ്ധീകരിച്ചു. മടുപ്പുളവാക്കുന്ന കണക്കുകൂട്ടൽ രീതികൾ, പ്രത്യക്ഷ രീതി എന്നിവയുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ അവ നമ്മുടെ ജോലിയെ ഒരു പരിധി വരെ ലളിതമാക്കുന്നു. ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞർ ജെയിംസ് ജോസഫ് സിൻവസ്റ്റർ (1814 – 1897) വില്യം റോവൻ ഹേമിൽറ്റൻ (1805 – 1865) ആർദർ കെയ്‌ലി (1821 – 1895) എന്നിവർ മാട്രിക്സ് സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വികാസത്തിൽ പ്രധാന പങ്ക് വഹിച്ചു. ഇംഗ്ലീഷ് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ കല്ലീസ് (1913) ആദ്യമായി മാട്രിക്സിനായി ആധുനിക ബ്രാക്കറ്റ് ചിഹ്നം ഉപയോഗിച്ചു. ജനിതക ശാസ്ത്രം, സാമ്പത്തിക ശാസ്ത്രം, സാമൂഹിക ശാസ്ത്രം, ആധുനിക മനശാസ്ത്രം, വ്യാവസായിക നർവഹണം തുടങ്ങിയ മേഖലകളിലും മാട്രിക്സിനെ കുറിച്ചുള്ള അറിവ് അത്യന്താപേക്ഷിതമാണ്

രേഖീയ സമവാക്യങ്ങളുടെ ഗുണാങ്കങ്ങൾ സൂചിപ്പിക്കുന്നതിനും മാട്രിക്സുകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. മാട്രിക്സിന്റെ ചിഹ്നങ്ങളും ക്രിയകളും കമ്പ്യൂട്ടറിലെ ഇലക്ട്രോണിക് പ്രോഗ്രാമുകളിൽ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഇവ ബഡ്ജറ്റിംഗ്, സെയിൽസ് പ്രൊജക്ഷൻ, വില നിർണ്ണയം, സയൻസിൽ ഒരു പരീക്ഷണത്തിന്റെ ഫലം നിർണ്ണയിക്കുന്നതിൽ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

ജ്യാമിതീയ ക്രിയകളായ മാഗ്നിഫിക്കേഷൻ, ഒരു തലത്തിൽ കൂടെയുള്ള ഭ്രമണം, പ്രതിഫലനം ഇവ ഗണിതപരമായി മാട്രക്സുകൾ ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കാവുന്നതാണ്. സാമ്പത്തിക ശാസ്ത്രജ്ഞൻ, സോഷ്യൽ അക്കൗണ്ടിംഗ്, ഇൻപുട്ട്-ഔട്ട്പുട്ട് ടേബിൾസ്, ഇന്റർ-ഇൻഡസ്ട്രി ഇക്കണോകിക്സ് ഇവയിൽ മാട്രിക്സുകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഇലക്ട്രിക്കൽ എഞ്ചിനീയറിംഗിൽ ആശയവിനിമയ സിദ്ധാന്തം, നെറ്റ് വർക്ക് വിശകലനം ഇവയിൽ മാട്രിക്സുകൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു. **ക്രിപ്റ്റോഗ്രാഫിയിലും** ഇവ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ നാം ആദ്യം മാട്രിക്സുകളെക്കുറിച്ചും അവയുടെ പ്രത്യേകതകളെക്കുറിച്ചും പഠിക്കാം. അതിനു ശേഷം ഡിറ്റർമിനന്റുകൾ, അവയുടെ പ്രത്യേകതകൾ, കോഫ്റ്ററുകൾ ഇവയെക്കുറിച്ച് പഠിക്കാം. ക്രമം മൂന്നുള്ള ഡിറ്റർമിനന്റുകൾ മാത്രമേ നാം ഇവിടെ ചർച്ച ചെയ്യുന്നുള്ളൂ.

പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

ഈ അദ്ധ്യായം അവസാനിക്കുമ്പോഴേയ്ക്കും വിദ്യാർത്ഥികൾ താഴെ പറയുന്നവ മനസ്സിലാക്കുന്നു

- ബുദ്ധിമുട്ടുള്ള പ്രശ്നങ്ങൾ മാട്രിക്സ് ഉപയോഗിച്ച് ലഘുവായി ദൃശ്യവൽക്കരിക്കൽ.
- മാട്രിക്സുകളുടെ തരങ്ങളും മാട്രിക്സുകളുടെ ബീജഗണിതവും.
- ഡിറ്റർമിനന്റ് മൂല്യങ്ങൾ വിപുലീകരത്തിലൂടെയും ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെ ഇനങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചും കണക്കുകൂട്ടൽ.
- മാട്രിക്സുകളും ഡിറ്റർമിനന്റുകളും ഉപയോഗിച്ച് ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം, മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളുടെ സമരേഖീയത ഇവ കണ്ടുപിടിക്കൽ.

7.2 മാട്രിക്സുകൾ

സംഖ്യകളുടെ ദീർഘചതുരാകൃതിയിലുള്ള ക്രമീകരണത്തെ **മാട്രിക്സ്** എന്നു പറയുന്നു. അംഗങ്ങളെ ചതുര ബ്രാക്കറ്റിൽ [ ] വരിയും നിരയുമായി എഴുതുന്നു.

പൊതുവായി, ഒരു മാട്രിക്സിലെ അംഗങ്ങൾ വാസ്തവിക സംഖ്യയോ, കോംപ്ലക്സ് സംഖ്യയോ ഒരു ചതുരമുള്ള (ഉദാഹരണം: ബഹുപദങ്ങൾ, ത്രികോണമതി ഫലങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ അവയുടെ സമ്മിശ്രണം) അല്ലെങ്കിൽ ഒന്നിൽ കൂടുതൽ ചരങ്ങൾ ഉള്ള അല്ലെങ്കിൽ മറ്റേതെങ്കിലും വസ്തു ആയിരിക്കും സാധാരണയായി മാട്രിക്സുകളെ $A, B, C, \ldots$ എന്ന ഇംഗ്ലീഷ് അക്ഷരമാലയിലെ വലിയ അക്ഷരങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ മാട്രിക്സിലെ അംഗങ്ങളെ വാസ്തവിക സംഖ്യകളോ, യഥാർത്ഥ മൂല്യഫലങ്ങളോ, യഥാർത്ഥ ചരങ്ങളായോ നിയന്ത്രിച്ചിരിക്കുന്നു.

ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ പൊതു രൂപം

A എന്ന ഒരു മാട്രിക്സിന് m വരികളും n നിരകളും ഉണ്ടെങ്കിൽ അതിനെ

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$. എന്ന് എഴുതാവുന്നതാണ്

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 2 3/16/2023 5:13:54 PM

അതായത്,

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{matrix}\overset{\text{Column 1}}{\downarrow}&\overset{\text{Column 2}}{\downarrow}&&\overset{\text{Column } j}{\downarrow}&&\overset{\text{Column } n}{\downarrow}\\ \end{matrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix}\overset{n \text{ columns}}{\longrightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{matrix}\leftarrow \text{Row } 1\\ \leftarrow \text{Row } 2\\ \\ \leftarrow \text{Row } i\\ \\ \leftarrow \text{Row } m\end{matrix}\Bigg\downarrow\ m \text{ rows}$$

m കൂടാതെ n എന്നിവ ധനപൂർണ്ണാംഗങ്ങളാണ് എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവ മാട്രിക്സുകളുടെ ചില ഉദാഹരണങ്ങളാണ് :

$$A=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & 4 & 5\\ 9 & -8 & 6\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}7 & -9 & 1.2 & 0\\ \sin\frac{x}{4} & 2 & x^2 & 4\\ \cos\frac{x}{2} & 1 & 3 & -6\end{bmatrix},\ \text{കൂടാതെ}\ C=\begin{bmatrix}1 & 5 & -7\\ 3.4 & \frac{1}{2} & \sqrt{2}\\ e^2 & -3 & 4\\ \sqrt{5} & 2 & a\end{bmatrix}$$

ഒരു മാട്രിക്സിൽ തിശ്ചീന അംഗങ്ങളുള്ള രേഖയെ വരി എന്നും ലംബമായഅംഗങ്ങളുള്ള രേഖയെ നിര എന്നും പറയുന്നു. അതിനാൽ A യ്ക്ക് മൂന്ന് വരികളും കൂടാതെ മൂന്ന് നിരകളും B യ്ക്ക് മൂന്ന് വരികളും കൂടാതെ നാല് നിരകളും, C യ്ക്ക് നാല് വരികളും മൂന്ന് നിരകളുമാണ്.

നിർവ്വചനം 7.1

A എന്ന മാട്രിക്സിന് m വരികളും n നിരകളുമാണ് ഉള്ളതെങ്കിൽ അതിന്റെ **ക്രമം അഥവാ മാനം** എന്നതിനെ $m \times n$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കാം. (ഇതിനെ m by n എന്ന് വായിക്കാം).

$a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn}$ എന്നത് $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ അംഗങ്ങൾ ആകുന്നു. i ാമത്തെ വരി കൂടാതെ j ാമത്തെ നിര എന്നിവയിലെ പൊതുവായ അംഗം a_{ij} മാട്രിക്സ് A യുടെ (i, j) ാംമത്തെ അംഗം ആകുന്നു. മാട്രിക്സ് A യുടെ i ാംമത്തെ വരികൂടാതെ j ാംമത്തെ നിരയെ $1\times n$ കൂടാതെ $m\times 1$ എന്ന് നിരീക്ഷിക്കാം ഇതിനെ $[a_{i1}\ \ a_{i2}\ \ \ldots\ \ a_{in}]$ കൂടാതെ $\begin{bmatrix}a_{1j}\\ a_{2j}\\ \vdots\\ a_{mj}\end{bmatrix}$ എന്ന് തന്നിരിക്കുന്നു.

ദൈനംദിന ജീവിതത്തിലുള്ള പ്രശ്നങ്ങളെ നിർമ്മിതിയായും, പ്രദർശനമായും മാട്രിക്സ് രൂപത്തിൽ അവതരിപ്പിക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്ന് നോക്കാം.

ഉദാഹരണം 7.1

അവസാന പരീക്ഷകളിൽ വ്യത്യസ്ത വിഷയങ്ങളിൽ ഒരു വിദ്യാർത്ഥി നേടിയ മാർക്കുകളെ പട്ടിക രൂപത്തിൽ താഴെ അവതരിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നു :

	തമിഴ്	ഇംഗ്ലീഷ്	കണക്ക്	ശാസ്ത്രം	സാമൂഹ്യശാസ്ത്രം
പരീക്ഷ 1	48	71	80	62	55
പരീക്ഷ 2	70	68	91	73	60
പരീക്ഷ 3	77	84	95	82	62

ഈ പട്ടികയിലുള്ള വിവരങ്ങളെ മാട്രിക്സ് രൂപത്തിൽ മാറ്റാം. മൂന്നാമത്തെ വരി കൂടാതെ രണ്ടാമത്തെ നിരയിലുള്ള അംഗം ഏതിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു?

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 3 3/16/2023 5:13:55 PM

മുകളിലുള്ള വിവരങ്ങളെ 3×5 മാട്രിക്സ് A യിനെ എഴുതാം.

$$A = \begin{bmatrix} 48 & 71 & 80 & 62 & 55 \\ 70 & 68 & 91 & 73 & 60 \\ 77 & \mathbf{84} & 95 & 82 & 62 \end{bmatrix}.$$

മുകളിലുള്ള മൂന്നാമത്തെ നിര കൂടാതെ രണ്ടാമത്തെ വരിയിലുള്ള 84 എന്ന അംഗം ഇംഗ്ലീഷ് വിഷയത്തിന് പരീക്ഷ മൂന്നിൽ ആ വിദ്യാർത്ഥി നേടിയ മാർക്കിനെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 7.1

ഒരു മാട്രിക്സിൽ 12 അംഗങ്ങൾ ഉണ്ട്. അതിന്റെ സാധ്യമായ ക്രമങ്ങൾ ഏവ? ആ മാട്രിക്സിന് 7 അംഗങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ എന്തായിരിക്കും ?

നിർദ്ധാരണം

അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം എന്നത് അതിന്റെ വരിയുടെയും നിരയുടെയും ഗുണനഫലത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും. അതിനാൽ ഗുണനഫലം 12 ഉള്ള നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യയുടെ ക്രമ ജോഡികൾ നമുക്ക് കാണാം. അതുകൊണ്ട് മാട്രിക്സിന്റെ എല്ലാ ക്രമ ജോഡികൾ 1×12, 12×1, 2×6, 6×2, 3×4 കൂടാതെ 4×3. 7 ഒരു അഭാജ്യ സംഖ്യയായത് കൊണ്ട് അതിന്റെ സാധ്യമായ ക്രമജോഡികൾ 1×7 കൂടാതെ 7×1 എന്നിവയാണ്.

ഉദാഹരണം 7.2

2×3 എന്ന രീതിയിൽ ഉള്ള (i, j) ത്തെ അംഗമായിട്ടുള്ള

$a_{ij} = \frac{\sqrt{3}}{2}|2i-3j|$ $(1 \le i \le 2,\ 1 \le j \le 3)$. മാട്രിക്സ് നിർമ്മിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

പൊതുവായി 2×3 മാട്രിക്സ് $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$ ന്റെ നിർവ്വചന പ്രകാരം

a_{ij} യുടെ നിർവചനത്തിൽ നിന്ന് എളുപ്പത്തിൽ ലഭിക്കും, $a_{11} = \frac{\sqrt{3}}{2}|2-3| = \frac{\sqrt{3}}{2}$ മറ്റ് അംഗങ്ങളും

അതുകൊണ്ട് ആവശ്യമുള്ള മാട്രിക്സ് A $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 2\sqrt{3} & \frac{7\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} & \frac{5\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$.

7.2.1 മാട്രിക്സുകളുടെ തരങ്ങൾ

വരി, നിര, പൂജ്യ മാട്രിക്സുകൾ

നിർവ്വചനം 7.2

ഒരു വരി മാത്രമുള്ള മാട്രിക്സിനെ **വരി മാട്രിക്സ്** എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, $A = [A]_{1\times4} = [1 \quad 0 \quad -1.1 \quad \sqrt{2}]$ ഒരു വരി മാട്രിക്സാണ്. പൊതുവായി, $A = [a_{ij}]_{1\times n} = [a_{1j}]_{1\times n}$ എന്നത് വരി മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം $1\times n$ ആയിരിക്കും.

നിർവ്വചനം 7.3

ഒരു നിര മാത്രമുള്ള മാട്രിക്സിനെ **നിര മാട്രിക്സ്** എന്നു പറയുന്നു.

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 4 3/16/2023 5:13:56 PM

ഉദാഹരണമായി, $[A]_{4\times1}=\begin{bmatrix} x+1 \\ x^2 \\ 3x \\ 4 \end{bmatrix}$ ഒരു നിര മാട്രിക്സാണ് അതിന്റെ അംഗങ്ങൾ വാസ്തിക ചാരം x ഉള്ള വാസ്തിക ഫലനമായിരിക്കും. പൊതുവായി, $A=[a_{ij}]_{m\times1}=[a_{i1}]_{m\times1}$ എന്നത് $m\times1$ ക്രമത്തിൽ വരി മാട്രിക്സ് ആയിരിക്കും.

നിർവ്വചനം 7.4

ഒരു മാട്രിക്സ് $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ഉള്ള $1\le i\le m$ കൂടാതെ $1\le j\le n$ മൂല്യങ്ങൾക്ക് $a_{ij}=0$ എങ്കിൽ ആ മാട്രിക്സിനെ **പൂജ്യമാട്രിക്സ് അഥവാ ശൂന്യ മാട്രിക്സ്** എന്നു പറയുന്നു. ഇതിനെ O എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, $[0]$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ കൂടാതെ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ എന്നിവ ക്രമേണ 1×1, 3×3 കൂടാതെ 2×4 ക്രമമുള്ള പൂജ്യ മാട്രിക്സുകളാണ്.

ഒരു മാട്രിക്സിൽ A ൽ കുറഞ്ഞത് ഒരു അംഗമെങ്കിലും പൂജ്യമല്ല എങ്കിൽ ആ മാട്രിക്സിനെ **പൂജ്യം അല്ലാത്ത മാട്രിക്സ്** എന്നു പറയുന്നു.

സമചതുര, വികർണ്ണ, ഏകമാത്ര, ത്രികോണ മാട്രിക്സുകൾ

നിർവ്വചനം 7.5

ഒരു മാട്രിക്സിന്റെ നിര കൂടാതെ വരികളുടെ എണ്ണം തുല്യമാണെങ്കിൽ ആ മാട്രിക്സിനെ **സമചതുര മാട്രിക്സ്** എന്നു പറയുന്നു. അതായത് $n\times n$ ക്രമമുള്ള ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് n ക്രമമുള്ള സമചതുര മാട്രിക്സ് എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & c & f \\ g & h & l \end{bmatrix}$ എന്നത് ഒരു ക്രമം 3 ഉള്ള ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സാണ്.

നിർവ്വചനം 7.6

n ക്രമമുള്ള ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ ന്റെ അംഗങ്ങളെ $a_{11},a_{22},a_{33},...,a_{nn}$ എന്നിവ **പ്രധാന വികർണ്ണ അംഗങ്ങൾ** എന്നു പറയുന്നു.

നിർവ്വചനം 7.7

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ എന്ന സമചതുര മാട്രിക്സിൽ എല്ലാ $a_{ij}=0$, $i\neq j$. എങ്കിൽ ആ മാട്രിക്സിനെ ഒരു **വികർണ്ണ മാട്രിക്സ്** എന്നു പറയുന്നു.

അതുകൊണ്ട്, ഒരു വികർണ്ണ മാട്രിക്സിൽ പ്രധാന വികർണ്ണ അംഗങ്ങൾ ഒഴികെ ബാക്കി എല്ലാ അംഗങ്ങളും പൂജ്യമായിരിക്കും,

ഉദാഹരണമായി $A=\begin{bmatrix} 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}$, $C=[6]$, കൂടാതെ $D=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$

എന്നിവ ക്രമേണ 3, 2, 1, കൂടാതെ n ക്രമമുള്ള വികർണ്ണ മാട്രിക്സുകളാണ്. ഒരു പൂജ്യ സമചതുര മാട്രിക്സ് ഒരു വികർണ്ണ മാട്രിക്സാണോ?

നിർവ്വചനം 7.8

ഒരു വികർണ്ണ മാട്രിക്സിൽ പ്രധാന വികർണ്ണ അംഗങ്ങൾ പൂജ്യമാണെങ്കിൽ അതിനെ **അദിശ മാട്രിക്സ്** എന്നു പറയുന്നു.

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 5 3/16/2023 5:13:58 PM

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ എന്ന സമചതുര മാട്രിക്സിൽ $a_{ij}=\begin{cases}c & \text{if } i=j\\ 0 & \text{if } i\neq j\end{cases}$ എങ്കിൽ A ഒരു അദിശ മാട്രിക്സ് ആണ്.

ഇവിടെ c എന്നത് ഒരു സ്ഥിര സംഖ്യ ഉദാഹരണമായി,

$$A=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0 & 0\\ 0 & \sqrt{2} & 0\\ 0 & 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}\sqrt{3}\end{bmatrix} \text{ കൂടാതെ } D=\begin{bmatrix}c & 0 & \cdots & 0\\ 0 & c & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & c\end{bmatrix}\begin{matrix}R_1\\ R_2\\ \\ R_n\end{matrix}$$

എന്നിവ ക്രമേണ ക്രമം 3, 2, 1, കൂടാതെ n ഉള്ള അദിശ മാട്രിക്സാണ്.

കൂടാതെ ഒരു പൂജ്യമാട്രിക്സ് അദിശ പൂജ്യമുള്ള അദിശ മാട്രിക്സ് ആണ് എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

നിർവ്വചനം 7.9

ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിലെ പ്രധാന വികർണ്ണത്തിലുള്ള അംഗങ്ങൾ 1 യായും ബാക്കി എല്ലാ അംഗങ്ങൾ പൂജ്യം മാത്രമാണെങ്കിൽ ആ മാട്രിക്സിനെ **ഏകമാത്ര മാട്രിക്സ്** എന്ന് പറയുന്നു.

അതിനാൽ $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ സമചതുര മാട്രിക്സിൽ $a_{ij}=\begin{cases}1 \text{ എങ്കിൽ } i=j\\ 0 \text{ എങ്കിൽ } i\neq j\end{cases}$ എങ്കിൽ A എന്നത് ഒരു ഏക മാത്ര മാട്രിക്സ് ആണ്.

കൂടാതെ n ക്രമത്തിലുള്ള ഏകമാത്ര മാട്രിക്സിനെ I_n. സൂചിപ്പിക്കുന്നു,

$$I_1=[1], I_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}, I_3=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \text{ കൂടാതെ } I_n=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}\begin{matrix}R_1\\ R_2\\ \\ R_n\end{matrix}$$

എന്നിവ ക്രമേണ 1, 2, 3 കൂടാതെ n ഉള്ള ഏകമാത്ര മാട്രിക്സുകൾക്ക് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

കുറിപ്പ് 7.1

ഏകമാത്ര മാട്രിക്സ് അദിശ മാട്രിക്സിന് ഉദാഹരണമാണ്.

ത്രികോണ മാട്രിക്സിനെ മുകൾ ത്രികോണ മാട്രിക്സ് കൂടാതെ താഴ്ന്ന ത്രികോണ മാട്രിക്സ് എന്ന് രണ്ടായി തരം തിരിക്കാം.

നിർവ്വചനം 7.10

ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിൽ പ്രധാന വികർണ്ണത്തിന് താഴെയുള്ള എല്ലാ അംഗങ്ങളും പൂജ്യമാണെങ്കിൽ ആ മാട്രിക്സിനെ **മുകൾ ത്രികോണ മാട്രിക്സ്** എന്നു പറയുന്നു.

അതിനാൽ $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ എന്ന സമചതുരമാട്രിക്സിൽ $a_{ij}=0,\ i>j$ ആണെങ്കിൽ ആ മാട്രിക്സിനെ മുകൾ ത്രികോണ മാട്രിക്സ് എന്നു പറയുന്നു,

$\begin{bmatrix}4 & 3 & 0\\ 0 & 7 & 8\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-5 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, കൂടാതെ $\begin{bmatrix}4 & 3 & 0\\ 0 & 7 & 8\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-5 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, എന്നിവ മുകൾ ത്രികോണ മാട്രിക്സിന് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

നിർവ്വചനം 7.11

ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിന്റെ പ്രധാന വികർണ്ണത്തിനെ താഴെയുള്ള എല്ലാ അംഗങ്ങളും പൂജ്യം ആണെങ്കിൽ അതിനെ **താഴ്ന്ന ത്രികോണ മാട്രിക്സ്** എന്നു പറയുന്നു.

അതിനാൽ $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ എന്ന സമചതുര മാട്രിക്സിൽ $a_{ij}=0\ ,i<j.$ ആണെങ്കിൽ അത് താഴ്ന്ന ത്രികോണ മാട്രിക്സ് ആണ്.

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 6 3/16/2023 5:14:00 PM

$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 8 & -5 & 7 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}$ കൂടാതെ $\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}$ എന്നിവ താഴ്ന്ന ത്രികോണ മാട്രിക്സിന് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

നിർവ്വചനം 7.12

മുകൾ ത്രികോണ മാട്രിക്സ് രൂപത്തിൽ അല്ലെങ്കിൽ താഴ്ന്ന ത്രികോണ മാട്രിക്സ് രൂപത്തിൽ ഉള്ള ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിനെ **ത്രികോണ രൂപ മാട്രിക്സ്** എന്ന് പറയുന്നു.

ഒരേ സമയത്ത് മുകൾ കൂടാതെ താഴ്ന്ന ത്രികോണ മാട്രിക്സിനെ വികർണ്ണ രൂപത്തിൽ ഉള്ളതായി കാണാം.

7.2.2 മാട്രിക്സുകളുടെ സമത്വം

നിർവ്വചനം 7.13

$A = [a_{ij}], B = [b_{ij}]$ എന്നീ രണ്ട് മാട്രിക്സുകൾ **തുല്യമാട്രിക്സുകൾ** ($A = B$ എന്നു കുറിക്കുന്നു) ആണെങ്കിൽ

(i) A, B എന്നീ മാട്രിക്സുകൾ ഒരേ ക്രമം അല്ലെങ്കിൽ മാത്രം ഉള്ളവയായിരിക്കും

(ii) A, B എന്നീ മാട്രിക്സുകളുടെ സമാന അംഗങ്ങൾ തുല്യമായിരിക്കും. അതായത് എല്ലാ $i, j,$ ന് $a_{ij} = b_{ij}$ ആയിരിക്കും. ഇതിന്റെ വിപരീതവും വാസ്തവമായിരിക്കും.

ഉദാഹരണമായി,

$\begin{bmatrix} x & y \\ u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 & -1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}$, എങ്കിൽ $x = 2.5, y = -1, u = \frac{1}{\sqrt{2}}$ കൂടാതെ $v = \frac{3}{5}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

നിർവ്വചനം 7.14

A, B എന്നീ രണ്ട് മാട്രിക്സുകൾ നിർവ്വചന 7.13 ലുള്ള നിബന്ധനകൾ (i) അല്ലെങ്കിൽ (ii) ഇതിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് പൂർത്തിയാക്കിയില്ലെങ്കിൽ ഈ രണ്ട് മാട്രിക്സുകളും തുല്യമല്ലാ എന്നു പറയുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 8 & -5 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ എങ്കിൽ ഈ രണ്ട് മാട്രിക്സുകളുടെ സമാന അംഗങ്ങൾ തുല്യമല്ല.

മാത്രമല്ല $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 3 & 4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$ എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ ഈ മാട്രിക്സുകളുടെ ക്രമങ്ങൾ തുല്യമല്ല.

ഉദാഹരണം 7.3

$\begin{bmatrix} 3x+4y & 6 & x-2y \\ a+b & 2a-b & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 5 & -5 & -3 \end{bmatrix}$ എങ്കിൽ x, y, a, b എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

രണ്ട് മാട്രിക്സുകളും തുല്യ മാട്രിക്സുകളായതിനാൽ അവയുടെ സമാന അംഗങ്ങളും തുല്യമാണ്. അതിനാൽ

$3x+4y=2,\ x-2y=4,\ a+b=5,\ 2a-b=-5.$

ഈ സമീകരണങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ $x=2,\ y=-1,\ a=0,\ b=5$ എന്നു കിട്ടുന്നു

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 7 3/16/2023 5:14:01 PM

7.2.3 മാട്രിക്സിലെ ക്രിയകൾ

മാട്രിക്സിലെ അടിസ്ഥാന ക്രിയകൾ

(1) മാട്രിക്സിനെ ഒരു അദിശം കൊണ്ട് ഗുണനം,

(2) രണ്ട് മാട്രിക്സുകളുടെ സംങ്കലനവും വ്യാവകലനം

(3) രണ്ട് മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനം.

രണ്ട് മാട്രിക്സുകളുടെ ഹരണം എന്ന ആശയം ഇല്ല. അതിനാൽ ക്രിയ $\frac{A}{B}$, ഇവിടെ A കൂടാതെ B എന്നിവ മാട്രിക്സുകൾ നിർവ്വചിച്ചിട്ടില്ല.

(1) മാട്രിക്സിനെ ഒരു അദിശം കൊണ്ട് ഗുണനം

ഒരു മാട്രിക്സ് $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ കൂടാതെ k, എന്നത് വാസ്തവിക അദിശം എന്നിരിക്കട്ടെ. ഇപ്പോൾ $kA=[b_{ij}]_{m\times n}$, എന്ന ഒരു പുതിയ മാട്രിക്സിനെ നിർവ്വചിക്കാം. ഇവിടെ എല്ലാ i, j നെ $b_{ij}=ka_{ij}$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$, എങ്കിൽ $kA=\begin{bmatrix} ka & kb & kc \\ kd & ke & kf \end{bmatrix}$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

ഇവിടെ $k=-1$, എന്നത് $-A=[-a_{ij}]_{m\times n}$. എന്ന മന്ത്രിക്സിന്റെ ഋണ മാട്രിക്സായാണ്

(2) രണ്ട് മാട്രിക്സുകളുടെ സങ്കലനവും വ്യാവകലനവും

A, B എന്നിവ ഒരേ ക്രമതത്തിലുള്ള രണ്ട് മാട്രിക്സുകളാണെങ്കിൽ ഇവയുടെ തുക അതേ ക്രമത്തിലുള്ള മാട്രിക്സുകളായിരിക്കും. ഇതിനെ $A+B$, എന്നു സൂചിപ്പിച്ച് A, B ന്റെ സമാന അംഗങ്ങളെ കൂട്ടുന്നതിലൂടെ ലഭിക്കും.

$A=[a_{ij}]_{m\times n}$, $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ എന്ന രണ്ട് മാട്രിക്സുകളുടെ തുക $A+B$, A, B എന്ന മാട്രിക്സുകളാണ്

$A+B=[c_{ij}]_{m\times n}$ ഇവിടെ $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ എല്ലാ i ന് j ആകുന്നു.

ഇതുപോലെ വ്യവകലനം $A-B$ ആയത് $A-B=A+(-1)B.$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെടുന്നു.

അതായത്, $A-B=[d_{ij}]_{m\times n}$, ഇവിടെ, $d_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$ $\forall$ i കൂടാതെ j. ($\forall$ എന്ന ചിഹ്നം ഒരേ അല്ലെങ്കിൽ എല്ലാം എന്ന് അർത്ഥമാകുന്നു).

കുറിപ്പ് 7.2

(i) A, B എന്ന മാട്രിക്സുകളുടെ ക്രമങ്ങൾ തുല്യമല്ലായെങ്കിൽ $A+B$ കൂടാതെ $A-B$ നിർവ്വചിക്കാൻ ആകുകയില്ല.

(ii) മാട്രിക്സുകളുടെ സങ്കലന, വ്യവകലന ക്രിയകളെ എല്ലാ പരിമിത എണ്ണമുള്ള മാട്രിക്സുകൾക്കും വിപുലീകരിക്കാം.

ഉദാഹരണം 7.4

$A=\begin{bmatrix} 4 & \sqrt{5} & 7 \\ -1 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$ കൂടാതെ $B=\begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{5} & 7.3 \\ 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$ എങ്കിൽ $A+B$ കൂടാതെ $A-B$ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

മാട്രിക്സുകളുടെ സങ്കലന വ്യവകലന നിർവ്വചന പ്രകാരം

$A+B=\begin{bmatrix} 4+\sqrt{3} & 2\sqrt{5} & 14.3 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$ കൂടാതെ $A-B=\begin{bmatrix} 4-\sqrt{3} & 0 & -0.3 \\ -2 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 8 3/16/2023 5:14:03 PM

ഉദാഹരണം 7.5

$A=\begin{bmatrix}\sin^2\theta & 1\\ \cot^2\theta & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & 0\\ -\text{cosec}^2\theta & 1\end{bmatrix}$ കൂടാതെ $C=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ എങ്കിൽ $A+B+C$ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

നിർവ്വചന പ്രകാരം മൂന്ന് മാട്രിക്സുകളുടെ തുക

$$A+B+C=\begin{bmatrix}\sin^2\theta+\cos^2\theta+0 & 1+0-1\\ \cot^2\theta-\text{cosec}^2\theta-1 & 0+1+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix}.$$

ഉദാഹരണം 7.6

$B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & -1 & 5\end{bmatrix}$, $C=\begin{bmatrix}-1 & -2 & 3\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix}$, $D=\begin{bmatrix}0 & 4 & -1\\ 5 & 6 & -5\end{bmatrix}$ $3B+4C-D$ എങ്കിൽ B, C, D നെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$3B+4C-D=\begin{bmatrix}6 & 9 & 0\\ 3 & -3 & 15\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-4 & -8 & 12\\ -4 & 0 & 8\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -4 & 1\\ -5 & -6 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -3 & 13\\ -6 & -9 & 28\end{bmatrix}.$$

ഉദാഹരണം 7.7

ലഘൂകരിക്കുക :

$$\sec\theta\begin{bmatrix}\sec\theta & \tan\theta\\ \tan\theta & \sec\theta\end{bmatrix}-\tan\theta\begin{bmatrix}\tan\theta & \sec\theta\\ \sec\theta & \tan\theta\end{bmatrix}.$$

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള വ്യംജകം A എന്നിരിക്കട്ടെ, മാട്രിക്സ് അദിശ ഗുണന നിർവ്വചനം പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ,

$$A=\begin{bmatrix}\sec^2\theta & \sec\theta\tan\theta\\ \sec\theta\tan\theta & \sec^2\theta\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\tan^2\theta & \tan\theta\sec\theta\\ \sec\theta\tan\theta & \tan^2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

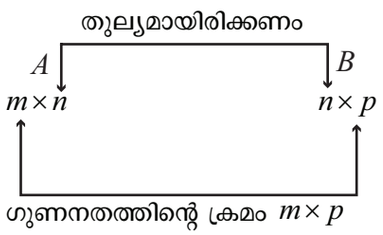
(3) മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനം

നിർവ്വചനം 7.15

A എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ നിരയുടെ എണ്ണവും B എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ വരിയുടെ എണ്ണവും തുല്യം ആണെങ്കിൽ A എന്ന മാട്രിക്സ് B എന്ന മാട്രിക്സിനോട് ഗുണനത്തിന് അനുയോജ്യമായതാണ്.

അതായത്, $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ കൂടാതെ $B=[b_{ij}]_{n\times p}$ എന്നീ രണ്ട് മാട്രിക്സുകളെങ്കിൽ ഇവയുടെ ഗുണനം മാത്രമല്ല ഇതിന്റെ ക്രമം $m\times p$ ആകുന്നു എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

മാത്രമല്ല AB യുടെ ക്രമം $m\times p$ = (A യിലുള്ള നിരകളുടെ എണ്ണം) × (B യിലുള്ള വരികളുടെ എണ്ണം)



Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 9 3/16/2023 5:14:04 PM

$A=[a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n]_{1\times n}$ കൂടാതെ $B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \\ b_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$ ആയിരിക്കുമ്പോൾ AB യുടെ ക്രമം 1×1, ആയും ഒരു അംഗം മാത്രമുള്ളതായിരിക്കും $AB=[a_1 \quad a_2 \quad \ldots \quad a_n]\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}=[a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n]=\left[\sum_{k=1}^{n} a_kb_k\right]$.

ഉദാഹരണമായി,

$$[1 \;\; 2 \;\; 3]\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}=[1(-2)+2(3)+3(5)]=[-2+6+15]=[19].$$

പൊതുവായി,

$A=[a_{ij}]_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{bmatrix}$ കൂടാതെ $B=[b_{ij}]_{n\times p}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & & b_{2p} \\ & & & \\ b_{n1} & b_{n2} & & b_{np} \end{bmatrix}$ എങ്കിൽ

$$AB=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

ഗുണനഫലം $AB=[c_{ij}]_{m\times p}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$,

ഇവിടെ $c_{ij}=[a_{i1} \quad a_{i2} \quad \ldots \quad a_{in}]\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$, എന്ന അംഗത്തിനെ c_{ij} എന്ന് എഴുതാം

ഉദാഹരണം 7.8

$A=\begin{bmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{bmatrix}$, എങ്കിൽ A^2. നെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$A^2=AA=\begin{bmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 10 3/16/2023 5:14:06 PM

ഇവിടെ $c_{11} = [0 \;\; c \;\; b]\begin{bmatrix}0\\c\\b\end{bmatrix} = 0\cdot 0 + c\cdot c + b\cdot b = c^2 + b^2$ ഇതുപോലെ ബാക്കി അംഗങ്ങളുടെ c_{ij} നെ കണക്കാക്കാം.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0+c^2+b^2 & 0+0+ab & 0+ac+0 \\ 0+0+ab & c^2+0+a^2 & bc+0+0 \\ 0+ac+0 & bc+0+0 & b^2+a^2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{bmatrix}.$$

ഉദാഹരണം 7.9

$$[x \quad 2 \quad -1]\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & -4 & 1\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2\\1\end{bmatrix} = O \text{ എങ്കിൽ } x \text{ നെ കാണുക}$$

നിർദ്ധാരണം

$$[x \quad 2 \quad -1]\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ -1 & -4 & 1\\ -1 & -1 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\2\\1\end{bmatrix} = O$$

$$[x-2+1 \quad x-8+1 \quad 2x+2+2]\begin{bmatrix}x\\2\\1\end{bmatrix} = O$$

$$[x-1 \quad x-7 \quad 2x+4]\begin{bmatrix}x\\2\\1\end{bmatrix} = O$$

$$x(x-1)+2(x-7)+1(2x+4) = 0$$

$$x^2+3x-10 = 0 \Rightarrow x = -5, 2.$$

കുറിപ്പ് 7.3

(1) $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ കൂടാതെ $B = [b_{ij}]_{n\times p}$ കൂടാതെ $m \neq p$, എന്ന ഗുണനഫല മാട്രിക്സിനെ നിർവ്വചിക്കാൻ സാധിക്കും പക്ഷേ BA കാണുക സാധ്യമല്ല.

(2) വാസ്തവിക സംഖ്യകളുടെ അടിസ്ഥാന ഗുണങ്ങൾ,

$ab = ba \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$

$ab = ac \Rightarrow b = c \;\forall\; a, b, c \in \mathbb{R},\; a \neq 0$

$ab = 0 \Rightarrow a = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $b = 0 \;\forall\; a, b \in \mathbb{R}$.

ഇവയെ മാട്രിക്സിലും ചർച്ച ചെയ്യുമോ?

(i) AB കൂടാതെ BA എന്നിവ നിർവ്വചിച്ചിരുന്നാലും $AB = BA$ ആയിരിക്കണം എന്ന് നിർബന്ധമില്ല. ഉദാഹരണമായി,

$A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ കൂടാതെ $B = \begin{bmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{bmatrix}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 11 3/16/2023 5:14:07 PM

$AB \neq BA$, എന്നത് നിരീക്ഷിക്കാം, എന്ത്കൊണ്ടെന്നാൽ

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ കൂടാതെ } BA = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

ഇതിൽ നിന്നും നമുക്ക് പറയാം A യും B യും വിതരണം അല്ല (ഗുണനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ)

നിരീക്ഷിക്കാം $AB = BA$ എന്നത് സാധ്യമാണ്. ഉദാഹരണത്തിന്

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ കൂടാതെ } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \text{ കൂടാതെ } AB = BA = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

ഉദാഹരണമായി A കൂടാതെ B എന്നീ മാട്രിക്സുകൾക്ക് - എന്ന് കാണാം.

(ii) നീക്കൽ ഗുണം മാട്രിക്സ് ഗുണത്തിന് ബാധകമല്ല. അതായത്, $A \neq O$, B, C എന്ന ക്രമത്തിലുള്ള $n \times n$ ൽ $n > 1$, എങ്കിൽ $AB = AC$ കിട്ടുന്നില്ല $B = C$, $BA = CA$ കിട്ടുന്നില്ല $B = C$.

ഈ വസ്തുതകളെ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഉദാഹരണത്തിലൂടെ മനസ്സിലാക്കാം,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

പക്ഷേ, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

(iii) $A \neq O$ കൂടാതെ $B \neq O$ ആയിരുന്നാൽ $AB = O$ ആണ്. അതായത് $AB = O$ എങ്കിൽ $A = O$ അല്ലെങ്കിൽ $B = O$ ആയിരിക്കേണ്ട ആവശ്യം ഇല്ല ഉദാഹരണമായി:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) താഴെ തന്നിട്ടുള്ള മാട്രിക്സുകളുടെ സങ്കലന, വ്യാവകലന ക്രിയകൾക്ക് അനുയോജ്യമായ ഏതെങ്കിലും മാട്രിക്സുകൾ A കൂടാതെ B എന്നിവയ്ക്ക് പൊതുവായി

- $(A \pm B)^2$ എന്നത് $A^2 \pm 2AB + B^2$ ന് തുല്യമായിരിക്കണം എന്നില്ല.
- $A^2 - B^2$ എന്നത് $(A + B)(A - B)$ ന് തുല്യമായിരിക്കണം എന്നില്ല.

ഉദാഹരണം 7.10

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$ കൂടാതെ $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ എങ്കിൽ AB, BA എന്നിവയെ സാധ്യമെങ്കിൽ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

A യുടെ ക്രമം 3×3 കൂടാതെ B യുടെ ക്രമം 3×2. അതിനാൽ AB യുടെ ക്രമം 3×2.

A, B എന്നീ മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനഫലം AB. കാണുന്നതിന് $C = AB$. എന്നിരിക്കട്ടെ

c_{11} = (A യുടെ ആദ്യത്തെ വരി) (B യുടെ ആദ്യത്തെ നിര)

$$\Rightarrow c_{11} = [1 \quad -1 \quad 2] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = 1 + 1 + 2 = 4, \; c_{11} \text{ ഒരു അംഗമാണ്}$$

അതുപോലെ, $c_{12} = 0, c_{21} = 0, c_{22} = 13, c_{31} = 7, c_{32} = 5.$

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 12 3/16/2023 5:14:08 PM

അതുകൊണ്ട്, $AB = C = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 13 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

A എന്ന മാട്രിക്സിലുള്ള നിരകളുടെ എണ്ണം B മാട്രിക്സിന്റെ നിരകളുടെ എണ്ണത്തിന് തുല്യ മല്ല എന്നത് കൊണ്ട് AB കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് സാധ്യമല്ല.

ഉദാഹരണം 7.11

ഒരു പഴക്കച്ചവടക്കാരൻ 3 തരത്തിലുള്ള സമ്മാന സഞ്ചികളെ തയ്യാറാക്കുന്നു. സഞ്ചി 1 ൽ 6 ആപ്പിളും 3 ഓറഞ്ചും കൂടാതെ 3 മാതളവും സഞ്ചി 2 ൽ 5 ആപ്പിൾ, 4 ഓറഞ്ച് കൂടാതെ 4 മാതളം കൂടാതെ സഞ്ചി 3 ൽ 6 ആപ്പിളും, 6 ഓറഞ്ചും കൂടാതെ 6 മാതളവും ഇരിക്കുന്നു. എന്നാൽ 1 ആപ്പിൾ 1 ഓറഞ്ച് കൂടാതെ 1 മാതളത്തിന്റെ വില ക്രമേണ ₹30, ₹ 13 കൂടാതെ ₹ 45 എങ്കിൽ ഓരോ പഴ സഞ്ചികളും തയ്യാറാക്കുന്നതിന് ഉള്ള ചെലവ് എത്ര?

നിർദ്ധാരണം

വില മാട്രിക്സ് $A = [30 \;\; 15 \;\; 45]$, പഴ മാട്രിക്സ് $B = \begin{matrix} \\ \text{ആപ്പിൾ} \\ \text{ഓറഞ്ച്} \\ \text{മാതളം} \end{matrix} \begin{matrix} \text{P-I} & \text{P-II} & \text{P-III} \\ \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} \end{matrix}$

AB എന്ന മാട്രിക്സ് കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിലൂടെ പഴസഞ്ചികളുടെ വില കണ്ടുപിടിക്കാം. അതായത് A യിലുള്ള ഓരോ വിലകളെയും (വില മാട്രിക്സ് A) B യിലുള്ള സാധനങ്ങളുടെ എണ്ണത്തെയും (പഴ മാട്രിക്സ് B) ഗുണിക്കണം.

$$AB = [30 \;\; 15 \;\; 45] \begin{bmatrix} 6 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} = [360 \;\; 390 \;\; 540]$$

സഞ്ചി -I ന്റെ വില ₹ 360, സഞ്ചി -II ന്റെ വില ₹ 390, സഞ്ചി -III ന്റെ വില ₹ 540.

7.2.4 മാട്രിക്സിന്റെ സങ്കലനം, അദിശം കൊണ്ട് ഗുണനം കൂടാതെ മാട്രിക്സുകളുടെ A,B കൂടാതെ C ഗുണനം എന്നിവയുടെ ഗുണങ്ങൾ.

എന്നിവ മൂന്ന് സങ്കലനത്തിന് അനുയോജ്യമായ തുല്യ ക്രമമുള്ള മാട്രിക്സുകൾ എന്നിരിക്കട്ടെ. a, b എന്നിവ രണ്ട് അദിശങ്ങൾ ഇപ്പോൾ:

(1) $A + B$ എന്നത് അതേ ക്രമമുള്ള മാട്രിക്സുകളെ നൽകുന്നു

(2) $A + B = B + A$ (മാട്രിക്സുകളുടെ സങ്കലനം ക്രമവിനിമയം ഉള്ളത്)

(3) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (മാട്രിക്സുകളുടെ സങ്കലനം സംയോജഗുണമുണ്ട്)

(4) $A + O = O + A = A$ (O എന്നത് സങ്കലന അനന്യത)

(5) $A + (-A) = O = (-A) + A$ ($-A$ എന്നത് A യുടെ ഋണമാട്രിക്സ് ആണ്)

(6) $(a + b)A = aA + bA$ കൂടാതെ $a(A + B) = aA + aB$

(7) $a(bA) = (ab)A$, $1A = A$ കൂടാതെ $0A = O$.

മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണന ഗുണങ്ങൾ

മാട്രിക്സുകളുടെ ബീജഗണിത ഗുണങ്ങളിൽ നിന്ന് താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവ ലഭിക്കുന്നു,

- A, B, C എന്നിവ ക്രമേണ $m \times n$, $n \times p$ കൂടാതെ $p \times q$ ക്രമങ്ങൾ ഉള്ള മൂന്ന് മാട്രിക്സുകളാണെങ്കിൽ $A(BC)$ കൂടാതെ $(AB)C$ എന്നിവ തുല്യ ക്രമത്തിലുള്ള മാട്രിക്സുകളായിരിക്കും. $m \times q$ മാത്രമല്ല

  $A(BC) = (AB)C$ (മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണ സംയോജന ഗുണനം ഉള്ളതാണ്).

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 13 3/16/2023 5:14:10 PM

- A, B, C എന്നിവ ക്രമേണ $m \times n, n \times p$, കൂടാതെ $n \times p$ ക്രമത്തിൽ ഉള്ള മൂന്ന് മാട്രിക്സുകളാണെങ്കിൽ $A(B + C)$ കൂടാതെ $AB + AC$ തുല്യ ക്രമത്തിൽ ഉള്ള മാട്രിക്സുകളായിരിക്കും $m \times p$ മാത്രമല്ല $A(B + C) = AB + AC$. (മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനം സങ്കലനത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി ഇടത്തെ വിതരണ ഗുണം ഉള്ളതാണ്)
- A, B, C എന്നിവ ക്രമേണ $m \times n, m \times n$, കൂടാതെ $n \times p$ ക്രമത്തിൽ ഉള്ള മൂന്ന് മാട്രിക്സുകളാണെങ്കിൽ $(A + B)C$ കൂടാതെ $AC + BC$ തുല്യ ക്രമത്തിൽ ഉള്ള മാട്രിക്സുകളായിരിക്കും $m \times p$ മാത്രമല്ല $(A + B)C = AC + BC$. (മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനം സങ്കലനത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി വലത്തെ വിതരണ ഗുണം ഉള്ളതാണ്).
- A, B എന്നിവ ക്രമേണ $m \times n, n \times p$ ക്രമങ്ങൾ ഉള്ള രണ്ട് മാട്രിക്സുകളാണ്. കൂടാതെ α ഒരു അദിശം എങ്കിൽ, $\alpha(AB) = A(\alpha B) = (\alpha A)B$ എന്നത് $m \times p$ ക്രമത്തിൽ ഉള്ള മാട്രിക്സ് ആയിരിക്കും.
- I എന്നത് ഒരു ഏകമാത്ര മാട്രിക്സ് എങ്കിൽ ഒരു $AI = IA = A$ (I എന്നത് ഗുണന അനന്യത).

7.2.5 പരിവർത്തന മാട്രിക്സിലെ ക്രിയകൾ കൂടാതെ അതിന്റെ ഗുണങ്ങൾ

നിർവ്വചനം 7.16

ഒരു മാട്രിക്സ് A യുടെ വരി കൂടാതെ നിരകളെ സ്ഥാനമാറ്റം ചെയ്യുന്നതിലൂടെ കിട്ടുന്ന മാട്രിക്സിനെ A യുടെ **പരിവർത്തന മാട്രിക്സ്** എന്ന് പറയുന്നു. ഇതിനെ A^T എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

അതായത്, $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, എങ്കിൽ $A^T = [b_{ij}]_{n\times m}$, ഇവിടെ $b_{ij} = a_{ji}$ മാത്രമല്ല A^T യുടെ (i, j)ാം മത്തെ അംഗം a_{ji} ആകുന്നു

ഉദാഹരണമായി,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 4 \\ -8 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \text{ എങ്കിൽ } A^T = \begin{bmatrix} 1 & -8 \\ \sqrt{2} & 0 \\ 4 & 0.2 \end{bmatrix}$$

ഇപ്പോൾ നമുക്ക് നേരിട്ട് തെളിവുകളുള്ള പരിവർത്തന മാട്രിക്സിന്റെ അടിസ്ഥാന ഫലങ്ങളെ പ്രസ്താപിക്കാം.

A, B അനുയോജ്യമായ രണ്ട് മാട്രിക്സുകളാണെങ്കിൽ

(i) $(A^T)^T = A$ (ii) $(kA)^T = kA^T$ (ഇവിടെ k ഒരു അദിശം)

(iii) $(A+B)^T = A^T + B^T$ (iv) $(AB)^T = B^T A^T$ (പരിവർത്തന മാട്രിക്സിന്റെ നിരക്കൽ നിയമം)

ഉദാഹരണം 7.12

$A = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ കൂടാതെ $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ എങ്കിൽ താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവ ശരി നോക്കുക.

(i) $(AB)^T = B^T A^T$ (ii) $(A+B)^T = A^T + B^T$ (iii) $(A-B)^T = A^T - B^T$ (iv) $(3A)^T = 3A^T$

നിർദ്ധാരണം

(i) $$AB = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 22 \\ -2 & 9 & 9 \\ 7 & 1 & 14 \end{bmatrix}$$

$$(AB)^T = \begin{bmatrix} 16 & -2 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ 22 & 9 & 14 \end{bmatrix} \quad \ldots (1)$$

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 14 3/16/2023 5:14:11 PM

$$B^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix},\ A^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & -2 & 7 \\ 2 & 9 & 1 \\ 22 & 9 & 14 \end{bmatrix} \quad \ldots (2)$$

(1) കൂടാതെ (2) ൽ നിന്ന്, $(AB)^T = B^T A^T$.

(ii) $$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 \\ 3 & 0 & 9 \\ -1 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & 0 & 5 \\ 1 & 9 & 3 \end{bmatrix} \quad \ldots(3)$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 7 & 0 & 5 \\ 1 & 9 & 3 \end{bmatrix} \quad \ldots (4)$$

(3) കൂടാതെ (4) ൽ നിന്ന്, $(A+B)^T = A^T + B^T$.

(iii) $$A - B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A-B)^T = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots (5)$$

$$A^T - B^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \ldots (6)$$

(5) കൂടാതെ (6) ൽ നിന്ന് $(A-B)^T = A^T - B^T$.

(iv) $$3A = \begin{bmatrix} 12 & 18 & 6 \\ 0 & 3 & 15 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}$$

$$(3A)^T = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 18 & 3 & 9 \\ 6 & 15 & 6 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} = 3(A^T)\ .$$

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 15 3/16/2023 5:14:14 PM

7.2.6 പ്രതിസമത കൂടാതെ വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സുകൾ

നിർവ്വചനം 7.17

A എന്ന സമചതുര മാട്രിക്സിൽ $A^T = A$. എന്നാണെങ്കിൽ അത് **പ്രതിസമത മാട്രിക്സ്** ആണ്.

അതായത്, $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ എന്നത് ഒരു പ്രതിസമത മാട്രിക്സ് എങ്കിൽ എല്ലാ $i, j,$ നും $a_{ij} = a_{ji}$ യായിരിക്കും.

ഉദാഹരണമായി, $A=\begin{bmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -6 & 8 & 5 \\ 9 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സിനെ $A^T = A$ എന്നത് കൊണ്ട് ഇത് ഒരു പ്രതിസമത മാട്രിക്സ് ആണ്. A^T എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ പ്രതിസമത മാട്രിക്സ് A ആയിരിക്കും. അതായത് $\left(A^T\right)^T = A.$

നിർവ്വചനം 7.18

ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് A യെ **വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സ്** എന്ന് പറയുന്നതിന് $A^T = -A.$ ആയിരിക്കണം.

$A=[a_{ij}]_{n\times n}$ എന്നത് വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സ് ആണെങ്കിൽ $i, j,$ നും $a_{ij} = a_{ji}$ ആയിരിക്കും.

$i = j$ എന്നത് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ, $2a_{ii} = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $a_{ii} = 0$ $i.$ അതായത് ഒരു വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സിന്റെ വികർണ്ണ അംഗങ്ങൾ എല്ലാം പൂജ്യം ആയിരിക്കും എന്നതാണ് ഇതിന്റെ അർത്ഥം.

ഉദാഹരണമായി, $A=\begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സിന് $A^T = -A$ എന്നത് കൊണ്ട് ഇത് ഒരു വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സ് ആണ്.

മാത്രമല്ല ഏതൊരു സമചതുര മാട്രിക്സിനെയും പ്രതിസമത കൂടാതെ വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക് സുകളുടെ തുകയായി എഴുതാം എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

സിദ്ധാന്തം 7.1

A എന്നത് വാസ്തവിക സംഖ്യകളെ അംഗങ്ങളായി ഉള്ള ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് ആണെങ്കിൽ, $A + A^T$ എന്നത് ഒരു പ്രതിസമത മാട്രിക്സ് ആണ്. കൂടാതെ $A - A^T$ എന്നത് ഒരു വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സ് ആണ്.

തെളിവ്

$B = A + A^T$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$B^T = (A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = A + A^T = B.$$

$A + A^T$ അതിനാൽ ഒരു പ്രതിസമത മാട്രിക്സ് ആണ്.

$C = A - A^T$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$C^T = (A + (-A^T))^T = A^T + (-A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T) = -C$$

അതിനാൽ $A - A^T$ എന്നത് ഒരു വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സ് ആണ്.

സിദ്ധാന്തം 7.2

ഏതൊരു സമചതുര മാട്രിക്സിനെയും പ്രതിസമത കൂടാതെ വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സുകളുടെ തുകയായി എഴുതാം.

തെളിവ്

A എന്നത് ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T). \text{ എന്ന് എഴുതാം.}$$

സിദ്ധാന്തം 7.1ൽ നിന്നും, $(A + A^T)$ കൂടാതെ $(A - A^T)$ എന്നിവ ക്രമേണ പ്രതിസമത കൂടാതെ വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സുകളാണ് $(kA)^T = kA^T$, എന്നതിൽ നിന്ന് $\frac{1}{2}(A + A^T)$ കൂടാതെ $\frac{1}{2}(A - A^T)$ എന്നിവ ക്രമേണ പ്രതിസമത കൂടാതെ വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സുകളാണ്. ഇങ്ങനെ സിദ്ധാന്തം തെളിയിച്ചു.

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 16 3/16/2023 5:14:16 PM

കുറിപ്പ് 7.4

പ്രതിസമത കൂടാതെ വിപരീത പ്രതിസമതയായിട്ടുള്ള മാട്രിക്സ് ഒരു പൂജ്യ മാട്രിക്സ് ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 7.13

$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ -6 & 8 & 3\\ -4 & 6 & 5\end{bmatrix}$ മാട്രിക്സിനെ പ്രതിസമത, വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സുകളുടെ തുക എഴുതുക.

നിർദ്ധാരണം

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ -6 & 8 & 3\\ -4 & 6 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{bmatrix}1 & -6 & -4\\ 3 & 8 & 6\\ 5 & 3 & 5\end{bmatrix}$$

$P=\frac{1}{2}(A+A^T)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ -3 & 16 & 9\\ 1 & 9 & 10\end{bmatrix}$ എന്നിരിക്കട്ടെ,

ഇപ്പോൾ, $P^T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ -3 & 16 & 9\\ 1 & 9 & 10\end{bmatrix}=P$

അതിനാൽ, $P=\frac{1}{2}(A+A^T)$ ഒരു പ്രതിസമത മാട്രിക്സ് ആണ്.

$Q=\frac{1}{2}(A-A^T)$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 9 & 9\\ -9 & 0 & -3\\ -9 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

അതിനാൽ $Q^T=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -9 & -9\\ 9 & 0 & 3\\ 9 & -3 & 0\end{bmatrix}=-Q$

$Q=\frac{1}{2}(A-A^T)$ ഒരു വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സ് ആണ്.

$$A=P+Q=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -3 & 1\\ -3 & 16 & 9\\ 1 & 9 & 10\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & 9 & 9\\ -9 & 0 & -3\\ -9 & 3 & 0\end{bmatrix}$$

അതുകൊണ്ട് A എന്നതിനെ ഒരു പ്രതിസമത കൂടാതെ വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സുകളുടെ തുകയായി എഴുതാം.

അഭ്യാസം 7.1

(1) അംഗങ്ങളെ കൊണ്ട $m\times n$ ക്രമത്തിലുള്ള $A=[a_{ij}]$ മാട്രിക്സിനെ നിർമ്മിക്കുക.

(i) $a_{ij}=\frac{(i-2j)^2}{2}, m=2, n=3$ (ii) $a_{ij}=\frac{|3i-4j|}{4}$, $m=3, n=4$

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 17 3/16/2023 5:14:19 PM

(2) $\begin{bmatrix} p^2-1 & 0 & -31-q^3 \\ 7 & r+1 & 9 \\ -2 & 8 & s-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 7 & \frac{3}{2} & 9 \\ -2 & 8 & -\pi \end{bmatrix}$ എങ്കിൽ p, q, r, s എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക.

(3) $x+y$ എങ്കിൽ $\begin{bmatrix} 2x+y & 4x \\ 5x-7 & 4x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7y-13 \\ y & x+6 \end{bmatrix}$. നെ കാണുക.

(4) $2A-B+\begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 0$, $A-2B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ എന്നീ മാട്രിക്സ് ക്രമീകരണങ്ങളെ തൃപ്തിപെടുത്തുന്ന A, B എന്നീ മാട്രിക്സുകളെ കാണുക.

(5) $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, എങ്കിൽ A^4 നെ കാണുക.

(6) $A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ എങ്കിൽ.

(i) $A_\alpha \; A_\beta = A_{(\alpha+\beta)}$ തെളിയിക്കുക

(ii) $A_\alpha + A_\alpha = I$. എന്ന നിബന്ധനയെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന α യുടെ എല്ലാ വാസ്തവിക മൂല്യങ്ങൾ കാണുക

(7) $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & x \end{bmatrix}$ കൂടാതെ $(A-2I)(A-3I) = O$, എങ്കിൽ x ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

(8) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & -1 \end{bmatrix}$, എങ്കിൽ A^2 ഒരു മാത്ര മാട്രിക്സ് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(9) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ കൂടാതെ $A^3 - 6A^2 + 7A + kI = O$, എങ്കിൽ k നെ കാണുക.

(10) താഴെ തന്നിട്ടുള്ള നിബന്ധനകൾ ഓരോന്നിനെയും തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന ഉദാഹരണങ്ങൾ നൽകുക:

(i) $AB \neq BA$. എന്ന രീതിയിലുള്ള A കൂടാതെ B മാട്രിക്സുകൾ

(ii) $AB = O = BA$, $A \neq O$ കൂടാതെ $B \neq O$ എന്ന രീതിയിൽ ഉള്ള A, B മാട്രിക്സുകൾ

(iii) $AB = O$ കൂടാതെ $BA \neq O$. A, B മാട്രിക്സുകൾ

(11) $f(x)f(y) = f(x+y)$, എങ്കിൽ $f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(12) A എന്നത് $A^2 = A$, എന്ന രിതിയിലുള്ള ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് എങ്കിൽ $7A - (I + A)^3$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

(13) $A(B + C) = AB + AC$, എങ്കിൽ A, B, C എന്നതിനെ ശരി നോക്കുക.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, കൂടാതെ $C = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 18 3/16/2023 5:14:21 PM

(14) $A\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7 & -8 & -9\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സ് സമീകരണത്തിനെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന മാട്രിക്സിനെ A കാണുക.

(15) $A^T=\begin{bmatrix}4 & 5\\ -1 & 0\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ കൂടാതെ $B=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 7 & 5 & -2\end{bmatrix}$, എങ്കിൽ താഴെപ്പറയുന്നവ ശരിനോക്കുക

(i) $(A+B)^T=A^T+B^T=B^T+A^T$ (ii) $(A-B)^T=A^T-B^T$ (iii) $(B^T)^T=B$.

(16) 3×4 ക്രമത്തിലുള്ള A കൂടാതെ B എന്നീ രണ്ട് മാട്രിക്സുകളും A^TB കൂടാതെ BA^T എന്നീ രണ്ടിനേയും നിർവ്വചിക്കുന്ന രീതിയിലുള്ള മാട്രിക്സ്കൾ എങ്കിൽ B മാട്രിക്സിന്റെ ക്രമം കാണുക?

(17) താഴെത്തന്നിട്ടുള്ള മാട്രിക്സുകളെ പ്രതിസമത കൂടാതെ വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സുകളുടെ തുകയായി എഴുതുക:

(i) $\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & -5\end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix}3 & 3 & -1\\ -2 & -2 & 1\\ -4 & -5 & 2\end{bmatrix}$.

(18) $\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ -3 & 4\end{bmatrix}A^T=\begin{bmatrix}-1 & -8 & -10\\ 1 & 2 & -5\\ 9 & 22 & 15\end{bmatrix}$ എന്ന രീതിയിൽ ഉള്ള A മാട്രിക്സിനെ കാണുക.

(19) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ x & 2 & y\end{bmatrix}$ കൂടാതെ $AA^T=9I$, എങ്കിൽ x, y ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

(20) (i) x ന്റെ ഏത് മൂല്യങ്ങൾക്ക്, $A=\begin{bmatrix}0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & x^3\\ 2 & -3 & 0\end{bmatrix}$ എന്നത് വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സ് ആകുന്നു.

(ii) $\begin{bmatrix}0 & p & 3\\ 2 & q^2 & -1\\ r & 1 & 0\end{bmatrix}$ എന്നത് വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സ് എങ്കിൽ p, q, r ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

(21) $a_{ij}=i-j$ എങ്കിൽ $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$, എന്ന മാട്രിക്സിനെ രൂപീകരിക്കുക. മാത്രമല്ല A എന്നത് പ്രതിസമത മാട്രിക്സ് ആണോ, അല്ലെങ്കിൽ വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സ് ആണോ എന്ന് പ്രസ്താപിക്കുക.

(22) A, B എന്നിവ രണ്ട് പ്രതിസമത മാട്രിക്സുകൾ എന്നിരിക്കട്ടെ. $AB = BA$ എങ്കിൽ AB എന്നത് പ്രതിസമത മാട്രിക്സ് ആണ് എന്ന് തെളിയിക്കുക. മാത്രമല്ല ഇതിന്റെ വിപരീതം ശരിയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(23) A, B എന്നിവ തുല്യക്രമത്തിൽ ഉള്ള രണ്ട് പ്രതിസമത മാട്രിക്സ് ആണ് എങ്കിൽ താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവ തെളിയിക്കുക

(i) $AB + BA$ എന്നത് പ്രതിസമത മാട്രിക്സ് ആണ്.

(ii) $AB - BA$ എന്നത് വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സ് ആണ്.

(24) പരിപ്പ്, സുഗന്ധവ്യജ്ഞനങ്ങൾ വിൽക്കുന്ന ഒരു കടക്കാരൻ ഉണക്ക മുന്തിരി, ബദാം, കശുവണ്ടി എന്നിവ അടങ്ങുന്ന സമ്മാന പൊതികൾ നിർമ്മിക്കുന്നു.

പൊതി I ൽ 100 ഗ്രാം കശുവണ്ടി, 100 ഗ്രാം ഉണക്കമുന്തിരി 50 ഗ്രാം ബദാം.

പൊതി II ൽ 200 ഗ്രാം കശുവണ്ടി, 100 ഗ്രാം ഉണക്കമുന്തിരി 100 ഗ്രാം ബദാം.

പൊതി III ൽ 250 ഗ്രാം കശുവണ്ടി, 250 ഗ്രാം ഉണക്കമുന്തിരി 150 ഗ്രാം ബദാം.

50 ഗ്രാം കശുവണ്ടിയുടെ വില ₹ 50, 50 ഗ്രാം ഉണക്ക മുന്തിരിയുടെ വില ₹10, 50 ഗ്രാം ബദാമിന്റെ വില ₹ 60. ഓരോ സമ്മാന പൊതികളുടെയും വില എത്ര?

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 19 3/16/2023 5:14:24 PM

7.3 ഡിറ്റർമിനന്റുകൾ

n ക്രമത്തിലുള്ള ഓരോ സമചതുര മാട്രിക്സ് A നോട് നമുക്ക് മാട്രിക്സ് A യുടെ **ഡിറ്റർമിനന്റ് സ്** എന്ന സംഖ്യയെ ബന്ധിപ്പിക്കാം.

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$, എങ്കിൽ A എന്ന ഡിറ്റർമിനന്റ് $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ ആണ്.

കുറിപ്പ് 7.5

(i) സമചതുര മാട്രിക്സുകളിൽ മാത്രമേ ഡിറ്റർമിനന്റുകളെ നിർവ്വചിക്കാൻ ആകുകയുള്ളു.

(ii) ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് A, യുടെ **ഡിറ്റർമിനന്റിനെ** $|A|$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

(iii) മാട്രിക്സ് എന്നത് ഒരു രൂപം മാത്രമാണ്. പക്ഷെ ഡിറ്റർമിനന്റിന് ഒരു മൂല്യം ഉണ്ടായിരിക്കും.

7.3.1 വിവിധതരം ക്രമങ്ങളുള്ള മാട്രിക്സിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റുകൾ

ക്രമം 1 ഉള്ള മാട്രിക്സിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ്

$A = [a]$ എന്നത് ക്രമം 1, ഉള്ള മാട്രിക്സ് എങ്കിൽ A ന്റ ഡിറ്റർമിനന്റ് 'a' എന്ന് നിർവ്വചിക്കുന്നു.

ക്രമം 2 ഉള്ള മാട്രിക്സിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ്

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ എന്നത് ക്രമം 2 മാട്രിക്സ് എങ്കിൽ. A ന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റെ

$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\ a_{22} - a_{21}\ a_{12}.$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കുന്നു

ഉദാഹരണം 7.14

മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക : (i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$.

നിർദ്ധാരണം

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (2 \times 2) - (-1 \times 4) = 4 + 4 = 8.$

(ii) $\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = (\cos\theta\cos\theta) - (-\sin\theta\sin\theta) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$

ക്രമം 3 ഉള്ള മാട്രിക്സിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ്

വാസ്തവിക അല്ലെങ്കിൽ 3×3 നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുള്ള വാസ്തവിക മൂല്യങ്ങൾ ഉള്ള ഫലനങ്ങളെ അംഗങ്ങളായി ഉള്ള $\mathbb{R}$ ക്രമത്തിലുള്ള ഡിറ്റർമിനന്റിനെ പരിഗണിച്ചുകൊണ്ട് അതിന്റെ ഗുണങ്ങളെ കുറിച്ച് പഠിക്കുന്നതിനൊപ്പം ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ മൂല്യങ്ങളെ കാണുന്ന വ്യത്യസ്ത രീതികളെ കുറിച്ച് ചർച്ച ചെയ്യാം.

നിർവ്വചനം 7.19

$A = [a_{ij}]_{n\times n}$ എന്നത് 3 ക്രമത്തിൽ ഉള്ള സമചതുര മാട്രിക്സ്, $n>1$ എന്നിരിക്കട്ടെ. ഏതെങ്കിലും ഒരു അംഗം a_{ij} ന്റെ ലഘു ഡിറ്റർമിനന്റ് എന്നത് a_{ij} ലുള്ള iാംമത്തെ വരി കൂടാതെ jാംമത്തെ നിര എന്നിവയെ ഒഴിവാക്കുന്നതിലൂടെ ലഭിക്കുന്നു. a_{ij} ന്റെ ലഘു ഡിറ്റർമിനന്റ് സാധാരണയായി M_{ij} എന്ന് കുറിക്കുന്നു.

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 20 3/16/2023 5:14:26 PM

നിർവ്വചനം 7.20

അനുയോജ്യമായ ചിഹ്നം ഇട്ടിട്ടുള്ള ലഘു ഡിറ്റർമിനന്റിനെ **സഹഘടകം** എന്നു പറയുന്നു. a_{ij} ന്റെ സഹഘടകം A_{ij} എന്ന് കുറിക്കുന്നു മാത്രമല്ല $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണമായി, 3×3 എന്നത് $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 3×3 ക്രമത്തിൽ ഉള്ള മാട്രിക്സ് എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഈ മാട്രിക്സിന്റെ അംഗങ്ങൾ a_{11}, a_{12}, a_{13} എന്നിവയുടെ ലഘു മാട്രിക്സുകൾ കൂടാതെ സഹഘടകങ്ങൾ താഴെ തന്നിരിക്കുന്നു :

(i) a_{11} ന്റെ ലഘു ഡിറ്റർമിനന്റ് $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$

a_{11} ന്റെ സഹഘടകം $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}$

(ii) a_{12} ന്റെ ലഘു ഡിറ്റർമിനന്റ് $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}$

a_{12} ന്റെ സഹഘടകം $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23})$

(iii) a_{13} ന്റെ ലഘു ഡിറ്റർമിനന്റ് $M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$

a_{13} ന്റെ സഹഘടകം $A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}$.

ഫലം 7.1 (ലാപ്ലേസ് വിപുലീകരണം)

തന്നിട്ടുള്ള $A = [a_{ij}]_{3\times3}$ എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ ആദ്യത്തെ വരിയിൽ ഉള്ള അംഗങ്ങളുടെ അംഗങ്ങളെ അവയുടെ സമാന സഹഘടകങ്ങളിനോട് ഗുണിച്ച് തുക കാണുകയാണെങ്കിൽ, അത് A യുടെ ഡിറ്റർമിനന്റിന് തുല്യമായിരിക്കും..

അതായത്, $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$ ഇതിനെ ലഘു ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ നിർവ്വചനം ഉപയോഗിച്ച് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള രീതിയിൽ എഴുതാം, $|A| = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$.

ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റിനെ ഏതൊരു വരി അല്ലെങ്കിൽ നിരയെ അടിസ്ഥാനമാക്കി വിപുലീകരിക്കാം. ഇങ്ങനെ കണക്കാക്കുന്ന എല്ലാ വിപുലീകരണങ്ങളുടെ മൂല്യങ്ങൾ തുല്യമായിരിക്കും എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക,

R_1 അടിസ്ഥാനമാക്കി വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$.

R_2 അടിസ്ഥാനമാക്കി വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ $|A| = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$.

C_1 അടിസ്ഥാനമാക്കി വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ $|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$.

ഉദാഹരണം 7.15

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & -5 & 6 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$ എങ്കിൽ $|A|$ എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ എല്ലാ ലഘു ഡിറ്റർമിനന്റ് കൂടാതെ സഹഘടകങ്ങളെ കാണുക. ഏതൊരു വരി അല്ലെങ്കിൽ നിരയിലൂടെ വിപുലീകരിച്ചാലും $|A|$ ന്റെ മൂല്യം മാറുന്നില്ല.

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 21 3/16/2023 5:14:29 PM

നിർദ്ധാരണം

ലഘു ഡിറ്റർമിനന്റുകൾ : $M_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 6 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -10 - 30 = -40$

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 18 = 26$$

$$M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 15 = 5$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6 + 10 = 16$$

$$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 6 = -4$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 9 = 14$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 10 = 8$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6 + 8 = 14$$

$$M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -5 - 12 = -17$$

സഹഘടകങ്ങൾ :

$$A_{11} = (-1)^{1+1}(-40) = -40$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}(+26) = -26$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}(5) = 5$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}(16) = -16$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}(-4) = -4$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}(14) = -14$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}(8) = 8$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}(14) = -14$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}(-17) = -17$$

R_1 ലൂടെ വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} .$$

$$|A| = 1(-40) + (3)(-26) + (-2)(5) = -128 . \quad \ldots (3)$$

C_1 ലൂടെ വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} .$$

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 22 3/16/2023 5:14:30 PM

$$= 1(-40) + 4(-16) + -3(8) = -128 \quad \ldots (4)$$

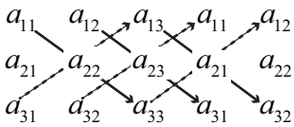
അതിനെ (3) ൽ നിന്ന് (4),

R_1 ലൂടെ വിപുലീകരിച്ചപ്പോൾ കിട്ടിയ |A| ലൂടെ വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ കിട്ടിയ C_1 ന്റെ മൂല്യത്തിന് തുല്യം എന്നു കിട്ടുന്നു.

സറസ് നിയമം ഉപയോഗിച്ച് ക്രമം 3 ഉള്ള ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ മൂല്യം കണക്കാക്കൽ (ഫ്രഞ്ച് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ പിയറി ഫ്രെഡിക് സറസ്) ന്റെ പേരിൽ അറിയപ്പെടുന്നു.

$$A = [a_{ij}]_{3\times 3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

A എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ അംഗങ്ങളെ താഴെത്തന്നിട്ടുള്ള രീതിയിൽ എഴുതുക:



$|A|$ ആയത് താഴെത്തന്നിട്ടുള്ള രീതിയിൽ കണക്കാക്കുന്നു :

$$|A| = \left[a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}\right] - \left[a_{33}a_{21}a_{12} + a_{32}a_{23}a_{11} + a_{31}a_{22}a_{13}\right]$$

ഉദാഹരണം 7.16

$A = \begin{bmatrix} 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin\beta \\ \cos\alpha & -\sin\beta & 0 \end{bmatrix}$ എങ്കിൽ $|A|$ നെ കാണുക .

നിർദ്ധാരണം

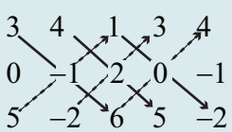
$$\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\alpha & 0 & \sin\beta \\ \cos\alpha & -\sin\beta & 0 \end{vmatrix} = 0M_{11} - \sin\alpha M_{12} + \cos\alpha M_{13}$$

$$= 0 - \sin\alpha(0 - \cos\alpha\sin\beta) + \cos\alpha(-\sin\alpha\sin\beta - 0) = 0.$$

ഉദാഹരണം 7.17

$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ എങ്കിൽ $|A|$ ന്റെ ആദ്യത്തെ സറസ് നിയമം ഉപയോഗിച്ച് കാണുക.

നിർദ്ധാരണം



$$|A| = \left[3(-1)(6) + 4(2)(5) + 1(0)(-2)\right] - \left[5(-1)(1) + (-2)(2)3 + 6(0)(4)\right]$$

$$= [-18 + 40 + 0] - [-5 - 12 + 0] = 22+17 = 39.$$

കുറിപ്പ് 7.6

ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റെ മൂല്യത്തെ എളുപ്പത്തിൽ കാണുന്നതിന്, ആ ഡിറ്റർമിനന്റിൽ പൂജ്യം കൂടുതൽ ആയിട്ടുള്ള വരി അല്ലെങ്കിൽ നിരയിലൂടെ വിപുലീകരിക്കുക.

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 23 3/16/2023 5:14:33 PM

ക്രമം n, $n \geq 4$ ഉള്ള സമചതുര മാട്രിക്സിന്റെ ഡിറ്റർമെന്റ്

ഡിറ്റർമെന്റ് ആശയം $n, n \geq 4$ എന്നുള്ള സമചതുര മാട്രിക്സിന് വിപുലീകരിക്കാം. $A = [a_{ij}]_{n\times n}, n \geq 4.$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$A = [a_{ij}]_{n\times m}$ എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ ഡിറ്റർമിനിന്റൽ i -ാംമത്തെ വരി കൂടാതെ jാം മത്തെ നിരയെ ഒഴിവാക്കുമ്പോൾ ക്രമം $(n-1)$, ഉള്ള ഒരു ഡിറ്റർമീനിന്റ് കിട്ടുന്നു. ഈ ഡിറ്റർമിനന്റ് a_{ij} എന്ന അംഗത്തിന്റെ ലഘു ഡിറ്റർമിനിന്റ് ആണ് ഇതിനെ M_{ij} എന്നു കുറിക്കുന്നു. a_{ij} ന്റെ സഹഘടകം $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

ഫലം 7.2

ക്രമം n ഉള്ള സമചതുര മാട്രിക്സ് $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ ന്റെ ആദ്യത്തെ വരിയിലുള്ള അംഗങ്ങളുടെയും അവയുടെ സമാന സഹഘടകങ്ങളെയും ഗുണിച്ച് തുക കാണുമ്പോൾ അത് ഡിറ്റർമിനന്റെ A ക്ക് തുല്യമായിരിക്കും,

അതായത് $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}$ ഇതിന് തുല്യമായി. ലഘു ഡിറ്റർമിനന്റെറുകൾ കൂടാതെ സഹഘടകങ്ങളുടെ നിർവ്വചനങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള രീതിയിൽ എഴുതാം.

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} M_{1j},$$

ഇവിടെ A_{1j} എന്നത് a_{1j} ന്റെ സഹഘടകം കൂടാതെ M_{1j} എന്നത് a_{1j} ന്റെ ലഘുഡിറ്റർമിനന്റായാണ് ഇവിടെ $j = 1, 2, \ldots, n$ ആണ്. ■

കുറിപ്പ് 7.7

(i) $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ എങ്കിൽ A യുടെ ഡിറ്റർമിനന്റിനെ $\det(A)$ അല്ലെങ്കിൽ $det\ A$ അല്ലെങ്കിൽ Δ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കാം.

(ii) ഇതിനെ, ഏതെങ്കിലും ഒരു വരി അല്ലെങ്കിൽ നിരയെ ഉപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കാം.

7.3.2 ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെ ഗുണങ്ങൾ

ഡിറ്റർമിനന്റെ മൂല്യം കാണുന്നതിന് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഡിറ്റർമിനന്റ് ഗുണങ്ങളിൽ ഒന്നോ അല്ലെങ്കിൽ അതിലധികം ഉപയോഗിക്കാം.

ഗുണം 1

ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റ് വരികളെ നിരയായും നിരയെ വരിയായും സ്ഥാനമാറ്റം ചെയ്യുന്നുവെങ്കിൽ അതിന്റെ മൂല്യത്തിൽ മാറ്റം ഇല്ല. അതായത്, $|A| = |A^T|$.

ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ വരിയിലൂടെ വിപുലീകരണം കാണുന്നതും നിരയിലൂടെ വിപുലീകരണം കാണുന്നതും തുല്യമാണ് എന്നത് ഈ ഗുണത്തിലൂടെ മനസ്സിലാക്കാം.

ഗുണം 2

ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റ് ഏതെങ്കിലും രണ്ട് വരികളെ അല്ലെങ്കിൽ നിരകളെ സ്ഥാനമാറ്റം ചെയ്യുമ്പോൾ, ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ ചിഹ്നം മാറുന്നു. പക്ഷേ പരമാവധി മൂല്യത്തിൽ മാറ്റമില്ല.

ശരി നോക്കൽ

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \text{ എന്നിരിക്കട്ടെ}$$

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} \text{ എന്നിരിക്കട്ടെ } (R_2 \leftrightarrow R_3)$$

$$= a_1(b_3c_2 - b_2c_3) - b_1(a_3c_2 - a_2c_3) + c_1(a_3b_2 - a_2b_3)$$

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 24 3/16/2023 5:14:36 PM

$$= -a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + b_1(a_2c_3 - a_3c_2) - c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$= -[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)]$$

$$= -|A|$$

അതുകൊണ്ട്, $|A_1| = -|A|$. ഇതിലൂടെ ഈ ഗുണത്തെ ശരി നോക്കി. □

ഗുണം 3

A എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ n വരികൾ (നിരകൾ) സ്ഥാനമാറ്റം ചെയ്യുമ്പോൾ, ആ മാട്രിക്സിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ് $(-1)^n |A|$ ആയിരിക്കും.

ഗുണം 4

ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റിൽ രണ്ട് വരികൾ (അല്ലെങ്കിൽ നിരകൾ) സമാനമെങ്കിൽ ആ ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ മൂല്യം പൂജ്യം ആയിരിക്കും.

ശരിനോക്കൽ

$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ എന്നിരിക്കട്ടെ, രണ്ടാമത്തെ, മൂന്നാമത്തെ വരികൾ സമാനമെന്ന് കരുതാം.

രണ്ടാമത്തെ, മൂന്നാമത്തെ വരികളെ പരസ്പരം സ്ഥാനമാറ്റം ചെയ്യുമ്പോൾ, $-|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = |A|$. □

$\Rightarrow 2|A| = 0 \Rightarrow |A| = 0$ എന്നു കിട്ടുന്നു.

ഗുണം 5

A എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ ഒരു വരി (അല്ലെങ്കിൽ നിര) ആ മാട്രിക്സിന്റെ മറ്റൊരു വരിയുടെ (അല്ലെങ്കിൽ നിരയുടെ) അദിശം കൊണ്ടുള്ള ഗുണനമാണെങ്കിൽ ആ ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ മൂല്യം പൂജ്യമായിരിക്കും.

കുറിപ്പ് 7.8

(i) ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ ഒരു വരി അല്ലെങ്കിൽ നിരയിലുള്ള എല്ലാ അംഗങ്ങളും പൂജ്യമെങ്കിൽ ആ ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ മൂല്യം പൂജ്യമായിരിക്കും.

(ii) ഒരു ത്രികോണ രൂപത്തിലുള്ള മാട്രിക്സിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ മൂല്യം അതിന്റെ പ്രധാന വികർണ്ണ അംഗങ്ങളുടെ ഗുണഫലം ആയിരിക്കും.

ഗുണം 6

ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു വരി (നിര) യിലുള്ള ഓരോ അംഗവും അദിശം k കൊണ്ട് ഗുണിച്ചിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ ആ ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ മൂല്യം k കൊണ്ട് ഗുണിക്കുന്നതിന് തുല്യമായിരിക്കും.

ശരിനോക്കൽ

$$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$= a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} ka_1 & kb_1 & kc_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$= ka_1(b_2c_3 - b_3c_2) - kb_1(a_2c_3 - a_3c_2) + kc_1(a_2b_3 - a_3b_2) = k|A|$$

$$= k[a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)] = k|A|$$

$\Rightarrow |A_1| = k|A|$. □

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 25 3/16/2023 5:14:37 PM

കുറിപ്പ് 7.9

A എന്നത് ക്രമം n, ഉള്ള സമചതുര മാട്രിക്സ് എങ്കിൽ

(i) $|AB| = |A||B|$

(ii) $AB = O$ എങ്കിൽ $|A| = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $|B| = 0$.

(iii) $|A^n| = (|A|)^n$

ഗുണം 7

ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റിലുള്ള ഒരു വരി (നിര) യുടെ ഓരോ അംഗത്തേയും രണ്ട് അല്ലെങ്കിൽ അതിലധികം അംഗങ്ങളുടെ തുകയായി ഇരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ, ആ ഡിറ്റർമിനന്റിനെ രണ്ട് അല്ലെങ്കിൽ അതിലധികം ഡിറ്റർമിന്റുകളുടെ സങ്കല ഫലമായി എഴുതാൻ സാധിക്കും.

അതായത്, $\begin{vmatrix} a_1+m_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+m_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

ശരിനോക്കൽ

ആദ്യത്തെ വരിയിലൂടെ വിപുലീകരിക്കുമ്പോൾ

$$\text{LHS} = (a_1+m_1)(b_2c_3-b_3c_2)-(a_2+m_2)(b_1c_3-b_3c_1)+(a_3+m_3)(b_1c_2-b_2c_1)$$

$$= a_1(b_2c_3-b_3c_2)-a_2(b_1c_3-b_3c_1)+a_3(b_1c_2-b_2c_1)+m_1(b_2c_3-b_3c_2)-m_2(b_1c_3-b_3c_1)$$

$$+m_3(b_1c_2-b_2c_1)$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & b_1 & c_1 \\ m_2 & b_2 & c_2 \\ m_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \text{RHS}.$$

ഗുണം 8

ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റെ ഒരു വരിയിലുള്ള (നിരയിലുള്ള) ഓരോ അംഗങ്ങളോടും മറ്റ് വരിയിലുള്ള (നിരയിലുള്ള) സമാന അംഗങ്ങളെ നിശ്ചിത അദിശംകൊണ്ട് ഗുണിച്ച് അല്ലെങ്കിൽ വ്യവകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ മൂല്യത്തിൽ മാറ്റമില്ല.

ശരിനോക്കൽ

$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ എന്നിരിക്കട്ടെ,

കൂടാതെ $|A_1| = \begin{vmatrix} a_1+pa_2+qa_3 & b_1+pb_2+qb_3 & c_1+pc_2+qc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} pa_2 & pb_2 & pc_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} qa_3 & qb_3 & qc_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{ഗുണം} \\ \text{7-ൽ നിന്ന്} \end{array} \right.$$

$$|A_1| = |A| + p\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + q\begin{vmatrix} a_3 & b_3 & c_3 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 26 3/16/2023 5:14:39 PM

$$|A_1| = |A| + p(0) + q(0) = |A| \quad \text{(ഗുണം 4-ൽ നിന്ന്)}$$

അതുകൊണ്ട് $|A_1| = |A|$

ഈ ഗുണം ഒരു പ്രത്യേക വരി അല്ലെങ്കിൽ നിര ആശ്രയിച്ചുള്ളതല്ല. ■

ഉദാഹരണം 7.18

a, b, c കൂടാതെ x എന്നിവ ധനവാസ്തവിക സംഖ്യകൾ ആണെങ്കിൽ $\begin{vmatrix} (a^x+a^{-x})^2 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ (b^x+b^{-x})^2 & (b^x-b^{-x})^2 & 1 \\ (c^x+c^{-x})^2 & (c^x-c^{-x})^2 & 1 \end{vmatrix}$ എന്നത് പൂജ്യമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$C_1 \to C_1 - C_2$ നെ പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ, $\begin{vmatrix} 4 & (a^x-a^{-x})^2 & 1 \\ 4 & (b^x-b^{-x})^2 & 1 \\ 4 & (c^x-c^{-x})^2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, C_1 , C_3 എന്നിവ തുല്യ അനുപാതത്തിലാണ്.

ഉദാഹരണം 7.19

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}$ കൂടാതെ $B = \begin{bmatrix} b+c & c+a & a+b \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{bmatrix}$ എന്നീ ഡിറ്റർമിനന്റുകളെ വിപുലീകരിക്കാതെ $|B| = 2|A|$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$|B| = \begin{vmatrix} 2(a+b+c) & 2(a+b+c) & 2(a+b+c) \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix} (R_1 \to R_1 + R_2 + R_3) \text{ മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കൂ.}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ c+a & a+b & b+c \\ a+b & b+c & c+a \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ -b & -c & -a \\ -c & -a & -b \end{vmatrix} (R_2 \to R_2 - R_1 \text{ കൂടാതെ } R_3 \to R_3 - R_1)$$

$$= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ -b & -c & -a \\ -c & -a & -b \end{vmatrix} (R_1 \to R_1 + R_2 + R_3)$$

$$= 2(-1)^2\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

$$= 2|A|.$$

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 27 3/16/2023 5:14:41 PM

ഉദാഹരണം 7.20

$\begin{vmatrix} 2014 & 2017 & 0 \\ 2020 & 2023 & 1 \\ 2023 & 2026 & 0 \end{vmatrix}$ മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\begin{vmatrix} 2014 & 2017 & 0 \\ 2020 & 2023 & 1 \\ 2023 & 2026 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2014 & 2017-2014 & 0 \\ 2020 & 2023-2020 & 1 \\ 2023 & 2026-2023 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2014 & 3 & 0 \\ 2020 & 3 & 1 \\ 2023 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2014 & 1 & 0 \\ 2020 & 1 & 1 \\ 2023 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -3(2014 - 2023) = -3(-9) = 27.$$

ഉദാഹരണം 7.21

$\begin{vmatrix} x-1 & x & x-2 \\ 0 & x-2 & x-3 \\ 0 & 0 & x-3 \end{vmatrix} = 0$ എങ്കിൽ, x ന്റെ മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

പ്രധാന വികർണ്ണത്തിന് താഴെയുള്ള എല്ലാ അംഗങ്ങളും പൂജ്യമായതുകൊണ്ട് ഡിറ്റർമിനന്റെ മൂല്യം

$(x-1)(x-2)(x-3) = 0, \Rightarrow x = 1, 2, 3.$

ഉദാഹരണം 7.22

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$C_2 \to C_2 - C_1, C_3 \to C_3 - C_1$, എങ്കിൽ

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^2 & y^2-x^2 & z^2-x^2 \end{vmatrix} = (y-x)(z-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & 1 & 1 \\ x^2 & y+x & z+x \end{vmatrix}$$

$$= (y-x)(z-x)[(z+x)-(y+x)] .$$

$$= (y-x)(z-x)(z-y) .$$

$$= (x-y)(y-z)(z-x) = \text{RHS}.$$

അഭ്യാസം 7.2

(1) ഡിറ്റർമിനന്റിനെ വിപുലീകരിക്കാതെ $\begin{vmatrix} s & a^2 & b^2+c^2 \\ s & b^2 & c^2+a^2 \\ s & c^2 & a^2+b^2 \end{vmatrix} = 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(2) $\begin{vmatrix} b+c & bc & b^2c^2 \\ c+a & ca & c^2a^2 \\ a+b & ab & a^2b^2 \end{vmatrix} = 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 28 3/16/2023 5:14:42 PM

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac+c^2 \\ a^2+ab & b^2 & ac \\ ab & b^2+bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(4) $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(5) $\begin{vmatrix} \sec^2\theta & \tan^2\theta & 1 \\ \tan^2\theta & \sec^2\theta & -1 \\ 38 & 36 & 2 \end{vmatrix} = 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(6) $\begin{vmatrix} x+2a & y+2b & z+2c \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(7) 3×3 ക്രമത്തിൽ ഉള്ള വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സിന്റെ പൊതുരൂപം എഴുതുക. അതിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ മൂല്യം 0 എന്ന് കാണിക്കുക.

(8) $\begin{vmatrix} a & b & a\alpha+b \\ b & c & b\alpha+c \\ a\alpha+b & b\alpha+c & 0 \end{vmatrix} = 0$ എങ്കിൽ,

a, b, c എന്നിവ $G.P.$ യിൽ ആയിരിക്കും അല്ലെങ്കിൽ α എന്നത് $ax^2 + 2bx + c = 0$ ന്റെ ഒരു മൂല്യം ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(9) $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2-bc \\ 1 & b & b^2-ca \\ 1 & c & c^2-ab \end{vmatrix} = 0$ തെളിയിക്കുക.

(10) a, b, c എന്നിവ ഒരു $A.P$ യുടെ p^{th}, q^{th} കൂടാതെ r ാം മത്തെ അംഗങ്ങൾ എങ്കിൽ $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

(11) $\begin{vmatrix} a^2+x^2 & ab & ac \\ ab & b^2+x^2 & bc \\ ac & bc & c^2+x^2 \end{vmatrix}$ എന്ന ഡിറ്റർമിനന്റിനെ x^4 കൊണ്ട് ഹരിക്കാം എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(12) a, b, c എന്നിവ ധനസംഖ്യ, അവ ഒരു $G.P$ യുടെ p, q കൂടാതെ r ാം മത്തെ അംഗങ്ങൾ എങ്കിൽ $\begin{vmatrix} \log a & p & 1 \\ \log b & q & 1 \\ \log c & r & 1 \end{vmatrix} = 0.$ യെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(13) $\begin{vmatrix} 1 & \log_x y & \log_x z \\ \log_y x & 1 & \log_y z \\ \log_z x & \log_z y & 1 \end{vmatrix}$ $x, y, z \neq 1$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 29 3/16/2023 5:14:43 PM

(14) $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \alpha \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ എങ്കിൽ, $\sum_{k=1}^{n} \det(A^k) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(15) വിപുലീകരിക്കാതെ ഡിറ്റർമിനന്റെ മൂല്യം കാണുക :

(i) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 6x & 9x & 12x \end{vmatrix}$ (ii) $\begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(16) A എന്നത് ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് കൂടാതെ $|A| = 2$, എങ്കിൽ $|AA^T|$. ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

(17) A, B എന്നിവ $|A| = -1$ കൂടാതെ $|B| = 3$, എന്ന രീതിയിലുള്ള ക്രമം മൂന്ന് ഉള്ള സമചതുര മാട്രിക്സുകളാണെങ്കിൽ $|3AB|$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

(18) $\lambda = -2$, എങ്കിൽ $\begin{vmatrix} 0 & 2\lambda & 1 \\ \lambda^2 & 0 & 3\lambda^2+1 \\ -1 & 6\lambda-1 & 0 \end{vmatrix}$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

(19) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2x & 5x^2 \end{vmatrix} = 0.$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ മൂലങ്ങൾ കാണുക.

(20) $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 9 & 7 & 5 \end{bmatrix}$ മാട്രിക്സുകൾക്ക് $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ ശരിനോക്കുക.

(21) $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സിന്റെ രണ്ടാമത്തെ വരിയിലുള്ള അംഗങ്ങളെ സഹഘടകങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് $|A|$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

7.3.3 ഡിറ്റർമിനന്റുകൾക്ക് ഘടക സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ പ്രയോഗം.

സിദ്ധാന്തം 7.3 (ഘടക സിദ്ധാന്തം)

ഒരു മാട്രിക്സ് A യുടെ ഓരോ അംഗവും x ലെ ബഹുപദ വ്യാജകങ്ങളാണെങ്കിൽ $|A|$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ $x = a$, ന്റെ മൂല്യം പൂജ്യമാണ് എങ്കിൽ $(x - a)$ എന്ന് $|A|$ ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ്.

കുറിപ്പ് 7.10

(i) ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റെ മൂല്യം ഘടകങ്ങളുടെ ഗുണനരൂപത്തിൽ ലഭിക്കുന്നതിന് ഈ സിദ്ധാന്തം വളരെയധികം ഉപയോഗപ്രദമാണ്.

(ii) $b = a$ എന്ന് $|A|$ ൽ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് വരികൾ അല്ലെങ്കിൽ നിരകൾ സമാനം ആണെങ്കിൽ $|A| = 0$ ആണ്. അതുകൊണ്ട് ഘടകസിദ്ധാന്ത പ്രകാരം $(a-b)$, എന്നത് $|A|$ ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ്.

(iii) $n\ (n \geq r)$ ക്രമത്തിലുള്ള ഡിറ്റർമിനന്റെൽ $x = a$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ r വരികൾ (നിരകൾ) സമാനമാണെങ്കിൽ $(x - a)^{r-1}$ എന്നത് $|A|$ ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ്.

(iv) ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിന്റെ (അല്ലെങ്കിൽ അതിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ്) ഓരോ വരിയേയും ആദ്യത്തെ വരിയിലുള്ള ചരങ്ങളെ ചക്രിയരീതിയിൽ മാറ്റുന്നതിലൂടെ ലഭിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അത് ചക്രിയ പ്രതിസമത രൂപം എന്നു പറയുന്നു.

(v) ഒരു ചക്രിയ പ്രതിസമത ഡിറ്റർമിനന്റെൽ m എന്നത് ഘടകങ്ങളുടെ (പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ ലഭിച്ച) ഗുണന ഫലത്തിന്റെ കൃതിയുടെയും പ്രധാന വികർണ്ണ അംഗങ്ങളുടെ ഗുണന ഫലതത്തിന്റെ കൃതിയുടെ വിത്യാസം എന്നിരിക്കട്ടെ

(1) ഇപ്പോൾ $m = 0$ എങ്കിൽ ആവശ്യമായ ഘടകം സ്ഥാനാങ്കം k ആണ്.

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 30 3/16/2023 5:14:46 PM

(2) $m = 1$, എങ്കിൽ ആവശ്യമായ ഘടകം $k(a + b + c)$ ആണ്

(3) $m = 2$, ആണെങ്കിൽ ആവശ്യമായ ഘടകം $k(a^2 + b^2 + c^2) + l\,(ab + bc + ca)$ ആണ്.

ഉദാഹരണം 7.23

ഘടക സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് $\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = (x-1)^2(x+9)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$|A| = \begin{vmatrix} x+1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} \text{ എന്നിരിക്കട്ടെ.}$$

$x = 1$, എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ, $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0$

ഇവിടെ മൂന്ന് വരികളും സമാനമാണ്. അതിനാൽ $(x - 1)^2$ ആയത് $|A|$ ന്റെ ഒരു ഘടകമാണ്

$|A|$ യിൽ $x = -9$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ $|A| = \begin{vmatrix} -8 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 5 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & 5 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$

അതുകൊണ്ട് $(x+9)$ ആയത് $|A|$ അതിനാൽ $[C_1 \to C_1 + C_2 + C_3]$ ന്റെ ഘടകമാണ്.

അതായത് $(x - 1)^2\,(x + 9)$ എന്നത് $|A|$ ന്റെ ഘടകമാണ്. ഇതിന്റെ കൃതി മൂന്നാണ്

'x' ലുള്ള ബഹുപദവ്യാജകത്തിന്റെ കൃതിയും മൂന്നാണ്. അതുകൊണ്ട് മറ്റ് ഘടകം സ്ഥിരാങ്കം k ആയിരിക്കും.

അതിനാൽ $\begin{vmatrix} +1 & 3 & 5 \\ 2 & x+2 & 5 \\ 2 & 3 & x+4 \end{vmatrix} = k(x-1)^2(x+9).$

ഇരുവശവും x^3 അംഗങ്ങളെ താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ $k = 1$ എന്നു കിട്ടുന്നു. അതുകൊണ്ട് $|A| = (x - 1)^2\,(x + 9)$.

ഉദാഹരണം 7.24

$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = (x-y)\,(y-z)\,(z-x)\,(xy+yz+zx)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} \text{ എന്നിരിക്കട്ടെ}$$

$x = y$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = 0 \quad (R_1 \equiv R_2)$

അതുകൊണ്ട് $(x - y)$ എന്നത് $|A|$ ന്റെ ഘടകമാണ്.

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 31 3/16/2023 5:14:47 PM

x, y, z എന്നിവയിലുള്ള ചക്രിയ പ്രതിസമത രൂപത്തിലാണ് തന്നിട്ടുള്ള ഡിറ്റർമിനന്റ്. അതു കൊണ്ട് $(y-z)$ കൂടാതെ $(z-x)$ എന്നിവയും ഘടകങ്ങളാണ്.

ഇപ്പോൾ $(x-y)(y-z)(z-x)$ എന്നത് $|A|$ ന്റെ ഘടകമാണ് പ്രധാന വികർണ്ണത്തിലുള്ള അംഗങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം $1\times y^2\times z^3$ ഇതിന്റെ കൃതി 5 ആണ്.

അതുകൊണ്ട് ബാക്കിയുള്ള മറ്റ് ഘടകം $k(x^2+y^2+z^2)+\ell(xy+yz+zx)$ ആയിരിക്കും.

$$\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = [k(x^2+y^2+z^2)+\ell(xy+yz+zx)]\times(x-y)(y-z)(z-x)\ .$$

$x=0,\ y=1$ കൂടാതെ $z=2$, എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = \big[k(0+1+4)+\ell(0+2+0)\big](-1)(1-2)(2-0)$$

$$\Rightarrow \qquad (8-4) = [(5k+2\ell)](-1)(-1)(2)$$

$$4 = 10k+4\ell \Rightarrow 5k+2\ell = 2. \qquad \ldots (1)$$

മാത്രമല്ല $x=0, y=-1,\ z=1,$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [k(2)+\ell(-1)](1)(-2)(1)$$

$$\Rightarrow \quad [(2k-\ell)(-2)] = 2$$

$$2k-\ell = -1. \qquad \ldots (2)$$

(1), (2) എന്നിവയെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ $k=0, \ell=1$ എന്നു കിട്ടുന്നു.

അതുകൊണ്ട് $\begin{vmatrix} 1 & x^2 & x^3 \\ 1 & y^2 & y^3 \\ 1 & z^2 & z^3 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)(xy+yz+zx).$

ഉദാഹരണം 7.25

$|A| = \begin{vmatrix} (q+r)^2 & p^2 & p^2 \\ q^2 & (r+p)^2 & q^2 \\ r^2 & r^2 & (p+q)^2 \end{vmatrix} = 2pqr\ (p+q+r)^3$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

നിർദ്ധാരണം :

$p=0$, എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ $|A| = \begin{vmatrix} (q+r)^2 & 0 & 0 \\ q^2 & r^2 & q^2 \\ r^2 & r^2 & q^2 \end{vmatrix} = 0.$

അതിനാൽ, $(p-0)$ എന്നത് ഒരു ഘടകമാണ്. അതായത്, p ഒരു ഘടകമാണ്.

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 32 3/16/2023 5:14:50 PM

$|A|$ എന്നത് p, q, r എന്നിവയിലുള്ള ചക്രിയ പ്രതിസമത രൂപത്തിലാണ്. അതിനാൽ q, r എന്നിവയും ഘടകങ്ങളാണ്.

എങ്കിൽ $p+q+r=0 \Rightarrow q+r=-p$; $r+p=-q$; കൂടാതെ $p+q=-r$ എന്നു കിട്ടുന്നു.

$$|A| = \begin{vmatrix} p^2 & p^2 & p^2 \\ q^2 & q^2 & q^2 \\ r^2 & r^2 & r^2 \end{vmatrix} = 0$$ ഇവിടെ മൂന്ന് നിരകളും സമാനമാണ്.

അതിനാൽ, $(p+q+r)^2$ എന്നത് $|A|$ ന്റെ ഘടകമാണ്.

ഇപ്പോൾ $pqr\,(p+q+r)^2$ എന്നത് $|A|$ ന്റെ ഘടകമാണ്. ഇതിന്റെ കൃതി 5 ആണ്.

$|A|$ ന്റെ കൃതി 6 ആണ്.

അതുകൊണ്ട്, മറ്റ് ഘടകം $k\,(p+q+r)$.

$$\begin{vmatrix} (q+r)^2 & p^2 & p^2 \\ q^2 & (r+p)^2 & q^2 \\ r^2 & r^2 & (p+q)^2 \end{vmatrix} = k(p+q+r)\,(p+q+r)^2 \times pqr$$

$p=1,\ q=1,\ c=1$, എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = k(1+1+1)^3\ (1)\ (1)\ (1).$$

$4(16-1)-1(4-1)+1(1-4)=27k$

$60-3-3=27k \Rightarrow k=2.$

$|A| = 2pqr\,(p+q+r)^3.$

ഉദാഹരണം 7.26

ത്രികോണം ABC ൽ, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin A & 1+\sin B & 1+\sin C \\ \sin A(1+\sin A) & \sin B(1+\sin B) & \sin C(1+\sin C) \end{vmatrix} = 0,$ എങ്കിൽ,

ΔABC ഒരു ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണം എന്നു തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$\sin A = \sin B$, എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1+\sin A & 1+\sin A & 1+\sin C \\ \sin A(1+\sin A) & \sin A(1+\sin A) & \sin C(1+\sin C) \end{vmatrix} = 0$$

അതായത് $\sin A = \sin B$ എങ്കിൽ സമീകരണത്തിനെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.

ഇതുപോലെ $\sin B = \sin C$ കൂടാതെ $\sin C = \sin A$ ആയിരിക്കുമ്പോഴും സമീകരണത്തിനെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.

അതിനാൽ, $A = B$ അല്ലെങ്കിൽ $B = C$ അല്ലെങ്കിൽ $C = A$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

മുകളിലുള്ള എല്ലാ ഘടകങ്ങളിലും ഏതെങ്കിലും രണ്ട് കോണുകൾ തുല്യമാണ്. അതുകൊണ്ട് ΔABC ഒരു ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണമാണ്.

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 33 3/16/2023 5:14:54 PM

അഭ്യാസം 7.3

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പ്രശ്നങ്ങളെ ഘടക സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക :

(1) തെളിയിക്കുക $\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = (x-a)^2(x+2a)$.

(2) $\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = 8abc$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(3) $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(4) $\begin{vmatrix} b+c & a & a^2 \\ c+a & b & b^2 \\ a+b & c & c^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)\,(a-b)\,(b-c)\,(c-a)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(5) $\begin{vmatrix} 4-x & 4+x & 4+x \\ 4+x & 4-x & 4+x \\ 4+x & 4+x & 4-x \end{vmatrix} = 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x-y)(y-z)(z-x)$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

9WC7L

7.3.4 ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെ ഗുണനം

രണ്ട് മാട്രിക്സുകളെ ഗുണിക്കുമ്പോൾ വരി-നിര നിയമം മാത്രം പിൻതുടരുന്നു. വരികളും നിരകളും പരസ്പരം മാറ്റുമ്പോഴും അതിന്റെ മൂല്യത്തിന് മാറ്റമില്ല. (ഗുണം 1) എന്നത് നമുക്ക് അറിയാം. അതിനാൽ രണ്ട് മാട്രിക്സുകളുടെ ഗുണനത്തിന് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഗുണന രീതികളും ഉപയോഗിക്കുന്നു.

(i) വരി-നിര ഗുണന നിയമം
(ii) വരി-വരി ഗുണന നിയമം
(iii) നിര-നിര ഗുണന നിയമം
(iv) നിര-വരി ഗുണന നിയമം

കുറിപ്പ് 7.11

(i) A, B എന്നിവ n, ക്രമത്തിലുള്ള രണ്ട് സമചതുര മാട്രിക്സുകൾ എങ്കിൽ $|AB| = |A|\,|B|$ ആകുന്നു.
(ii) പൊതുവായി മാട്രിക്സുകളിൽ $AB \neq BA$ എന്നാണെങ്കിലും $|AB| = |BA|$ എന്നത് എല്ലായിപ്പോഴും ശരിയായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 7.27

$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ എങ്കിൽ $|AB| = |A|\,|B|$ എന്നത് ശരിനോക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$AB = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 34 3/16/2023 5:14:55 PM

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta - \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta - \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta + \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |AB| = 1 \qquad \ldots (1)$$

$$|A| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$|B| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$|A|\,|B| = 1 \qquad \ldots (2)$$

(1) കൂടാതെ (2) ൽ നിന്ന്, $|AB| = |A|\,|B|$

ഉദാഹരണം 7.28

$\begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix}$ തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} 0+c^2+b^2 & 0+0+ab & 0+ac+0 \\ 0+0+ab & c^2+0+a^2 & bc+0+0 \\ 0+ac+0 & bc+0+0 & b^2+a^2+0 \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} c^2+b^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & b^2+a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b^2+c^2 & ab & ac \\ ab & c^2+a^2 & bc \\ ac & bc & a^2+b^2 \end{vmatrix} = \text{RHS}.$$

ഉദാഹരണംe 7.29

$\begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ca-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2$ എന്നത് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\text{RHS} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times (-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix} \quad [\text{രണ്ടാമത്തെ ഡിറ്റർമിനന്റെൽ } R_2 \leftrightarrow R_3]$$

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 35 3/16/2023 5:14:56 PM

$$= \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

വരി-നിര നിയമപ്രകാരം

$$= \begin{vmatrix} -a^2+bc+cb & -ab+ab+c^2 & -ac+b^2+ac \\ -ab+c^2+ab & -b^2+ac+ac & -bc+bc+a^2 \\ -ac+ac+b^2 & -bc+a^2+bc & -c^2+ab+ab \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2bc-a^2 & c^2 & b^2 \\ c^2 & 2ca-b^2 & a^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab-c^2 \end{vmatrix} = \text{RHS.}$$

ഉദാഹരണം 7.30

$\begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1-2x^2 & -x^2 & -x^2 \\ -x^2 & -1 & x^2-2x \\ -x^2 & x^2-2x & -1 \end{vmatrix}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix}.$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} \times (-1)\,(-1) \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ -x & -1 & -x \\ -x & -x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ x & 1 & x \\ x & x & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & x & x \\ -x & -1 & -x \\ -x & -x & -1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-x^2-x^2 & x-x-x^2 & x-x^2-x \\ x-x-x^2 & x^2-1-x^2 & x^2-x-x \\ x-x^2-x & x^2-x-x & x^2-x^2-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-2x^2 & -x^2 & -x^2 \\ -x^2 & -1 & x^2-2x \\ -x^2 & x^2-2x & -1 \end{vmatrix}.$$

$= \text{R.H.S.}$

7.3.5 ഡിറ്റർമിനന്റ് കൂടാതെ സഹഘടക ഡിറ്റർമിനന്റ് തമ്മിലുള്ള ബന്ധം

$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 36 3/16/2023 5:14:58 PM

a_1, b_1, c_1 .... എന്നിവയുടെ സമാന സഹഘടകങ്ങൾ ക്രമേണ A_1, B_1, C_1 . ... $|A|$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

അതിനാൽ സഹഘടകത്തിന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ് $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$ ആകുന്നു.

$|A| = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1$

ഇതുപോലെ, $|A| = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2$ കൂടാതെ $|A| = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3$

ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു വരിയുടെ (നിരയുടെ) അംഗങ്ങൾ കൂടാതെ അവയുടെ സമാന സഹഘടകങ്ങൾ എന്നിവയുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ തുക ആ ഡിറ്റർമിനന്റ് മൂല്യത്തിന് തുല്യമാണെന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

മാത്രമല്ല $a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = -a_1\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_1\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - c_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}$

$$= -a_1(b_1c_3 - b_3c_1) + b_1(a_1c_3 - a_3c_1) - c_1(a_1b_3 - a_3b_1)$$

$$= a_1b_1c_3 + a_1b_3c_1 + a_1b_1c_3 - a_3b_1c_1 - a_1b_3c_1 + a_3b_1c_1 = 0$$

ഇതുപോലെ നമുക്ക് കിട്ടുന്നു

$$a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 = 0 \ ; \ a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 = 0 \ ;$$

$$a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 = 0 \ ; \ a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 = 0 \text{ കൂടാതെ } a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 = 0 .$$

കുറിപ്പ് 7.12

ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു വരിയുടെ (നിരയുടെ) അംഗങ്ങൾ കൂടാതെ മറ്റേതെങ്കിലും വരി (നിര) അംഗങ്ങളുടെ സമാന സഹഘടകങ്ങൾ എന്നിവയുടെ ഗുണനഫലത്തിന്റെ തുക പൂജ്യം ആയിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 7.31

a_i, b_i, c_i എന്നിവയുടെ സഹഘടകങ്ങൾ, A_i, B_i, C_i എങ്കിൽ $i = 1, 2, 3$

$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ എന്നിരിക്കട്ടെ, $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = |A|^2$ എന്ന് തെളിയിക്കും.

നിർദ്ധാരണം

ഗുണനഫലം പരിഗണിക്കുക $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 & a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 & a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 \\ a_2A_1 + b_2B_1 + c_2C_1 & a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2 & a_2A_3 + b_2B_3 + c_2C_3 \\ a_3A_1 + b_3B_1 + c_3C_1 & a_3A_2 + b_3B_2 + c_3C_2 & a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{vmatrix} = |A|^3$$

അതായത്, $|A| \times \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = |A|^3 .$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = |A|^2 .$$

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 37 3/16/2023 5:15:01 PM

7.3.6 ത്രികോണങ്ങളുടെ വിസ്തീർണ്ണം

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ കൂടാതെ (x_3, y_3) എന്നിവ ശീർഷ ബിന്ദുക്കൾ ഉള്ള **ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം** ഒരു സംഖ്യയായിരിക്കും എന്ന് നമുക്കറിയാം.

$$\frac{1}{2}(x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3).$$

ഇതിനെ ഡിറ്റർമിനന്റ് രൂപത്തിൽ

$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ എന്ന് എഴുതാം.

ഉദാഹരണം 7.32

$(-3, 0), (3, 0), (0, k)$ എന്നീ ശീർഷ ബിന്ദുക്കൾ ഉള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 9 ച. മാത്രകൾ എങ്കിൽ k യുടെ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$. ന്റെ ഒരു സംഖ്യയായിരിക്കും

$$9 = \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & k & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}(-k)(-3-3)\right|$$

$\Rightarrow \quad 9 = 3|k|$ അതുകൊണ്ട്, $k = \pm 3$.

കുറിപ്പ് 7.13

മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളിലൂടെ രൂപീകരിക്കപ്പെടുന്ന ത്രികോണത്തന്റെ വിസ്തീർണ്ണം പൂജ്യം എങ്കിൽ ആ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളും ഒരേ നേർരേഖയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യും. ഇതിന്റെ വിപരീതവും ശരിയാണ്. മാത്രമല്ല, ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ മൂല്യം ഋണ സംഖ്യയായിരിക്കാം. പക്ഷേ, വിസ്തീർണ്ണം എല്ലായിപ്പോഴും ഒരു ധനസംഖ്യയായിരിക്കും എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

ഉദാഹരണം 7.33

$(-2, -3), (3, 2), (-1, -8)$ എന്നീ ശീർഷ ബിന്ദുക്കൾ ഉള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $= \left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}\right|$.

$$\left|\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & -8 & 1 \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{1}{2}(-20+12-22)\right| = |-15| = 15$$

അതുകൊണ്ട് ആവശ്യമായ വിസ്തീർണ്ണം 15 ച. മാത്രകൾ.

ഉദാഹരണം 7.34

$(a, b + c), (b, c + a), (c, a + b)$ എന്നിവ സമരേഖീയമാണ് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 38 3/16/2023 5:15:02 PM

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയം എന്ന് തെളിയിക്കുന്നതിന് $|A| = \begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix} = 0$.

എന്ന് തെളിയിച്ചാൽ മതിയാകും $ü_1 \rightarrow {}_1 + {}_2$, എന്ന് പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ,

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b+c & b+c & 1 \\ a+b+c & c+a & 1 \\ a+b+c & a+b & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b+c & 1 \\ 1 & c+a & 1 \\ 1 & a+b & 1 \end{vmatrix} = (a+b+c)\times 0 = 0$$

അതുകൊണ്ട് തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണ്.

7.2.11 പൂജ്യം കൂടാതെ പൂജ്യമല്ലാത്ത മാട്രിക്സുകൾ

നിർവ്വചനം 7.21

ഒരു സമചതുര A ന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ് $|A| = 0$ എങ്കിൽ അതിനെ **പൂജ്യ ഡിറ്റർമിനന്റ് മാട്രിക്സ്** എന്നു പറയുന്നു. ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് A ന്റെ ഡിറ്റർമിനന്റ് $|A| \neq 0$ എങ്കിൽ അതിനെ **പൂജ്യം അല്ലാത്ത ഡിറ്റർമിനന്റ്** എന്നു പറയുന്നു .

ഉദാഹരണമായി മാട്രിക്സ് $A = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ എന്നത് പൂജ്യമാട്രിക്സാണ്, എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ

$|A| = 3(1-1) - 8(-4+4) + 1(-4+4) = 0$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$B = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & 5 \\ 5 & 4 & -7 \end{bmatrix}$ എന്നിരിക്കട്ടെ $|B| = 2(0-20) - (-3)(-42-4) + 5(30-0) = -28 \neq 0.$

അതിനാൽ B ഒരു പൂജ്യമല്ലാത്ത മാട്രിക്സാണ്.

കുറിപ്പ് 7.14

A, B എന്നിവ തുല്യ ക്രമമുള്ള പൂജ്യമല്ലാത്ത മാട്രിക്സുകളെങ്കിൽ $|AB| = |A|\,|B| = |BA|$ ആയതിനാൽ AB കൂടാതെ BA എന്നിവ പൂജ്യംഅല്ലാത്ത മാട്രിക്സുകളായിരിക്കും.

അഭ്യാസം 7.4

(1) (0, 0), (1, 2), (4, 3) എന്നീ ശീർഷങ്ങൾ ഉള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

(2) $(k, 2)$, (2, 4) കൂടാതെ (3, 2) എന്നീ ശീർഷങ്ങളുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 4 ച. മാത്രകൾ എങ്കിൽ k യുടെ മൂല്യം കാണുക.

(3) താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ ഏവ പൂജ്യം, കൂടാതെ പൂജ്യമല്ലാത്ത മാട്രിക്സുകൾ എന്ന് പരിശോധിക്കുക:

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 0 & a-b & k \\ b-a & 0 & 5 \\ -k & -5 & 0 \end{bmatrix}$

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 39 3/16/2023 5:15:03 PM

(4) താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവ പൂജ്യ മാട്രിക്സുകളാണെങ്കിൽ a കൂടാതെ b എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ കാണുക:

(i) $A=\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & a \end{bmatrix}$ (ii) $B=\begin{bmatrix} b-1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

(5) $\cos 2\theta = 0$, എങ്കിൽ $\begin{vmatrix} 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{vmatrix}^2$ ന്റെ മൂല്യം കാണുക.

(6) ഗുണത്തിന്റെ മൂല്യം കാണുക ; $\begin{vmatrix} \log_3 64 & \log_4 3 \\ \log_3 8 & \log_4 9 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \log_2 3 & \log_8 3 \\ \log_3 4 & \log_3 4 \end{vmatrix}$.

UKD5P

അഭ്യാസം 7.5

ശരിയായ ഉത്തരം തെരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുക.

(1) $a_{ij}=\frac{1}{2}(3i-2j)$ കൂടാതെ $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ എങ്കിൽ

(1) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(2) $2X+\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ എങ്കിൽ X എന്ന മാട്രിക്സ്?

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$ എന്ന മാട്രിക്സിനെ താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ ശരിയല്ലാത്തത് ഏത്?

(1) അദിശ മാട്രിക്സ് (2) വികർണ്ണ മാട്രിക്സ്
(3) മുകൾ ത്രികോണ മാട്രിക്സ് (4) താഴ്ന്ന ത്രികോണ മാട്രിക്സ്

(4) A, B എന്നിവ $A+B$ കൂടാതെ AB എന്നിവ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട രണ്ട് മാട്രിക്സുകളാണെങ്കിൽ
(1) A, B എന്നിവ തുല്യക്രമം ഉള്ളതായിരിക്കണമെന്നില്ല
(2) A, B എന്നിവ തുല്യ ക്രമത്തിലുള്ള സമചതുര മാട്രിക്സുകൾ
(3) A യുടെ വരികളുടെ എണ്ണവും, B യുടെ നിരകളുടെ എണ്ണവും തുല്യം
(4) $A = B$.

(5) $A=\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}$ എങ്കിൽ, ന്റെ ഏത് മൂല്യങ്ങൾക്ക് $\lambda, A^2 = O$?

(1) 0 (2) ± 1 (3) -1 (4) 1

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 40 3/16/2023 5:15:05 PM

(6) $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}a & 1\\ b & -1\end{bmatrix}$ കൂടാതെ $(A+B)^2=A^2+B^2$ എങ്കിൽ a, b ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ

(1) $a=4, b=1$ (2) $a=1, b=4$ (3) $a=0, b=4$ (4) $a=2, b=4$

(7) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ a & 2 & b\end{bmatrix}$ എന്നത് $AA^T=9I$, എന്ന സമീകരണത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന മാട്രിക്സാണ്

ഇവിടെ I എന്നത് 3×3 ക്രമം ഉള്ള അനന്യാ മാട്രിക്സ് എങ്കിൽ ക്രമ ജോഡി (a, b)

(1) $(2, -1)$ (2) $(-2, 1)$ (3) $(2, 1)$ (4) $(-2, -1)$

(8) A എന്നത് ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് എങ്കിൽ താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ പ്രതിസമത അല്ലാത്തത്?

(1) $A+A^T$ (2) AA^T (3) A^TA (4) $A-A^T$

(9) A, B എന്നിവ n ക്രമത്തിലുള്ള പ്രതിസമത മാട്രിക്സുകൾ, ഇവിടെ $(A\neq B)$, എങ്കിൽ

(1) $A+B$ ഒരു വിപരീത പ്രതിമസത മാട്രിക്സ് (2) $A+B$ എന്നത് ഒരു പ്രതിസമത മാട്രിക്സ്

(3) $A+B$ എന്നത് ഒരു വികർണ്ണ മാട്രിക്സ് (4) $A+B$ എന്നത് ഒരു പൂജ്യ മാട്രിക്സ്

(10) $A=\begin{bmatrix}a & x\\ y & a\end{bmatrix}$ കൂടാതെ $xy=1$, എങ്കിൽ $\det(A\,A^T)$ ന്റെ മൂല്യം

(1) üa− 2 (2) $(a^2+1)^2$ (3) a^2-1 (4) $(a^2-1)^2$

(11) $A=\begin{bmatrix}e^{x-2} & e^{7+x}\\ e^{2+x} & e^{2x+3}\end{bmatrix}$ എന്നത് ഒരു പൂജ്യ മാട്രിക്സ് എങ്കിൽ x ന്റെ മൂല്യം

(1) 9 (2) 8 (3) 7 (4) 6

(12) $(x,-2), (5,2), (8,8)$ എന്നിവ സമരേഖീയമെങ്കിൽ x ന്റെ മൂല്യം

(1) -3 (2) $\frac{1}{3}$ (3) 1 (4) 3

(13) $\begin{vmatrix}2a & x_1 & y_1\\ 2b & x_2 & y_2\\ 2c & x_3 & y_3\end{vmatrix}=\frac{abc}{2}\neq 0$ എങ്കിൽ $\left(\frac{x_1}{a},\frac{y_1}{a}\right), \left(\frac{x_2}{b},\frac{y_2}{b}\right), \left(\frac{x_3}{c},\frac{y_3}{c}\right)$ എന്നീ ശീർഷമുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

(1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{4}abc$ (3) $\frac{1}{8}$ (4) $\frac{1}{8}abc$

(14) $\begin{bmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & -\alpha\end{bmatrix}$ എന്ന സമചതുര മാട്രിക്സിന്റെ വർഗ്ഗത്തിന്റെ ക്രമം 2 ഉള്ള ഒരു ഏകമാത്ര മാടിക് സാണെങ്കിൽ α, β കൂടാതെ γ എന്നിവ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന ബന്ധം.

(1) $1+\alpha^2+\beta\gamma=0$ (2) $1-\alpha^2-\beta\gamma=0$

(3) $1-\alpha^2+\beta\gamma=0$ (4) $1+\alpha^2-\beta\gamma=0$

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 41 3/16/2023 5:15:09 PM

(15) $\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix}$ എങ്കിൽ $\begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ kx & ky & kz \\ kp & kq & kr \end{vmatrix}$ എന്നത്

(1) Δ (2) $k\Delta$ (3) $3k\Delta$ (4) $k^3\Delta$

(16) $\begin{vmatrix} 3-x & -6 & 3 \\ -6 & 3-x & 3 \\ 3 & 3 & -6-x \end{vmatrix} = 0$ എന്ന സമീകരണത്തിന്റെ ഒരു നിർദ്ധാരണം

(1) 6 (2) 3 (3) 0 (4) – 6

(17) $A = \begin{bmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{bmatrix}$ എന്ന ഡിറ്റർമിനന്റ് മൂല്യം

(1) $-2abc$ (2) abc (3) 0 (4) $a^2+b^2+c^2$

(18) x_1, x_2, x_3 കൂടാതെ y_1, y_2, y_3 എന്നിവ ഒരു പൊതു അനുപാതം ഉള്ള G.P ആണെങ്കിൽ (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) എന്ന ബിന്ദുക്കൾ

(1) സമഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ

(2) സമകോണ ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ

(3) ദ്വി സമഭുജ ത്രികോണത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങൾ

(4) സമരേഖീയമാണ്

(19) $\lfloor . \rfloor$ എന്നത് ഉച്ചതമ പൂർണ്ണഫലനം എന്നിരിക്കട്ടെ. കൂടാതെ $-1 \le x < 0,\ 0 \le y < 1,\ 1 \le z < 2$,

എങ്കിൽ $\begin{vmatrix} \lfloor x \rfloor + 1 & \lfloor y \rfloor & \lfloor z \rfloor \\ \lfloor x \rfloor & \lfloor y \rfloor + 1 & \lfloor z \rfloor \\ \lfloor x \rfloor & \lfloor y \rfloor & \lfloor z \rfloor + 1 \end{vmatrix}$ മാട്രിക്സിന്റെ മൂല്യം

(1) $\lfloor z \rfloor$ (2) $\lfloor y \rfloor$ (3) $\lfloor x \rfloor$ (4) $\lfloor x \rfloor + 1$

(20) $a \neq b, b, c$ എന്നിവ $\begin{vmatrix} a & 2b & 2c \\ 3 & b & c \\ 4 & a & b \end{vmatrix} = 0$, എന്നതിനെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു എങ്കിൽ $abc =$ എന്നത്

(1) $a+b+c$ (2) 0 (3) b^3 (4) $ab+bc$

(21) $A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$ കൂടാതെ $B = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$ എങ്കിൽ B

(1) $B = 4A$ (2) $B = -4A$ (3) $B = -A$ (4) $B = 6A$

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 42 3/16/2023 5:15:13 PM

(22) A എന്നത് n ക്രമത്തിലുള്ള വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സ് കൂടാതെ C എന്നത് $n \times 1$, ക്രമത്തിലുള്ള നിര മാട്രിക്സ് എങ്കിൽ $C^T AC$ എന്നത്

(1) n ക്രമത്തിലുള്ള അനന്യ മാട്രിക്സ് (2) ക്രമം 1 ഉള്ള അനന്യ മാട്രിക്സ്

(3) ക്രമം 1 ഉള്ള പൂജ്യ മാട്രിക്സ് (4) ക്രമം 2 ഉള്ള അനന്യ മാട്രിക്സ്

(23) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ എന്ന സമീകരണത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന A എന്ന മാട്രിക്സ്

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

(24) $A + I = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$, എങ്കിൽ $(A+I)(A-I)$ ന്റെ മൂല്യം

(1) $\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 8 & -9 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -8 & 9 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$ (4) $\begin{bmatrix} -5 & -4 \\ -8 & -9 \end{bmatrix}$

(25) A, B എന്നിവ തുല്യ ക്രമത്തിലുള്ള രണ്ട് പ്രതിസമത മാട്രിക്സ് എങ്കിൽ താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ ശരിയല്ലാത്തത് ഏത്?

(1) $A + B$ എന്നത് ഒരു പ്രതിസമത മാട്രിക്സ് (2) AB എന്നത് ഒരു പ്രതിസമത മാട്രിക്സ്

(3) $AB = (BA)^T$ (4) $A^T B = AB^T$

സംഗ്രഹം

ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ നിന്ന് നമ്മൾ താഴെ പറയുന്ന അറിവ് നേടുന്നു.

- വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ, ലുള്ള വാസ്തവികാ ഫലനങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ സംമിശ്ര സംഖ്യകളുടെ ദീർഘ ചതുരാകൃതിയിലുള്ള ക്രമീകരണത്തെ മാട്രിക്സ് എന്നു പറയുന്നു.
- A എന്ന മാട്രിക്സിനെ m വരികളും n നിരകളുമാണ് ഉള്ളതെങ്കിൽ അതിന്റെ ക്രമം $m \times n$.
- $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ എന്ന മാട്രിക്സിൽ

  $m = n$ എങ്കിൽ ആ മാട്രിക്സ് സമചതുര മാട്രിക്സ്

  $m = 1$ എങ്കിൽ ആ മാട്രിക്സ് നിര മാട്രിക്സ്

  $n = 1$ എങ്കിൽ ആ മാട്രിക്സ് വരി മാട്രിക്സ്

  $a_{ij} = 0 \forall\, i, j$ എങ്കിൽ ആ മാട്രിക്സ് പൂജ്യ മാട്രിക്സ്

  $m = n$ കൂടാതെ $a_{ij} = 0 \forall\, i \neq j$ ആ മാട്രിക്സ് അദിശ മാട്രിക്സ്

  സ്കാലർ മാട്രിക്സ് $m = n$ കൂടാതെ $a_{ij} = 0 \forall\, i \neq j$ കൂടാതെ $a_{ii} = \lambda$ എല്ലാ i

  $m = n$ കൂടാതെ $a_{ij} = 0$, $i \neq j$ കൂടാതെ $a_{ii} = 1\ \forall\ i$ എങ്കിൽ മാത്ര അല്ലെങ്കിൽ അനന്യ മാട്രിക്സ്

  $m = n$ കൂടാതെ $a_{ij} = 0\ \forall\ i > j$ എങ്കിൽ മുകൾ ത്രികോണ മാട്രിക്സ്

  $m = n$ കൂടാതെ $a_{ij} = 0\ \forall\ i < j$ എങ്കിൽ താഴ്ന്ന ത്രികോണ മാട്രിക്സ്.
- $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ കൂടാതെ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, എന്ന മാട്രിക്സുകൾക്ക് $a_{ij} = b_{ij}$ കൂടാതെ j എങ്കിൽ അവ തുല്യ മാട്രിക്സുകൾ
- $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ കൂടാതെ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$, എങ്കിൽ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ഇവിടെ $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
- $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ കൂടാതെ λ ഒരു അദിശം എങ്കിൽ $\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{m\times n}$
- $-A = (-1)A$
- $A + B = B + A$
- $A - B = A + (-1)B$
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ ഇവിടെ A, B, C എന്നിവ തുല്യ ക്രമത്തിൽ ഉള്ളവ.
- $A(BC) = (AB)C$ (ii) $A(B+C) = AB+AC$ (iii) $(A+B)C = AC+BC$

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 43 3/16/2023 5:15:29 PM

- ഒരു മാട്രിക്സ് A യുടെ വരി കൂടാതെ നിരകളെ സ്ഥാനമാറ്റം ചെയ്യുന്നതിലൂടെ കിട്ടുന്ന മാട്രിക്സ് A^T യുടെ പരിവർത്തന മാട്രിക്സ് A എന്ന് പറയുന്നു.

  (i) $(A^T)^T = A$, (ii) $(kA)^T = kA^T$, (iii) $(A+B)^T = A^T + B^T$, (iv) $(AB)^T = B^T A^T$
- A ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ്

  (i) $A^T = A$ അത് പ്രതിസമത മാട്രിക്സ് (ii) $A^T = -A$ എങ്കിൽ അത് വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സ്
- ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സിനെ പ്രതിസമത കൂടാതെ വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സുകളുടെ തുക യായി എഴുതാം.
- ഒരു വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സിന്റെ വികർണ്ണ അംഗങ്ങൾ പൂജ്യമായിരിക്കും.
- A എന്നത് വാസ്തവിക സംഖ്യകളെ അംഗങ്ങളായി ഉള്ള ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് എങ്കിൽ $A + A^T$ എന്നത് പ്രതിസമത മാട്രിക്സ്. കൂടാതെ $A - A^T$ എന്നത് വിപരീത പ്രതിസമത മാട്രിക്സാണ്. മാത്രമല്ല $A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$.
- സമചതുര മാട്രിക്സുകൾക്ക് മാത്രമേ ഡിറ്റർമിനന്റുകളെ നിർവ്വചിക്കാൻ സാധിക്കൂ.
- $|A^T| = |A|$.
- A, B എന്നിവ തുല്യ ക്രമത്തിൽ ഉള്ള രണ്ട് സമചതുര മാട്രിക്സുകൾ എങ്കിൽ $|AB| = |A|\,|B|$.
- ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, എങ്കിൽ $|kA| = k^n |A|$, ഇവിടെ k എന്നത് ഒരു അദിശം.
- ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് A യുടെ ഡിറ്റർമിനന്റെ മൂല്യം അതിന്റെ ഒരു വരിയുടെ (അല്ലെങ്കിൽ നിര യുടെ) അംഗങ്ങൾ കൂടാതെ അവയുടെ സമാന സഹഘടകങ്ങൾ എന്നിവയുടെ ഗുണനഫലത്തി ന്റെ തുകയ്ക്ക് തുല്യം. ഉദാഹരണമായി, $|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$.
- ഒരു സമചതുര മാട്രിക്സ് A യുടെ ഡിറ്റർമിനന്റ് ഏതെങ്കിലും ഒരു വരി അല്ലെങ്കിൽ നിരയുടെ അംഗങ്ങൾ കൂടാതെ മറ്റൊരു വരി അല്ലെങ്കിൽ നിരയുടെ അംഗങ്ങളുടെ സമാന സഹഘടകങ്ങൾ എന്നിവയുടെ ഗുണ ഫലത്തിന്റെ തുക പൂജ്യമാണ്. ഉദാഹരണമായി, $a_{11}A_{13} + a_{12}A_{23} + a_{13}A_{33} = 0$
- ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റെ എല്ലാ വരികളെയും നിരകളായി സ്ഥാനമാറ്റം ചെയ്തുവെങ്കിലും, ഡിറ്റർമിനന്റെ മൂല്യത്തിൽ മാറ്റമില്ല.
- ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റെ രണ്ട് വരികൾ അല്ലെങ്കിൽ നിരകൾ സ്ഥാനമാറ്റം ചെയ്തു എങ്കിൽ ഡിറ്റർമിന ന്റെ ചിഹ്നം മാറും.
- ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റെ ഒരു വരി അല്ലെങ്കിൽ നിരയിൽ ഉള്ള എല്ലാ അംഗങ്ങളും പൂജ്യം എങ്കിൽ, അതിന്റെ മൂല്യം പൂജ്യം ആയിരിക്കും.
- ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റെ രണ്ട് വരികൾ അല്ലെങ്കിൽ നിരകൾ സമാനമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ മൂല്യം പൂജ്യമാ യിരിക്കും.
- ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു വരി അല്ലെങ്കിൽ നിരയിലുള്ള ഓരോ അംഗവും ഒരു അദിശം k കൊണ്ട് ഗുണിക്കപ്പെട്ടിരുന്നുവെങ്കിൽ ആ ഡിറ്റർമിനന്റെ മൂല്യം k കൊണ്ട് ഗുണിക്കപ്പെട്ടതായിരിക്കും.
- ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റിൽ ഉള്ള ഒരു വരി അല്ലെങ്കിൽ നിരയിലുള്ള ഓരോ അംഗവും r അംഗങ്ങളുടെ തുകയാണെങ്കിൽ, ആ ഡിറ്റർമിനന്റിനെ r ഡിറ്റർമിനന്റുകളുടെ സങ്കലന ഫലമായി എഴുതാം.
- ഒരു ഡിറ്റർമിനന്റിന്റെ ഒരു വരി (R_i) $R_i + \alpha R_j + \beta R_k (j, k \neq i)$ രൂപത്തിൽ മാറ്റുമ്പോൾ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു നിരയെ (C_i) $C_i + \alpha C_j + \beta C_k (j, k \neq i)$ എന്ന രൂപത്തിൽ മാറ്റുമ്പോൾ മൂല്യത്തിൽ മാറ്റമില്ല. ഇവിടെ α, β എന്നത് അദിശങ്ങളാണ്.
- **ഘടക സിദ്ധാന്തം :** ഒരു മാട്രിക്സ് A യുടെ ഓരോ അംഗവും x ലുള്ള ബഹുപദ വ്യാജകമാണ്. $x = a$ എന്ന് പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ $|A|$ ന്റെ മൂല്യം പൂജ്യം എങ്കിൽ $x - a$ എന്നത് $|A|$ ന്റെ ഒരു ഘടകമായിരിക്കും.
- (x_1, y_1), (x_2, y_2) കൂടാതെ (x_3, y_3) എന്നീ ശീർഷങ്ങളുള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ ഒരു കേവല സംഖ്യയാണ്.

  ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം പൂജ്യം എങ്കിൽ ആ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളും ഒരു നേർ രേഖയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു.
- ഒരു സമചതുര അണി A യിന് $|A| = 0$ എങ്കിൽ അത് പൂജ്യ ഡിറ്റർമിനന്റ് എന്നു പറയുന്നു. $|A| \neq 0$ എങ്കിൽ അത് പൂജ്യമല്ലാത്ത ഡിറ്റർമിനന്റ് എന്നു പറയുന്നു.

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 44 3/16/2023 5:15:43 PM

ഇന്റർനെറ്റ് പ്രവൃത്തി 7(a)

മാട്രിക്സുകൾ കൂടാതെ ഡിറ്റർമിനന്റ്

പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന ഫലം

ഘട്ടം 1

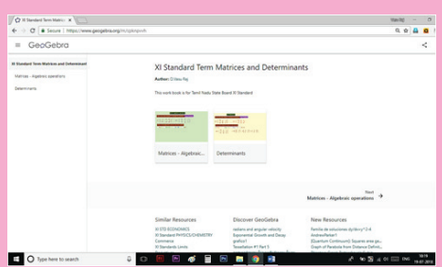
ബ്രൗസർ തുറന്ന് താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന URL ലിങ്ക് ടൈപ്പ് ചെയ്യുക. അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക.

“Matrices and Determinants” പേരിലുള്ള ജിയോ ജിബ്ര വർക്ക് ബുക്ക് പ്രത്യക്ഷപ്പെടും. അവിടെ നിങ്ങളുടെ പുസ്തകമായുള്ള അധ്യായങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

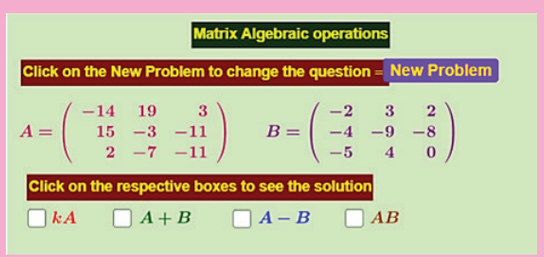
ഘട്ടം 2

അതിൽ നിന്ന് "Matrices Algebraic Operations" എന്ന വർക്ക് ഷീറ്റ് തെരഞ്ഞെടുക്കുക. ക്രിയകൾ ചെയ്ത് ചെക്ക് ബോക്സിൽ നിന്ന് ഉത്തരങ്ങൾ ശരിനോക്കുക.

പുതിയ ചോദ്യങ്ങൾക്കായി “New Problem” അമർത്തുക.



ഘട്ടം 1



ഘട്ടം 2

ഈ ലിങ്കിൽ ബ്രൗസ് ചെയ്യുക:

മാട്രിക്സുകളും ഡിറ്റർമിനന്റുകളും : https://ggbm.at/cpknpvvh

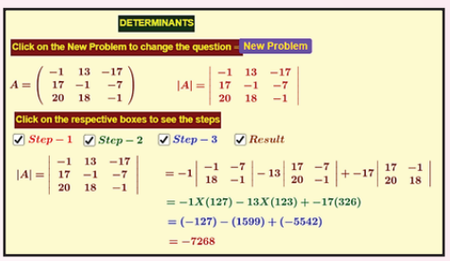
MC601

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 45 3/16/2023 5:15:44 PM

ഇന്റർനെറ്റ് പ്രവൃത്തി 7(b)

മാട്രിക്സുകൾ കൂടാതെ ഡിറ്റർമിനന്റ്

പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന ഫലം



ഘട്ടം 1

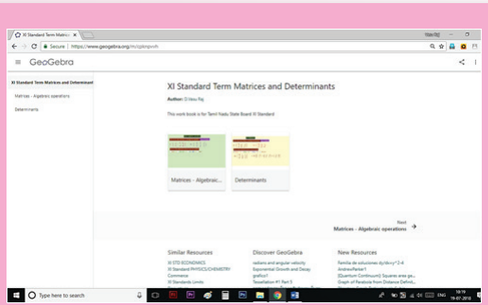
ബ്രൗസർ തുറന്ന് താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന URL ലിങ്ക് ടൈപ്പ് ചെയ്യുക. അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക.

മാട്രിക്സ് കൂടാതെ ഡിറ്റർമിനന്റ് പേരുള്ള ജിയോ ജിബ്ര വർക്ക് ബുക്ക് പ്രത്യക്ഷപ്പെടും. അവിടെ നിങ്ങളുടെ പുസ്തകവുമായി ബന്ധമുള്ള അധ്യായങ്ങൾ ഉണ്ടായിരിക്കും.

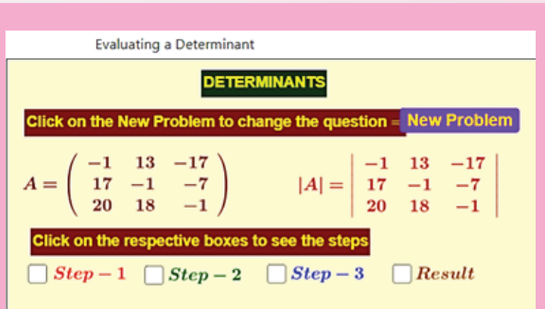
ഘട്ടം 2

അതിൽ നിന്ന് "Determinants" എന്ന വർക്ക് ഷീറ്റ് തെരഞ്ഞെടുക്കുക. തന്നിരിക്കുന്ന മാട്രിക്സുകളുടെ ഡിറ്റർമിനന്റുകൾക്ക് മൂല്യം കാണുക ചെക്ക് ബോക്സിൽ നിന്ന് ഉത്തരങ്ങൾ ശരി നോക്കുക.

പുതിയ ചോദ്യങ്ങൾക്കായി "New Problem" അമർത്തുക.



ഘട്ടം 1



ഘട്ടം 2

ഈ ലിങ്കിൽ ബ്രൗസ് ചെയ്യുക:

മാട്രിക്സുകളും ഡിറ്റർമിനന്റുകളും: https://ggbm.at/cpknpvvh

Mal_07_11th-Maths-Vol2-Unit7.indd 46 3/16/2023 5:15:45 PM

അദ്ധ്യായം 8 സദിശ ബീജഗണിതം

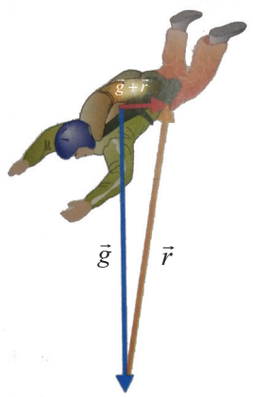
263FA

"ഭൂമിയിൽ മനുഷ്യനല്ലാതെ മഹത്തായ മറ്റൊന്നില്ലാ
മനുഷ്യനിൽ മനസ്സല്ലാതെ മഹത്തായ മറ്റൊന്നില്ലാ "

- ഹാമിൽട്ടൻ

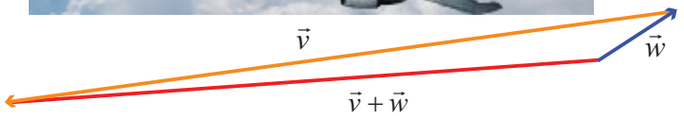
8.1 ആമുഖം

ഒരു വിമാനത്തെ നിയന്ത്രിക്കുന്ന ഒരു വൈമാനികൻ, അതിന്റെ പാത, അതിന്റെ മുൻഭാഗം, കാറ്റിന്റെ വേഗത, തറയിൽ അതിന്റെ വേഗത തുടങ്ങിയവയെപ്പറ്റി അറിഞ്ഞിരിക്കണം. കാറ്റിനെതിരെ ശരിയായ വേഗത്തിൽ ശരിയായ കോൺ അളവിൽ വിമാനത്തെ നിയന്ത്രിക്കണം. ഒരു കമ്പ്യൂട്ടറിന്റെ സഹായത്തോടെ വേഗത, കോണളവ് തുടങ്ങിയവ വേഗത്തിന് തുല്യമായി കണക്കാക്കാൻ സാധിക്കും. എങ്കിലും കമ്പ്യൂട്ടർ ശരിയായി പ്രവർത്തിക്കാത്ത സാഹചര്യത്തിൽ വൈമാനികൻ കൈയ്യിലുള്ള കാൽക്കുലേറ്റർ, പേപ്പർ, പേന എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് സദിശയെപ്പറ്റിയും സദിശ നിയമങ്ങളെപ്പറ്റിയും ഉള്ള അറിവ് ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാം. അതിനായി വൈമാനികൻ സദിശയെ കുറിച്ച് തീർച്ചയായും അറിഞ്ഞിരിക്കണം.



പാരച്ച്യൂട്ട് അഭ്യാസികളുടെ മേൽ രണ്ട് മുഖ്യ ബലങ്ങൾ പ്രവർത്തിക്കുന്നു. ഭൂഗുരുത്വ ബലം $(\vec{g})$ ലംബമായി താഴേയ്ക്ക് പ്രവർത്തിക്കുന്നു. എതിർ ബലം $(\vec{r})$ മുകളിലേയ്ക്ക് ഏതെങ്കിലും ഒരു ദിശയിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്നു. അതായത് ആ അഭ്യാസിയുടെ മേൽ പ്രവർത്തിക്കുന്ന ആകെ ബലം $\vec{g}+\vec{r}$ ആകുന്നു. (എങ്ങനെ?)

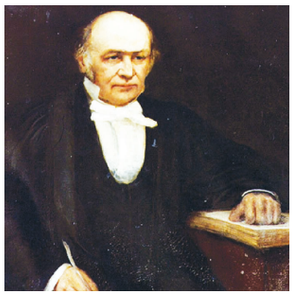
ഒരു വിമാനത്തിന്റെ ദിശാ വേഗത $\vec{v}$ എന്നും കാറ്റിന്റെ ദിശാ വേഗത $\vec{w}$ എന്നും എടുത്താൽ വിമാനം ആകെ ഉപയോഗിക്കുന്ന ദിശാ വേഗത $\vec{v}+\vec{w}$ ആകുന്നു. പടിഞ്ഞാറു ദിശ നോക്കി സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വിമാനത്തിന്റെ മുൻഭാഗം ഏത് ദിശ നോക്കി ഇരിക്കണം?



ജി പി എസ് എന്ന ഉപകരണം കര മാർഗ്ഗം, വായു മാർഗ്ഗം, ജല മാർഗ്ഗം എന്നീ യാത്രകൾക്ക് വഴി കാണിച്ചു തരാൻ സാധിക്കുന്ന രീതിയിൽ ക്രമീകരിച്ചിരിക്കുന്നു. സദിശ നിയമങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ചാണ് ഈ ഉപകരണം പ്രവർത്തിക്കുന്നത്.

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 47 15-02-2023 11:54:42

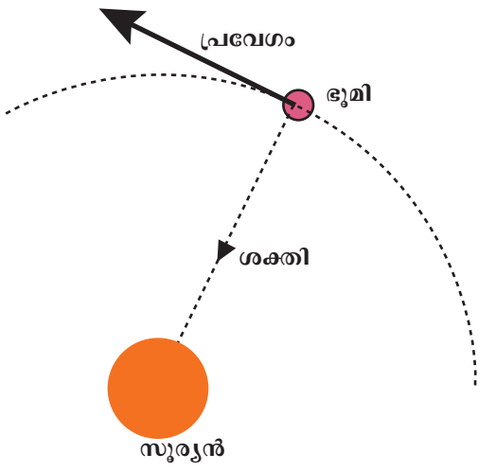
സദിശയുടെ അടിസ്ഥാന തത്വങ്ങൾ ജർമ്മൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞർ **എച്ച്. ജി. ഗ്രാസ്മെൻ** (1809 - 1877), ഐറിഷ് ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ **ഡബ്ല്യു.ആർ. ഹാമിൽട്ടൻ** (1805 – 1865) എന്നിവരുടെ പരിശ്രമത്താൽ വളർന്നു വന്നവയാണ്. ഹാമിൽട്ടൻ ഒരു ഉയർന്ന പദവി വഹിച്ചിരുന്ന ആളും ഗ്രാസ്മെൻ ഒരു ഹൈസ്കൂൾ അധ്യാപകനുമായിരുന്നു.



ഹാമിൽട്ടൻ
(1805 - 1865)

സൂക്ഷമകലനം, കാർട്ടിഷ്യൻ ജ്യാമിതി തുടങ്ങിയ ഗണിത ശാസ്ത്ര ശാഖയിലെ മുഖ്യ സിദ്ധാന്തങ്ങളുടെ സഹായത്തോടെ സദിശ ബീജഗണിതത്തെ **ജെ ബി ഗിഫ്സ്** (1839 - 1903) എന്ന അമേരിക്കൻ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനും **ക്യൂ. ഹെബിസൈഡ്** (1850 - 1925) എന്ന ഇംഗ്ലണ്ടിലെ ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞനും ചേർന്ന് രൂപം നൽകി. ഇപ്പോൾ ഉപയോഗിക്കുന്ന സദിശ ബീജഗണിതം ഗിഫ്സ് എന്ന ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ തന്റെ സർവ്വകലാശാലയിലെ വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് ആദ്യമായി നൽകിയ വിവരണമാണ്. **ഗിൽബർട്ട്** (1845–1879) എന്ന ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ തന്റെ **എലിമെൻസ് ഓഫ് ഡയനാമിക്സ്** (1878) എന്ന പുസ്തകത്തിൽ സൂക്ഷമ കലനത്തിൽ ഉപയോഗിച്ചിരുന്ന രണ്ട് കുവാട്ടർ നിയനുകളുടെ ഗുണനത്തെ രണ്ട് വിധമായ സദിശങ്ങളുടെ ഗുണനമായി അതായത് സദിശഗുണനമായും അദിശ ഗുണനമായും പിരിച്ചു കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. സദിശ എന്ന പദം ഹാമിൻട്ടൺ എന്ന ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞൻ **'വഹിക്കുക'** എന്ന് അർത്ഥമുള്ള ലത്തീൻ വാക്കിൽ നിന്ന് നിർവ്വചിച്ചു .

സദിശ സിദ്ധാന്തം, ഗ്രാസ്മാന്റെ വിപുലീകരണ സിദ്ധാന്തത്തെയും അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ളതാണ്.



സദിശ ബീജഗണിതം ജ്യാമിതീയ, ഭൗതിക ശാസ്ത്രശാഖകളിലെ പലവിധ ആശയങ്ങൾക്ക് അത്യന്താപേക്ഷിതമാണെന്ന് മനസ്സിലായി. സദിശം എന്നത് **പ്രായോഗിക ഗണിതത്തിലും ഭൗതിക ശാസ്ത്രത്തിലും ആധുനിക ഭാഷ** എന്നറിയപ്പെടുന്നു. ഇന്നും ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ ആന്തരിക താൽപര്യമായി നിലനിൽക്കുന്നു.

പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

ഈ പാഠം പഠിച്ചു കഴിയുമ്പോൾ, വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക്

- ഇത് ജ്യാമിതിയിലും ഭൗതിക ശാസ്ത്രത്തിലും ഉപകാരപ്രദമായ ഒരു പഠന ഉപകരണം ആണെന്ന് മനസ്സിലാക്കണം.
- സ്കെയിലാറും (അദിശ) വെക്ടറും (സദിശ) തമ്മിലുള്ള താരതമ്യം മനസ്സിലാക്കണം.
- വിവിധ തരം സദിശങ്ങളും സദിശ ബീജഗണിതവും മനസ്സിലാക്കണം.
- 2ഡി, 3ഡി സദിശങ്ങളുടെ ജ്യാമിതീയ വ്യാഖ്യാനങ്ങളും പരിഹാരങ്ങളും മനസ്സിലാക്കണം.
- സദിശ ബീജഗണിതത്തിൽ മാട്രിക്സ് സിദ്ധാന്തങ്ങളുടെ പ്രയോഗം മനസ്സിലാക്കണം.
- സദിശ ഗുണനവും ആദ്യംഗുണനത്തിലും വരുന്ന മൂല്യങ്ങൾ യഥാക്രമം സദിശയും, അദിശയും ആയിരിക്കും എന്നത് കണ്ടറിയാൻ സാധിക്കണം.

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 48 15-02-2023 11:54:42

8.2 അദിശകളും സദിശകളും

നിർവ്വചനം 8.1

ഒരു അളവിന്റെ വ്യാപ്തി അനുസരിച്ച് നിർണ്ണയിക്കപ്പെടുന്നതാണ് **അദിശകൾ**.

ഉദാഹരണം: ദൂരം, നീളം, വേഗത, ഊഷ്മാവ്, വോൾട്ടേജ്, ദ്രവ്യമാനം, മർദ്ദം, ജോലി തുടങ്ങിയവ അദിശ അളവുകളാണ്.

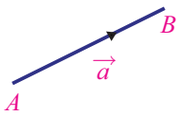
നിർവ്വചനം 8.2

ഒരു **സദിശം** എന്നത് അതിന്റെ വ്യാപ്തിയും ദിശയും അനുസരിച്ച് നിർണ്ണയിക്കപ്പെടുന്ന ഒരു അളവാണ്, അതിനാൽ അത് ഒരു നിർദ്ദേശിക്കപ്പെട്ട രേഖാഖണ്ഡമാണ്.

ഉദാഹരണം: ബലം, സ്ഥാനമാറ്റം, പ്രവേഗം തുടങ്ങിയവ വെക്ടർ അളവുകളാണ്.

സദിശകളെ ഇംഗ്ലീഷ് ചെറിയ അക്ഷരങ്ങളുടെ മുകളിൽ അമ്പ് അടയാളം ഉപയോഗിച്ച് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ദ്വി പരിമാണ സദിശം $\mathbb{R}^2$ ൽ നിർദ്ദേശിക്കപ്പെട്ട രേഖാഖണ്ഡമാണ്. കൂടാതെ $\mathbb{R}^3$ ൽ നിരദ്ദേശിക്കപ്പെട്ട രേഖാഖണ്ഡമാണ്.

8.3 ഒരു സദിശത്തിന്റെ പ്രാതിനിധ്യം കൂടാതെ വിവിധതരം സദിശങ്ങളും



ചിത്രം 8.1

ഒരു സദിശത്തിന് ആരംഭവും അവസാനവും ഉണ്ട്. ചിത്രം 8.1 ൽ കാണുക.

നിർവ്വചനം 8.3

$\vec{a}$ എന്ന സെദിശത്തിൽ A അതിന്റെ **ആരംഭ ബിന്ദു** എന്നും B അതിന്റെ **അവസാന ബിന്ദുവും** ആകുന്നു. ഒരു സദിശത്തിന്റെ ആരംഭ ബിന്ദു അതിന്റെ മൂലബിന്ദു എന്നും അറിയപ്പെടുന്നു.

$\vec{a}$ എന്ന സദിശത്തിന്റെ ആരംഭബിന്ദു A എന്നത് അതിന്റെ ആരംഭ സ്ഥാനവും അവസാന ബിന്ദു B എന്നത് അതിന്റെ സ്ഥാനമാറ്റത്തിന്റെ അവസാന സ്ഥാനവും ആകുന്നു.

$\vec{a}$ എന്ന സദിശത്തിന്റെ നീളം അല്ലെങ്കിൽ വ്യാപ്തി എന്നത് AB എന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ നീളം ആകുന്നു. അതിനെ $|\vec{a}|$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു .

നിർദ്ദേശിക്കപ്പെടാത്ത രേഖ AB യെ $\vec{a}$ യുടെ പിന്തുണയായി അറിയപ്പെടുന്നു.

ദിശയില്ലാത്ത ഒരു സാധാരണ രേഖാഖണ്ഡവും സദിശത്തിനെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന ഒരു രേഖാഖണ്ഡവും തമ്മിൽ വേർതിരിച്ചറിയാൻ, $\overrightarrow{AB}$ അല്ലെങ്കിൽ $\vec{a}$ എന്ന് സദിശത്തിനെയും AB എന്ന് രേഖാഖണ്ഡത്തെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

നിർവ്വചനം 8.4

സദിശത്തിന്റെ ആരംഭബിന്ദു നമ്മൾക്ക് തെരഞ്ഞെടുക്കാൻ സ്വാതന്ത്ര്യമുണ്ടെങ്കിൽ അതിനെ **സ്വതന്ത്ര സദിശം** എന്നു പറയുന്നു. എന്നാൽ ഇത് ഒരു നിർദ്ദിഷ്ട ബിന്ദുവിലേയ്ക്ക് പരിമിതപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ ആ സദിശത്തിനെ **കേന്ദ്രീകരിച്ച സദിശം** എന്നു പറയുന്നു.

സദിശത്തിന്റെ ഗുണനം വരെ നാം സ്വതന്ത്ര സദിശകൾ മാത്രമേ ഉപയോഗിക്കുകയുള്ളൂ. കേന്ദ്രീകൃത സദിശ നേർരേഖകളുടെ സമീകരണം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് പ്രയോജനപ്പെടുത്തുന്നു.

നിർവ്വചനം 8.5

ഒര ആരംഭ സദിശകൾക്ക് **സമാന പ്രാരംഭ ബിന്ദു** ഉണ്ട്. മറുവശത്ത്, ഒരേ അഗ്രബിന്ദുവുള്ള സദിശകളെ ഒരേ **അഗ്രബിന്ദു സദിശം** എന്നു പറയുന്നു.

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 49 15-02-2023 11:54:42

നിർവ്വചനം 8.6

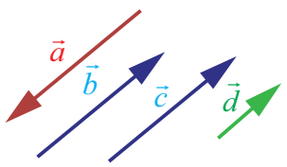
രണ്ടോ അതിലധികമോ സദിശകൾ ഒരേ **നേർരേഖയിലോ അല്ലെങ്കിൽ അതിന് സമാന്തരമായ ദിശയിലോ സദിശകൾ** സഞ്ചരിക്കുന്നവയാണെങ്കിൽ അവയെ സമരേഖീയ സദിശകൾ അഥവാ സമാന്തര സദിശകൾ എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

ഒരേ തലത്തിൽ അല്ലെങ്കിൽ ആ തലത്തിന് സമാന്തര തലത്തിലുള്ള രണ്ടോ അതിലധികമോ സദിശകളെ **ഏകതല സദിശകൾ** എന്നു പറയുന്നു.

നിർവ്വചനം 8.7

രണ്ട് സദിശകൾ ഒരേ ദിശയും ഒരേ വ്യാപ്തിയും ഉള്ളതാണെങ്കിൽ അതിനെ **സമ സദിശകൾ** എന്നു പറയുന്നു.

സമ സദിശകൾ സമ ആരംഭബിന്ദുവും, അവസാന ബിന്ദുവും ഉണ്ടായിരിക്കണമെന്നില്ല. ഉദാഹരണത്തിന് ചിത്രം 8.2 ൽ $\vec{b}$ കൂടാതെ $\vec{c}$ എന്നീ സദിശകൾ ഒരേ ദിശയിലുള്ളതും ഒരേ നീളവും ഉള്ളതിനാൽ അവ സമസദിശകളാണ്. എന്നാൽ $\vec{a}$ കൂടാതെ $\vec{b}$ എന്നീ സദിശകൾ സമമല്ല. കാരണം അവ ഒരേ നീളമുള്ളതായിരുന്നാലും അവ വ്യത്യസ്ത ദിശയിലാണ്. $\vec{c}$ കൂടാതെ $\vec{d}$ എന്നീ സദിശകൾ ഒരേ ദിയിലാണെങ്കിലും സമമല്ല. കാരണം അവയുടെ നീളങ്ങൾ തുല്യമല്ല.



ചിത്രം 8.2

നിർവ്വചനം 8.8

പൂജ്യസദിശകൾ എന്നത് വ്യാപ്തം പൂജ്യവും അനിയന്ത്രിതമായ ദിശയും ഉള്ള ഒരു സദിശമാണ് ഇതിനെ $\vec{0}$. എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

അതായത് ആരംഭബിന്ദുവും അവസാന ബിന്ദുവും തുല്യമായിരുന്നാൽ അവയെ പൂജ്യ സദിശം എന്നു പറയുന്നു.

ഒരു പൂജ്യസദിശത്തിന്റെ പ്രാരംഭ ബിന്ദുവും അവസാന ബിന്ദുവും ഒന്നു തന്നെയാണെന്ന് കാണാൻ കഴിയുന്നു. പൂജ്യ സദിശത്തെ **ശൂന്യസദിശം** അല്ലെങ്കിൽ **ശൂന്യമായ സദിശം** എന്നും പറയുന്നു.

വ്യാപ്തം 1 ഉള്ള സദിശത്തെ **ഏകാങ്ക സദിശം** എന്നു പറയുന്നു. $\vec{a}$ യുടെ ദിശയിലുള്ള ഏകാങ്ക സദിശകൾ $\hat{a}$ എന്നു സൂചിപ്പിക്കുന്നു. (ഇതിനെ 'a cap' അല്ലെങ്കിൽ 'a hat' എന്ന് വായിക്കണം). അതായത് $|\hat{a}| = 1.$ ആയിരിക്കും

അനന്തമായ ദിശകൾ ഉള്ളതിനാൽ അനന്തമായ ഏകാങ്ക സദിശകളും ഉണ്ടെന്ന് അറിയുക. ഓരോ ദിശയ്ക്കും ആ ദിശയിലേയ്ക്ക് ഓരോ ഏകാങ്ക സദിശം ഉണ്ട്.

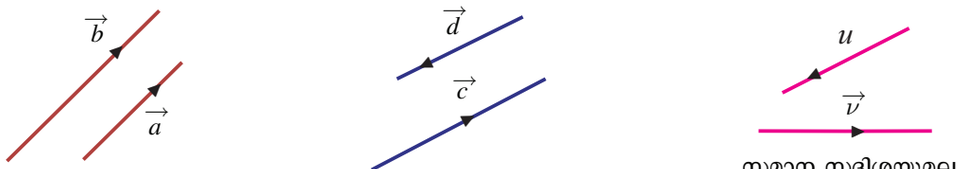
ഓരോ പൂജ്യമല്ലാത്ത സദിശത്തെയും $\vec{a}$ സദിശത്തിന്റെ ദിശയിലുള്ള ഏകാങ്ക സദിശത്തെയും ഒരു അദിശയുടെ ഗുണഫലമായി എഴുതാം. ആ അദിശയായത് സദിശത്തിന്റെ വ്യാപ്തിയാകും.

അതായത് ഒരു സദിശം $\vec{a}$ യിനെ $\vec{a} = |\vec{a}|\,\hat{a}$ എന്ന് എഴുതാം. ഇവിടെ $\hat{a}$ എന്നത് $\vec{a}$ യുടെ ദിശയിൽ ഉള്ള ഏകാങ്ക വെക്ടർ ആകുന്നു.

അതായത് പൂജ്യമല്ലാത്ത $\vec{a}$ ക്കു $\hat{a} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ ആകുന്നു.

നിർവ്വചനം 8.9

രണ്ട് സദിശങ്ങൾ ഒരേ ദിശയിൽ ആയാൽ അവയെ **സമാന സദിശകൾ** എന്നു പറയുന്നു. രണ്ട് സദിശകൾ എതിർ ദിശയിലായാൽ അവയെ **വ്യത്യസ്ത സദിശകൾ** എന്നു പറയുന്നു.



സമാന സദിശകൾ വ്യത്യസ്ത സദിശകൾ സമാന സദിശയുമല്ല വ്യത്യസ്ത സദിശയുമല്ല

ചിത്രം 8.3

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 50 15-02-2023 11:54:43

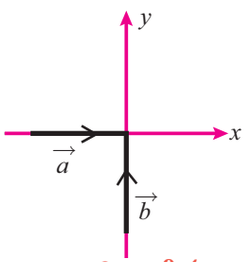
രണ്ട് സദിശകൾ സമാന സദിശകൾ അല്ലെങ്കിൽ വ്യത്യസ്ത സദിശകൾ ആണെങ്കിൽ, ആ സദിശകളെ നിർദ്ദേശിക്കപ്പെടാത്ത രേഖകൾ (പിന്തുണ) പരസ്പരം സമാന്തരമായിരിക്കും. രണ്ട് സദിശകൾ ഒന്നുകിൽ സമാന സദിശകൾ ഇല്ലെങ്കിൽ വ്യത്യസ്ത സദിശകൾ ആയിരിക്കും.

8.4 സദിശകളുടെ ബീജഗണിതം

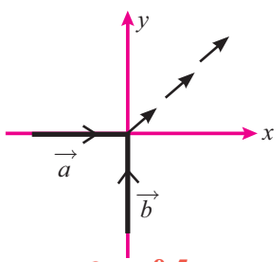
വാസ്തവിക സംഖ്യകളിലെ അടിസ്ഥാന ബീജഗണിത ക്രിയകളും മാട്രിക്സും നമ്മൾ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. അതുപോലെ സദിശകളിലുള്ള ചില ക്രിയകൾ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. രണ്ട് സദിശകളുടെ സങ്കലനം, വ്യവകലനം ഒരു അദിശ കൊണ്ടുള്ള ഗുണനം എന്നിവയെപ്പറ്റി പഠിക്കാം.

8.4.1 സദിശകളുടെ സങ്കലനം

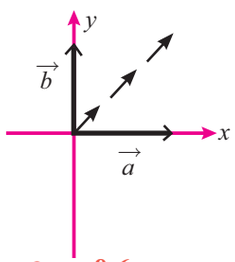
സദിശകളുടെ സങ്കലനത്തെ രണ്ട് രീതിയിൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. കൂടാതെ അവ രണ്ടും തുല്യ മാണെന്നു കാണാം. ഒരു യൂണിറ്റ് ഭാരമുള്ള ഒരു വസ്തു $(0,0)$ എന്ന മൂലബിന്ദുവിൽ $\mathbb{R}^2$ ൽ സ്ഥാപി ക്കുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ. വസ്തുവിന്റെ വലിപ്പം ഒരു ബിന്ദു ആണെന്ന് വിചാരിക്കുക. രണ്ട് ബലങ്ങൾ $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നീ യൂണിറ്റ് വ്യാപ്തി ഒരു ബിന്ദുവിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്നു എന്ന് വിചാരിക്കുക. അതിൽ ഒന്ന് x-അക്ഷ ത്തിന്റെയും മറ്റൊന്ന് y-അക്ഷത്തിന്റെ പോസിറ്റീവ് ദിശയിൽ പ്രവർത്തിക്കുന്നു എന്നും അനുമാനിക്കുക. (ചിത്രം 8.4 കാണുക). ഇപ്പോൾ ആ വസ്തു X അക്ഷത്തിൽ നിന്ന് 45° കോണളവിൽ ചിത്രം 8.5 ൽ കാണുന്നതുപോലെ സഞ്ചരിക്കും എന്ന് കാണാം. $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്ന ബലങ്ങൾ $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്ന സദിശകളാൽ ചിത്രം 8.6 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. ബലങ്ങൾ ചിത്രം 8.4 ൽ വസ്തുവിനെ തള്ളുന്നതായും ചിത്രം 8.6 ൽ ആ വസ്തുവിനെ വലിക്കുന്നതായും കരുതുക.



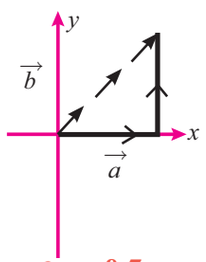
ചിത്രം 8.4



ചിത്രം 8.5



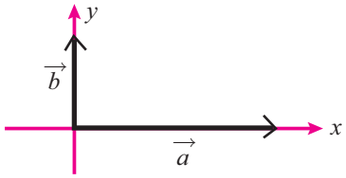
ചിത്രം 8.6



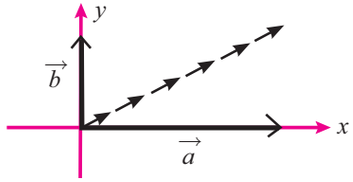
ചിത്രം 8.7

ഇതിൽ നിന്നും നമുക്ക് "ഇത് എത്ര ദൂരം സഞ്ചരിക്കും" എന്ന സംശയം വരും. ബലങ്ങൾ ഒന്നിനു പുറകേ ഒന്നായി പ്രവർത്തിച്ചാൽ ബലം $\vec{a}$ വസ്തുവിനെ x-അക്ഷത്തിന്റെ ദിശയിൽ ഒരു യൂണിറ്റ് ദൂരം സഞ്ചരിക്കും. ഇപ്പോൾ ആ വസ്തു $(0, 0)$ ൽ നിന്ന് $(1, 0)$ എന്ന ബിന്ദുവിലേക്ക് മാറുന്നു. ഇപ്പോൾ $\vec{b}$ എന്ന ബലം ആ വസ്തുവിനെ ലംബ ദിശയിൽ മുകളിലേക്ക് തള്ളുന്നു. ഇപ്പോൾ ആ വസ്തു $(1, 0)$ ൽ നിന്ന് $(1, 1)$ എന്ന ബിന്ദുവിലേയ്ക്ക് നീങ്ങുന്നു (ചിത്രം 8.7 കാണുക). അതായത് രണ്ടു സദിശകളുടെ സങ്കലനം എന്നത് $(0, 0), (1, 1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ നിളത്തിനു തുല്യമായി ആ ദിശയിൽ ഇരിക്കും.

ഇനി $\vec{a}$ യുടെ വ്യാപ്തി 1 നു പകരം 2 എന്നെടുക്കുക (ചിത്രം 8.8 കാണുക). ചിത്രം 8.9 ൽ ഉള്ളതു പോലെ x-അക്ഷത്തിന് അടുത്തായി സഞ്ചരിക്കുന്നു. ഇപ്പോൾ ആ വസ്തു $(2,1)$ എന്ന ബിന്ദുവിലേയ്ക്ക് സഞ്ചരി ക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് ആ രണ്ട് സദിശകളുടെ സങ്കലനം $(0,0), (2,1)$ എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ നീളവും അത് സഞ്ചരിക്കുന്ന ദിശയും ആയിരിക്കും. "$(0,0)$ മുതൽ $(2,1)$" വരെ.



ചിത്രം 8.8

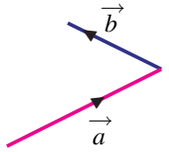


ചിത്രം 8.9

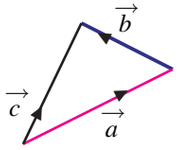
ഈ രണ്ടു സാഹചര്യത്തിലും ബലങ്ങൾ പരസ്പരം ലംബദിശയിൽ ആണുള്ളത്. പക്ഷേ ബലങ്ങൾ ലംബദിശയിലായിരിക്കേണ്ട ആവശ്യകത ഇല്ല. ഒന്നിനു പുറകേ ഒന്നായി പ്രവർത്തിക്കുന്ന ബലങ്ങൾ കൂട്ടുവാൻ സാധിക്കും. ഉദാഹരണമായി $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നീ ബലങ്ങൾ ചിത്രം 8.10 ൽ കാണുന്നതുപോലെ വിചാരിക്കുക.

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 51 15-02-2023 11:54:43

ചിത്രം 8.10



ചിത്രം 8.11

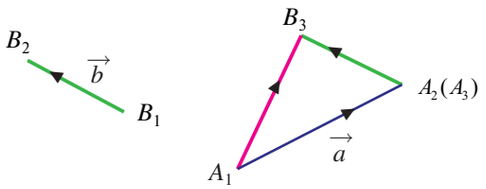


ചിത്രം 8.12

$\vec{b}$ ന്റെ അവസാന ബിന്ദു $\vec{a}$ ന്റെ ആദ്യബിന്ദു ആയി വരത്തക്കവിധം (ചിത്രം 8.11) ചേർത്ത് വയ്ക്കുക. അവയുടെ തുക ചിത്രം 8.12 ൽ കാണുന്നതുപോലെ ലഭിക്കുന്നു. ഇനി രണ്ട് സദിശങ്ങളുടെ നിർവ്വചനം കാണാം.

സദിശകളുടെ സങ്കലനത്തിന്റെ ത്രികോണ നിയമം

$\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നീ രണ്ട് സദിശകൾ എടുക്കുക. A_1, B_1 എന്നിവ $\vec{a}$, $\vec{b}$ യുടെ ആരംഭ ബിന്ദുക്കളും A_2, B_2 എന്നിവ $\vec{a}$, $\vec{b}$ യുടെ അവസാന ബിന്ദുക്കളുമാണെന്ന് എടുക്കണം.



ചിത്രം 8.13

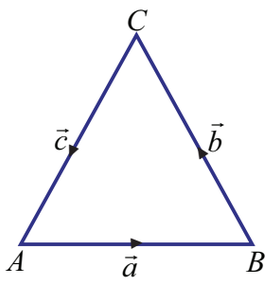
A_3B_3 യെ B_1B_2 ന് സമാന്തരമായി $A_3B_3 = B_1B_2$ ആകത്തക്ക വിധം വരയ്ക്കുക. $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നിവയുടെ തുക $\overrightarrow{A_1B_3}$ എന്ന സദിശത്തെ കൊണ്ട് $\vec{a}+\vec{b}$ നെ താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന വിധത്തിൽ നിർവ്വചിക്കാം,

നിർവ്വചനം 8.10 (സദിശ സങ്കലനത്തിന്റെ ത്രികോണ നിയമം)

ക്രമത്തിൽ എടുക്കുന്ന ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ടു വശങ്ങളാൽ രണ്ട് സദിശകളെ വ്യാപ്തിയിലും ദിശയിലും പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അവയുടെ ആകെ തുക വിപരീത ക്രമത്തിൽ എടുത്ത മൂന്നാം വശത്താൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു.

ഫലം 8.1

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ക്രമമായി എടുത്ത മൂന്ന് വശങ്ങളാൽ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ആയിരിക്കും.



ചിത്രം 8.14

തെളിവ്

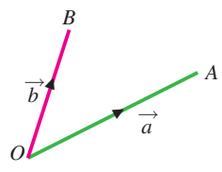
$\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{BC} = \vec{b}$ കൂടാതെ $\overrightarrow{CA} = \vec{c}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഇപ്പോൾ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

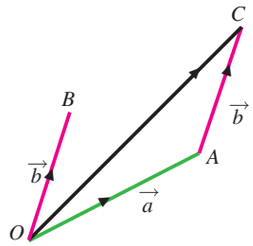
അങ്ങനെ ഫലം തെളിയിച്ചു. □

സദിശ സങ്കലനത്തിന്റെ സമാന്തരിക നിയമം

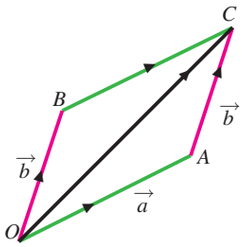
$\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നിവ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് സദിശം എന്നെടുക്കുക. അവയുടെ ആരംഭ ബിന്ദു ഒന്നായി (O) എന്ന ബിന്ദു എടുക്കുക. നിർവ്വചനം 8.7 ഉപയോഗിച്ച് തുക കാണുക. A, B എന്നിവ $\vec{a}$, $\vec{b}$ ന്റെ അവസാന ബിന്ദുക്കളായി എടുക്കുക. (ചിത്രം 8.15) $\vec{a}+\vec{b}$ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് AC യെ OB ക്കു സമാന്തരമായി $OB = AC$ ആകത്തക്കവിധം വരയ്ക്കുക. ഇവിടെ $\overrightarrow{OC}$ ഇവയുടെ തുകയാകുന്നു. (ചിത്രം 8.16). ഇവിടെ OA, BC എന്നിവ സാമാന്തരങ്ങളായിരിക്കും. (ചിത്രം 8.17).



ചിത്രം 8.15



ചിത്രം 8.16



ചിത്രം 8.17

അതായത് ഒരേ ആരംഭ ബിന്ദുയുള്ള രണ്ട് സദിശകളുടെ തുക ആ രണ്ട് സദിശകൾ സമീപങ്ങളാകത്തക്കവിധം വരയ്ക്കപ്പെടുന്ന സാമാന്തരികത്തിന്റെ വികർണ്ണത്തിന്റെ അളവായിരിക്കും. ഒരേ ആരംഭ

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 52 15-02-2023 11:54:46

ബിന്ദുയില്ലാത്ത സദിശകളായാൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു സദിശത്തിനെ സൗകര്യപ്രദമായി നീക്കി ഒരേ ആരംഭ ബിന്ദു ഉള്ളതാക്കി മാറ്റി നിർവ്വചനം 8.11 ഉപയോഗിക്കാം.

O എന്ന ഏക ആരംഭ ബിന്ദു ഉള്ള രണ്ട് സദിശകൾ $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നെടുക്കുക. അവയുടെ അഗ്ര ബിന്ദുക്കൾ A, B എന്നെടുക്കുക.

$OACB$ എന്ന സാമാന്തരികം പൂർത്തിയാക്കുക. $\vec{a}$, $\vec{b}$ ന്റെ തുക $\overrightarrow{OC}$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെടുന്നു

നിർവ്വചനം 8.11 (സദിശ സങ്കലനത്തിന്റെ സാമാന്തരിക നിയമം)
$OABC$ എന്ന സാമാന്തരികത്തിൽ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ എന്നിവയെ സമീപ വശങ്ങളായി സൂചിപ്പിച്ചാൽ അതിന്റെ വികർണ്ണം അവയുടെ തുക ആയിരിക്കും. $\overrightarrow{OC}$ അവയുടെ തുകയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു (ചിത്രം. 8.17).

സദിശത്തിന്റെ സങ്കലനത്തിന് രണ്ടു വിധത്തിലുള്ള നിർവ്വചനങ്ങളായിരുന്നാലും രണ്ടും ഒന്നായിരിക്കും. നിർവ്വചനം 8.10 എന്നത് സദിശ സങ്കലനത്തിന്റെ ത്രികോണ നിയമവും നിർവ്വചനം 8.11 എന്നത് സദിശ സങ്കലനത്തിന്റെ സാമാന്തരിക നിയമവും ഒരേ രീതിയിലായിരിക്കും:

ത്രികോണം ABC യിൽ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ എന്നിവ രണ്ടു വശങ്ങളെ സൂചിപ്പിച്ചാൽ $\overrightarrow{AC}$ എന്ന മൂന്നാമത്തെ വശം അവയുടെ തുകയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

8.4.2 രണ്ട് സദിശകളുടെ വ്യവകലനം

നമുക്ക് രണ്ട് സദിശകളുടെ വ്യവകലനം എങ്ങനെ കണ്ടുപിടിക്കാമെന്ന് കാണാം.

നിർവ്വചനം 8.12
$\vec{a}$ ഏതെങ്കിലും ഒരു സദിശം എന്നിരിക്കട്ടെ $\vec{a}$ യുടെ വിപരീതം $-\vec{a}$ എന്ന് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. $\vec{a}$ ന്റെ വ്യാപ്തിയും $\vec{a}$ യുടെ ദിശയ്ക്ക് വിപരീത ദിശയും ഉള്ള സദിശം എന്നാണ് നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നത്.

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, എങ്കിൽ $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$ എന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

രണ്ട് സദിശകൾ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസത്തിന്റെ ജ്യാമിതീയ വ്യാഖ്യാനം

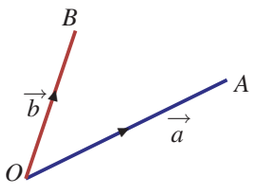
$\vec{a}$ എന്ന സദിശത്തിന്റെ ആരംഭ ബിന്ദു P എന്നും അവസാന ബിന്ദു Q എന്നും എടുക്കുക. $\vec{b}$ എന്ന സദിശത്തിന്റെ ആരംഭ ബിന്ദു Q എന്നും അവസാന ബിന്ദു P എന്നും എടുക്കുക. ഈ സദിശങ്ങളുടെ വ്യാപ്തി രേഖാഖണ്ഡം P, Q ന്റെ നീളത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് അവയ്ക്ക് ഒരേ വ്യാപ്തിയാണുള്ളത്. എന്നാൽ ദിശകൾ എതിരായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് $\vec{b}$ എന്നത് $-\vec{a}$ യ്ക്കു തുല്യമായിരിക്കും.

$\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നിവ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് സദിശം ആയാൽ $\vec{a} - \vec{b}$ എന്നത് $\vec{a}, -\vec{b}$ ന്റെ തുക $\vec{a} + (-\vec{b})$ ആയിരിക്കും.

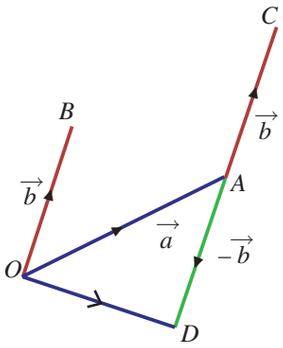
ഇതിനെ ജ്യാമിതീയ രൂപത്തിൽ അടയാളപ്പെടുത്തി നോക്കാം. $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നിവ യഥാക്രമം $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ എന്നിവയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. (ചിത്രം 8.18) AC യെ OB ക്കു സമാന്തരമായി $AC = OB$ ആകത്തക്കവിധം വരയ്ക്കുക. ഇപ്പോൾ $\overrightarrow{AC}$ എന്നത് $\vec{b}$ നു തുല്യമായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് $\vec{a} + (-\vec{b}) = \overrightarrow{OD}$ അതായത് $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OD}$ (ചിത്രം 8.19). CA രേഖയെ D വരെ നീട്ടുക. അതിനാൽ $CA = AD$. അങ്ങനെ $\overrightarrow{AD}$ $-\vec{b}$ യ്ക്കു സമമാണ്. ചിത്രം *8.20* $\vec{a} - \vec{b}$ ആകും.

$OACB$ എന്ന സാമാന്തരികത്തെ പൂർത്തിയാക്കിയാൽ അതിൽ നിന്നും BA, OD എന്നിവ സമാന്തരവും തുല്യ നീളമുള്ളതായും കാണാം. അതുകൊണ്ട് $\overrightarrow{BA}$ നെ $\vec{a} - \vec{b}$ എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. അതിൽ നിന്നും $OACB$ എന്ന സാമാന്തരികത്തിന്റെ വശങ്ങൾ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ എന്നിവ $\vec{a}$, $\vec{b}$ സദിശകളെ സൂചിപ്പിച്ചാൽ വികർണ്ണം $\overrightarrow{BA}$ എന്നത് $\vec{a} - \vec{b}$. നെ സൂചിപ്പിക്കും. (ചിത്രം 8.20 കാണുക). $\overrightarrow{OC}$ എന്നത് $\vec{a} + \vec{b}$ ആകുന്നു എന്ന് നാം നേരത്തെ പഠിച്ചുവല്ലോ.

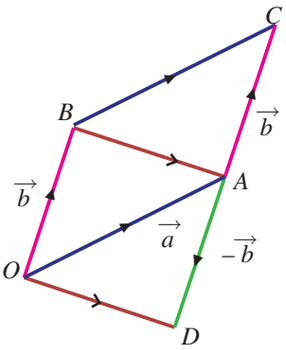
Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 53 15-02-2023 11:54:47



ചിത്രം 8.18



ചിത്രം 8.19



ചിത്രം 8.20

അതായത് $\vec{a}, \vec{b}$ **എന്നിവ സാമാന്തരികത്തിന്റെ രണ്ട് സമീപ വശങ്ങളെ സൂചിപ്പിച്ചാൽ** $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ എന്നിവ അതിന്റെ വികർണ്ണത്തെ സൂചിപ്പിക്കും.

8.4.3 സദിശത്തിന്റെ അദിശ ഗുണനം

ഒരു അദിശം കൊണ്ട് ഒരു സദിശത്തിനെ ഗുണിക്കുന്നത് എങ്ങനെ എന്ന് നോക്കാം.

$\vec{a}$ ഒരു സദിശവും m ഒരു അദിശയും എന്നിരിക്കട്ടെ തുടർന്ന് സദിശം $m\vec{a}$ എന്നത് $\vec{a}$ അദിശ m ന്റെ **അദിശ മടങ്ങ്** എന്നു പറയുന്നു.

m പൂജ്യം എങ്കിൽ $m\vec{a}$ യുടെ വ്യാപ്തി 0 ആകും. അതുകൊണ്ട് $m\vec{a}$ എന്നത് പൂജ്യസദിശം ആകും. m ഒരു ധനസംഖ്യ ആണെങ്കിൽ $\vec{a}$ കൂടാതെ $m\vec{a}$ എന്നിവ ഒരേ ദിശയെ കുറിക്കുന്നതായും m ഋണ സംഖ്യ ആണെങ്കിൽ $\vec{a}$ കൂടാതെ $m\vec{a}$ എന്നിവ വിപരീത ദിശയെ കുറിക്കുന്നതായിരിക്കും. അങ്ങനെ m ധനസംഖ്യയാണെങ്കിൽ $\vec{a}$ കൂടാതെ $m\vec{a}$ എന്നിവ സമാന സദിശങ്ങളും m ഋണസംഖ്യയാണെങ്കിൽ വ്യത്യസ്ത സദിശകളും ആയിരിക്കും. $m\vec{a}$ യുടെ വ്യാപ്തി $|m\vec{a}| = |m||\vec{a}|$.

നിർവ്വചനം 8.13

രണ്ട് സദിശകൾ $\vec{a}$ കൂടാതെ $\vec{b}$ **സമാന്തരം** എന്നു പറയണമെങ്കിൽ $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, ഇവിടെ λ ഒരു അദിശ ആയിരിക്കണം. $\lambda \neq 0$, ആണെങ്കിൽ, അവ ഒരേ ദിശയിലായിരിക്കും. $\lambda < 0$ ആണെങ്കിൽ അവ എതിർ ദിശയിലായിരിക്കും.

8.4.4 ചില ഗുണങ്ങളും ഫലങ്ങളും

ഏതെങ്കിലും രണ്ട് സദിശകൾ $\vec{a}$ കൂടാതെ $\vec{b}$ യും അദിശകൾ m കൂടാതെ n, ഉം ആയിരുന്നാൽ

(i) $m(n\vec{a}) = mn(\vec{a}) = n(m\vec{a})$

(ii) $(m+n)\vec{a} = m\vec{a} + n\vec{a}$

(iii) $m(\vec{a}+\vec{b}) = m\vec{a} + m\vec{b}$

ഫലം 8.2

സദിശകളുടെ സങ്കലനം ഒരു സംയോജനം ആണ്.

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ മൂന്ന് സദിശകളാണെങ്കിൽ

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}).$$

ഫലം 8.3

ഏതെങ്കിലും സദിശം $\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{a} = \vec{a}$ യ്ക്ക്.

ഫലം 8.4

ഏതെങ്കിലും സദിശം $\vec{a}$, $\vec{a}+(-\vec{a}) = (-\vec{a})+\vec{a} = \vec{0}$. യ്ക്ക്

ഇതിൽനിന്ന് ഓരോ സദിശത്തിനും സങ്കലന വ്യൂൾക്രമം ഉണ്ട്.

ഫലം 8.5

സദിശകളുടെ സങ്കലനം ക്രമ വിനിമയമാണ്.

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 54 15-02-2023 11:54:48

തെളിവ്

$\vec{a}$ കൂടാതെ $\vec{b}$ രണ്ട് സദിശകൾ ആണെന്നിരിക്കട്ടെ $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

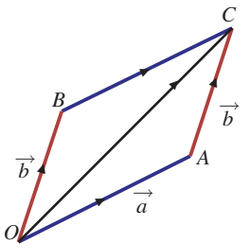
$\vec{a}, \vec{b}$ സമീപ വശങ്ങളായുള്ള $OACB$ എന്ന സാമാന്തരികം പൂർത്തിയാക്കുക. $\overrightarrow{OB}$ കൂടാതെ $\overrightarrow{AC}$ എന്നീ സദിശകൾക്ക് ഒരേ ദിശയും തുല്യ വ്യാപ്തിയുമാണുള്ളത്. അതുകൊണ്ട് $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AC}$ അങ്ങനെ

$$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC}.$$

അതുപോലെ, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC}$,

$$\vec{b} + \vec{a} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}.$$

അങ്ങനെ, $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.



ചിത്രം 8.21

സങ്കലനത്തിന്റെ ബഹുഭുജ നിയമം

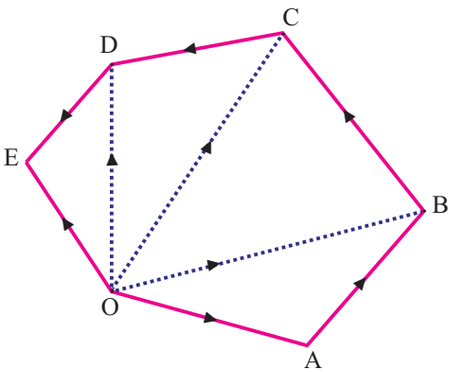
ചിത്രം 8.22 ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}$ കൂടാതെ $\overrightarrow{DE}$ എന്നിവ അഞ്ച് വെക്ടറുകളാണെന്നിരിക്കട്ടെ.

ഓരോ സദിശവും അതിന്റെ മൂന്നാമത്തെ സദിശത്തിന്റെ അവസാന ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് വരച്ചതാണെന്ന് നമുക്ക് ചിത്രത്തിൽ നിന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. ത്രികോണ നിയമം അനുസരിച്ച്,

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} \;;\; \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}$$

$$\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} \;;\; \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE}$$

അങ്ങനെ, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OE}$.



ചിത്രം 8.22

അതിനാൽ ആദ്യത്തെ സദിശത്തിന്റെ ആരംഭ ബിന്ദുവിൽ നിന്ന് അവസാന സദിശത്തിന്റെ അവസാന ബിന്ദുവിലേയ്ക്കു ചേരുന്ന രേഖ എല്ലാ സദിശകളുടെയും ആകെ തുകയാണ്. ഇതിനെ സദിശങ്ങളുടെ **സങ്കലനത്തിന്റെ ബഹുഭുജ നിയമം** എന്നു പറയുന്നു.

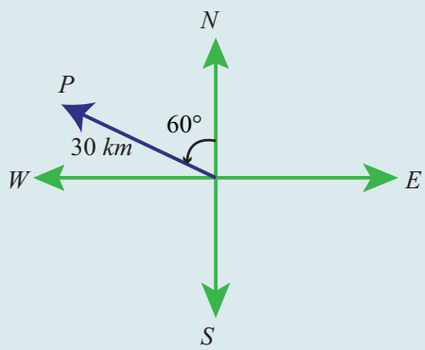
ഉദാഹരണം 8.1

സ്ഥാനമാറ്റം ഗ്രാഫ് രൂപത്തിൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുക

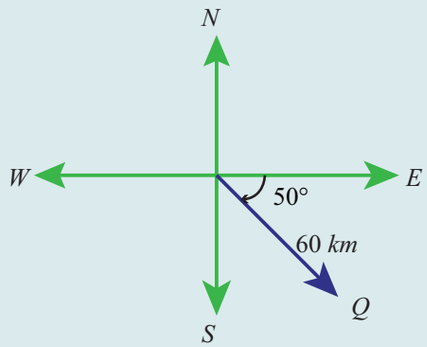
(i) 30 കി.മീ 60° പടിഞ്ഞാറ് നിന്ന് വടക്ക്

(ii) 60 കി.മീ 50° തെക്ക് നിന്ന് കിഴക്ക്.

നിർദ്ധാരണം



ചിത്രം 8.23



ചിത്രം 8.24

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 55 15-02-2023 11:54:49

ഉദാഹരണം 8.2

$\vec{a}$ കൂടാതെ $\vec{b}$ എന്നീ സദിശകൾക്ക് ഒരു ക്രമ ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ രണ്ട് സമീപ വശങ്ങളാണെങ്കിൽ അതിന്റെ മറ്റ് വശങ്ങളെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന സദിശകളെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

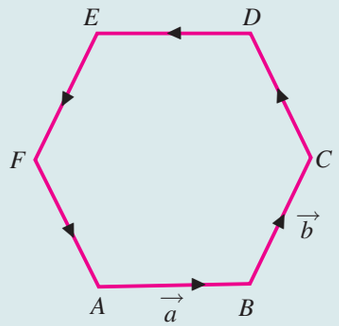
A,B,C,D,E,F എന്നിവ ഒരു ക്രമ ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളായിരിക്കട്ടെ.

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ കൂടാതെ $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ക്രമ ഷഡ്ഭുജത്തെ കുറിച്ചുള്ള താഴെ പറയുന്ന വസ്തുക്കൾ ഇവിടെ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

(i) AB, CF കൂടാതെ ED എന്നീ രേഖകൾ സമാന്തരമാണ്. BC, AD കൂടാതെ EF എന്നീ രേഖകളും സമാന്തരമാണ്.

(ii) CF ന്റെ നീളം AB യുടെ രണ്ട് മടങ്ങാണ്. കൂടാതെ AD യുടെ നീളം BC യുടെ രണ്ട് മടങ്ങാണ്.



ചിത്രം 8.25

AB കൂടാതെ DE എന്നീ രേഖകൾ സമാന്തരവും, തുല്യ നീളവും എതിർ ദിശയിൽ ഉള്ളതും ആയതുകൊണ്ട്,

$$\overrightarrow{DE} = -\vec{a}\ .$$

AB കൂടാതെ CF എന്നീ രേഖകൾ സമാന്തരവും, എതിർദിശയിൽ ഉള്ളതും ആയതുകൊണ്ട്,

$$\overrightarrow{CF} = 2\vec{a}.$$

അതുപോലെ, $\overrightarrow{EF} = -\vec{b}$ and $\overrightarrow{AD} = 2\vec{b}$.

കൂടാതെ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ആയതുകൊണ്ട്

$$\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}.$$

കൂടാതെ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ ആയതുകൊണ്ട്

$$\vec{a} + \vec{b} + \overrightarrow{CD} = 2\vec{b}.$$

അങ്ങനെ $$\overrightarrow{CD} = 2\vec{b} - (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{b} - \vec{a}.$$

അവ്വിധം $\overrightarrow{FA} = -\overrightarrow{CD}$, ആയതുകൊണ്ട്

$$\overrightarrow{FA} = \vec{a} - \vec{b}.$$

അതിനാൽ തന്നിട്ടുള്ള $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ കൂടാതെ $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, ഉപയോഗിച്ച് ക്രമ ഷഡ്ഭുജത്തിന്റെ മറ്റ് വശങ്ങളായ $\overrightarrow{CD} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{DE} = -\vec{a}, \overrightarrow{EF} = -\vec{b}$ കൂടാതെ $\overrightarrow{FA} = \vec{a} - \vec{b}$ എന്നു ലഭിച്ചു.

8.5 സ്ഥാന സദിശം

നിർവ്വചനം 8.14

O യെ കേന്ദ്രമായി എടുക്കുക. കൂടാതെ P എന്ന ഒരു ബിന്ദു (തലത്തിലോ അല്ലെങ്കിൽ ത്രിമാന സ്ഥലത്തിലോ) കുറിക്കുക. അപ്പോൾ $\overrightarrow{OP}$ എന്നതിനെ O യെ ആശ്രയിച്ചുള്ള P യുടെ **സ്ഥാന സദിശം** എന്ന് വിളിക്കാവുന്നതാണ്.

സദിശത്തിനും സ്ഥാനസദിശത്തിനും ഇടയിലുള്ള ബന്ധത്തെ താഴെ കാണുന്ന രീതിയിൽ നിർവ്വചിക്കാവുന്നതാണ്.

ഫലം 8.6

O യെ കേന്ദ്രമായി എടുക്കുക, A, B എന്നിവ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവായി കരുതുക. അപ്പോൾ. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ ആകുന്നു. ഇവിടെ, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ എന്നിവ A, B യുടെ സ്ഥാനസദിശങ്ങളാകുന്നു.

തെളിവ്

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. എന്ന് നമുക്ക് അറിയാവുന്നതാണ് ■

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 56 15-02-2023 11:54:49

സിദ്ധാന്തം 8.1 (വിഭജന സൂത്രവാക്യം-ആന്തരികമായ വിഭജനം)

O യെ കേന്ദ്രമായെടുക്കുകയും A, B എന്നിവയെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കളായും എടുക്കുക. കൂടാതെ P എന്ന ബിന്ദു AB എന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ $m : n$ എന്ന അംശ ബന്ധത്തിൽ ആന്തരികമായി വിഭജിക്കുന്നു എന്ന് കണക്കാക്കുക. $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നിവ A, B എന്നിവയുടെയും സ്ഥാനസദിശവും P യുടെ സ്ഥാനസദിശവുമായിരിക്കുന്നതാണ്.

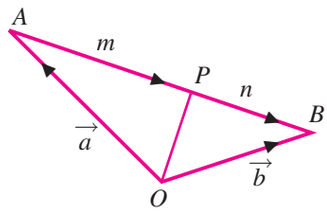
$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{n+m}.$$

തെളിവ്

O കേന്ദ്രബിന്ദുവും A, B എന്നിവയുടെ സ്ഥാനസദിശങ്ങൾ യഥാക്രമം $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നിവയും ആയിരിക്കുന്നതിനാൽ

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ കൂടാതെ $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ആകുന്നു.

$\overrightarrow{OP} = \vec{r}$. എന്ന് കരുതുക



ചിത്രം 8.26

AB എന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ P എന്നത് $m : n$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തരികമായി വിഭജിച്ചാൽ,

$$\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|} = \frac{m}{n}$$

അതിനാൽ $n|\overrightarrow{AP}| = m|\overrightarrow{PB}|$.

$\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{PB}$ എന്നിവ ഒരേ ദിശയിൽ ആയതിനാൽ

$$n\overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{PB}. \qquad (8.1)$$

എന്നാൽ $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \vec{r} - \vec{a}$ കൂടാതെ $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP} = \vec{b} - \vec{r}$

സമവാക്യം (8.1) ൽ ആരോപിച്ചാൽ,

$$n(\vec{r} - \vec{a}) = m(\vec{b} - \vec{r})$$

അതായത്

$$(n+m)\vec{r} = n\vec{a} + m\vec{b}.$$

അതായത് $\overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{n+m}$ ആകുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 8.2 വിഭജന സൂത്രം - ബാഹ്യവിഭജനം (തെളിവില്ലാതെ)

O യെ കേന്ദ്രമാക്കി, A, B എന്നിവയെ ഏതെങ്കിലും രണ്ടു ബിന്ദുക്കളായും എടുക്കുക. P എന്ന ബിന്ദു AB എന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ $m : n$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ബാഹ്യമായി വിഭജിക്കുന്നു എന്നു കരുതുക. $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവ A, B എന്നിവയുടെ സ്ഥാനസദിശമാവുകയും, P യുടെ സ്ഥാനസദിശമാവുന്നു $\overrightarrow{OP}$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{n\vec{a} - m\vec{b}}{n-m}.$$

കുറിപ്പ് 8.1

$m = n = 1$ എന്ന് സിദ്ധാന്തം 8.1 ൽ ആരോപിച്ചാൽ A, B എന്നിവയെ യോജിക്കുന്ന രേഖയുടെ കേന്ദ്ര ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശം $\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ ആകും. ഇവിടെ $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നിവ A, B എന്നിവയുടെ സ്ഥാനസദിശമാകും. മുകളിൽ പറഞ്ഞ സിദ്ധാന്തത്തിൽ നിന്ന് മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ ഒരേ നേർരേഖയിൽ ആയിരിക്കും എന്നുള്ള നിബന്ധനയിൽ എത്തിച്ചേരാവുന്നതാണ്.

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 57 15-02-2023 11:54:50

ഫലം 8.7

A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനസദിശങ്ങൾ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ എന്നിവ ഒരേ നേർരേഖയിൽ ആയിരിക്കണമെങ്കിൽ ആവശ്യമായ നിബന്ധന എന്നത് *x, y, z* എന്ന പൂർണ്ണ സംഖ്യകൾ എല്ലാം തന്നെ പൂജ്യമല്ലാതിരിക്കുകയും,

$x+y+z=0$ യും കൂടാതെ $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{0}$. യും ആകണം എന്ന രീതിയിൽ ആയിരിക്കണം.

ഉദാഹരണം 8.3

A, B എന്നീ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനസദിശകൾ $2\vec{a}+4\vec{b}$ and $2\vec{a}-8\vec{b}$. എന്നിവയാകുന്നു. *A, B* എന്നിവയെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ 1:3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തരികമായും ബാഹ്യമായും വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനസദിശയെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

O യെ കേന്ദ്രമായി എടുക്കുക.

$\overrightarrow{OA} = 2\vec{a}+4\vec{b}$ എന്നും $\overrightarrow{OB}=2\vec{a}-8\vec{b}$. എന്നും തന്നിട്ടുണ്ട്.

C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ *AB* എന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തെ 1 : 3 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തരികമായും ബാഹ്യമായും വിഭജിക്കുന്നു എന്നു കരുതുക. അപ്പോൾ

$$\overrightarrow{OC} = \frac{3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3+1}=\frac{3(2\vec{a}+4\vec{b})+(2\vec{a}-8\vec{b})}{4}=2\vec{a}+\vec{b}.$$

$$\overrightarrow{OD} = \frac{3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}}{3-1}=\frac{3(2\vec{a}+4\vec{b})-(2\vec{a}-8\vec{b})}{2}=2\vec{a}+10\vec{b}$$ എന്നു കിട്ടുന്നു.

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ നിന്നും അതിന്റെ എതിർദിശയിലുള്ള രേഖയിലെ മധ്യബിന്ദുവിനെ യോജിക്കുന്ന രേഖയെ മധ്യരേഖാഖണ്ഡം എന്ന് നാം ഓർമ്മിക്കണം. ആ രേഖയുടെ മധ്യബിന്ദു 2:1 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആ രേഖയെ ആന്തരികമായി വിഭജിക്കുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 8.3

ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മധ്യരേഖാഖണ്ഡങ്ങൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കുന്നു എന്നു തെളിയിക്കുക.

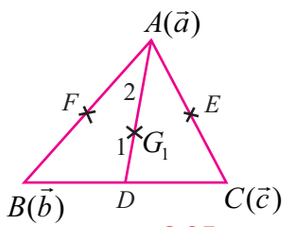
തെളിവ്

ABC എന്ന ത്രികോണത്തിൽ *BC, CA, AB* എന്നീ വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ *D, E, F* എന്നു കരുതുക. നാം *AD, BE, CF* എന്നീ മധ്യരേഖകൾ ഒരു ബിന്ദുവിൽ സന്ധിക്കും എന്ന് തെളിയിക്കണം.

O യെ കേന്ദ്രമാക്കികൊണ്ട് *A, B, C* എന്നീ മൂലബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനസദിശകൾ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നു കരുതുക.

D, E, F എന്നിവയുടെ സ്ഥാനസദിശകൾ യഥാക്രമം

$\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2},\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2},\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$ എന്നിവയാകുന്നു.



ചിത്രം 8.27

AD യെ G_1 എന്ന ബിന്ദു ആന്തരികമായി 2 : 1 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിച്ചാൽ

$$G_1 \text{ ന്റെ സ്ഥാനസദിശം } = \frac{1\overrightarrow{OA}+2\overrightarrow{OD}}{1+2}$$

$$\overrightarrow{OG_1} = \frac{1\vec{a}+2\left(\frac{\vec{b}+\vec{c}}{2}\right)}{3}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} \qquad (1)$$

BE യെ G_2 ആന്തരികമായി 2 : 1 എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ വിഭജിച്ചാൽ

അതുകൊണ്ട്, $\overrightarrow{OG_2} = \frac{1\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OE}}{1+2}$

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 58 15-02-2023 11:54:51

$$\overrightarrow{OG_2} = \frac{1\vec{b} + 2\left(\frac{\vec{c}+\vec{a}}{2}\right)}{3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}. \quad (2)$$

അതുപോലെ CF നെ G_3 എന്നത് $2:1$ എന്ന അംശബന്ധത്തിൽ ആന്തരികമായി വിഭജിച്ചാൽ

$$\overrightarrow{OG_3} = \frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3} \quad (3)$$

(1), (2), (3) എന്നിവയിൽ നിന്നും G_1, G_2, G_3 എന്നിവയുടെ സ്ഥാനസദിശങ്ങൾ തുല്യമാണെന്ന് കാണാവുന്നതാണ്. ആയതിനാൽ അവ വിവിധതരം ബിന്ദുക്കൾ അല്ല. അങ്ങനെയുള്ള ബിന്ദുവിനെ G എടുക്കുക.

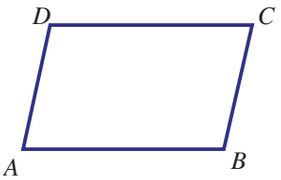
അതുകൊണ്ട് മൂന്ന് മധ്യമങ്ങളും ഒരേ ബിന്ദുവിൽ സംഗമിക്കുന്നു. കൂടാതെ G സംഗമ ബിന്ദുവാണ്.

സിദ്ധാന്തം 8.4

ഒരു ചതുർഭുജം സാമാന്തരികമാകണമെങ്കിൽ അതിന്റെ വിവർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം ഛേദിക്കുന്നവ യായിരിക്കണം.

തെളിവ്

A, B, C, D എന്നിവ ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ ശീർഷങ്ങളും കൂടാതെ AC, BD എന്നിവ വികർണ്ണങ്ങളുമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. O യെ മൂലബിന്ദുവായി കരുതി $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ എന്നിവ A, B, C, D എന്നീ ശീർഷങ്ങളുടെ സ്ഥാനസദിശമാ ണെന്ന് എടുക്കുക.



ചിത്രം 8.28

ചതുർഭുജം $ABCD$ സാമാന്തരികമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. അപ്പോൾ

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} \Rightarrow \vec{b} - \vec{a} = \vec{c} - \vec{d} \Rightarrow \vec{b} + \vec{d} = \vec{a} + \vec{c}$ ആകുന്നു.

എന്നിരുന്നാലും $\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2} = \frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}$.

ഇതിൽ നിന്നും രേഖാഖണ്ഡം AC, BD എന്നിവയുടെ മധ്യബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനസദിശങ്ങൾ ഒരു പോലുള്ളവയായിരിക്കും. അതായത് വികർണ്ണം പരസ്പരം വിച്ഛേദിക്കുന്നു. ഇനിയൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ വികർണ്ണങ്ങൾ പരസ്പരം ഛേദിക്കുന്നു എന്നിരുന്നാൽ വികർണ്ണങ്ങൾ AC, BD എന്നിവയുടെ മധ്യബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനസദിശങ്ങൾ സമമായിരിക്കും. അങ്ങനെ

$\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2} = \frac{\vec{b}+\vec{d}}{2} \Rightarrow \vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d} \Rightarrow \vec{c} - \vec{d} = \vec{b} - \vec{a}$ യും ആകുന്നു.

ഇതിൽ നിന്നും AB, DC എന്നീ രേഖാഖണ്ഡങ്ങൾ സമാന്തരങ്ങളായിരിക്കുമെന്ന് വ്യക്തമാകുന്നു. $\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. യിൽ നിന്നും $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$, $\vec{a} - \vec{d} = \vec{b} - \vec{c}$ എന്ന് കാണാവുന്ന താണ്. അപ്പോൾ AD, BC എന്നിവ സമാന്തരങ്ങളാണെന്ന് തെളിയുന്നു. അതുകൊണ്ട് $ABCD$ ഒരു സമാന്തരികമാകുന്നു.

അഭ്യാസം 8.1

(1) താഴെ കാണുന്ന സ്ഥാനമാറ്റങ്ങളെ ഗ്രാഫ് മുഖേന പ്രതിനിധീകരിക്കുക

(i) 45 സെ.മീ $30°$ കിഴക്കു നിന്ന് വടക്കോട്ട് (ii) 80 കി.മീ $60°$ പടിഞ്ഞാറ് നിന്ന് കിഴക്കോട്ട്

(2) $\vec{a} = \vec{b}$ എന്നത് ഒരു V യുടെ സമാന ബന്ധമാണെങ്കിൽ R എന്നത് V എന്ന ഗണത്തിലെ എല്ലാ സദിശത്തിലും $\vec{a}\ R\ \vec{b}$ ഉൾപ്പെടുന്നു എന്ന് കണക്കാക്കുക.

(3) A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനസദിശങ്ങൾ $\vec{a}$, b എന്നിവയാകുന്നു. എങ്കിൽ രേഖാഖണ്ഡം AB യെ മൂന്ന് സമഭാഗങ്ങളായി വിഭജിക്കുന്ന ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനസദിശങ്ങൾ $\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$ കൂടാതെ $\frac{\vec{b}+2\vec{a}}{3}$ എന്നു തെളിയിക്കുക

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 59 15-02-2023 11:54:52

(4) ABC യുടെ വശങ്ങൾ AB, AC എന്നിവയും അവയുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ D, E എന്നിവയും ആയാൽ $\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{DC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ ആണെന്ന് തെളിയിക്കുക .

(5) ഒരു ത്രികോണത്തിലെ രണ്ട് വശങ്ങളെ തമ്മിൽ ബന്ധിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ മധ്യ ബിന്ദുക്കൾ മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന് സമാന്തരമായിരിക്കുകയും അവയുടെ നീളം മൂന്നാമത്തെ വശത്തിന്റെ നീളത്തിന്റെ പകുതി ആയിരിക്കുകയും ചെയ്യും എന്നു തെളിയിക്കുക.

(6) ഒരു ചതുർഭുജത്തിന്റെ സമീപ വശങ്ങളുടെ മധ്യബിന്ദുക്കളെ തമ്മിൽ യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ ഒരു സാമാന്തരികം രൂപപ്പെടുന്നു എന്നു തെളിയിക്കുക.

(7) $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നിവ ഒരു സാമാന്തരികത്തിന്റെ ഒരു വശത്തേയും ഒരു ശീർഷത്തെയും കുറിക്കുന്നു വെങ്കിൽ അതിന്റെ മറ്റ് വശങ്ങളെയും, മറ്റൊരു ശീർഷത്തെയും കാണുക.

(8) $\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{QO}+\overrightarrow{OR}$ ആയാൽ, P, Q, R എന്നിവ ഒരേ രേഖയിലുള്ള ബിന്ദുക്കൾ ആണെന്ന് കരുതുക.

(9) ത്രികോണം ABC യുടെ വശം BC യും അതിന്റെ മധബിന്ദു D യും ആയാൽ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}.$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

(10) ത്രികോണം ABC യുടെ കേന്ദ്രകം G ആയാൽ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(11) A, B, C എന്നിവ ത്രികോണം A, B, C യുടെ ശീർഷങ്ങൾ ആകുന്നു. D,E, F എന്നിവ യഥാ ക്രമം BC, CA, AB എന്നിവയുടെ മധ്യബിന്ദുക്കൾ ആകുന്നു. എങ്കിൽ $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

(12) ചതുർഭുജം $ABCD$ യുടെ വശങ്ങൾ AC, BD എന്നിവയും അവയുടെ ബിന്ദുക്കൾ E, F എന്നിവയും ആകുന്നു. എങ്കിൽ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=4\overrightarrow{EF}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

8.6 സദിശകളുടെ വിഘടനം

സദിശങ്ങളെ ഏതൊരു നിയന്ത്രിത അളവിലും വിഘടിക്കാവുന്നതാണ്. എന്നിരിക്കിലും നിങ്ങൾ ഇവിടെ ചർച്ചചെയ്യാൻ പോകുന്നത് രണ്ടോ മൂന്നോ അളവുകൾ ഉള്ളവ മാത്രമാകുന്നു. ആദ്യമായി ദ്വിമാന സദിശകളെക്കുറിച്ചാണ് ചർച്ചചെയ്യാൻ പോകുന്നത്.

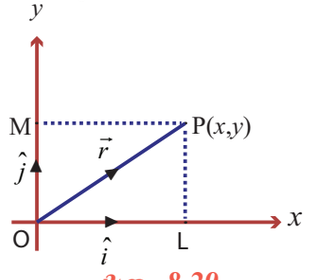
8.6.1 ദ്വിമാന സദിശകളുടെ വിഘടനം

സിദ്ധാന്തം 8.5

മൂലബിന്ദു O ആയിട്ടുള്ള x, y എന്നീ അക്ഷങ്ങളിലെ ധനദിശയെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന യൂണിറ്റ് സദിശകളാണ് $\hat{i}, \hat{j}$ എന്നിവ. ഒരു തലത്തിലെ P എന്ന ബിന്ദുവിലുള്ള സ്ഥാനസദിശം $\overrightarrow{OP}$ ആകുന്നു. അവിടെ $\overrightarrow{OP}$ എന്നത് അനന്യമായതാണ്. അതിനാൽ $\overrightarrow{OP} = x\hat{i}+y\hat{j}$ എന്ന് എഴുതാവുന്നതാണ്. x, y എന്നിവ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ ആകുന്നു. അതിനാൽ $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2+y^2}$ ആകുന്നു.

തെളിവ്

P എന്ന ബിന്ദുവിലെ (x, y) എന്ന് എടുക്കുക. P യിൽ നിന്നും x അക്ഷ ത്തിലേയ്ക്കുള്ള ലംബരേഖയെ L എന്നും y അക്ഷത്തിലേയ്ക്കുള്ള രേഖയെ M എന്നും എടുക്കുക. അതായത് $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{LP}=\overrightarrow{OL}+\overrightarrow{OM}$.



ചിത്രം 8.29

$\hat{i}, \hat{j}$ എന്നിവ യൂണിറ്റ് സദിശകളായതിനാൽ $\overrightarrow{OL}=x\hat{i}$, $\overrightarrow{OM}=y\hat{j}$ ആകുന്നു. അങ്ങനെ $\overrightarrow{OP} = x\hat{i}+y\hat{j}$

ആയാൽ $\overrightarrow{OP}=\vec{r}$, $\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}.$

അതുല്യത തെളിയിക്കാൻ, $x_1\hat{i}+y_1\hat{j}$, $x_2\hat{i}+y_2\hat{j}$ എന്നിവ P എന്ന ഒരേ ബിന്ദുവിന്റെ പ്രതിനിധാനങ്ങളാണ്

$$x_1\hat{i}+y_1\hat{j} = x_2\hat{i}+y_2\hat{j}\,.$$

ഇത് ധ്വനിപ്പിക്കുന്നത് $(x_1-x_2)\hat{i}-(y_2-y_1)\hat{j} = \vec{0} \Rightarrow x_1-x_2=0, y_2-y_1=0.$

മറ്റൊരു തരത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ $x_1=x_2$, $y_1=y_2$ അങ്ങനെ അതുല്യത തെളിയിക്കുന്നതിന്.

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 60 15-02-2023 11:54:53

ത്രികോണം OLP യിൽ, $OP^2 = OL^2 + LP^2$ അതായത് $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

അതുകൊണ്ട്, $|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$\hat{i}$, $\hat{j}$ എന്നിവ x, y എന്നീ അക്ഷത്തിലെ ധനദിശയിലുള്ള യൂണിറ്റ് സദിശങ്ങളാകുന്നു. (6,4) എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാനസദിശത്തെ $6\hat{i} + 4\hat{j}$ എന്നുള്ള ഒരു വഴിയിൽ മാത്രം എഴുതാവുന്നതാകുന്നു.

ഫലം 8.8

$\vec{a}$ യും $\vec{b}$ യും ഒരു തലത്തിലെ സമരേഖീയമല്ലാത്ത രണ്ട് സദിശങ്ങളാകുന്നു. അപ്രകാരം ഒരു തലത്തിലെ ഏതൊരു സദിശത്തിനും എളുപ്പവഴിയിൽ $\vec{a}$ യുടെയും $\vec{b}$ യുടെയും രേഖീയ സമവാക്യരീതിയിൽ എഴുതാവുന്നതാണ്. അങ്ങനെ വരുന്ന ഒരു തലത്തിലെ സദിശത്തെ $l\vec{a} + m\vec{b}$ എന്ന് എഴുതാവുന്നതാണ്. കൂടാതെ l, m എന്നിവ അദിശങ്ങളാകുന്നു.

തെളിവ്

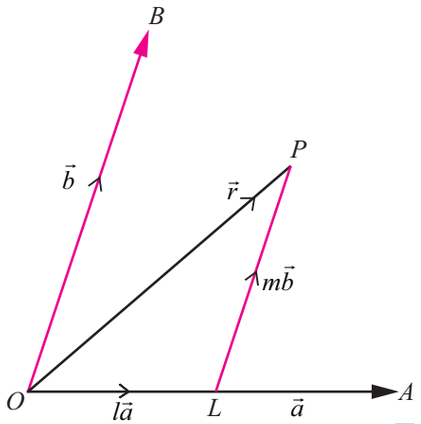
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}, \vec{r}$ എന്നിവ $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്ന തലത്തിലെ സദിശങ്ങളാകുന്നു.

OB യ്ക്ക് സമാന്തരമായി PL വരയ്ക്കുക, l, m എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് ശരിയായി $\overrightarrow{LP} = m\vec{b}$, $\overrightarrow{OL} = l\vec{a}$ എന്ന് എഴുതാവുന്നതാണ്.

അപ്പോൾ $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OL} + \overrightarrow{LP}$.

അതായത്, $\vec{r} = l\vec{a} + m\vec{b}$.

അതുകൊണ്ട് $\vec{r}, \vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവ ഒരേ തലത്തിലുള്ളവയായതിനാൽ $\vec{r}$ എന്നത് $\vec{a}$, $\vec{b}$ യുടെ രേഖീയ സദൃശ്യത്തിലുള്ളതാകുന്നു.



ചിത്രം 8.30

കുറിപ്പ് 8.2

മൂന്ന് സമ രേഖീയമല്ലാത്ത സദിശകൾ ഒരേ തലത്തിൽ ഉൾപ്പെട്ടാൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു സദിശം മറ്റു രണ്ട് സദിശകളും ഉൾപ്പെടുന്ന ഒരേ രേഖയിലായിരിക്കും. മറിച്ചായാലും ശരിയാകുന്നതണ്.

ഫലം 8.9

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ ഒരു പ്രതലത്തിലെ മൂന്ന് ഒരേ തലത്തിലല്ലാത്ത സദിശങ്ങളാകുന്നു, ഇപ്രകാരമുള്ള ഒരു പ്രതലത്തിലെ അദിശത്തെ $l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}$ എന്ന് എളുപ്പത്തിൽ എഴുതാവുന്നതാണ്. l, m, n എന്നിവ അദശങ്ങളാകുന്നു.

നിർവ്വചനം 8.15

$\hat{i}$, $\hat{j}$ എന്നീ യൂണിറ്റ് സദിശകൾ x, y അക്ഷത്തിലെ ധനദിശയിൽ ഉൾപ്പെടുന്നയാകുന്നു. $\vec{r}$ എന്നത് ഒരു തലത്തിലെ സദിശമാകുന്നു. അതിനാൽ $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ ആകുന്നു. x, y എന്നിവ വാസ്തവിക സംഖ്യകളാകുന്നു. ഇവിടെ $x\hat{i}$, $y\hat{j}$ എന്നിവ x, y എന്നീ അക്ഷത്തിലെ രണ്ട് വിലകൾ നൽകുന്നു. $\vec{r}$ ന്റെ ദീർഘചതുര ഘടകങ്ങൾ എന്നു പറയുന്നു.

ഇതുവരെ ചർച്ച ചെയ്ത ഘടകങ്ങൾ ത്രിമാനതലത്തിലും ചർച്ച ചെയ്യാം.

8.6.2 ത്രിമാന അളവുള്ള സദിശകളുടെ വിഘടനം

സിദ്ധാന്തം 8.6

ആരംഭബിന്ദു O ആയിട്ടുള്ള x, y, z അക്ഷത്തിലെ ധനദിശയിലെ യൂണിറ്റ് സദിശങ്ങൾ യഥാക്രമം $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ എന്നിവയാകുന്നു. ഒരു തലത്തിലെ ബിന്ദു P യുടെ സ്ഥാനസദിശം $\overrightarrow{OP}$ എന്നിരിക്കട്ടെ. $\overrightarrow{OP}$ സമാനമായാൽ $\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ എന്ന് എഴുതാവുന്നതാണ്. കൂടാതെ x, y, z എന്നിവ വാസ്തവിക സംഖ്യകളാകുന്നു എന്നിരിക്കിലും $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

തെളിവ്

(x,y,z) എന്നിവ P എന്ന ബിന്ദുവിലെ സൂചകങ്ങൾ ആകുന്നു. P യിൽ നിന്നും (x, y) എന്ന തലത്തിലേയ്ക്ക് വരയ്ക്കപ്പെട്ട ലംബ രേഖയുടെ ബിന്ദു Q ആകുന്നു എന്ന് കരുതുക. Q വിൽ നിന്നും x, y എന്നീ അക്ഷത്തേയ്ക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബ രേഖയുടെ ബിന്ദുക്കൾ R, S എന്നിവയാകുന്നു. അതായത് $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ ആകുന്നു.

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 61 15-02-2023 11:54:54

അപ്പോൾ, $OR = x$, $OS = y$, കൂടാതെ $QP = z$.

ആകയാൽ, $\overrightarrow{OR} = x\hat{i}$, $\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{OS} = y\hat{j}$ കൂടാതെ $\overrightarrow{QP} = z\hat{k}$

$\overrightarrow{OP} = \vec{r} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{RQ} + \overrightarrow{QP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$.

അതായത് $\overrightarrow{OP} = \vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ആകുന്നു.

അതുകൊണ്ട് മൂലബിന്ദു O യ്ക്ക് അനുസ്യൂതമായ ത്രിമാന മുള്ള സദിശം P യുടെ സ്ഥാനദിശം $\overrightarrow{OP}$ ആകുന്നു.

ത്രികോണം ORQ വിൽ,

$$OQ^2 = OR^2 + RQ^2 \quad \text{(എങ്ങനെ?)}$$

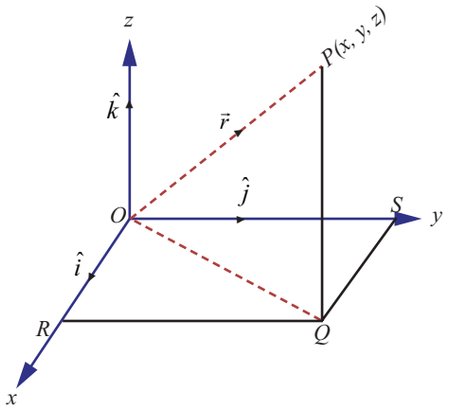
ത്രികോണം OQP,

$$OP^2 = OQ^2 + QP^2.$$

അതായത് $OP^2 =$

$$OQ^2 + QP^2 = OR^2 + RQ^2 + QP^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

അതിനാൽ $|\overrightarrow{OP}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ അതായത്, $|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$



ചിത്രം 8.31

രണ്ടു ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന സദിശത്തിന്റെ ഘടകങ്ങൾ

(x_1, y_1) to (x_2, y_2). എന്നീ ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന സദിശങ്ങളെ കണ്ടെത്താം.

A, B എന്നിവ (x_1, y_1), (x_2, y_2). എന്നിവയിലെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ ആകുന്നു. $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$. എന്നിവ യിലെ ഒരു ബിന്ദു P ആകുന്നു. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OP}$. അപ്പോൾ $\overrightarrow{OP}$ യുടെ ഘടകങ്ങൾ $(x_2 - x_1)\hat{i}$, $(y_2 - y_1)\hat{j}$ ആകുന്നു. അങ്ങനെ x, y എന്നീ അക്ഷത്തിലെ $\overrightarrow{AB}$ യുടെ ഘടകങ്ങൾ $(x_2 \quad x_1)\hat{i}$, $(y_2 - y_1)\hat{j}$ ആകുന്നു.

അതുപോലെ A, B എന്നിവ (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) എന്നിവയിലെ ബിന്ദുക്കളും ആകുന്നു എങ്കിൽ x, y, z അക്ഷത്തിലെ $\overrightarrow{AB}$ യുടെ ഘടകങ്ങൾ $(x_2 - x_1)\hat{i}$, $(y_2 - y_1)\hat{j}$, $(z_2 - z_1)\hat{k}$ എന്നിവയാകുന്നു.

8.6.3 ഒരു സദിശത്തിലെ മാട്രിക്സിന്റെ സാന്നിദ്ധ്യം

മൂന്നു ഘടകങ്ങളുള്ള ഒരു സദിശത്തെ വരിയായോ അല്ലെങ്കിൽ നിരയായോ $[x, y, z]$ അല്ലെങ്കിൽ $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ എന്ന രീതിയിൽ യഥാക്രമം എഴുതാവുന്നതാണ്.

ആകയാൽ യാതൊരു $\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$ എന്ന സദിശവും $[a_1 \quad a_2 \quad a_3]\begin{bmatrix} \hat{i} \\ \hat{j} \\ \hat{k} \end{bmatrix} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} = \vec{A}$.

എന്നു എഴുതാവുന്നതാകുന്നു. ആകയാൽ സദിശകളുടെ സങ്കലനം, അദിശകളുടെ ഗുണനം എന്നിവയെ ഇപ്രകാരം എഴുതാവുന്നതാകുന്നു.

$\vec{A} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{B} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ ആയാൽ $\vec{A} + \vec{B} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix}$ ആകുന്നു.

$\vec{A} + \vec{B} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$.

അതായത് $k\vec{A} = k\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_1 \\ ka_2 \\ ka_3 \end{bmatrix}$ ആകുന്നു.

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 62 15-02-2023 11:54:55

അതായത് $k\vec{A} = ka_1\hat{i} + ka_2\hat{j} + ka_3\hat{k}$

$k \in \mathbb{R}, k > 1$ ആയാൽ, $0 < k < 1$ എന്ന് എഴുതാം. കൂടാതെ $k = 0$ ആയാൽ $\overrightarrow{OA} = 0\hat{i} + 0\hat{j} + 0\hat{k} = \vec{0}$. എന്ന പൂജ്യ സദിശം ലഭിക്കും.

ഫലം 8.10

സദിശ സങ്കലനത്തിന്റെ ക്രമവിനിമയ നിയമം, സംയേജന നിയമം, അദിശഗുണത്തിന്റെ വിതരണ നിയമം എന്നിവ ഉപയോഗിച്ച് താഴെ കാണുന്നവ തെളിയിക്കുക.

$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$ m ഒരു അദിശം ആയാൽ

(i) $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$

(ii) $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\hat{i} + (a_2 - b_2)\hat{j} + (a_3 - b_3)\hat{k}$

(iii) $m\vec{a} = ma_1\hat{i} + ma_2\hat{j} + ma_3\hat{k}$ കൂടാതെ

(iv) $\vec{a} = \vec{b}$ എന്നിരിക്കിലും $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, കൂടാതെ $a_3 = b_3$.

ഉദാഹരണം 8.4

$5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$. ദിശയിലുള്ള സദിശത്തിന്റെ യൂണിറ്റ് സദിശത്തെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$\vec{a}$ യിൽ ദിശയിലുള്ള യൂണിറ്റ് സദിശം $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$. ആകുന്നു. അതിനാൽ $5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ ദിശയിൽ ഉള്ള സദിശത്തിന്റെ യൂണിറ്റ് സദിശം

$$\frac{5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{|5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}|} = \frac{5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2}} = \frac{5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{50}}$$ ആകുന്നു.

കുറിപ്പ് 8.3

$5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$ യ്ക്ക് സമാന്തരമായി എതിർ ദിശയിലുള്ള യൂണിറ്റ് സദിശം, $-\frac{5\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}}{\sqrt{50}}$ ആകുന്നു.

8.7 കോസൈനുകളുടെ ദിശയും അംശബന്ധങ്ങളുടെ ദിശയും

മൂലബിന്ദുവിൽ നിന്നുമുള്ള ദൂരം r ഉം പ്രതലത്തിലെ ബിന്ദു P യും അതിലെ സൂചകങ്ങൾ (x, y, z) ഉം എന്നിരിക്കട്ടെ. P യിൽ നിന്നും x, y, z അക്ഷത്തേയ്ക്ക് വരയ്ക്കുന്ന ലംബങ്ങൾ യഥാക്രമം R, S, T എന്നിവയാകുന്നു

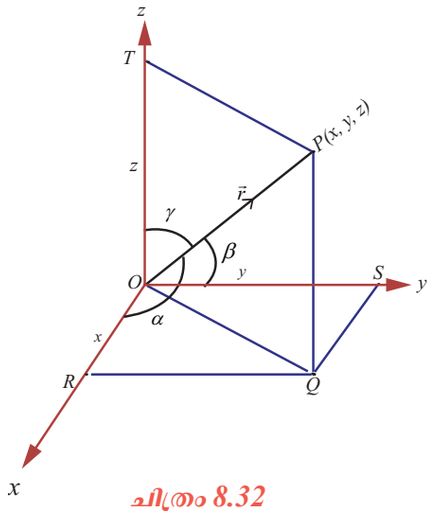
$$\angle PRO = \angle PSO = \angle PTO = 90°.$$
$$OR = x,\ OS = y,\ OT = z \text{ കൂടാതെ } OP = r.$$

(ചിത്രത്തിൽ നിന്നും $\angle PRO = \angle PSO = \angle PTO = 90°$ എന്ന് കണ്ടെത്തുന്നത് വളരെ ശ്രമകരമായ ഒന്നാണ്. എന്തുകൊണ്ടെന്നാൽ ഇവ അക്ഷങ്ങളിൽ നിന്നും Pയിലോട്ട് വരയ്ക്കുന്ന ലംബരേഖകൾ, ത്രിമാന അളവിൽ ഇതിനെ വളരെ ലളിതമായി കണക്കാക്കുന്നു)

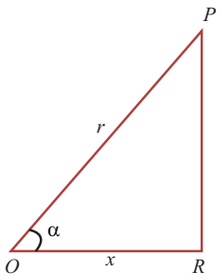
$\overrightarrow{OP}$ എന്ന സദിശം x, y, z അക്ഷങ്ങളിൽ ധനദിശയിൽ ഏർപ്പെടുത്തുന്ന കോണുകൾ α, β, γ എന്നിവയാകുന്നു.

$$\angle POR = \alpha,\ \angle POS = \beta, \text{ കൂടാതെ } \angle POT = \gamma.$$

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 63 15-02-2023 11:54:55



ചിത്രം 8.32



ചിത്രം 8.33

$\Delta OPR, \angle PRO = 90°, \angle POR = \alpha, OR = x,$ കൂടാതെ $OP = r$ അതിനാൽ $\cos\alpha = \frac{OR}{OP} = \frac{x}{r}.$

അതുപോലെ $\cos\beta = \frac{y}{r}$, $\cos\gamma = \frac{z}{r}$ എന്ന് കണക്കാക്കാവുന്നതാകുന്നു.

ഇവിടെ $\overrightarrow{OP} = \vec{r}$ ന്റെ കോണദിശകൾ α, β, γ ആകുന്നു. $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ യുടെ കോണദിശകൾ $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ എന്നിവയാകുന്നു. അതിനാൽ $\overrightarrow{OP} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}.$ എന്ന സദിശത്തിനെ കോണ ദിശകൾ $\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$ ആകുന്നു. ഇവിടെ $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, ആകുന്നു.

കൊസൈൻ ദിശകളോടുകൂടിയ സമഅംശബന്ധത്തോടുകൂടിയ മൂന്നു സംഖ്യകളേയും ആ സദിശ ത്തിന്റെ **ദിശ അംശബന്ധങ്ങൾ** എന്നു വിളിക്കുന്നു. ആകയാൽ സദിശങ്ങളുടെ ദിശ അംശബന്ധങ്ങൾ ഒരുപോലുള്ളവയല്ല. തന്നിട്ടുള്ള ഒരു സദിശത്തിന് എണ്ണമില്ലാത്ത ദിശ അംശബന്ധങ്ങളുണ്ട്.

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടവ

(i) തന്നിട്ടുള്ള പൂജ്യമല്ലാത്ത സദിശത്തിന് ദിശ അംശബന്ധങ്ങളെ കൂടാതെ കൊസൈൻ ദിശകളും ഉണ്ടായിരിക്കുന്നതാകുന്നു.

(ii) തന്നിട്ടുള്ള ദിശ അംശബന്ധങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് ആ സദിശത്തെ നിർണ്ണയിക്കാൻ കഴിയുകയില്ല.

(iii) തന്നിട്ടുള്ള കോസൈൻ ദിശകൾ ഉപയോഗിച്ച് നമുക്ക് അതിലുള്ള സദിശത്തെ കണക്കാക്കുന്നതിന് സാധിക്കുകയില്ല.

(iv) തന്നിട്ടുള്ള സദിശത്തിന് കോസൈൻ ദിശയുടെ ത്രിമാനം എന്നത് ത്രിമാന അംശബന്ധത്തിന്റെ ദിശയ്ക്ക് അനുസരിച്ചായിരിക്കും.

(v) ഒരു സദിശത്തെ മനസ്സിലാക്കുന്നതിന് അതിന്റെ അളവിനെ കൂടാതെ കോസൈൻ ദിശകളോ അല്ലെങ്കിൽ ദിശ അംശബന്ധങ്ങളോ അത്യാവശ്യമാകുന്നു.

കുറിപ്പ് 8.4

$\overrightarrow{OP}$ എന്നത് ഒരു സദിശമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. അതിന്റെ ആരംഭബിന്ദു മൂലബിന്ദു ആയിരിക്കും. ഒരു സദിശത്തിന്റെ ആരംഭബിന്ദു മൂലബിന്ദു അല്ലാതിരുന്നാൽ അതിനെ ആരംഭബിന്ദുവായി കരുതി അതേ എണ്ണത്തിനനുസരിച്ച് ആ സദിശത്തിന് സമാന്തരമായി വരയ്ക്കുക. സമസദിശങ്ങളുടെ തത്വത്തിൽ നിന്നും ഇവ രണ്ടിനും ഒരേ കോസൈൻ ദിശകൾ കാണപ്പെടുന്നതാകുന്നു. ഇപ്രകാരം ഏതൊരു സദിശ ത്തിന്റെയും കോസൈൻ ദിശകളും കണ്ടുപിടിക്കാവുന്നതാണ്.

ഫലം 8.11

ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാനസദിശം $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ എന്നു കരുതുക $\vec{r}$ ന്റെ കോണദിശകൾ α, β, γ എന്നിവയാണെങ്കിൽ,

(i) കോസൈൻ ദിശ $\vec{r}$ ന്റെ വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക 1 ആകുന്നു.

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 64 15-02-2023 11:54:56

(ii) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$.

(iii) $\vec{r}$ ന്റെ കോസൈൻ ദിശ $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

(iv) ഒരു സദിശത്തിന്റെ കോസൈൻ ദിശകൾ l, m, n ആയാൽ $l^2+m^2+n^2=1$.

(v) ഏതൊരു യൂണിറ്റ് സദിശത്തേയും നമുക്ക് $\cos\alpha\hat{i}+\cos\beta\hat{j}+\cos\gamma\hat{k}$ എന്നെഴുതാവുന്നതാണ്.

ഫലം

(i) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2}=1$

(ii), (iii), (iv), (v) എന്നിവയുടെ നിർദ്ധാരണങ്ങൾ ഉദാഹരണങ്ങളിൽ വ്യക്തമാക്കിയിട്ടുണ്ട്.

ഉദാഹരണം 8.5

താഴെ കാണുന്ന സദിശകൾക്ക് ദിശ അംശബന്ധങ്ങൾ, കോസൈൻ ദിശകൾ കാണുക.

(i) $3\hat{i}+4\hat{j}-6\hat{k}$, (ii) $3\hat{i}\quad 4\hat{k}$.

നിർദ്ധാരണം

(i) $3\hat{i}+4\hat{j}-6\hat{k}$ യുടെ ദിശ അംശബന്ധങ്ങൾ 3, 4, – 6.

ദിശ കോസൈനുകൾ $\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}$, ആകുന്നു. ഇവിടെ $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

അതിനാൽ കോസൈൻ ദിശകൾ $\frac{3}{\sqrt{61}},\frac{4}{\sqrt{61}},\frac{-6}{\sqrt{61}}$ ആകുന്നു.

(ii) $3\hat{i}-4\hat{k}$ യുടെ ദിശ അംശബന്ധങ്ങൾ 3, 0, – 4.

കോസൈൻ ദിശകൾ $\frac{3}{5},0,\frac{-4}{5}$.

ഉദാഹരണം 8.6

(i) 2, 3, – 6 എന്നിവ ദിശ അംശബന്ധങ്ങളായിട്ടുള്ള സദിശത്തിന്റെ കോസൈൻ ദിശകൾ കാണുക.

(ii) $30°, 45°, 60°$ എന്നിവ ഒരു സദിശത്തിന്റെ ദിശ കോണുകൾ ആകുമോ?

(iii) A (2, 3, 1) കൂടാതെ, B (3, – 1, 2) ആയാൽ $\overrightarrow{AB}$, യുടെ കോസൈൻ ദിശകൾ കാണുക.

(iv) (2, 3, 1) കൂടാതെ (3, – 1, 2) എന്നിവയെ യോജിപ്പിക്കുന്ന രേഖാഖണ്ഡത്തിന്റെ കോസൈൻ ദിശകളെ കാണുക.

(v) ഒരു സദിശത്തിന്റെ കോസൈൻ ദിശകൾ 2, 3, 6 ഉം അളവ് 5 ഉം ആയാൽ അതിന്റെ സദിശത്തെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

(i) കോസൈൻ ദിശകൾ $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

അതായത്, $\frac{2}{7},\frac{3}{7},\frac{-6}{7}$.

(ii) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$ അനുസരിച്ച്

ഇവിടെ $\alpha=30°,\beta=45°,\gamma=60°$

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\neq 1$.

അതുകൊണ്ട് ഇവ ഒരു സദിശത്തിന്റെ കോണദിശയിൽ ഉൾപ്പെടുന്നില്ല.

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 65 15-02-2023 11:54:56

(iii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \hat{i} - 4\hat{j} + \hat{k}$

കോസൈൻ ദിശകൾ $\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{-4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}$.

(iv) A, B എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ $(2, 3, 1)$, $(3,-1, 2)$ യുടെ കോസൈൻ ദിശ $\overrightarrow{AB}$ എന്നത് $\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{-4}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}$ ആകുന്നു. എന്നാൽ ഏതൊരു ബിന്ദുവും ആദ്യത്തെ ബിന്ദുവായി എടുക്കാവുന്നതാണ്. അങ്ങനെ മറ്റൊരു കോസൈൻ ദിശകൾ എതിർദിശയിൽ എടുക്കാവുന്നതാണ്. അങ്ങനെ യുള്ള അംശബന്ധങ്ങളുടെ ദിശ $\frac{-1}{\sqrt{18}}, \frac{4}{\sqrt{18}}, \frac{-1}{\sqrt{18}}$ ആകുന്നു.

(v) കോസൈൻ ദിശകൾ $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}$.

യൂണിറ്റ് സദിശം $\frac{2}{7}\hat{i} + \frac{3}{7}\hat{j} + \frac{6}{7}\hat{k}$.

അപ്പോൾ ആവശ്യപ്പെട്ട സദിശം $\frac{5}{7}(2\hat{i} + 3\hat{j} + 6\hat{k})$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 8.7

തന്നിട്ടുള്ള സ്ഥാനസദിശകൾ $2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$, $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $6\hat{i} - 5\hat{j} + 7\hat{k}$ എന്നിവ സമരേഖീയങ്ങളാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

O എന്നത് മൂലബിന്ദു എന്നും $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ യുടെ സദിശകൾ യഥാക്രമം $2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$, $3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$, $6\hat{i} - 5\hat{j} + 7\hat{k}$ എന്ന് എടുക്കുക. അങ്ങനെ,

$$\overrightarrow{AB} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k} \text{ ഉം } \overrightarrow{AC} = 4\hat{i} - 8\hat{j} + 12\hat{k}$$

അതായത് $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}$ യും $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ യും സമാന്തരമാണെന്ന് കാണാം. അവയ്ക്കുള്ള പൊതുവായ ബിന്ദു A ആകുന്നു. അങ്ങനെ മൂന്ന് ബിന്ദുക്കളും സമരേഖീയങ്ങളാണെന്ന് തെളിയുന്നു.

മറ്റൊരു രീതി

O എന്നത് മൂലബിന്ദു.

Let $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}, \overrightarrow{OB} = 3\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}$ ഉം $\overrightarrow{OC} = 6\hat{i} - 5\hat{j} + 7\hat{k}$

$\overrightarrow{AB} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$; $\overrightarrow{BC} = 3\hat{i} - 6\hat{j} + 9\hat{k}$; $\overrightarrow{CA} = -4\hat{i} + 8\hat{j} - 12\hat{k}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{14}$; $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{126} = 3\sqrt{14}$; $|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{224} = 4\sqrt{14}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

അതായത്, $AC = AB + BC$.

അതുകൊണ്ട് A, B, C എന്നിവ ഒരേ രേഖയിലാണെന്ന് തെളിയുന്നു. അതുകൊണ്ട് ഇവ സമരേഖീയങ്ങളായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 8.8

വ്യാപ്തി 5 ഉം സമാന്തരസദിശം $4\hat{i} - 3\hat{j} + 10\hat{k}$. ആയിട്ടുള്ള സ്ഥാനസദിശത്തിന്റെ ബിന്ദു കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

$\vec{a}$ എന്ന സദിശം $4\hat{i} - 3\hat{j} + 10\hat{k}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 66 15-02-2023 11:54:57

യൂണിറ്റ് സദിശം $\vec{a}$ യുടെ സ്ഥാനസദിശം $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ അത് $\frac{4\hat{i}-3\hat{j}+10\hat{k}}{5\sqrt{5}}$. യ്ക്ക് സമമായിരിക്കും.

സദിശത്തിന്റെ വ്യാപ്തി 5 സമാന്തരമായ സദിശം $4\hat{i}-3\hat{j}+10\hat{k}$ യും ആയാൽ

$5\left(\frac{4\hat{i}-3\hat{j}+10\hat{k}}{5\sqrt{5}}\right)=\frac{4\hat{i}}{\sqrt{5}}-\frac{3}{\sqrt{5}}\hat{j}+2\sqrt{5}\ \hat{k}$ അതിനാൽ ബന്ധപ്പെട്ട ബിന്ദു $\left(\frac{4}{\sqrt{5}},-\frac{3}{\sqrt{5}},2\sqrt{5}\right)$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 8:9

സ്ഥാനസദിശങ്ങൾ $2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k},\ 4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k}$ കൂടാതെ $10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}$ എന്നിവ ഉൾപ്പെടുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഒരു സമകോണത്തെ രൂപപ്പെടുത്തുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുന്നു.

നിർദ്ധാരണം

O മൂലബിന്ദുവും A, B, C എന്നിവ തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ എന്നിരിക്കട്ടെ.

അതായത് $\overrightarrow{OA} = 2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k}$, $\overrightarrow{OB}=4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k}$ കൂടാതെ $\overrightarrow{OC}=10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k})-(2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})=2\hat{i}-3\hat{j}+6\hat{k}.$$

$$AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}=\sqrt{4+9+36}=7$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=(10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k})-(4\hat{i}+\hat{j}+9\hat{k})=6\hat{i}-2\hat{j}-3\hat{k}.$$

$$BC = |\overrightarrow{BC}|=\sqrt{6^2+(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{36+4+9}=7$$

$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}=(2\hat{i}+4\hat{j}+3\hat{k})-(10\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k})=-8\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k}.$$

$$CA = |\overrightarrow{CA}| =\sqrt{(-8)^2+5^2+(-3)^2}=\sqrt{64+25+9}=\sqrt{98}$$

$$BC^2 = 49,\ CA^2=98,\ AB^2=49.$$

വ്യക്തമായി $CA^2 = BC^2+AB^2$.

അതുകൊണ്ട് തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ ഒരു സമകോണ ത്രികോണത്തെ രൂപപ്പെടുത്തുന്നു.

ഉദാഹരണം 8.10

$5\hat{i}+6\hat{j}+7\hat{k},\ 7\hat{i}-8\hat{j}+9\hat{k},\ 3\hat{i}+20\hat{j}+5\hat{k}$ എന്നിവ ഒരേ തലത്തിലാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$5\hat{i}+6\hat{j}+7\hat{k} = s(7\hat{i}-8\hat{j}+9\hat{k})+t(3\hat{i}+20\hat{j}+5\hat{k})$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

താരതമ്യപ്പെടുത്തിയാൽ

$$\begin{aligned} 7s+3t &= 5\\ -8s+20t &= 6\\ 9s+5t &= 7 \end{aligned}$$

രണ്ട് ആദ്യത്തെ സമവാക്യങ്ങളെ നിർദ്ധാരണം ചെയ്താൽ, $s = t = \frac{1}{2}$, കിട്ടുന്നു. അതു മൂന്നാമത്തെ സമവാക്യത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.

അങ്ങനെ ഒരു സദിശം മറ്റു രണ്ട് സദിശത്തിനും രേഖീയമായ യോജിപ്പാണുള്ളത്.
അതിനാൽ തന്നിട്ടുള്ള സദിശം ഒരേ തലത്തിലുള്ളവയാണ്.

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 67 15-02-2023 11:54:58

അഭ്യാസം 8.2

(1) തന്നിട്ടുള്ള സദിശങ്ങൾക്ക് കോസൈൻ ദിശകൾ കാണുന്നോ അല്ലയോ? പരിശോധിക്കുക.

(i) $\frac{1}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2},\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{4}{3},0,\frac{3}{4}$

(2) താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ദിശ അംശബന്ധങ്ങൾ ഉള്ള സദിശത്തിന്റെ കോസൈൻ ദിശകൾ കാണുക

(i) 1 , 2 , 3 (ii) 3 , − 1 , 3 (iii) 0 , 0 , 7

(3) താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സദിശങ്ങളുടെ ദിശ അംശബന്ധങ്ങളും കോസൈൻ ദിശകളും കാണുക.

(i) $3\hat{i}-4\hat{j}+8\hat{k}$ (ii) $3\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ (iii) $\hat{j}$

(iv) $5\hat{i}-3\hat{j}-48\hat{k}$ (v) $3\hat{i}-3\hat{k}+4\hat{j}$ (vi) $\hat{i}-\hat{k}$

(4) തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) ഒരു ത്രികോണത്തെ രൂപപ്പെടുത്തുന്നുവെങ്കിൽ അവയുടെ കോസൈൻ ദിശകളുടെ മധ്യമം കാണുക.

(5) സദിശകളുടെ കോസൈൻ ദിശകൾ $\frac{1}{2},\frac{1}{\sqrt{2}},a$ ആയാൽ a യുടെ വില കാണുക.

(6) (1, 0, 0), (0, 1, 0) എന്നീ രേഖകൾ യോജിക്കുന്ന ദിശ അംശബന്ധങ്ങൾ (a , $a + b$, $a + b + c$) ആയാൽ a, b, c എന്നിവയുടെ വില കാണുക.

(7) താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സദിശങ്ങൾ

$2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k},\ 3\hat{i}-4\hat{j}-4\hat{k},\ \hat{i}-3\hat{j}-5\hat{k}$ ഒരു ത്രികോണം രൂപപ്പെടുത്തുന്നവയാണോ? തെളിയിക്കുക.

(8) തന്നിട്ടുള്ള സദിശകൾ $\vec{a}=3\hat{i}+2\hat{j}+9\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}+\lambda\hat{j}+3\hat{k}$ ഇവ സമാന്തരമായാൽ λ യുടെ വില കാണുക.

(9) താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവ ഒരേ തലത്തിലാണോ? തെളിയിക്കുക

(i) $\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k},\ -2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k},\ -\hat{j}+2\hat{k}$

(ii) $2\hat{i}+3\hat{j}+\hat{k},\ \hat{i}-\hat{j},\ 7\hat{i}+3\hat{j}+2\hat{k}$.

(10) തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കളുള്ള $4\hat{i}+5\hat{j}+\hat{k},\ -\hat{j}-\hat{k},\ 3\hat{i}+9\hat{j}+4\hat{k}$, $-4\hat{i}+4\hat{j}+4\hat{k}$ സദിശകൾ ഒരേതലത്തിലുള്ളവയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(11) $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}-4\hat{k},\ \vec{b}=3\hat{i}-4\hat{j}-5\hat{k}$ കൂടാതെ $\vec{c}=-3\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ ആയാൽ അവയുടെ വ്യാപ്തി, കോസൈൻ ദിശകൾ എന്നിവ കണക്കാക്കുക (i) $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ (ii) $3\vec{a}-2\vec{b}+5\vec{c}$.

(12) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ മൂലകൾ $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$; $3\hat{i}-4\hat{j}+5\hat{k}$, $-2\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k}$. ആയ ഒരു സ്ഥാന സദിശം തന്നിട്ടുണ്ട്. ത്രികോണത്തിന്റെ ചുറ്റളവ് കാണുക.

(13) സമാന്തരമായ യൂണിറ്റ് സദിശം കാണുക.

$3\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$ if $\vec{a}=3\hat{i}-\hat{j}-4\hat{k},\ \vec{b}=-2\hat{i}+4\hat{j}-3\hat{k}$ കൂടാതെ $\vec{c}=\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ ആകുന്നു.

(14) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ $2\vec{a}-7\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$. എന്ന സ്ഥാനസദിശത്തെ തൃക്തിപ്പെടുത്തുന്നതാണോ? കൂടാതെ ഈ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാണോ?

(15) P, Q, R, S എന്നിവയുടെ സ്ഥാന സദിശങ്ങൾ യഥാക്രമം $i+j+k,\ 2\hat{i}+5\hat{j},\ 3\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k},$ $\hat{i}-6\hat{j}-\hat{k}$ ആകുന്നു. PQ, RS എന്നിവ സമാന്തരങ്ങളാണോ? തെളിയിക്കുക?

(16) $m\ (\hat{i}+\hat{j}+\hat{k})$ ഒരു യൂണിറ്റ് സദിശമായാൽ m ന്റെ വിലയോ, വിലകളോ കാണുക?

(17) തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദുക്കൾ A (1, 1, 1), B(1, 2, 3), C(2, − 1, 1) എന്നിവ ഒരു സമപാർശ്വ ത്രികോണത്തിന്റെതാണോ? തെളിയിക്കുക.

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 68 15-02-2023 11:54:59

8.8 സദിശകളുടെ ഗുണനം

രണ്ട് സദിശകളുടെ സങ്കലനം, ഒരു സദിശത്തിൽ നിന്നും മറ്റൊരു സദിശത്തിന്റെ വ്യവകലനം, ഒരു സദിശത്തിന്റെയും അദിശത്തിന്റെയും ഗുണനം എന്നിവയെല്ലാം മുൻകാലങ്ങളിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇപ്പോൾ രണ്ട് സദിശകളുടെ ഗുണനത്തെയാണ് പഠിക്കാൻ പോകുന്നത്. രണ്ട് സദിശങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം കാണുന്നതിന് രണ്ട് വഴികളാണുള്ളത്.

(i) അദിശഗുണനം (ഡോട്ട് ഗുണനം)

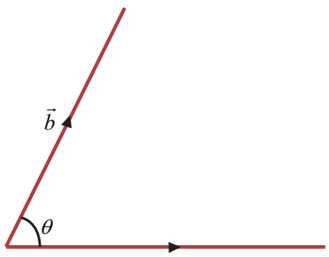
(ii) സദിശഗുണനം (ക്രോസ് ഗുണനം).

രണ്ട് സദിശകളുടെ കോണുകൾ കാണുന്നതിന് ഇത്തരത്തിലുള്ള നിർവ്വചനങ്ങൾ ആവശ്യമായി വരുന്നു.

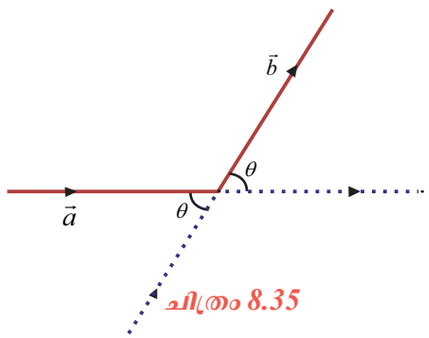
T4CMR

8.8.1 രണ്ട് സദിശകൾക്കിടയിലുള്ള കോണുകൾ

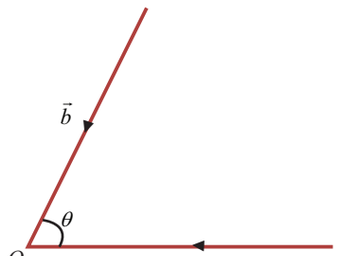
$\vec{a}, \vec{b}$ എന്നീ രണ്ട് സദിശകളെ $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ എന്ന് പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നു. $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ എന്നത് അവയ്ക്കിടയിലുള്ള ദിശകൾക്കിടയിലുള്ള കോണുകളാകുന്നു. ഈ ദിശകളെ ചിത്രം 8.36 ൽ കൂട്ടിച്ചേർക്കുകയും ചിത്രം 8.34 ൽ അവയുടെ സംഗമത്തെ പ്രതിഫലിപ്പിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.



ചിത്രം 8.34



ചിത്രം 8.35



ചിത്രം 8.36

θ എന്നത് രണ്ട് സദിശകൾ തമ്മിലുള്ള കോണുകൾ അതായത് $0 \le \theta \le \pi$

$\theta = 0$ അല്ലെങ്കിൽ π ആയിരിക്കുകയും സദിശകൾ സമാന്തരവുമായിരിക്കും.

ചിത്രം 8.35 ൽ കാണുന്നതുപോലെ രണ്ട് സദിശകൾ സംയോജിക്കുകയോ വ്യതിചലിക്കുകയോ ചെയ്താൽ അത് കിട്ടുന്നതിനായി സദിശകളുടെ നീളം നീട്ടി വരയ്ക്കുകയും അവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോണുകൾ കണ്ടെത്തുകയും ചെയ്യുന്നു.

8.8.2 അദിശകളുടെ ഗുണനഫലം

നിർവ്വചനം 8.16

$\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നിവ രണ്ട് പൂജ്യമല്ലാത്ത സദിശകളും θ എന്നത് ചിത്രം 8.34 ൽ കാണിച്ചിട്ടുള്ളതുപോലെ അതിൽ ഉൾപ്പെട്ടിട്ടുള്ള കോൺ ആകുന്നു. അതിന്റെ **അദിശഗുണനം** അല്ലെങ്കിൽ **ഡോട്ട് ഗുണനത്തെ** പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നത് $\vec{a} . \vec{b}$ എന്നും അദിശത്തെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നതിനെ $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ എന്നുമാകുന്നു.

അങ്ങനെ $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$.

$\vec{a} \cdot \vec{b}$ യുടെ ഫലം ഒരു അദിശവും അവയുടെ ഗുണനഫലത്തെ അദിശ ഗുണനഫലമെന്നും പറയുന്നു. പിന്നീട് നിങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുന്നത് ഡോട്ട് (' · ') എന്നും വേറൊരു നാമത്തിൽ ഡോട്ട് ഗുണനഫലം എന്നും വിളിക്കാം.

ജ്യാമിതീയ രീതിയിൽ അദിശഗുണനഫലം (ഒരു സദിശവും മറ്റൊന്നിന്റെയും പ്രതിഫലനം)

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ എന്നും θ എന്നത് $\vec{}$, $\vec{}$ എന്നിവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോണും ആകുന്നു.

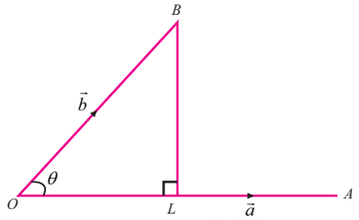
BL എന്ന രേഖ OAയ്ക്ക് ലംബമായി വരയ്ക്കുക.

ത്രികോണ OLB യിൽ നിന്നും

$$\cos\theta = \frac{OL}{OB}$$

$$OL = OB\cos\theta = |\vec{b}|\cos\theta$$

OL എന്നത് $\vec{b}$ യിലെ $\vec{a}$ യുടെ പ്രതിഫലനമാണ്.



ചിത്രം 8.37

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 69 15-02-2023 11:54:59

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{a}|(OL)$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|$ ($\vec{b}$ യിലെ $\vec{a}$ യുടെ പ്രതിഫലനം)

അങ്ങനെ $\vec{b}$ യിലെ $\vec{a}$ യുടെ പ്രതിഫലനം $= \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$.

ഒരേ രീതി പ്രയോഗിച്ചാൽ $\vec{a}$ യിലെ $\vec{b}$ യുടെ പ്രതിഫലനം $= \dfrac{\vec{b}\cdot\vec{a}}{|\vec{b}|}$.

8.8.3 അദിശഗുണത്തിന്റെ നിയമങ്ങൾ

(i) രണ്ട് അദിശങ്ങളുടെ ഗുണനഫലം ക്രമവിനിമയ നിയമം.

ആയാൽ പതിവ് നിർവ്വചനം, $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = |\vec{b}||\vec{a}|\cos\theta = \vec{b}\cdot\vec{a}$

ഇത് ഏതെങ്കിലും രണ്ട് സദിശങ്ങൾ $\vec{a}, \vec{b}$ ഇവയ്ക്കായാൽ $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$.

(ii) അദിശ ഗുണനഫലതത്തിന്റെ സ്വഭാവം

$0 \le \theta \le \pi$ എന്ന് നിങ്ങൾക്കറിയാം.

$\theta = 0$ ആയാൽ $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab$ [ഒരേ ദിശയിലുള്ള രണ്ട് സദിശകൾ സമാന്തരങ്ങളായാൽ $\Rightarrow \theta = 0$]

$\theta = \pi$ അപ്പോൾ $\vec{a}\cdot\vec{b} = -ab$ [വിപരീത ദിശയിലുള്ള രണ്ട് സദിശകൾ സമാന്തരങ്ങളായാൽ $\Rightarrow \theta = \pi$.].

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ അങ്ങനെ $\vec{a}$ $\vec{b}$ 0 [രണ്ട് സദിശകൾ ലംബങ്ങളായാൽ $\Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{}$].

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ അപ്പോൾ $\cos\theta$ ധനവും കൂടാതെ $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ധനവും ആയിരിക്കും.

$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ ആയാൽ $\cos\theta$ ഋണവും $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ഋണവും ആയിരിക്കും.

അതായത്, $\vec{a}\cdot\vec{b}$ is $\begin{cases} > 0 & , 0 \le \theta < \pi/2 \\ 0 & , \theta = \pi/2 \\ < 0 & , \pi/2 < \theta \le \pi \end{cases}$

(iii) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Rightarrow |\vec{a}| = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $|\vec{b}| = 0$ അല്ലെങ്കിൽ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

(iv) ഏതെങ്കിലും രണ്ട് പൂജ്യമല്ലാത്ത $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}$ എന്നീ സദിശകൾ എന്നത് $\vec{b}$ യ്ക്ക് ലംബമായിരിക്കും.

(v) $\vec{a}\cdot\vec{a}$ യുടെ വിവിധതരം പ്രതിനിധാനങ്ങൾ.

$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2 = (\vec{a})^2 = \vec{a}^2 = a^2$.

ഈ പ്രതിനിധാനങ്ങൾ കണക്കുകൾ നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുന്നതിന് വളരെ അത്യാവശ്യമാണ്.

(vi) $\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1$ കൂടാതെ $\hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0$ (എങ്ങനെ?).

(vii) ഏതെങ്കിലും രണ്ട് അദിശകൾ λ, μ

$\lambda\vec{a}\cdot\mu\vec{b} = \lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\lambda\mu\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\mu\vec{b})$.

(viii) സദിശങ്ങളുടെ സങ്കലനത്തിൽ അദിശകളുടെ ഗുണനഫലം വിതരണ നിയമം അനുസരിച്ച്.

അതായത് മൂന്ന് സദിശകൾ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$\vec{u}\cdot(\vec{} + \vec{}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$ (ഇടതത് വിതരണം)

$(\vec{u} + \vec{})\cdot\vec{} = \hat{Ý}\cdot c + \vec{b}\cdot c$ (വലതു വിതരണം)

ആനുപാതികമായി, $\vec{u}\cdot(\vec{} - \vec{}) = \vec{a}\cdot\vec{b} - \vec{a}\cdot\vec{c}$ കൂടാതെ $(\vec{u} - \vec{})\cdot\vec{} = \hat{Ý}\cdot c - \vec{b}\cdot c$

ഇത് ഏത് സംഖ്യകളുള്ള സദിശകക്കും പ്രയോജനപ്പെടുത്താവുന്നതാണ്.

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 70 15-02-2023 11:55:01

(ix) സദിശ അടയാളങ്ങൾ

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$(\vec{a}-\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$(\vec{a}\ \Re\vec{b})\ (\vec{a}\quad\vec{b}) = |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2$$

തെളിവ്

നിയമം (iii) അനുസരിച്ച്,

$(\vec{a}+\vec{b})^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + a\cdot b + b\cdot a = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b}$

ഇതുപോലെ മറ്റു ഫലങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് ഏതൊന്നും തെളിയിക്കാവുന്നതാണ്. ■

(x) അദിശകളുടെ ഗുണനഫലത്തിൽ രണ്ട് സദിശകൾക്ക് ഉപയോഗിക്കുന്ന നിയമം

$\vec{a}\ \Re a_1\hat{i}\quad a\ \hat{j}\quad a\ \hat{k}$ കൂടാതെ $\vec{b}\ \Re b_1\hat{i}\quad b\ \hat{j}\quad b\ \hat{k}$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$$\begin{aligned}\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k})\cdot(b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k})\\ &= a_1b_1(\hat{i}\cdot\hat{i})+a_1b_2(\hat{i}\cdot\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\cdot\hat{k})\\ &\quad +a_2b_1(\hat{j}\cdot\hat{i})+a_2b_2(\hat{j}\cdot\hat{j})+a_2b_3(\hat{j}\cdot\hat{k})+a_3b_1(\hat{k}\cdot\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\cdot\hat{j})+a_3b_3(\hat{k}\cdot\hat{k})\\ &= a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.\end{aligned}$$

അതുകൊണ്ട് രണ്ട് സദിശകളുടെ അദിശ ഗുണഫലങ്ങളുടെ തുക എന്നത് അതിന്റെ ആനുപാതികമായ ദീർഘചതുര ഘടകങ്ങൾക്ക് തുല്യമാണ്. ■

(xi) θ എന്നത് $\vec{a},\ \vec{b}$ എന്നീ രണ്ട് സദിശകൾക്കിടയിലുള്ള കോൺ ആകുന്നു. $\theta = \cos^{-1}\left[\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right]$

(xii) ഏതെങ്കിലും രണ്ട് സദിശകൾ $\vec{a},\ \vec{b}$ ആയാൽ $|\vec{a}\ \Re\vec{b}| \quad |\vec{a}| \quad |\vec{b}|$.

$\vec{a},\ \vec{b}$ എന്നിവ ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് വശങ്ങൾ ആകുകയും അവയുടെ തുക $\vec{a}+\vec{b}$ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്നത് ത്രികോണത്തിന്റെ മൂന്നാമത്തെ വശമാണെന്നും നിങ്ങൾക്കറിയാമല്ലോ. അതുകൊണ്ട് ത്രികോണ നിയമമനുസരിച്ച് ഒരു, $|\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}|$ ■

(xiii) രണ്ട് സദിശകൾ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $|\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|$ ഏതെങ്കിലുമൊന്ന് പൂജ്യസദിശമായാൽ സമാനത നിർണ്ണയിക്കപ്പെടുന്നു. അതിനാൽ രണ്ട് സദിശവും പൂജ്യമല്ലാത്തവ പ്രതിനിധീകരിച്ചാൽ

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

അതായത്, $\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = |\cos\theta| \le 1$

$$\Rightarrow |\vec{a}\cdot\vec{b}| \le |\vec{a}||\vec{b}|.$$

■

ഉദാഹരണം 8.11

$\vec{a}\cdot\vec{b}$ എന്നിവ കാണുക

(i) $\vec{a} = \hat{i}-\hat{j}+5\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i}-2\hat{k}$

(ii) $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നിവ പ്രതിനിധാനം ചെയ്യുന്ന ബിന്ദുക്കൾ $(2, 3, -1)$, $(-1, 2, 3)$ എന്നിവയാകുന്നു.

നിർദ്ധാരണം

(i) $\vec{a}\cdot\vec{b} = (\hat{i}-\hat{j}+5\hat{k})\cdot(3\hat{i}-2\hat{k}) = (1)(3)+(-1)(0)+(5)(-2) = 3-10 = -7$

(ii) $\vec{a} = 2\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ ഉം, $\vec{b} = -\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = (2)(-1)+(3)(2)+(-1)(3) = -2+6-3 = 1.$

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 71 15-02-2023 11:55:02

ഉദാഹരണം 8.12

$(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})$ ആയാൽ $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k},\ \vec{b}=3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=2\vec{a}\cdot a+5a\cdot b-3b\cdot b=2(1+1+4)+5(3+2-2)-3(9+4+1)=-15\,.$$

ഉദാഹരണം 8.13

$\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k},\ \vec{b}=-\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k},\ \vec{u}=3\hat{}+\hat{}$ ആയാൽ $\vec{a}+\lambda\vec{b}$ എന്നത് $\vec{c}$ യ്ക്ക് ലംബമായാൽ λ യുടെ വില കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\begin{aligned}(\vec{a}+\lambda\vec{b})\cdot\vec{c}=0 &\Rightarrow \vec{a}\cdot c+\lambda\vec{b}\cdot c=0\\ &\Rightarrow (6+2)+\lambda(-3+2)=0\\ &\Rightarrow \lambda=8.\end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 8.14

$|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$ ആയാൽ $\vec{a},\ \vec{b}$ എന്നിവ ലംബമാണെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\begin{aligned}|\vec{a}+\vec{b}| &= |\vec{a}-\vec{b}|\\ |\vec{a}+\vec{b}|\ &= |\vec{a}-\vec{b}|^2\\ |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b} &= |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}\\ \Rightarrow\quad 4\vec{a}\cdot\vec{b} &= 0\\ \vec{a}\cdot\vec{b} &= 0\end{aligned}$$

അതുകൊണ്ട് $\vec{a},\ \vec{b}$ എന്നിവ ലംബമാണ്.

ഉദാഹരണം 8.15

$\vec{r}$ ഒരു സദിശമായാൽ $\vec{r}=(\vec{r}\cdot\hat{i})\,\hat{i}+(\vec{r}\cdot\hat{j})\,\hat{j}+(\vec{r}\cdot\hat{k})\hat{k}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$\vec{r}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$\begin{aligned}\vec{r}\cdot\hat{i}\ &=\left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)\cdot\hat{i}=x\\ \vec{r}\cdot\hat{j}\ &=\left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)\cdot\hat{j}=y\\ \vec{r}\cdot\hat{k}\ &=\left(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}\right)\cdot\hat{k}=z\end{aligned}$$

$$(\vec{r}\cdot\hat{i})\,\hat{i}+(\vec{r}\cdot\hat{j})\,\hat{j}+(\vec{r}\cdot\hat{k})\hat{k}=x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k}=\vec{r}$$

അങ്ങനെ $\vec{r}=(\vec{r}\cdot\hat{i})\hat{i}+(\vec{r}\cdot\hat{j})\,\hat{j}+(\vec{r}\cdot\hat{k})\hat{k}$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 8.16

$5\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k},\ 6\hat{i}-8\hat{j}-\hat{k}$ എന്നീ സദിശകൾക്കിടയിലുള്ള കോൺ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$\vec{a}=5\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}\quad\vec{b}=6\hat{i}-8\hat{j}-\hat{k}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

θ എന്നത് അവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോൺ എന്നിരിക്കട്ടെ.

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 72 15-02-2023 11:55:03

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{30-24-4}{\sqrt{50}\ \sqrt{101}} = \frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{101}} \quad \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left[\frac{\sqrt{2}}{5\sqrt{101}}\right].$$

ഉദാഹരണം 8.17

A, B, C, D എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ (4, – 3, 0), (7, – 5, – 1), (– 2, 1, 3), (0, 2, 5) എങ്കിൽ $\overrightarrow{CD}$ യിൽ മേൽ $\overrightarrow{AB}$ യുടെ പ്രൊജക്ഷൻ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

മൂലബിന്ദു *O* എന്നിരിക്കട്ടെ.

അതുകൊണ്ട്, $\overrightarrow{OA} = 4\hat{i} - 3\hat{j}$; $\overrightarrow{OB} = 7\hat{i} - 5\hat{j} - \hat{k}$; $\overrightarrow{OC} = -2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$; $\overrightarrow{OD} = 2\hat{j} + 5\hat{k}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = 3\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}$; $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = 2\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$

$\overrightarrow{CD}$ യിൽ മേൽ $\overrightarrow{AB}$ യുടെ പ്രൊജക്ഷൻ $= \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{CD}\right|} = \dfrac{6-2-2}{3} = \dfrac{2}{3}.$

ഉദാഹരണം 8.18

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ മൂന്ന് യൂണിറ്റ് സദിശങ്ങൾ $\vec{a} - \sqrt{3}\,\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ എന്ന സമവാക്യത്തെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുകയും ചെയ്താൽ $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{c}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ കാണുക

നിർദ്ധാരണം

$\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{c}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ θ എന്നിരിക്കട്ടെ

$$\vec{a} - \sqrt{3}\,\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad |(\vec{a}+\vec{c})| = |\sqrt{3}\,\vec{b}|$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta = 3|\vec{b}|^2$$

$$\Rightarrow \quad 1 + 1 + (2)\,(1)\,(1)\cos\theta = 3(1)$$

$$\Rightarrow \quad \cos\theta = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

ഉദാഹരണം 8.19

(4, – 3, 1), (2, – 4, 5), (1, – 1, 0) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു സമകോണ ത്രികോണം രൂപീകരിക്കുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

വ്യക്തമായും ഈ ബിന്ദുക്കൾ ഒരു ത്രികോണത്തെ രൂപീകരിക്കും എന്ന് അറിയാം. ഇപ്പോൾ ഏതെങ്കിലും ഒരു കോൺ $\dfrac{\pi}{2}$ എന്ന് കരുതുക. അതുകൊണ്ട് ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ കാണുക. *O* മൂലബിന്ദുവായി കരുതി *A,B,C* എന്നിവയെ യഥാക്രമം (4, – 3, 1), (2, – 4, 5), (1, – 1, 0) എന്ന് കരുതുക.

$\overrightarrow{OA} = 4\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$, $\overrightarrow{OB} = 2\hat{i} - 4\hat{j} + 5\hat{k}$, $\overrightarrow{OC} = \hat{i} - \hat{j}$

ഇപ്പോൾ, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = -2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k}$

ഇതുപോലെ, $\overrightarrow{BC} = -\hat{i} + 3\hat{j} - 5\hat{k}$; $\overrightarrow{CA} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$

വ്യക്തമായി, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} = 0$

അങ്ങനെ ഒരു കോൺ $\dfrac{\pi}{2}$ അങ്ങനെ അവ ഒരു സമകോണ ത്രികോണം രൂപീകരിക്കുന്നു.

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 73 15-02-2023 11:55:04

കുറിപ്പ് 8.5

മൂന്ന് വശങ്ങൾ സദിശ രൂപത്തിൽ തന്നിരിക്കുന്നു എന്ന് സങ്കൽപ്പിക്കുക, താഴെ കാണുന്നവ തെളിയിക്കുക

(i) സദിശങ്ങളുടെ തുക $\vec{0}$ എന്നോ അല്ലെങ്കിൽ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് സദിശങ്ങളുടെ തുക മൂന്നാമത്തെ സദിശത്തിന് തുല്യമോ എന്നാൽ ഒരു ത്രികോണം രൂപപ്പെടുന്നു.

(ii) ഏതെങ്കിലും രണ്ട് സദിശങ്ങളുടെ ഡോട്ട് ഗുണനം 0 എന്നത് ഒരു കോൺ $\frac{\pi}{2}$ എന്ന് ഉറപ്പാക്കുക.

അഭ്യാസം 8.3

(1) $\vec{a}.\vec{b}$ കാണുക

(i) $\vec{a}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ യും $\vec{b}=3\hat{i}-4\hat{j}-2\hat{k}$ (ii) $\vec{a}=2\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}$ കൂടാതെ $\vec{b}=6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$.

(2) $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവ ലംബമായാൽ, λ യുടെ വില കാണുക

(i) $\vec{a}=2\hat{i}+\lambda\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ (ii) $\vec{a}=2\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$, $\vec{b}=3\hat{i}-2\hat{j}+\lambda\hat{k}$

(3) $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നിവ രണ്ട് സദിശകളും $|\vec{a}|=10, |\vec{b}|=15$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=75\sqrt{2}$ യും എങ്കിൽ $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ കാണുക.

(4) സദിശകൾക്കിടയിലുള്ള കോൺ കാണുക

(i) $2\hat{i}+3\hat{j}-6\hat{k}$, $6\hat{i}-3\hat{j}+2\hat{k}$ (ii) $\hat{i}-\hat{j}$, $\hat{j}-\hat{k}$

(5) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നിവ മൂന്ന് സദിശകളും $\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, $|\vec{a}|=3, |\vec{b}|=4, |\vec{c}|=7$, $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ കാണുക.

(6) $\vec{a}=2\hat{i}+3\hat{j}+6\hat{k}$, $\vec{b}=6\hat{i}+2\hat{j}-3\hat{k}$, $\vec{c}=3\hat{i}-6\hat{j}+2\hat{k}$ എന്നീ സദിശങ്ങൾ.

(7) $-\hat{i}-2\hat{j}-6\hat{k}, 2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, and $+3\hat{j}+5\hat{k}$ എന്നീ സദിശങ്ങൾ ഒരു സമകോണ ത്രികോണം രൂപീകരിക്കുന്നു എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(8) $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=6$, $|\vec{c}|=7$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ എങ്കിൽ, $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}$ കാണുക.

(9) (2, – 1, 3), (4, 3, 1), (3, 1, 2) എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമെന്ന് തെളിയിക്കുക.

(10) $\vec{a},\vec{b}$ എന്നിവ യൂണിറ്റ് സദിശങ്ങളും, അവയ്ക്കിടയിലെ കോൺ θ യും ആയാൽ,

(i) $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}|\vec{a}-\vec{b}|$ (ii) $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}|\vec{a}+\vec{b}|$ (iii) $\tan\frac{\theta}{2}=\frac{|\vec{a}-\vec{b}|}{|\vec{a}+\vec{b}|}$. എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(11) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നിവ മൂന്ന് സദിശകൾ എന്ന് കരുതുകയും $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{c}|=5$ ഉം ഓരോ സദിശകൾ മറ്റ് രണ്ട് സദിശകളുടെ തുകയ്ക്ക് ലംബവുമെങ്കിൽ $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|$ കാണുക.

(12) $2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}$ യ്ക്ക് മേൽ $\hat{i}+3\hat{j}+7\hat{k}$ യ്ക്ക് ഉള്ള പ്രൊജക്ഷൻ കാണുക.

(13) $\vec{b}=2\hat{i}+6\hat{j}+3\hat{k}$ യുടെ മേൽ $\vec{a}=\lambda\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}$ യ്ക്ക് ഉള്ള പ്രൊജക്ഷൻ 4 മാത്രകൾ എങ്കിൽ λ യുടെ മൂല്യം കാണുക.

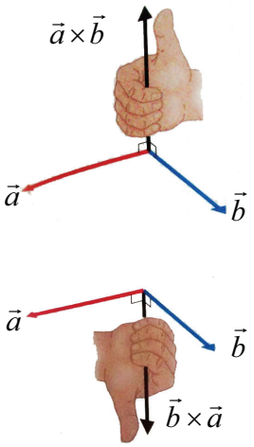
(14) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നിവ $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3, |\vec{c}|=4$ കൂടാതെ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ ൽ സ്ഥിതി ചെയ്താൽ $4\vec{a}\cdot\vec{b}+3\vec{b}\cdot\vec{c}+3\vec{c}\cdot\vec{a}$. കാണുക

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 74 15-02-2023 11:55:05

8.8.4 സദിശഗുണനം

രണ്ട് സദിശങ്ങൾക്ക് ഇടയിലുള്ള സദിശ ഗുണനം നിർവ്വചിക്കുന്നതിന്, നമുക്ക് വലതുകൈ, ഇടതു കൈ വ്യൂഹത്തിന്റെ ആശയം ആവശ്യമാണ്.

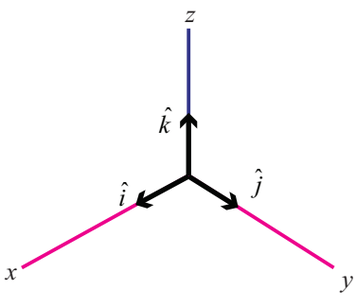
വലതു കൈയുടെ വിരലുകളെ $\vec{a}$ യോട് ചേർന്ന് വരുമാറ് ക്രമീകരിക്കുകയും, വിരലുകളെ $\vec{a}$ യിൽ നിന്ന് $\vec{b}$ ഇരിക്കുന്ന ദിശ നോക്കി മടക്കിയാൽ (കോൺ $180°$ യ്ക്ക് കുറവായിരിക്കണം). നമ്മുടെ പെരുവിരൽ $\vec{a}\times\vec{b}$ യുടെ ദിശയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. ഇപ്പോൾ വലത് കൈ നിയമം അനുസരിച്ച് $\vec{b}\times\vec{a}$ യുടെ ദിശ എന്നത് $\vec{a}\times\vec{b}$ യ്ക്ക് എതിർ ദിശയിൽ ഇരിക്കും. (ചിത്രം 8.38 കാണുക).



ചിത്രം 8.38

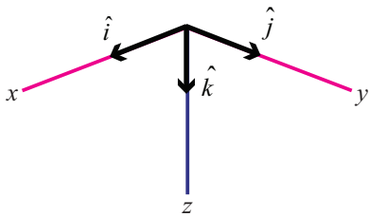
കൂടാതെ $\vec{a}$ യെ $\vec{b}$ യുടെ ദിശയെ നോക്കി കോൺ $\theta(<\pi)$ തിരിച്ചാൽ, $\vec{a}\times\vec{b}$ യുടെ ദിശ എന്നത് വലത് കൈ രീതിയിൽ ഇരിക്കുന്ന ദിശയിൽ തന്നെ എന്ന് കാണാൻ കഴിയും.

ഒരു കാർട്ടീഷൻ നിർദ്ദേശാങ്ക വ്യൂഹം വലത് കൈ രീതിയിൽ എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ ചിത്രം 8.39 ൽ കാണും വിധം അക്ഷങ്ങളിൽ ധനദിശയിൽ യൂണിറ്റ് സദിശങ്ങൾ ആയ $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ ക്രമപ്പെടുത്തണം. ചിത്രം 8.40 ൽ ഉള്ളതുപോലെ $\hat{k}$ യുടെ ദിശയെ ക്രമപ്പെടുത്തിയാൽ അതിനെ ഇടതു കൈ വ്യൂഹം എന്ന് വിളിക്കാം.



വലതുകൈ

ചിത്രം 8.39



ഇടതുകൈ

ചിത്രം 8.40

വലതുകൈ പിരിയാണി

ചിത്രം 8.41

ഇടത്കൈ പിരിയാണി

ചിത്രം 8.42

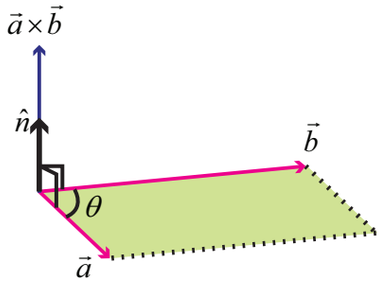
നിർവ്വചനം 8.17

പൂജ്യമല്ലാത്ത രണ്ട് സദിശകൾ $\vec{a}$ യുടെയും $\vec{b}$ യുടെയും **സദിശ ഗുണനം**, $\vec{a}\times\vec{b}$ എന്നെഴുതാം, ഇതിനെ നിർവചിക്കുന്നത്

$$\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n},$$

ഇവിടെ θ എന്നത് $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ $0\le\theta\le\pi$.

ഇവിടെ $\vec{a},\vec{b},\hat{n}$ ഒരു വലതു കൈ വ്യൂഹം രൂപീകരിക്കുന്നു.



ചിത്രം 8.43

ഈ ഫലം എന്നത് $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$ എന്ന അളവും $\hat{n}$. എന്ന ദിശയും ഉള്ള ഒരു സദിശമാകും.

കൂടാതെ $\vec{a}\times\vec{b}$ എന്ന സദിശ $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും ലംബമായിരിക്കും. അതായത് $\vec{a}$ യും $\vec{b}$ യും ഉൾപ്പെട്ട തലത്തിന് സാധാരണ $\vec{a}\times\vec{b}$ ആണ്.

കുറിപ്പ് 8.6

(i) $\hat{n}$ ന്റെ ദിശ തീരുമാനിക്കുന്നതിന് സദിശകളുടെ ക്രമം വളരെ പ്രാധാന്യമാണ്.

(ii) ഫലം ഒരു സദിശമെങ്കിൽ, ഈ ഗുണനത്തെ സദിശ ഗുണനം എന്ന് വിളിക്കാം. വീണ്ടും, ഈ ഗുണനം നിർവ്വചിക്കാൻ '×' എന്ന ചിഹ്നം ഉപയോഗിക്കുകയും, അങ്ങനെ അതിന് **ക്രോസ് ഗുണനം** എന്ന മറ്റൊരു പേരും കിട്ടിയിട്ടുമുണ്ട്.

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 75 15-02-2023 11:55:06

സദിശ ഗുണനത്തിന്റെ ജ്യാമിതീയ വ്യാഖ്യാനം

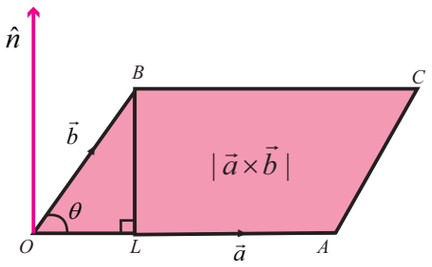
$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ എന്നീ സമീപവശങ്ങളോട് കൂടിയ $OACB$ എന്ന സാമാന്തരികം നിർമ്മിക്കുക.

$\angle AOB = \theta$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്,

$$\sin\theta = \frac{BL}{OB}$$

$$BL = (OB)\sin\theta = |\vec{b}|\sin\theta$$



ചിത്രം 8.44

ഇപ്പോൾ $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta = |\vec{a}|(BL)$

= (ആധാരം) (ഉയരം) = സാമാന്തരികം $OACB$യുടെ വിസ്തീർണ്ണം.

അങ്ങനെ, $\vec{a}\times\vec{b}$ എന്ന സദിശത്തിന്റെ അളവ് എന്നത് $\vec{a}$ യും $\vec{b}$ യും സമീപവശങ്ങളുള്ള സാമാന്തരികത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന് തുല്യമാകും. കൂടാതെ അതിന്റെ ദിശ $\hat{n}$ എന്നത് $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നിവ ഉൾപ്പെട്ട തലത്തിന് നോർമൽ ആകുകയും, $\vec{a},\vec{b},\hat{n}$ എന്നിവ ഒരു വലതു കൈ വ്യൂഹം സൃഷ്ടിക്കുകയും ചെയ്യും.

അങ്ങനെ, $|\vec{a}\times\vec{b}|$ = സമീപവശങ്ങൾ $\vec{a}$ യും $\vec{b}$ യും ഉള്ള സാമാന്തരികത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം.

സാമാന്തരികത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തിൽ നിന്ന്, സാമാന്തരികം $OACB$ യുടെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ പാതിയാണ് ത്രികോണം OAC യുടെ വിസ്തീർണ്ണം എന്ന് നമുക്ക് നിഗമനത്തിലെത്താം. ■

നിഗമനം

$\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നീ രണ്ട് വശങ്ങളോട് കൂടിയ ഏതൊരു ത്രികോണത്തിന്റെയും വിസ്തീർണ്ണം $= \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.

8.8.5 സവിശേഷതകൾ

(i) സദിശ ഗുണനം ക്രമവിനിമേയമല്ല.

നിർവ്വചനമനുസരിച്ച്

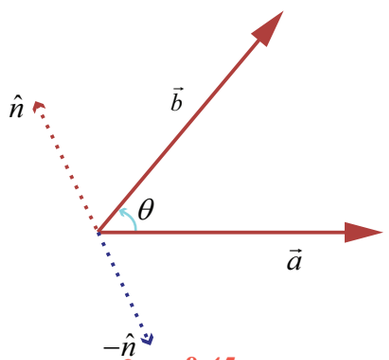
$$\vec{b}\times\vec{a} = |\vec{b}||\vec{a}|\sin\theta(-\hat{n})$$

[$\vec{b},\vec{a},-\vec{n}$ എന്നിവ ഒരു വലത് കൈ വ്യൂഹം രൂപീകരിക്കുന്നതിനാൽ]

$$= -|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$$

$$= -(\vec{a}\times\vec{b})$$

അങ്ങനെ സദിശ ഗുണനം ക്രമവിനിമേയമല്ല.



ചിത്രം 8.45

(ii) രണ്ട് സദിശകൾ സമരേഖീയം അല്ലെങ്കിൽ സമാന്തരം എങ്കിൽ $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$ (എങ്ങനെ?)

എന്നാൽ $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow$ $\vec{a} = \vec{0}$ അല്ലെങ്കിൽ $\vec{b} = \vec{0}$ അല്ലെങ്കിൽ $\vec{a}$ യും $\vec{b}$ യും സമാന്തരമാണ്.

(iii) പൂജ്യമല്ലാത്ത ഏത് രണ്ട് സദിശകൾ $\vec{a}$, $\vec{b}$ യ്ക്കും, $\vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a}$ യും $\vec{b}$ യും സമാന്തരമാണ്.

നിഗമനം

$$\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$$

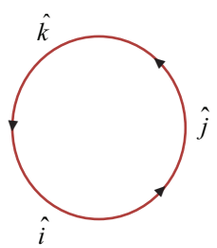
(iv) $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ എന്നിവയുടെ സാധാരണ അർത്ഥമനുസരിച്ച് (അവ വലതു കൈ വ്യൂഹം രൂപീകരിക്കുന്നു), താഴെ കാണുന്ന ഫലങ്ങൾ ലഭിക്കും.

വ്യക്തമായി,

$$\hat{i}\times\hat{i} = \hat{j}\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{k} = \vec{0}$$

$$\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}\ ;\ \hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}\ ;\ \hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$$

$$\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}\ ;\ \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}\ ;\ \hat{i}\times\hat{k} = -\hat{j}$$ (എങ്ങനെ?)



ചിത്രം 8.46

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 76 15-02-2023 11:55:08

(v) $\theta = \frac{\pi}{2}$ എങ്കിൽ $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\hat{n}$.

(vi) ഏതൊരു അദിശകൾ m, n എന്നിവയ്ക്ക്,

$$m\vec{a}\times n\vec{b} = mn(\vec{a}\times\vec{b}) = (mn\vec{a})\times\vec{b} = \vec{a}\times(mn\vec{b}) = n\vec{a}\times m\vec{b} \ .$$

(vii) സദിശ ഗുണനം സങ്കലനത്തിൻമേൽ വിതരണ നിയമം പാലിക്കുന്നു.

അതായത്, $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$

$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{c})$.

ഈ സവിശേഷത ഏതൊരു സദിശകൾക്കുള്ള വ്യവകലനത്തിനും വിപുലമാകാം.

അതായത്, $\vec{a}\times(\vec{b}-\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})-(\vec{a}\times\vec{c})$

$\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}) = (\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{a}\times\vec{d})$.

(viii) ക്രോസ് ഗുണനം കാണുന്നതിന്റെ പ്രവർത്തന രീതി

$\vec{a} = a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}$, $\vec{b} = b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= (a_1\hat{i}+a_2\hat{j}+a_3\hat{k}) \times (b_1\hat{i}+b_2\hat{j}+b_3\hat{k}) \\ &= a_1b_1(\hat{i}\times\hat{i})+a_1b_2(\hat{i}\times\hat{j})+a_1b_3(\hat{i}\times\hat{k})+a_2b_1(\hat{j}\times\hat{i}) \\ &\quad +a_2b_2(\hat{j}\times\hat{j})+a_2b_3(\hat{j}\times\hat{k})+a_3b_1(\hat{k}\times\hat{i})+a_3b_2(\hat{k}\times\hat{j})+a_3b_3(\hat{k}\times\hat{k}) \\ &= (a_2b_3-a_3b_2)\hat{i}-(a_1b_3-a_3b_1)\hat{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\hat{k}\end{aligned}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix} .$$

(ix) $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ θ എങ്കിൽ $\theta = \sin^{-1}\left[\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right]$.

(ഈ ഫലത്തിന്റെ തെളിവ് പരിശീലിക്കുന്നതിനായി മാറ്റിവെച്ചിട്ടുണ്ട്)

കുറിപ്പ് 8.7

ഇതിൽ θ എല്ലായ്പ്പോഴും ന്യൂനകോൺ ആയിരിക്കും. അങ്ങനെ, സദിശ ഗുണനം ഉപയോഗിച്ച് കോൺ കാണാൻ നമ്മൾ ശ്രമിക്കുകയാണെങ്കിൽ, നമുക്ക് ന്യൂനകോൺ മാത്രം ലഭിക്കുന്നു. അങ്ങനെ കോൺ കാണുന്നതിനുള്ള പ്രശ്നത്തിൽ, കോൺ θ യുടെ സ്ഥാനം ഊന്നൽ നൽക്കുന്നതിനാൽ, അദിശ ഗുണനം നമ്മൾ ഉപയോഗിക്കുന്നു.

(x) $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും ലംബമായ യൂണിറ്റ് സദിശങ്ങൾക്ക് $\pm\hat{n} = \pm\frac{(\vec{a}\times\vec{b})}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$ (എങ്ങനെ?)

$\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും ലംബമായതും λ അളവുമുള്ള സദിശകൾക്ക് $\pm\lambda\hat{n} = \pm\lambda\frac{(\vec{a}\times\vec{b})}{|\vec{a}\times\vec{b}|}$.

ഉദാഹരണം 8.20

$\vec{a} = 3\hat{i}+4\hat{j}$, $\vec{b} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ എങ്കിൽ $|\vec{a}\times\vec{b}|$ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & 4 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix} = \hat{i}(4-0)-\hat{j}(3-0)+\hat{k}(3-4) = 4\hat{i}-3\hat{j}-\hat{k} .$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |4\vec{i}-3\vec{j}-\vec{k}| = \sqrt{16+9+1} = \sqrt{26} .$$

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 77 15-02-2023 11:55:08

ഉദാഹരണം 8.21

$\vec{a} = -3\hat{i} + 4\hat{j} - 7\hat{k}$, $\vec{b} = 6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}$ എങ്കിൽ,

(i) $\vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ എന്നിവ പരസ്പരം ലംബമാണ്.

(ii) $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ എന്നിവ പരസ്പരം ലംബമാണ് എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം :

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 4 & -7 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \hat{i}(-12+14) - \hat{j}(9+42) + \hat{k}(-6-24) = 2\hat{i} - 51\hat{j} - 30\hat{k}$$

(i) $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (-3\hat{i} + 4\hat{j} - 7\hat{k}) \cdot (2\hat{i} - 51\hat{j} - 30\hat{k}) = -6 - 204 + 210 = 0$.

അതുകൊണ്ട്, $\vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ ഇവ ലംബമാണ്.

(ii) $\vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (6\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k}) \cdot (2\hat{i} - 51\hat{j} - 30\hat{k}) = 12 - 102 + 90 = 0.$

അതുകൊണ്ട് $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$ ഇവ ലംബമാണ്.

ഉദാഹരണം 8.22

$\vec{a} = 4\hat{i} - \hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = -2\hat{i} + j - 2\hat{k}$ എന്നിവ പരസ്പരം രണ്ട് സദിശകൾക്ക് ലംബവും അളവ് 6 ഉം ഉള്ള സദിശകൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \hat{i}(2-3) - \hat{j}(-8+6) + \hat{k}(4-2) = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

$\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും ലംബമായ യൂണിറ്റ് സദിശകൾ $\pm \dfrac{(\vec{a} \times \vec{b})}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = \pm \left[\dfrac{-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}}{3} \right]$

$\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും ലംബമായ അളവ് 6 ഉള്ള സദിശകൾ $\pm 2(-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})$.

ഉദാഹരണം 8.23

$\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ എന്നീ സദിശകൾക്ക് ഇടയിലുള്ള കോണുകളുടെ കൊസൈൻ, സൈൻ വില കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ θ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (4\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) = 8 - 2 + 6 = 12$$

$$|\vec{a}| = |2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}| = \sqrt{14} \quad ; \quad |\vec{b}| = |4\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}| = \sqrt{24}$$

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{12}{\sqrt{14}\sqrt{24}} = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}(2+6) - \hat{j}(4-12) + \hat{k}(-4-4) = 8\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k}$$

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |8\hat{i} + 8\hat{j} - 8\hat{k}| = 8\sqrt{3}$$

$$\sin\theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{14}\sqrt{24}} = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{7}\sqrt{12}} = \frac{2}{\sqrt{7}}.$$

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 78 15-02-2023 11:55:09

ഉദാഹരണം 8.24

$\vec{a} = 3\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k}, \vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ എന്നിവ സമീപവശങ്ങൾ ഉള്ള സാമാന്തരികത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i}(1+4) - \hat{j}(3-4) + \hat{k}(-3-1) = 5\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k} \ .$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = |5\hat{i} + \hat{j} - 4\hat{k}| = \sqrt{42}$$

സാമാന്തരികത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $\sqrt{42}$ മാത്രകൾ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 8.25

$\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നീ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് സദിശകൾക്ക് $|\vec{a}\times\vec{b}|^2 + (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \ |\vec{b}|^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

നിർദ്ധാരണം

നമുക്ക് അറിയാം, $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta$, $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

$$|\vec{a}\times\vec{b}|^2 + (\vec{a}\cdot\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \ |\vec{b}|^2 \sin^2\theta + |\vec{a}|^2 \ |\vec{b}|^2 \cos^2\theta$$

$$= |\vec{a}|^2 \ |\vec{b}|^2 (\sin^2\theta + \cos^2\theta) = |\vec{a}|^2 \ |\vec{b}|^2 .$$

ഉദാഹരണം 8.26

$A(1,0,0), B(0,1,0), C(0,0,1)$ എന്നീ ശീർഷങ്ങൾ ഉള്ള ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം :

നമുക്ക് ഇപ്പോൾ ത്രികോണത്തിന്റെ ഏതെങ്കിലും രണ്ട് വശങ്ങൾ കാണാം.

$$\overrightarrow{AB} = -\hat{i} + \hat{j} \ ; \ \overrightarrow{AC} = -\hat{i} + \hat{k}$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$$

$$|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3}$$

ത്രികോണം ABC യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

കുറിപ്പ് 8.8

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ യ്ക്ക് പകരം ഏത് രണ്ട് വശങ്ങൾ വേണമെങ്കിലും എടുക്കാം.

അഭ്യാസം 8.4

(1) $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{b} = 3\hat{i} + 5\hat{j} - 2\hat{k}$ എങ്കിൽ $\vec{a}\times\vec{b}$ യുടെ അളവ് കാണുക.

(2) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) + \vec{b}\times(\vec{c}+\vec{a}) + \vec{c}\times(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{0}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(3) $\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$, $\hat{i} + 3\hat{j} + 4\hat{k}$ എന്നീ സദിശകൾ ഉൾപ്പെട്ട ലംബമായതും അളവ് $10\sqrt{3}$ ഉള്ളതുമായ സദിശകൾ കാണുക.

(4) $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}-\vec{b}$ എങ്കിൽ $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ എന്നിവയ്ക്ക് ലംബവുമായ യൂണിറ്റ് സദിശകൾ കാണുക.

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 79 15-02-2023 11:55:11

(5) $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$, $3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ എന്നിവ സമീപവശങ്ങൾ ആയ സാമാന്തരികത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക

(6) $A(3, -1, 2)$, $B(1, -1, -3)$, $C(4, -3, 1)$ എന്നീ ശീർഷങ്ങളോട് കൂടിയ ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കാണുക.

(7) ത്രികോണം ABC യുടെ ശീർഷങ്ങൾ A, B, C ഇവയുടെ സ്ഥാന സദിശകൾ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എങ്കിൽ ത്രികോണം ABC യുടെ വിസ്തീർണ്ണം $\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}|$ എന്ന് തെളിയിക്കുക. ഇതിൽ നിന്നും A, B, C എന്നീ ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയമാകാനുള്ള നിബന്ധന കണ്ടെത്തുക.

(8) ഏതൊരു സദിശം $\vec{a}$ യ്ക്കും $|\vec{a}\times\hat{i}|^2+|\vec{a}\times\hat{j}|^2+|\vec{a}\times\hat{k}|^2=2|\vec{a}|^2$ എന്ന് തെളിയിക്കുക .

(9) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ എന്നീ യൂണിറ്റ് സദിശകൾക്ക് $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0$ ഉം, $\vec{b}$ യ്ക്കും $\vec{c}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ $\frac{\pi}{3}$ ഉം എങ്കിൽ $\vec{a}=\pm\frac{2}{\sqrt{3}}(\vec{b}\times\vec{c})$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(10) $2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$ കൂടാതെ $\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ എന്നീ സദിശകൾക്ക് ഇടയിലുള്ള കോൺ സദിശ ഗുണനം ഉപയോഗിച്ച് കാണുക.

T2R1Y

അഭ്യാസം 8.5

കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയിൽ നിന്ന് ശരിയായവ അല്ലെങ്കിൽ ഏറ്റവും യോജിച്ചത് തെരഞ്ഞെടുത്തെഴുതുക

(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}$ ന്റെ മൂല്യം എന്നത്

(1) $\overrightarrow{AD}$ (2) $\overrightarrow{CA}$ (3) $\vec{0}$ (4) $-\overrightarrow{AD}$

(2) $\vec{a}+2\vec{b}$, $3\vec{a}+m\vec{b}$ എന്നിവ സമാന്തരം എങ്കിൽ, m ന്റെ മൂല്യം

(1) 3 (2) $\frac{1}{3}$ (3) 6 (4) $\frac{1}{6}$

(3) $\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, $\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$ എന്നീ സദിശകളുടെ തുകയ്ക്ക് സമാന്തരമായ യൂണിറ്റ് സദിശം

(1) $\frac{\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{5}}$ (2) $\frac{2\hat{i}+\hat{j}}{\sqrt{5}}$ (3) $\frac{2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}}{\sqrt{5}}$ (4) $\frac{2\hat{i}-\hat{j}}{\sqrt{5}}$

(4) ഒരു സദിശം $\overrightarrow{OP}$ എന്നത് x, y എന്നീ അക്ഷങ്ങളുടെ ധനദിശയിൽ യഥാക്രമം $60°, 45°$ എന്നീ കോണുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു. എന്നാൽ z- അക്ഷത്തിനും $\overrightarrow{OP}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ

(1) $45°$ (2) $60°$ (3) $90°$ (4) $30°$

(5) $\overrightarrow{BA}=3\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ യും, B യുടെ സ്ഥാന സദിശം $\hat{i}+3\hat{j}-\hat{k}$ ഉം എങ്കിൽ A യുടെ സ്ഥാനസദിശം

(1) $4\hat{i}+2\hat{j}+\hat{k}$ (2) $4\hat{i}+5\hat{j}$ (3) $4\hat{i}$ (4) $-4\hat{i}$

(6) ഒരു സദിശം നിർദ്ദേശാങ്ക അക്ഷങ്ങളുടെ ധനദിശയുമായി തുല്യ കോണുകൾ ഉണ്ടാക്കുന്നു. എന്നാൽ ഓരോ കോണും _____ നു സമമാണ്

(1) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ (2) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ (3) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (4) $\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 80 15-02-2023 11:55:12

(7) $\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{b}-\vec{c}$, $\vec{c}-\vec{a}$ എന്നീ സദിശങ്ങൾ

(1) പരസ്പരം സമാന്തരമാണ് (2) യൂണിറ്റ് സദിശകൾ

(3) പരസ്പരം ലംബമായ സദിശകൾ (4) സമതല സദിശകൾ.

(8) $ABCD$ ഒരു സാമാന്തരികം എങ്കിൽ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$ എന്നത്

(1) $2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$ (2) $4\overrightarrow{AC}$ (3) $4\overrightarrow{BD}$ (4) $\vec{0}$

(9) $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നിവ സമീപ വശങ്ങൾ ഉള്ള സമാന്തരികം $ABCD$ യുടെ ഒരു വികർണ്ണം $\vec{a}+\vec{b}$ എങ്കിൽ വികർണ്ണം $\overrightarrow{BD}$ എന്നത്

(1) $\vec{a}-\vec{b}$ (2) $\vec{b}-\vec{a}$ (3) $\vec{a}+\vec{b}$ (4) $\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$

(10) A, B ഇവയുടെ സ്ഥാന സദിശകൾ $\vec{a},\vec{b}$ എങ്കിൽ താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഏത് ബിന്ദുവിന്റെ സ്ഥാന സദിശമാണ് AB യിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നത്

(1) $\vec{a}+\vec{b}$ (2) $\frac{2\vec{a}-\vec{b}}{2}$ (3) $\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$ (4) $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{3}$

(11) $\vec{a}=\vec{b}$ $\vec{c}$ എന്നിവ മൂന്ന് സമരേഖീയ ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാന സദിശകൾ എങ്കിൽ, താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയിൽ ഏതാണ് ശരി?

(1) $\vec{u}=\vec{}+\vec{}$ (2) $2\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$ (3) $\vec{b}=\vec{c}+\vec{a}$ (4) $4\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$

(12) $\vec{r}=\frac{9\vec{a}+7\vec{b}}{16}$ എങ്കിൽ, P എന്നത് $\vec{r}$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നീ സ്ഥാന സദിശകൾ ഉള്ള ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖയെ വിഭജിക്കുന്ന അനുപാതം

(1) 7 : 9 ആന്തരികമായി (2) 9 : 7 ആന്തരികമായി

(3) 9 : 7 ബാഹ്യമായി (4) 7 : 9 ബാഹ്യമായി

(13) $\lambda\hat{i}+2\lambda\hat{j}+2\lambda\hat{k}$ എന്നത് യൂണിറ്റ് സദിശം എങ്കിൽ, λ യുടെ മൂല്യം

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{4}$ (3) $\frac{1}{9}$ (4) $\frac{1}{2}$

(14) ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളുടെ സ്ഥാന സദിശങ്ങൾ $3\hat{i}+4\hat{j}-4\hat{k}$, $2\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$ കേന്ദ്രകത്തിന്റെ സ്ഥാന സദിശം $\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ എങ്കിൽ, മൂന്നാമത്തെ ശീർഷത്തിന്റെ സ്ഥാന സദിശം എന്നത്,

(1) $-2\hat{i}-\hat{j}+9\hat{k}$ (2) $-2\hat{i}-\hat{j}-6\hat{k}$ (3) $2\hat{i}-\hat{j}+6\hat{k}$ (4) $-2\hat{i}+\hat{j}+6\hat{k}$

(15) $|\vec{a}+\vec{b}|=60, |\vec{a}-\vec{b}|=40$, $|\vec{b}|=46,$ എങ്കിൽ $|\vec{a}|$ എന്നത്

(1) 42 (2) 12 (3) 22 (4) 32

(16) $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നിവ ഒരേ അളവും അവയ്ക്കിടയിലുള്ള കോൺ $60°$ യും, അവയുടെ അദിശ ഗുണനം എന്നത് $\frac{1}{2}$ ഉം എങ്കിൽ $|\vec{a}|$ എന്നത്

(1) 2 (2) 3 (3) 7 (4) 1

(17) $\vec{a}=(\sin\theta)\hat{i}+(\cos\theta)\hat{j}$, $\vec{b}=\hat{i}-\sqrt{3}\hat{j}+2\hat{k}$ എന്നിവ ലംബമായി വരുന്നത് $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ എങ്കിൽ, θ യുടെ മൂല്യം

(1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{\pi}{6}$ (3) $\frac{\pi}{4}$ (4) $\frac{\pi}{2}$

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 81 15-02-2023 11:55:13

(18) $|\vec{a}|=13, |\vec{b}|=5$ കൂടാതെ $\vec{a}\cdot\vec{b}=60°$ എങ്കിൽ $|\vec{a}\times\vec{b}|$ യുടെ മൂല്യം

(1) 15 (2) 35 (3) 45 (4) 25

(19) $\vec{a}, \vec{b}$ എന്നീ സദിശകൾക്കിടയിലെ കോൺ $\theta=120°$ $|\vec{a}|=1, |b|=2$, എങ്കിൽ $[(\vec{a}+3\vec{b})\times(3\vec{a}-\vec{b})]^2$ ന്റെ മൂല്യം

(1) 225 (2) 275 (3) 325 (4) 300

(20) $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നി സദിശകളുടെ അളവ് 2 ഉം അവയ്ക്കിടയിലെ കോൺ $60°$ യും എങ്കിൽ, $\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{b}$ ഇവയ്ക്കിടയിലെ കോൺ

(1) 30° (2) 60° (3) 45° (4) 90°

(21) $\hat{i}+3\hat{j}+\lambda\hat{k}$ ൽ $5\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k}$ യുടെ പ്രൊജക്ഷൻ $\hat{i}+3\hat{j}+\lambda\hat{k}$ ൽ $5\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k}$ യുടെ പ്രൊജക്ഷന് സമം എങ്കിൽ λ യുടെ മൂല്യം

(1) ± 4 (2) ± 3 (3) ± 5 (4) ± 1

(22) $\hat{u}+5\hat{}-7\hat{}$ എന്ന സദിശത്തിന്റെ ആരംഭ ബിന്ദുവും അവസാന ബിന്ദുവും (1, 2, 4), (2, – 3λ – 3) എന്നിവ എങ്കിൽ λ യുടെ മൂല്യം

(1) $\frac{7}{3}$ (2) $--$ (3) $-\frac{5}{3}$ (4) $\frac{5}{3}$

(23) $10\hat{i}+3\hat{j}$, $12\hat{i}-5\hat{j}$, $a\hat{i}+11\hat{j}$ എന്നിവ സ്ഥാനസദിശകൾ ഉള്ള മൂന്ന് ബിന്ദുക്കൾ സമരേഖീയ മെങ്കിൽ a യുടെ മൂല്യം

(1) 6 (2) 3 (3) 5 (4) 8

(24) $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=2\hat{i}+x\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{c}=\hat{i}-\hat{j}+4\hat{k}$ കൂടാതെ $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=70$ എങ്കിൽ x ന്റെ മൂല്യം

(1) 5 (2) 7 (3) 26 (4) 10

(25) $\vec{a}=\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}, |\vec{b}|=5$ കൂടാതെ $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ $\frac{\pi}{6}$ എങ്കിൽ ഈ രണ്ട് സദിശകൾ വശങ്ങളായി രൂപം കൊണ്ട ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം

(1) $\frac{7}{4}$ (2) $\frac{15}{4}$ (3) $\frac{3}{4}$ (4) $\frac{17}{4}$

സംഗ്രഹം

ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ നമ്മൾ താഴെ പറയുന്നവയുടെ അറിവ് നേടിയിട്ടുണ്ട് :

- ഒരു **അദിശം** അതിന്റെ അളവ് നിയന്ത്രിക്കുന്ന അളവാണ്.
- ഒരു **സദിശം** എന്നത് അതിന്റെ വ്യാപ്തിയും ദിശയും നിർണ്ണയിക്കുന്ന അളവാണ്
- സദിശത്തിന്റെ ഉത്ഭവം തെരഞ്ഞെടുക്കാൻ നമുക്ക് സ്വാതന്ത്ര്യം ഉണ്ടെങ്കിൽ ഇത് ഒരു **സ്വതന്ത്ര സദിശം** എന്നും ചില നിർദ്ദിഷ്ട ബിന്ദുവിൽ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട് എങ്കിൽ ആ സദിശം, **പ്രാദേശിക വൽക്കരിച്ച സദിശം** ആണെന്ന് പറയാം.
- രണ്ടോ അതിലധികമോ സദിശകൾ **ഒരേ തലത്തിൽ** ആണെന്ന് പറയണമെങ്കിൽ, അവ സമതലത്തിലോ അല്ലെങ്കിൽ സമതലത്തിന് സമാന്തരമോ ആയിരിക്കണം.
- രണ്ട് സദിശകൾ **സമം** ആകണമെങ്കിൽ, അവയ്ക്ക് തുല്യ നീളവും ഒരേ ദിശയും ആകണം.
- വ്യാപ്തം പൂജ്യവും അനിയന്ത്രിതമായ ദിശയും ഉള്ള ഒരു സദിശമാണ് **പൂജ്യസദിശം.**
- വ്യാപ്തം 1 ഉള്ള സദിശമാണ് **ഏകാങ്ക (യൂണിറ്റ്) സദിശം** .

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 82 15-02-2023 11:55:14

- $\vec{a}$ ഒരു സദിശവും m ഒരു അദിശവും എന്നിരിക്കട്ടെ. എന്നാൽ $m\vec{a}$ എന്ന സദിശത്തെ $\vec{a}$ എന്ന **സദിശതത്തിന്റെ അദിശ ഗുണനം** m എന്ന് പറയാം.
- $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നീ രണ്ട് സദിശങ്ങൾ **സമാന്തരമെങ്കിൽ** $\vec{a} = \lambda\vec{b}$, ഇവിടെ λ ഒരു അദിശം.
- $\vec{a}, \vec{b}$, $\vec{c}$ എന്നിവ ക്രമമായി ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ വശങ്ങൾ എങ്കിൽ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$
- സദിശ സങ്കലനം സംയോജനമാണ്.
- ഏതൊരു സദിശം $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.
- ഏതൊരു സദിശം $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$.
- സദിശ സങ്കലനം ക്രമവിനിമേയമാണ്.
- "ഒരേ ക്രമത്തിൽ എടുത്ത ഒരു ത്രികോണത്തിന്റെ രണ്ട് വശങ്ങളാൽ രണ്ട് സദിശകളെ അളവിലും ദിശയിലും എടുക്കുന്നു എങ്കിൽ അവയുടെ തുക, മൂന്നാമത്തെ വശം വിപരിത ക്രമത്തിൽ എടുത്തതിനെ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു". ഇത് സങ്കലനത്തിന്റെ **ത്രികോണ നിയമം** എന്ന് പറയാം.
- സാമാന്തരികം $OABC$ യിൽ, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ എന്നിവ രണ്ട് സമീപ വശങ്ങളെ സൂചിപ്പിക്കുകയും വികർണ്ണം $\overrightarrow{OC}$ അവയുടെ തുകയെ സൂചിപ്പിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു എങ്കിൽ അതിനെ **സങ്കലനത്തിന്റെ സാമാന്തിരിക നിയമം** എന്നു പറയുന്നു.
- α, β, γ എന്നിവ ദിശ കോണുകൾ എങ്കിൽ $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ ദിശ കോണുകൾ ആണ്.
- $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ എന്ന സദിശത്തിന്റെ ദിശ അനുപാതങ്ങൾ ü, , ആണ്.
- $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ എന്നിവ ഒരേ തലത്തിൽ ഉള്ള സദിശകൾ എങ്കിൽ, തലത്തിൽ ഉള്ള ഏതൊരു സദിശത്തെയും $l\vec{a} + m\vec{b} + n\vec{c}$ എന്ന് ഒരേ രീതിയിൽ എഴുതാം.

ഒരു ബിന്ദുവിനെറ സ്ഥാനസദിശം $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ഉം $\vec{r}$ ന്റെ ദിശ കോണുകൾ, α, β, γ യും എന്നിരിക്കട്ടെ

(i) $\vec{r}$ ന്റെ ദിശ കോസൈനുകളുടെ തുകയുടെ വർഗ്ഗം 1 ആയിരിക്കും.

(ii) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$.

(iii) $\vec{r}$ ന്റെ ദിശ കോസൈനുകൾ $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

(iv) l, m, n എന്നിവ ഒരു സദിശത്തിന്റെ ദിശ കോസൈനുകൾ എങ്കിൽ $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

(v) ഏതൊരു യൂണിറ്റും സദിശത്തെയും $\cos\alpha\hat{i} + \cos\beta\hat{j} + \cos\gamma\hat{k}$ എന്നെഴുതാം.

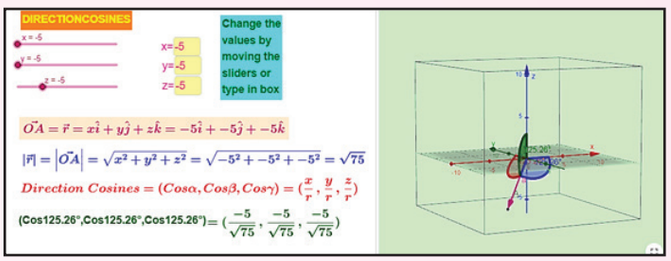
- $\vec{a}$ യുടെയും $\vec{b}$ യുടെയും **അദിശ ഗുണനം** $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ ആകുന്നു.
- പൂജ്യം അല്ലാത്ത രണ്ട് സദിശങ്ങൾ $\vec{a}$, $\vec{b}$ എന്നിവയുടെ **സദിശ ഗുണനം**, $\vec{a}\times\vec{b}$ എന്നെഴുതുകയും $\vec{a}\times\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\,\hat{n}$, എന്ന് നിർവ്വചിക്കുകയും ചെയ്യാം, ഇവിടെ $\vec{a}$ യ്ക്കും $\vec{b}$ യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള കോൺ θ, $0 \le \theta \le \pi$ ഇവിടെ $\vec{a}, \vec{b}, \hat{n}$ എന്നിവ ഒരു വലത് കൈ വ്യൂഹം രൂപികരിക്കുന്നു.

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 83 15-02-2023 11:55:16

ICT കോർണർ 8(a)

സദിശ ബീജഗണിതം

പ്രതീക്ഷിച്ച ഫലം

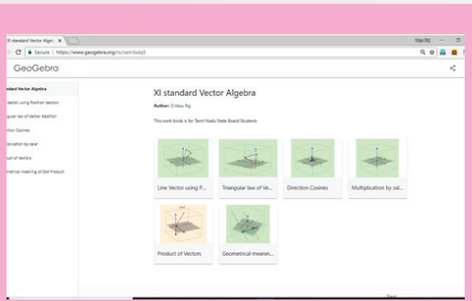


ഘട്ടം 1

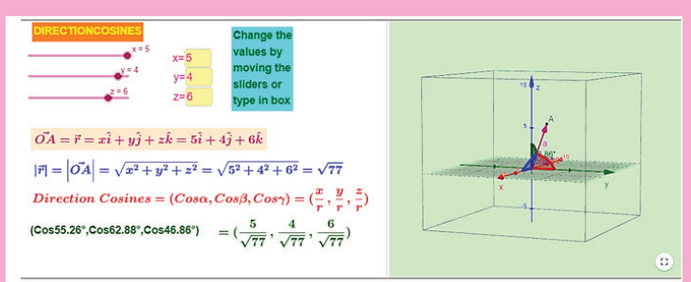
ബ്രൗസർ ഓപ്പൺ ചെയ്ത് താഴെക്കൊടുത്തിട്ടുള്ള URL ലിങ്ക് ടൈപ്പ് ചെയ്യുക. അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക. ജിയോജിബ്ര വർക്ക് ഷീറ്റിൽ XI സ്റ്റാൻഡേർഡ് സദിശ ബീജഗണിതം പ്രത്യക്ഷമാകും. അതിൽ ധാരാളം വർക്ക് ഷീറ്റുകൾ നിങ്ങളുടെ പാഠ ഭാഗമായി ബന്ധപ്പെട്ട് ഉണ്ടാകും.

ഘട്ടം 2

ദിശ കോസൈനുകൾ സെലക്റ്റ് ചെയ്യുക. വലത് വശത്ത് 3-D രൂപീകരണം കാണാം. വ്യത്യസ്ത സ്ഥാനങ്ങളിൽ മൗസ് ചലിപ്പിച്ച് റൈറ്റ് ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് 3-D ചിത്രം കറക്കാവുന്നതാണ്.



ഘട്ടം 1



ഘട്ടം 2

ഈ ലിങ്കിൽ ബ്രൗസ് ചെയ്യുക:

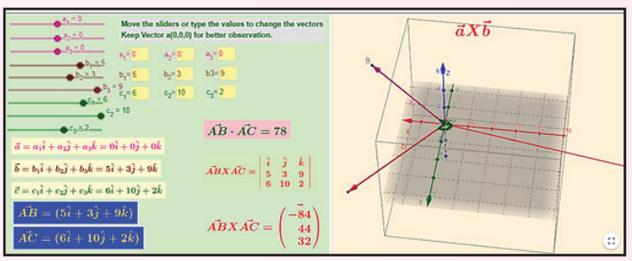
XI സ്റ്റാൻഡേർഡ് - സദിശ ബീജഗണിതം: https://ggbm.at/cem3sdq5

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 84 15-02-2023 11:55:16

ICT കോർണർ 8(b)

സദിശ ബീജഗണിതം

പ്രതീക്ഷിച്ച ഫലം



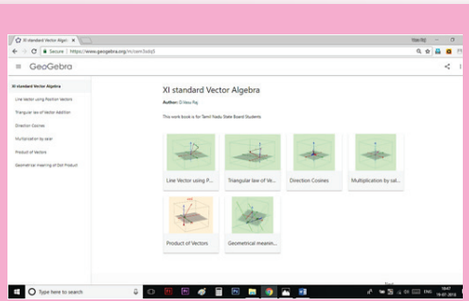
ഘട്ടം 1

ബ്രൗസർ ഓപ്പൺ ചെയ്ത് URL ലിങ്ക് ടൈപ്പ് ചെയ്യുക. അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക. ജിയോജിബ്ര വർക്ക് ഷീറ്റിൽ XI സ്റ്റാൻഡേർഡ് സദിശ ബീജഗണിതം പ്രത്യക്ഷമാകും. അതിൽ നിങ്ങളുടെ പാഠ ഭാഗമായി ബന്ധപ്പെട്ട് ധാരാളം വർക്ക് ഷീറ്റുകൾ ഉണ്ടാകും.

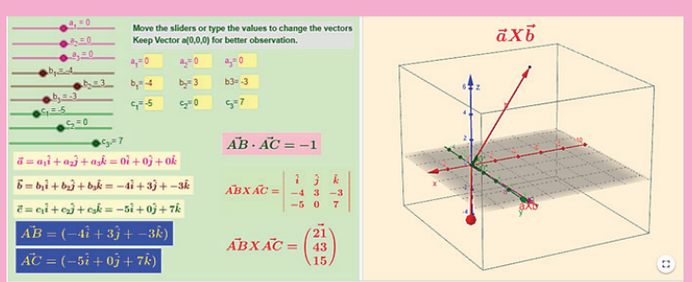
ഘട്ടം 2

സദിശങ്ങളുടെഗുണനം സെലക്റ്റ് ചെയ്യുക. വലത് വശത്ത് 3-D രൂപീകരണം വലതു വശത്ത് കാണാം. വ്യത്യസ്ത സ്ഥാനങ്ങളിൽ മൗസ് ചലിപ്പിച്ച് റൈറ്റ് ക്ലിക്ക് ചെയ്ത് 3-D ചിത്രം കറക്കാവുന്നതാണ്

സദിശം വ്യത്യാസപ്പെടുത്തുന്നതിന് x, y, z ന് വിലകൾ കൊടുക്കുകയോ സ്ലൈഡേർസ് ചലിപ്പിക്കുകയോ ചെയ്യാം. വ്യക്തമായി മനസ്സിലാക്കുന്നതിന് a_1, a_2, a_3 ഇവയുടെ വിലകൾ വ്യത്യാസപ്പെടുത്താതിരിക്കണം. ABXAC യ്ക്ക് വേണ്ടി അവയുടെ ഘടകങ്ങൾ ലംബമായി കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്.



ഘട്ടം 1



ഘട്ടം 2

ഈ ലിങ്കിൽ ബ്രൗസ് ചെയ്യുക:

XI സ്റ്റാൻഡേർഡ് - സദിശ ബീജഗണിതം : https://ggbm.at/cem3sdq5

Mal_08_11th-Maths-Vol2-Unit8.indd 85 15-02-2023 11:55:17

അദ്ധ്യായം 9

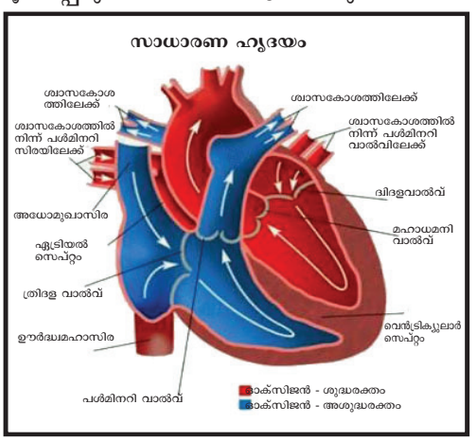
അവകലന കലനം - പരിധികളും തുടർച്ചാപ്രതിഭാസവും

"മനുഷ്യൻ കടന്നു പോകുന്നു പക്ഷേ അവയുടെ പ്രവർത്തികൾ നിലനിൽക്കുന്നു"

- അഗസ്റ്റിൻ ലൂയിസ് കാഷി

9.1 ആമുഖം

കലനം എന്നത് മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിനെ കുറിക്കുന്നതാണ്. ശാസ്ത്രത്തിന്റെ എല്ലാ ശാഖകളിലും മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് സംഭവിക്കുന്നു. ഒരു **ഗണിത ശാസ്ത്രജ്ഞന്** ഒരു വക്രത്തിലെ നേർരേഖയിൽ ഏർപ്പെടുന്ന വ്യതിയാനങ്ങളെ അളക്കുന്നതിൽ താല്പര്യമുണ്ടായിരിക്കും. എന്നാൽ ഒരു **ഭൗതിക ശാസ്ത്രജ്ഞന്** ചലിക്കുന്ന വസ്തുവിന്റെ വേഗതയിലും വിസ്താപനത്തിലും ഏർപ്പെടുന്ന മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിൽ താല്പര്യം ഉണ്ടായിരിക്കും. ഒരു **ശാസ്ത്രജ്ഞൻ** ഒന്നോ അധിലധികമോ പ്രാരംഭ വസ്തുക്കളിൽ നിന്നും (അഭിക്രിയ പദാർത്ഥങ്ങൾ) ഒന്നോ അധിലധികമോ പദാർത്ഥങ്ങൾ (ഉൽപ്പന്നങ്ങൾ) രൂപപ്പെടുന്ന രാസ അഭിക്രിയയുടെ നിരക്ക് അറിയുന്നതിൽ താല്പര്യം ഉണ്ടായിരിക്കും.



ഒരു **ജീവശാസ്ത്രജ്ഞന്** ഒരു ജന്തു സമൂഹത്തിലോ സസ്യസമൂഹത്തിലോ ഉള്ള അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണത്തിൽ ഏർപ്പെടുന്ന മാറ്റങ്ങളുടെ വിശകലനത്തിൽ താല്പര്യം ഉണ്ടായിരിക്കും. അതു കൂടാതെ അവ ധമനികൾ, സിരകൾ പോലുള്ള രക്തക്കുഴലുകളിലൂടെ ഒഴുകുന്ന രക്തം ഏതു ഭാഗത്താണ് ഏറ്റവും കുറയുന്നതും, കൂടുന്നതും എന്ന് മനസ്സിലാക്കുന്നതിലും താല്പര്യമുള്ളവരായിരിക്കും.

ഒരു **സാമ്പത്തിക വിദഗ്ധൻ**, ആവശ്യം വരുമാനം, ലാഭം എന്നിവയുടെ പ്രവർത്തനങ്ങളിൽ ഏർപ്പെടുന്ന മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിലൂടെ രൂപപ്പെടുന്ന നാമ മാത്ര ആവശ്യം, നാമമാത്ര വരുമാനം, നാമ മാത്ര ലാഭം എന്നിവയെക്കുറിച്ച് പഠിക്കുന്നു.

ഭൂമിശാസ്ത്രജ്ഞൻമാർ ഉരുകിയ പാറക്കുഴമ്പ്, ചുറ്റുമുള്ള പാറകളിലേക്ക് താപം കടത്തി സ്വയം തണുക്കുന്നതിനുള്ള നിരക്കിനെ അളക്കുന്നതിൽ താല്പര്യം കാണിക്കുന്നു. ഒരു **എഞ്ചിനീയർ** മുകളിലുള്ള ജലസംഭരണിയിലേക്ക് വെള്ളം കയറുന്നതിലും അതിൽ നിന്നും പുറത്തേക്കു പോകുന്നതിലും ഏർപ്പെടുന്ന തോതിനെ മനസ്സിലാക്കുവാൻ ആഗ്രഹിക്കുന്നു. ഒരു **നഗരഭൂമിശാസ്ത്രജ്ഞൻ** നഗരം വികസിക്കുമ്പോൾ ഉണ്ടാകുന്ന ജനസംഖ്യാ സാന്ദ്രതയിൽ ഏർപ്പെടുന്ന നിരക്കിനെ അളക്കുവാൻ താല്പര്യപ്പെടുന്നു.

മാനസികശാസ്ത്ര പഠന സിദ്ധാത്തിൽ താല്പര്യമുള്ളവർ പഠന വക്രതയെക്കുറിച്ചു പഠിക്കുന്നു. ഇത് ഒരാളുടെ പരിശീലന കാലത്തെ സംബന്ധിച്ച പഠന ശേഷി നൈപുണ്യത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ആകുന്നു. സമയം കടന്നു പോകുന്നതിനനുസരിച്ച് പ്രകടനശേഷിയുടെ നിരക്കിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ താല്പര്യം കാണിക്കുന്നു.

നാം ഒരു ഇരുണ്ട മുറിയിൽ പ്രവേശിക്കുമ്പോൾ ചുറ്റിലുമുള്ള വസ്തുക്കളെ കാണുന്നതിന് കൂടുതൽ പ്രകാശം അകത്ത് പ്രവേശിക്കുന്നതിന് സഹായമാകുംവിധം നമ്മുടെ കൃഷ്ണമണികൾ വികസിക്കുകയും വസ്തുക്കളെ കാണാൻ സാധിക്കുകയുംചെയ്യുന്നു.എന്നാൽ ഇതിന് വിപരീതമായി അധിക പ്രകാശമുള്ള മുറിയിൽ പ്രവേശിക്കുമ്പോൾ അധിക പ്രകാശത്താൽ നമ്മുടെ കാഴ്ച്ച ശക്തിയെ ബാധിക്കാത്ത രീതിയിൽ കൃഷ്ണമണി ചുരുങ്ങി അകത്തു പ്രവേശിക്കുന്ന പ്രകാശത്തിന്റെ അളവിനെ കുറയ്ക്കുകയും ചെയ്യുന്നു ഗവേഷകർ ഇതുപോലുള്ള പ്രതിഭാസങ്ങളെ ഗണിത പരിധികൾമൂലം പഠിക്കുന്നു.

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 86 14-02-2023 17:21:24

ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിൽ വേഗത, സാന്ദ്രത, വൈദ്യുതിയുടെ ഒഴുക്ക്, വിദ്യുത്ശക്തി കൂടാതെ താപനിലയിലെ വ്യതിയാനങ്ങൾ: രസതന്ത്രത്തിൽ പ്രതി പ്രവർത്തനത്തിന്റെ നിരക്ക്, അമർത്താനുള്ളശേഷി (ജീവശാസ്ത്രത്തിൽ വളർച്ചാ നിരക്കും രക്തഓട്ടത്തിന്റെ വേഗവും, സാമ്പത്തികശാസ്ത്രത്തിൽ നാമമാത്രചിലവ്, നാമമാത്ര ആവശ്യം; ഭൗതികശാസ്ത്രത്തിൽ താപം കടക്കുന്ന നിരക്ക്; മനശാസ്ത്രത്തിൽ പ്രവർത്തന നൈപുണ്യം ഇവയെല്ലാം തന്നെ ശാസ്ത്രത്തിലെ അവകലജം എന്ന തത്വമുപയോഗിച്ച് കണക്കാക്കപ്പെടുന്നു.

മുകളിൽ പറഞ്ഞവ ഗണിതശേഷിയെ അതിന്റെ ഏറ്റവും അടിസ്ഥാനപരമായ സ്വഭാവത്തിന് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്. ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ കാപ്പെടുന്ന ഏറ്റവും സവിശേഷമായ ഒരേ ഒരു അവകലജം ശാസ്ത്രതത്തിന്റെ വിവിധ ശാഖകളിൽ പലതരത്തിലുള്ള വിശദീകരണങ്ങൾ നൽകുന്നു. നമ്മൾ ഗണിത ആശയങ്ങളെ രൂപപ്പെടുത്തുമ്പോൾ അവയുടെ ഫലങ്ങൾ ശാസ്ത്രത്തിന്റെ വിവിധ ശാഖകളിൽ പ്രയോജനപ്പെടുന്നു. ശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഓരേ ശാഖയിലും രൂപപ്പെടുന്ന വ്യക്തിഗത ആവശ്യങ്ങളെക്കാളും ഇത് കൂടുതൽ കാര്യക്ഷമമാണ്.

പുരാതനകാലത്ത് ഏറ്റവും സവിശേഷ സൃഷ്ടികളിൽ ഒന്നാണ് യുക്ലീഡിയൻ ജ്യാമിതി. ഈ സൃഷ്ടിക്ക് തുല്യമായി 2000 വർഷങ്ങളായിട്ടും കലനം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതുവരെ ഒരു കണ്ടുപിടിത്തവും ഉണ്ടായിട്ടില്ല.

കലനം എന്നത് ഇംഗ്ലണ്ടിൽ **സർ. ഐസക് ന്യൂട്ടൻ** (1642 - 1727) ജർമ്മനിയിൽ **ഗോഡ്ഫ്രഡ് വിൻഹ്ലെബ് നിറ്റ്സ്** (1646 - 1716) എന്നിവരാൽ 17-ാം നൂറ്റാണ്ടിന്റെ അന്ത്യഘട്ടത്തിൽ സൃഷ്ടിക്കപ്പെട്ടതാണ്.

അക്കാലത്തിൽ ന്യൂട്ടന് ലഭിച്ച ഗണിതശാസ്ത്രത്തെക്കുറിച്ചുള്ള മികച്ച രണ്ട് പുസ്തകങ്ങളാണ് **യൂക്ലിന്റെ ഘടകങ്ങൾ. ഡസ്കാർട്ടിയോ-ലാ-ജ്യാമിതീയം** എന്നിവ അദ്ദേഹത്തിന്റെ ഗണിതശാസ്ത്രത്തോടുള്ള താല്പര്യം വർദ്ധിപ്പിച്ചു. അദ്ദേഹത്തിന് തനിക്ക് മുമ്പേ ജീവിച്ചിരുന്ന ഗലീലിയോ ഫെർമേറ്റ് എന്നീ പ്രശസ്ത ഗവേഷകൻമാരുടെ പ്രവർത്തനങ്ങളെക്കുറിച്ച് അറിവ് ഉണ്ടായിരുന്നു.

1664-ന്റെ അവസാനത്തോടുകൂടി ന്യൂട്ടൻ അക്കാലത്തിലെ ഗണിതശാസ്ത്ര അറിവുകളെ പൂർണ്ണമായും മനസ്സിലാക്കി കഴിഞ്ഞിരുന്നു. അതിനു ശേഷവും അദ്ദേഹത്തിന്റെ വളർച്ച വർദ്ധിച്ചുകൊണ്ടിരുന്നു. 1665-ൽ തുടർച്ചയായി മാറികൊണ്ടിരുന്ന ദൂരങ്ങൾ, താപനിലകൾ എന്നിവയുടെ വ്യതിയാന നിരക്കിനെ കുറിച്ചുള്ള തന്റെ ഗവേഷണം ആരംഭിച്ചു. ഈ ഗവേഷണങ്ങളുടെ പരിണിത ഫലങ്ങളാണ് നാം ഇന്നു കാണുന്ന അവകലനകലനം എന്ന ഗണിതശാസ്ത്രം. ഇന്ന് ഗണിതശാസ്ത്ര വിദ്യാർത്ഥികൾ എല്ലാപേരും ഐസക് ന്യൂട്ടന്റെ കണ്ടുപിടിത്തങ്ങളിലൂടെയാണ് യാത്ര ചെയ്യുന്നത്.

അഗസ്റ്റിൻ ലൂയിസ് കോശി
(1789 – 1857)

ലിബിനിസിന്റെ ഗണിതശാസ്ത്ര ഗവേഷണ ലേഖനങ്ങൾ 1682-ൽ അദ്ദേഹം ആരംഭിച്ച 'ആക്റ്റാ എറിഡിഡോറം' എന്ന മാസികയിൽ പ്രസിദ്ധീകരിക്കപ്പെട്ടിരുന്നു. ഈ മാസികകളിൽ അദ്ദേഹത്തിന്റെ കലനത്തെക്കുറിച്ചുള്ള ലേഖനങ്ങളും സ്ഥാനം പിടിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇതാണ് ന്യൂട്ടനുമായി കലനം ആദ്യമായി കണ്ടുപിടിച്ചത്, എന്ന തർക്കത്തിലേയ്ക്ക് നയിച്ചത്. കലനത്തിന്റെ പ്രധാനപ്പെട്ട ഫലങ്ങളെയും ഇപ്പോൾ ഉപയോഗിച്ച് വരുന്ന കലന അടയാളങ്ങളെയും ആദ്യമായി ഉപയോഗിച്ചത് ലിബിനസ് ആകുന്നു.

പാരീസിൽ 1789-ൽ ജനിച്ച **അഗസ്റ്റിൻ ലൂയിസ് കോശി** (1789 - 1857) 19-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ആദ്യപകുതിയിൽ ഏറ്റവും പ്രശസ്തനായ ഗണിത പണ്ഡിതനായിരുന്നു. അദ്ദേഹം കലനത്തിൽ പല സംഭാവനകളും നൽകിയിട്ടുണ്ട്. 1829-ൽ അദ്ദേഹത്തിന്റെ **ലെകോൺസ്-ലി-കാൽകുൽ-ഡിഫറൻഷ്യൽ** എന്ന പുസ്തകത്തിൽ ആദ്യമായി പരിധികളെ കുറിച്ചുള്ള വ്യക്തമായ നിർവ്വചനങ്ങൾ നൽകിയിട്ടുണ്ട്. അതുകൂടാതെ അവകലജ വ്യതിയാനങ്ങളുടെ നിരക്കിറെ പരിധിയായി അതായത്

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ന്റെ പരിധി എന്ന് നിശ്ചയിച്ചതും അദ്ദേഹമാണ്,

പരിധികളുടെ സൂക്ഷ്മമായ $(\epsilon - \delta$ definition) നിർവ്വചനം തുടർച്ച, അവകലജം എന്നിവയെക്കുറിച്ചുള്ള സൂക്ഷ്മമായ വസ്തുതകളെയും **Karl Weierstrass**, (1815-1897) എന്ന ജർമ്മൻ ഗണിത പണ്ഡിതൻ നൽകിയിട്ടുണ്ട്.

കലനം എന്നാൽ എന്ത്?

കലനം എന്നത് മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിനെ കുറിക്കുന്നതാണ്. ഇതുകൂടാതെ ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ ഗവേഷകർ, എഞ്ചിനീയർമാർ, സാമ്പത്തിക വിദ്വൻമാർ എന്നിവർ ഉപയോഗിക്കുന്ന സ്പർശ രേഖകൾ, ചായ്വുകൾ, വിസ്തീർണ്ണം, വ്യാപ്തം, പില്ലിൻ നീളം, കേന്ദ്രകം, വക്രതകൾ എന്നീ ആശയങ്ങളെ പ്രതിപാദിക്കുന്ന ഗണിതമായും കലനം കാണപ്പെടുന്നു.

മുൻകലനഗണിതം പ്രതിപാദിക്കുന്നത് വേഗത, ദിശാവേഗം, സ്പർശ രേഖകൾ, ചായ്വുകൾ പോലുള്ളവയാണെങ്കിലും മുൻകലന ഗണിതത്തിനും കലനത്തിനും തമ്മിൽ അടിസ്ഥാനപരമായി വ്യത്യാസമുണ്ട്. മുൻകലന ഗണിതം കൂടുതൽ സ്ഥിരമാണ്. അതേസമയം കലനം കൂടുതൽ ചലനാത്മകമാണ്. ഇവിടെ ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ ഇതാ:

- ★ സ്ഥിരമായ വേഗതയിൽ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിനെ മുൻഗണന ഗണിതമുപയോഗിച്ച് വിശകലനം ചെയ്യാൻ കഴിയും. ത്വരിതപ്പെടുത്തപ്പെടുന്ന വസ്തുവിന്റെ വേഗത വിശകലനം ചെയ്യാൻ നിങ്ങൾക്ക് കലനം ആവശ്യമാണ്.
- ★ ഒരു രേഖയുടെ ചായ്വ് മുൻകലന ഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശകലനം ചെയ്യാൻ കഴിയും. ഒരു വക്രത്തിന്റെ ചായ്വിനെ വിശകലനം ചെയ്യാൻ നിങ്ങൾക്ക് കലനം ആവശ്യമാണ്.

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 87 14-02-2023 17:21:25

★ മുൻകലന ഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് ഒരു വൃത്തത്തിലേയ്ക്കുള്ള സ്പർശ രേഖയെ വിശകലനം ചെയ്യാൻ കഴിയും. ഒരു പൊതു ഗ്രാഫിലേയ്ക്കുള്ള സ്പർശ രേഖയെ വിശകലനം ചെയ്യുവാൻ നിങ്ങൾക്ക് കലനം ആവശ്യമാണ്.

★ ഒരു ദീർഘചതുരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം മുൻകലനഗണിതം ഉപയോഗിച്ച് വിശകലനം ചെയ്യാൻ കഴിയും. ഒരു പൊതു അളവിനു കീഴിലുള്ള വിസ്തീർണ്ണത്തെ വിശകലനം ചെയ്യുവാൻ നിങ്ങൾക്ക് കലനം ആവശ്യമാണ്.

ഈ സാഹചര്യങ്ങളിൽ ഓരോന്നിലും ഒരേ പൊതുതന്ത്രമാണ് ബന്ധപ്പെട്ടിരിക്കുന്നത്. അത് എന്താണെന്നാൽ പരിധി പ്രക്രിയ ഉപയോഗിക്കുന്നതിലൂടെ മുൻകലന ഗണിതത്തിന്റെ പുനർ രൂപീകരണമാണ്. അതുകൊണ്ടുതന്നെ 'എന്താണ് കലനം' എന്ന ചോദ്യത്തിന്റെ ഉത്തരം കാണാനുള്ള ഒരു മാർഗ്ഗം ഇതാണ്. അത് കലനം എന്നത് മൂന്ന് ഘട്ടങ്ങൾ അടങ്ങിയ ഒരു പരിധിയന്ത്രമാണ്. ഇതിൽ ആദ്യഘട്ടം ഒരു രേഖയുടെ ചായ്വ് അല്ലെങ്കിൽ ഒരു ദീർഘദൂരത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം എന്നിങ്ങനെയുള്ള മുൻകലന ഗണിതമാകുന്നു. രണ്ടാം ഘട്ടം പരിധി പ്രക്രിയ ആകുന്നു. മൂന്നാംഘട്ടം അവകലജം, സമകലനം പോലുള്ള പുതിയ കലന രൂപീകരണങ്ങളാകുന്നു.

മുൻകലന ഗണിതം	⟹	പരിധി പ്രക്രിയ	⟹	കലനം

കലനത്തിനെ ഒരു പ്രക്രിയ എന്നതിലുപരി പുതിയ സൂത്രവാക്യങ്ങളുടെ ഒരു ശേഖരമാണ് എന്ന ധാരണയിൽ പഠിക്കാൻ ശ്രമിക്കുന്നവർ ജാഗ്രത പാലിക്കണം. കാരണം മനസ്സിലാക്കൽ, ആത്മവിശ്വാസം, സംതൃപ്തി എന്നിവ നഷ്ടപ്പെടാനുള്ള സാധ്യതയുമുണ്ട്.

പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

ഈ അദ്ധ്യായം പൂർത്തിയാകുമ്പോൾ വിദ്യാർത്ഥികൾ അറിഞ്ഞിരിക്കേണ്ടവ

- ജ്യാമിതീയ പ്രവർത്തികളിലൂടെ പരിധി/തുടർച്ച എന്നീ ആശയങ്ങളെ കണ്ടറിയുക.
- പരിധി/തുടർച്ച എന്നീ ആശയങ്ങളെ ദൈനംദിന ജീവിത പ്രവർത്തികളോട് ബന്ധപ്പെടുത്തൽ.
- പരിധി/തുടർച്ച എന്നീ ആയങ്ങളെ കലനത്തിന്റെ ഹൃദയമായും, ജീവനാഡിയായും ബോധ്യപ്പെടുത്തൽ.
- വിജ്ഞാന ലോകത്തിൽ നടക്കുന്ന ഓരോ മാറ്റത്തിനെയും കണക്കാക്കുന്നതിനും, ഗണിത മയമാക്കുന്നതിനും പരിധി/തുടർച്ചയെ ഒരു ഉപകരണമായി ഉപയോഗപ്പെടുത്തൽ.
- പരിധി/തുടർച്ച എന്നീ ആശയങ്ങളെ ജീവിത സാഹചര്യങ്ങളുടെ മൂല്യം ദൃഢമാക്കൽ.

9.2 പരിധികൾ

9.2.1 പരിധികളെ കണക്കിടൽ

ആധുനിക ഗണിതശാസ്ത്രത്തിലും, കലനത്തിലും പ്രധാന പങ്കുവഹിക്കുന്ന പരിധിയെക്കുറിച്ചുള്ള ആശയങ്ങളെ ഈ അധ്യായത്തിൽ നമുക്ക് വിശദമായി പഠിക്കാം. കലനം 3000 വർഷങ്ങൾ പഴക്കമുള്ളതാണെങ്കിലും 19-ാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഫ്രഞ്ച് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനായ അഗസ്റ്റിൻ ലൂയിഷ്കോഷി – കാൾവിർസ്ട്രാസ് എന്നിവർ സൂചിപ്പിക്കുന്നതുവരെ പരിധിയെ കുറിച്ച് അറിഞ്ഞിരുന്നില്ല.

ഈ ഭാഗത്തിൽ പരിധിയുടെ നിർവ്വചനത്തെയും അവയെ കണ്ടുപിടിക്കുന്നത് എങ്ങനെയെന്നും പഠിക്കാം.

വിശദീകരണം 9.1

$y = f(x) = x^2 + 3$ എന്ന സമീകരണം $f\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടതായി കണക്കാക്കാം.

$x = 2$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഈ സമീകരണത്തിന്റെ സ്വഭാവത്തെപ്പറ്റി മനസ്സിലാക്കാം. x ന്റെ രണ്ട് വിധത്തിലുള്ള മൂല്യങ്ങളെ ഉപയോഗിക്കാം. ഒന്ന് രണ്ടിന്റെ ഇടതുഭാഗത്തു നിന്നും (2 നും കുറവ്) രണ്ടിനോട് അടുക്കുന്ന മൂല്യങ്ങൾ; മറ്റൊന്ന് രണ്ടിന്റെ വലതുഭാഗത്തു നിന്ന് 2 നോട് അടുക്കുന്ന മൂല്യങ്ങൾ (2 നും കൂടുതൽ) ഇടതു ഭാഗത്തു നിന്നും രണ്ടിലേക്ക് അടുക്കുന്നു. വലതു ഭാഗത്തു നിന്നും 2 ലേക്ക് അടുക്കുന്നു.

ഇടതു ഭാഗത്തുനിന്നും 2 ലേക്ക് അടുക്കുന്നു x | വലതു ഭാഗത്തുനിന്നും 2 ലേക്ക് അടുക്കുന്നു x

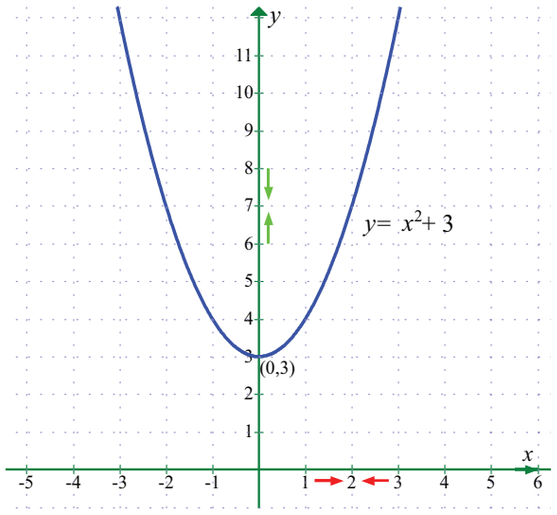
x	1.7	1.9	1.95	1.99	1.999	1.9999	2	2.0001	2.001	2.01	2.05	2.1	2.3
$f(x)$	5.89	6.61	6.8025	6.9601	6.99601	6.99960001	7	7.0040001	7.004001	7.0401	7.2025	7.41	8.29

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 88 14-02-2023 17:21:25

പട്ടികയിൽ നിന്നും x ന്റെ മൂല്യം 2 ലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ $x = 2, f(x) = x^2 + 3$ ന്റെ മൂല്യം 7 നോട് അടുക്കുന്നത് കാണാം. ഇതിൽ വിഷമിക്കുവാൻ ഒന്നുമില്ല. എന്തെന്നാൽ $f(x)$ ൽ $x = 2$, ന്റെ മൂല്യത്തെ കണക്കാക്കുമ്പോൾ $f(2) = 2^2 + 3 = 7$ എന്ന് ലഭിക്കുന്നത് കാണാം.

ഈ പരിധി മൂല്യത്തെ ഊഹിക്കുന്നതിന് $x^2 + 3$ ൽ $x = 2$ ന്റെ മൂല്യത്തെ കണക്കാക്കേണ്ട കാര്യമില്ല.

x ന്റെ മൂല്യം 2 ന്റെ ഇടതുഭാഗത്തു നിന്നും (2 നെക്കാൾ കുറവായ മൂല്യങ്ങൾ) വലതുവശത്തു നിന്നും (2 നെക്കാൾ കൂടിയ മൂല്യം) 2 ലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ മൂല്യം 7 നോട് അടുക്കുന്നു. അതായത് x ന്റെ മൂല്യം 2 ന്റെ വളരെ അടുത്ത് സ്ഥിതിചെയ്യുമ്പോൾ $f(x)$, 7 ന്റെ തൊട്ടടുത്ത് സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. ഈ സാഹചര്യത്തെ താഴെ പറയുംപ്രകാരം സംഗ്രഹിക്കാം. x ന്റെ മൂല്യം ഇടത്ത് നിന്ന് 2 നോട് അടുക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ ഇടതുപരിധി 7 ആകുന്നു. അതുപോലെ x ന്റെ മൂല്യം വലതുഭാഗത്തു നിന്നും 2 ലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ വലതുപരിധി 7 ആകുന്നു. ഇതിനെ താഴെ തന്ന പ്രകാരം എഴുതാം:



ചിത്രം 9.1

$$f(x) \to 7 \text{ as } x \to 2^-,\ f(x) \to 7 \text{ as } x \to 2^+$$

അല്ലെങ്കിൽ

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 7\ ,\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = 7.$$

അതായത് $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 7 = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$. ഇതിന്റെ പൊതുവായ മൂല്യത്തെ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 7$ എന്നെഴുതാം.

ഇതിൽ നിന്നും പരിധിമൂല്യം ഒരു നിശ്ചിത വാസ്തവിക സംഖ്യ ആണെന്നു കാണാം. ഇവിടെ നിശ്ചിത എന്നതിന്റെ അർത്ഥം $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ ഉം $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ ഉം ഒരേ പോലെ ആകുന്നു.

അതുപോലെ $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ എന്നത് ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ ആകുന്നു.

$x \to 2$ ആണെങ്കിൽ $f(x) = x^2 + 3$ ന്റെ സ്വഭാവത്തെ ചിത്രം 9.1 ജ്യാമിതീയ രീതിയിൽ വിശദീകരിക്കുന്നു.

വിശദീകരണം 9.2

അടുത്തതായി, $f(x) = \dfrac{16 - x^2}{4 + x}$ എന്ന പരിമേയഫലനത്തെ എടുക്കാം.

ഈ ഫലനത്തിന്റെ മണ്ഡലം $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$. ആകുന്നു. $f(-4)$ നെ നിർവ്വചിച്ചിട്ടില്ലെങ്കിലും, x ന്റെ മൂല്യം 4 നോട് അടുക്കുമ്പോൾ ഉള്ള $f(x)$ ന്റെ മൂല്യത്തെ നിർണ്ണയിക്കാൻ സാധിക്കും. എന്തെന്നാൽ $\lim\limits_{x \to -4} \left(\dfrac{16 - x^2}{4 + x} \right)$ എന്ന ചിഹ്നമനുസരിച്ച് നാം x ന്റെ -4 ന് അരികിലുള്ള മൂല്യങ്ങളെ മാത്രമേ കണക്കാക്കുന്നുള്ളൂ. $x = -4$ അല്ലാ എന്ന് ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നു. താഴെ തന്ന പട്ടിക x ന്റെ മൂല്യം -4 നോട് അടുക്കുമ്പോൾ കാണുന്ന $f(x)$ ന്റെ മൂല്യങ്ങളെ നൽകുന്നു.

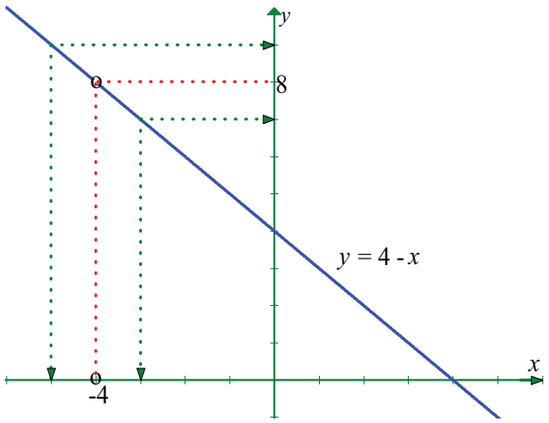
$(x < -4)$ $(x \to -4^-)$	$f(x)$	$(x > -4)$ $(x \to -4^+)$	$f(x)$
-4.1	8.1	-3.9	7.9
-4.01	8.01	-3.99	7.99
-4.001	8.001	-3.999	7.999

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 89 14-02-2023 17:21:29

$x \neq -4$ എങ്കിൽ, $f(x)$ നീക്കൽ രീതിയിൽ ചുരുക്കാം :

$$f(x) = \frac{16 - x^2}{4 + x}$$

$$= \frac{(4+x)(4-x)}{(4+x)} = 4 - x.$$



ചിത്രം 9.2

9.2 ചിത്രത്തിൽ കാണുന്നതുപോലെ $f(x)$ എന്ന ഗ്രാഫ് $y = 4 - x$ എന്ന ഗ്രാഫ് പോലെയാണ്. എങ്കിലും $x = -4$ എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ അനുബന്ധ ബിന്ദുവിൽ f ന്റെ ഗ്രാഫിൽ ഒരു സുഷിരം കാണുന്നു. x ന്റെ മൂല്യം -4 നോട് അടുക്കുന്തോറും y ന്റെ മൂല്യം 8 നോട് അടുക്കുന്നതു പോലെ കാണാം. ഇവ ചിത്രത്തിൽ x അക്ഷത്തിൻമേലുള്ള അമ്പടയാളങ്ങളെയും y അക്ഷത്തിൻമേലുള്ള അമ്പടയാളങ്ങളെയും സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഇവിടെ,

$$\lim_{x \to -4^-} f(x) = 8 = \lim_{x \to -4^+} f(x) \text{ അതിനാൽ } \lim_{x \to -4} f(x) = \lim_{x \to -4} \frac{16 - x^2}{4 + x} = 8.$$

വിശദീകരണം 9.2 ൽ, $x = -4$ ൽ $f(x)$ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല എങ്കിലും x ന്റെ മൂല്യം ഒരു പരിധിയിലേയ്ക്ക് അടുക്കുന്നതു കാണാം. **$x = -4$ ൽ ഫലനം $f(x)$ ന്റെ മൂല്യം ഉണ്ടെങ്കിലും, ഇല്ലെങ്കിലും അത് x ന്റെ മൂല്യം -4 ലേയ്ക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ പരിധി മൂല്യത്തിന്റെ സ്ഥാപിതത്തെ ബാധിച്ചിട്ടില്ല എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.**

വിശദീകരണം 9.3

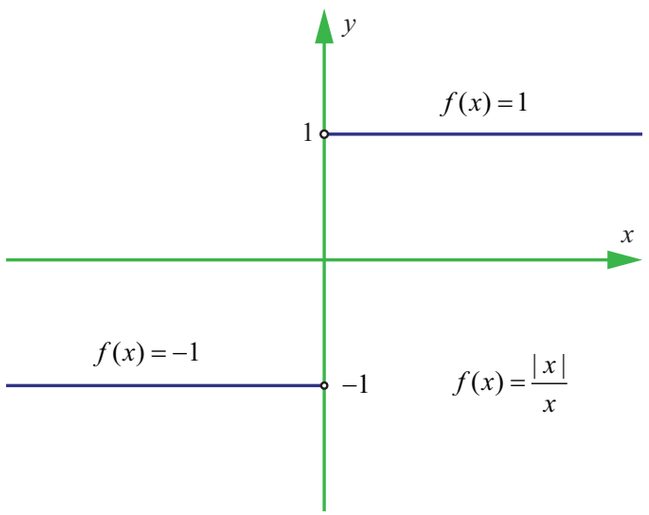
ഇപ്പോൾ നമുക്ക് 9.1, 9.2 ൽ നിന്നും വ്യത്യസ്തമായ ഒരു ഫലത്തെ പരിഗണിക്കാം.

Let $f(x) = \frac{|x|}{x}$.

$x = 0$ എന്ന മൂല്യം x എന്ന ഫലത്തിന്റെ മണ്ഡലമായ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ൽ ഇല്ല. ഗ്രാഫിൽ ശ്രദ്ധിക്കുക. ഗ്രാഫിൽ നിന്നും x ന്റെ ധനമൂല്യങ്ങൾക്ക്,

$\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = +1$ എന്നും

x ന്റെ ഋണമൂല്യങ്ങൾ, $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$.



ചിത്രം 9.3

x ന്റെ മൂല്യം 0 നോട് എത്ര അടുത്തു കാണപ്പെട്ടാലും (0 ന്റെ അരികിൽ) x ന്റെ ധന, ഋണ മൂല്യങ്ങൾക്ക് ക്രമത്തിൽ $f(x) = 1$, $f(x) = -1$ എന്ന് കാണപ്പെടുന്നു.

അതായത്, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = +1$.

ഇതിൽ നിന്നും $x = 0$ പരിധി മൂല്യം ഇല്ല എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. എന്തെന്നാൽ x ന്റെ മറ്റു മൂല്യങ്ങൾക്ക് പരിധി മൂല്യങ്ങൾ ഉണ്ട്.

ഉദാഹരണമായി $\lim_{x \to 2^-} \frac{|x|}{x} = 1$, $\lim_{x \to 2^+} \frac{|x|}{x} = 1$.

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 90 14-02-2023 17:21:30

അതുപോലെ, $\lim_{x\to -3^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to -3^-} \frac{-x}{x} = -1$

$$\lim_{x\to -3^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to -3^+} \frac{-x}{x} = -1.$$

$x_0 \neq 0$ എന്ന രീതിയിലുള്ള എല്ലാ വാസ്തവിക സംഖ്യകൾക്കും, $\lim_{x\to x_0^-} \frac{|x|}{x} = -1 = \lim_{x\to x_0^+} \frac{|x|}{x}$ എങ്കിൽ $x_0 < 0$

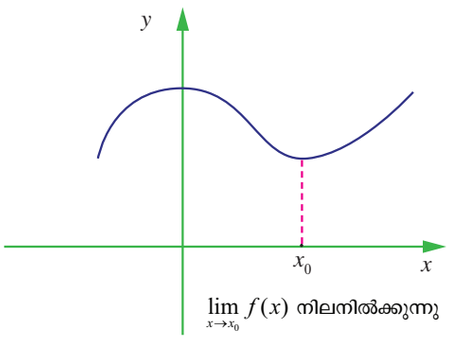
$$\lim_{x\to x_0^-} \frac{|x|}{x} = 1 = \lim_{x\to x_0^+} \frac{|x|}{x} \text{ if } x_0 > 0.$$

ഇപ്പോൾ 9.1 മുതൽ 9.3 വരെ ഉള്ള വിശദീകരണം 9.1 ൽ $f(x) = x^2 + 3$ f എന്ന ഫലനം $x = 2$ ൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. അതായത് 2 എന്ന സംഖ്യ $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ എന്ന മണ്ഡലത്തിൽ കാണപ്പെടുന്നു. 9.2 എന്ന വിശദീകരണത്തിൽ $x = -4$ എന്ന ഫലത്തെ നിർവ്വചിച്ചിട്ടില്ല. ആദ്യത്തെ വിശദീകരണത്തിൽ x ന്റെ മൂല്യം 2 നോട് അടുക്കുമ്പോൾ $\lim_{x\to 2} f(x)$ ലഭ്യമാകാത്ത രീതിയിൽ അതായത് $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ ലഭിക്കുകയും അവ സമമായും ഓരോ ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യയായും കാണപ്പെടുന്നു. രണ്ടാമത്തെ വിശദീകരണത്തിൽ $x = -4$ ന്റെ ഫലനത്തെ നിർവ്വചിച്ചിട്ടില്ല എങ്കിലും x ന്റെ മൂല്യം -4 ലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ $\lim_{x\to -4} f(x)$ അടുക്കുന്നു. വിശദീകരണം 9.3 ൽ $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ ന്റെ മൂല്യം ലഭിച്ചിട്ടില്ല എന്നതിന്റെ അർത്ഥം x ന്റെ മൂല്യം 0 ന്റെ വളരെ അടുത്തുള്ളപ്പോൾ ഒരു വശത്തുള്ള പരിധികളായ $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$, $\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$ ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ വ്യത്യസ്തമായി കാണപ്പെടുന്നു. മുകളിലുള്ള നിരീക്ഷണത്തിൽ നിന്നും പരിധിക്കുള്ള നിർവ്വചനത്തെ **അവബോധജന്യ** രീതിയിൽ ലഭിക്കുന്നു.

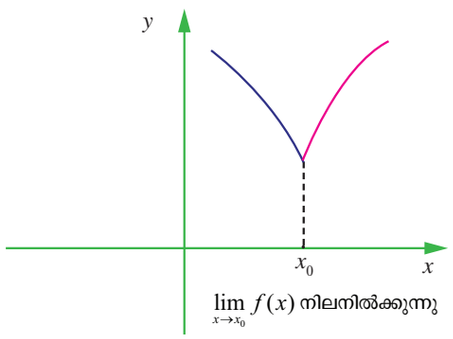
നിർവ്വചനം 9.1

I എന്നത് $x_0 \in$. എന്ന ബിന്ദുവിനെ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ഒരു തുറന്ന ഇടസ്ഥലം ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഫലനം $f : I \to \mathbb{R}$. എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. x ന്റെ മൂല്യം x_0 ലോട്ട് അടുക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ പരിധി മൂല്യം L (അതായത് ചിഹ്നത്തിൽ $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$) എന്ന് പറയണമെങ്കിൽ $x \neq x_0$, $f(x)$ ആയി മാറുകയും x എന്നത് ആവശ്യമുള്ള അളവിൽ x_0 ലോട്ട് ഇരുവശത്തു നിന്നും അടുക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ മൂല്യം ആവശ്യമുള്ള അളവിന് L നു വളരെ അടുത്ത് ഉണ്ടായിരിക്കണം.

മേൽപ്പറഞ്ഞ വിവരങ്ങൾ താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഗ്രാഫ്മൂലം (ചിത്രം 9.4, 9.5) മനസ്സിലാക്കാം.



ചിത്രം 9.4



ചിത്രം 9.5

9.2.2 ഏക പാശ്വപരിധികൾ

നിർവ്വചനം 9.2

x ന്റെ മൂല്യം ആവശ്യമുള്ള അളവിൽ x ന്റെ അടുത്തും x_0 യെക്കാൾ കുറവായും ഇരിക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ മൂല്യം l_1 ന് വളരെ അടുത്ത് സ്ഥിതിചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ x ന്റെ മൂല്യം x_0 ലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ **ഇടതു ഭാഗ പരിധി** (x ന്റെ ഇടതുഭാഗത്തു നിന്നും x_0 ലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ പരിധി) എന്നു പറയാം. ചിഹ്നത്തിലാകുമ്പോൾ $f(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l_1$ എന്നെഴുതാം.

ഇതുപോലെ വലതുഭാഗ പരിധിയേയും നിർവ്വചിക്കാം.

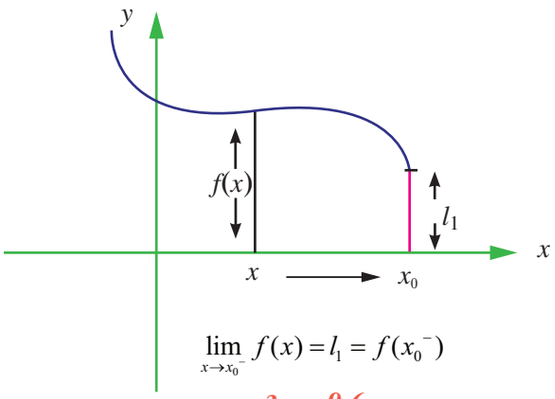
Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 91 14-02-2023 17:21:31

നിർവ്വചനം 9.3

x ന്റെ മൂല്യം ആവശ്യമുള്ള അളവിൽ x_0 ന്റെ അടുത്തും x_0 യെക്കാൾ അധികമായിരിക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ മൂല്യം l_2 ന് വളരെ അടുത്ത് സ്ഥിതിചെയ്യുകയാണെങ്കിൽ x ന്റെ മൂല്യം x_0 ലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ മൂല്യം **വലതുഭാഗ പരിധി** (x ന്റെ വലതുഭാഗത്തു നിന്നും x_0 ലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ പരിധി) എന്നു പറയാം. ചിഹ്നത്തിലാകുമ്പോൾ $f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2$ എന്നെഴുതാം.

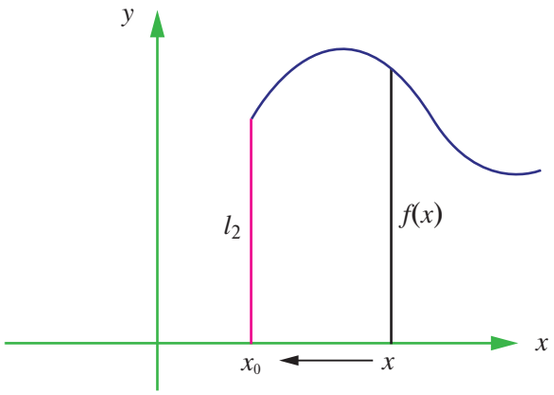
കൂടാതെ "$x \to x_0^-$", "$x \to x_0^+$" എന്നിവയെ ക്രമത്തിൽ $x < x_0$, $x > x_0$ എന്ന് കുറിക്കപ്പെടുന്നു.

ഈ നിർവ്വചനങ്ങൾ 9.6 മുതൽ 9.9 വരെയുള്ള ചിത്രങ്ങൾമൂലം വിശദീകരിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.



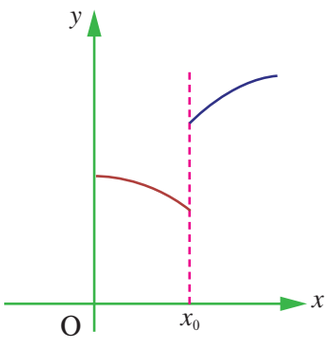
$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 = f(x_0^-)$

ചിത്രം 9.6



$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l_2 = f(x_0^+)$

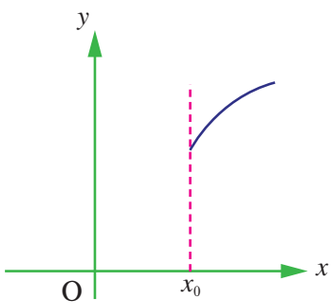
ചിത്രം 9.7



$\lim_{x \to x_0} f(x)$ നിലനിൽക്കുന്നില്ല

ചിത്രം 9.8

(x_0ലേക്ക് ഇടതുഭാഗത്തു നിന്നും വലതു ഭാഗത്തു അടുക്കുമ്പോൾ വ്യത്യസ്തമായ മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു)



$\lim_{x \to x_0} f(x)$ നിലനിൽക്കുന്നില്ല

ചിത്രം 9.9

(x_0 യ്ക്ക് ഇടതുഭാഗ ഫലനം നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല)

മുകളിലത്തെ ചർച്ചകളിൽ നിന്നും $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ എന്നു ലഭിക്കണമെങ്കിൽ താഴെ പറയുന്ന ഫലങ്ങൾ ലഭിക്കണം :

(i) $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ നിലനിൽക്കുന്നു,

(ii) $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ നിലനിൽക്കുന്നു

(iii) $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$.

ഒരു വശത്തിന്റെ പരിധിയുടേയും $f(x)$ന്റെ പരിധിയുടേയും നിർവ്വചനങ്ങളിൽ നിന്നും താഴെ തന്നിട്ടുള്ള :

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ iff $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$.

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 92 14-02-2023 17:21:32

ഇപ്രകാരം $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ലഭിക്കുന്നു എങ്കിൽ L ഒരേ ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യയാകുന്നു. മേൽപ്പറഞ്ഞ നിബന്ധനകളിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്ന് പരാജയപ്പെട്ടാൽ x ന്റെ മൂല്യം x_0 യോട് അടുക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന് പരിധി മൂല്യം ഇല്ല എന്നു പറയാം. ഏകപാശ്വ പരിധികൾ, പരിധികളെക്കാൾ ബലക്കുറവുള്ളതാണ് എന്നതിനെ താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവ പ്രയോജനകരമാകും. $h>0$, എന്നാൽ $f(x_0^-)=\lim_{h\to 0} f(x_0-h)$, $f(x_0^+)=\lim_{h\to 0} f(x_0+h)$ പ്രത്യേകിച്ചും $f(x_0^-)$, $f(x_0^+)$ എന്നിവ ക്രമത്തിൽ ഇടതുഭാഗ, വലതുഭാഗ പരിധികളെ കുറിക്കുമ്പോൾ $f(x_0)$ എന്നത് $x=x_0$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഫലനത്തിന്റെ മൂല്യമാകുന്നു

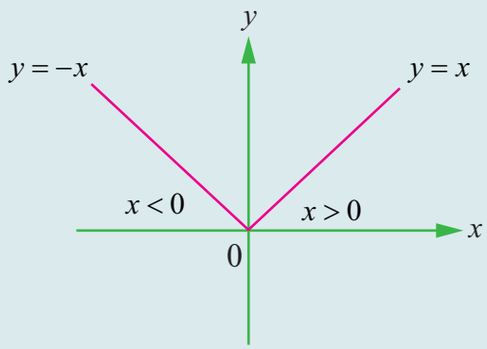
ഉദാഹരണം 9.1

$\lim_{x\to 0} |x|$ മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

അധ്യായം 1 ൽ ഉള്ളതനുസരിച്ച്

$$|x| = \begin{cases} -x & \text{എങ്കിൽ } x<0 \\ 0 & \text{എങ്കിൽ } x=0 \\ x & \text{എങ്കിൽ } x>0 \end{cases}$$



ചിത്രം 9.10

$x>0$, $|x|=x$, $x\to 0$ ഇവിടെ x ന്റെ മൂല്യം 0 ലേയ്ക്ക് വലതു ഭാഗത്തിലൂടെ അടുക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ട്, $\lim_{x\to 0^+} |x| = 0$

$x<0$ എങ്കിൽ $|x| = -x$ ഇവിടെ x ന്റെ മൂല്യം 0 ലേയ്ക്ക് ഇടതുഭാഗത്തിലൂടെ അടുക്കുന്നു $x\to 0$ 0 യുടെ ഇടത്വശത്തിലിരുന്നു. അതുകൊണ്ട്, $\lim_{x\to 0^-} |x| = 0$.

ഇപ്രകാരം, $\lim_{x\to 0^-} |x| = 0 = \lim_{x\to 0^+} |x|$. അതുകൊണ്ട് $\lim_{x\to 0} |x| = 0$.

ഉദാഹരണം 9.2

$f(x)=\sqrt{x}$, $x\geq 0$. എങ്കിൽ

$\lim_{x\to 0} f(x)$ ലഭിക്കുമോ എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക ?

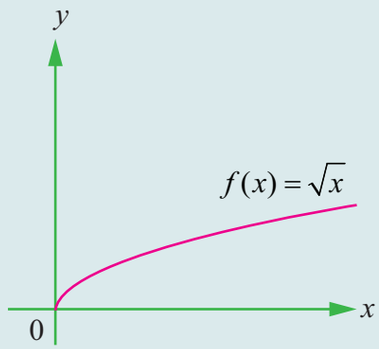
നിർദ്ധാരണം

കിട്ടുകയില്ല, $x<0$ യുടെ $f(x)=\sqrt{x}$ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല.

അതുകൊണ്ട് $x\to 0^-$ ന്റെ $\lim_{x\to 0^-}\sqrt{x}$ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല.

അതിനാൽ $\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$ ന്റെ മൂല്യം ലഭിക്കുകയില്ല

എന്നിരുന്നാലും $\lim_{x\to 0}\sqrt{x}$



ചിത്രം 9.11

$\lim_{x\to 0^-} \log x$ ലഭിക്കുമോ?

ഈ ചോദ്യത്തിന്റെ ഉത്തരത്തിനായി $\log x$ ന്റെ ഗ്രാഫിനെ നോക്കുക.

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 93 14-02-2023 17:21:39

ഉദാഹരണം 9.3

$\lim_{x\to 2^-}\lfloor x\rfloor$, $\lim_{x\to 2^+}\lfloor x\rfloor$ എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങളെ കണ്ടുപിടിക്കുക?.

നിർദ്ധാരണം

$f(x)$ $\lfloor x\rfloor$ എന്ന ഏറ്റവും വലിയ പൂർണ്ണാങ്ക ഫലനത്തെ x ന്റെ തുല്യമോ അതിൽ കുറഞ്ഞതോ ആയ ഏറ്റവും കൂടിയ പൂർണ്ണാങ്കം എന്ന് നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു. ചിത്രം 1.25 ലുള്ള ഈ ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫിൽ നിന്നും $\lim_{x\to 2^-}\lfloor x\rfloor = 1$, $\lim_{x\to 2^+}\lfloor x\rfloor = 2$ എന്നത് മനസ്സിലാകുന്നു.

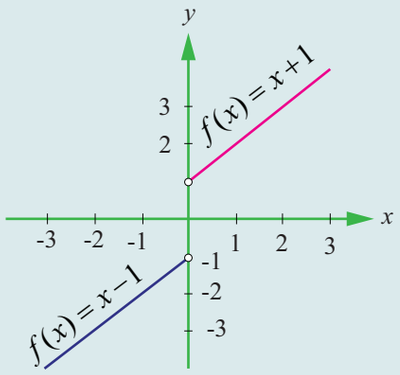
കൂടാതെ ഏതെങ്കിലും ഒരു പൂർണ്ണാങ്കം n ന് $\lim_{x\to n^-}\lfloor x\rfloor = n-1$, $\lim_{x\to n^+}\lfloor x\rfloor = n$ ആകും.

$f(x) = \lim_{x\to n}\lceil x\rceil$ ലഭിക്കുമോ? ഈ ചോദ്യത്തിന്റെ ഉത്തരത്തിന് $\lceil x\rceil$ എന്ന ഫലനം ചിതം 1.26 നോക്കുക.

ഉദാഹരണം 9.4

$f(x) = \begin{cases} x+1, & x>0 \\ x-1, & x<0 \end{cases}$ കരുതുക.

$x\to 0$ എങ്കിൽ $f(x)$ ന് പരിധി മൂല്യം ഉണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.



ചിത്രം 9.12

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രത്തിൽ 9.12 ഗ്രാഫ് വരച്ചിട്ടുണ്ട്.

ചിത്രത്തിൽ നിന്നും $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ ഈ മൂല്യങ്ങൾ വ്യത്യസ്തമായതിനാൽ $\lim_{x\to 0} f(x)$ ലഭിക്കുകയില്ല.

ഉദാഹരണം 9.5

$\lim_{x\to -5} f(x)$ എന്നാൽ, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+5|}{x+5}, & x\neq -5 \\ 0 \quad , & x=-5 \end{cases}$ ലഭിക്കുമോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക?

നിർദ്ധാരണം

(i) $f(-5^-)$ എങ്കിൽ,

$x<-5$, $|x+5| = -(x+5)$

അതുകൊണ്ട് $f(-5^-) = \lim_{x\to -5^-}\dfrac{-(x+5)}{(x+5)} = -1$

(ii) $f(-5^+)$ എങ്കിൽ,

$x>-5$, $|x+5| = (x+5)$

അതുകൊണ്ട് $f(-5^+) = \lim_{x\to -5^+}\dfrac{\ddot{u}x+}{(x+5)} = 1$

$f(-5^-) \neq f(-5^+)$. അതുകൊണ്ട് പരിധി മൂല്യംഇല്ല.

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 94 14-02-2023 17:21:40

ഉദാഹരണം 9.6

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4|x-1|+x-1}{|x-1|}$, $x\neq 1$. ലഭിക്കുമോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക

നിർദ്ധാരണം

$x>1$, $|x-1|=x-1$, $f(1^+)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{4(x-1)+x-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{5(x-1)}{(x-1)}=5$ എങ്കിൽ,

$x<1$, $|x-1|=-(x-1)$, $f(1^-)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{-4(x-1)+(x-1)}{-(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{3(x-1)}{(x-1)}=3$ എങ്കിൽ,

അതായത് $f(1^-)\neq f(1^+)$ അതുകൊണ്ട് പരിധി മൂല്യം ലഭിക്കുന്നില്ല.

അഭ്യാസം 9.1

1 മുതൽ 6, വരെയുള്ള കണക്കുകൾക്ക് പട്ടികയെ ഉപയോഗിച്ച് പരിധിമൂല്യത്തെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-x-2}$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.344820	0.33444	0.33344	0.333222	0.33222	0.332258

(2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-4}$

x	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	0.25641	0.25062	0.250062	0.24993	0.24937	0.24390

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
f(x)	0.2911	0.2891	0.2886	0.2886	0.2885	0.28631

(4) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{1-x}-2}{x+3}$

x	-3.1	-3.01	-3.00	-2.999	-2.99	-2.9
$f(x)$	-0.24845	-0.24984	-0.24998	-0.25001	-0.25015	-0.25158

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.99833	0.99998	0.99999	0.99999	0.99998	0.99833

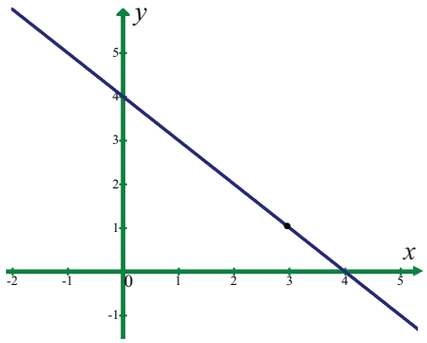
(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}$

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.0001	0.01	0.1
$f(x)$	0.04995	0.0049999	0.0004999	–0.0004999	–0.004999	–0.04995

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 95 14-02-2023 17:21:41

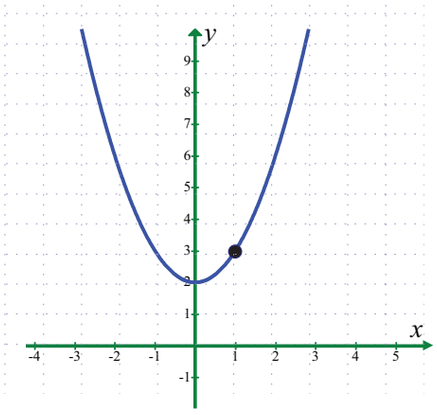
7 മുതൽ 15, വരെയുള്ള കണക്കുകൾക്ക് ഗ്രാഫ് ഉപയോഗിച്ച് പരിധിമൂല്യം കാണുക? (ഉണ്ട് എങ്കിൽ) പരിധിമൂല്യം ഇല്ലെങ്കിൽ കാരണം വിശദീകരിക്കുക?

(7) $\lim\limits_{x\to 3}(4-x)$.



ചിത്രം 9.13

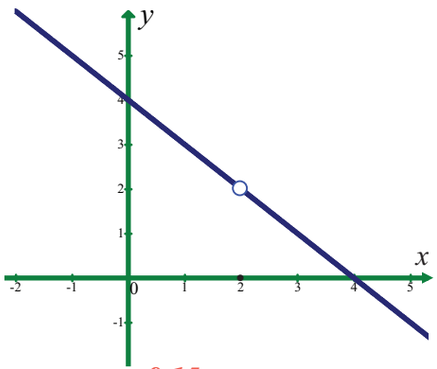
(8) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2)$.



ചിത്രം 9.14

(9) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

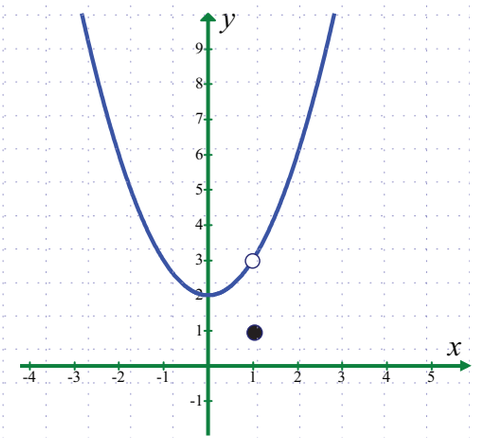
ഇവിടെ, $f(x)=\begin{cases}4-x, & x\neq 2\\ 0, & x=2\end{cases}$.



ചിത്രം 9.15

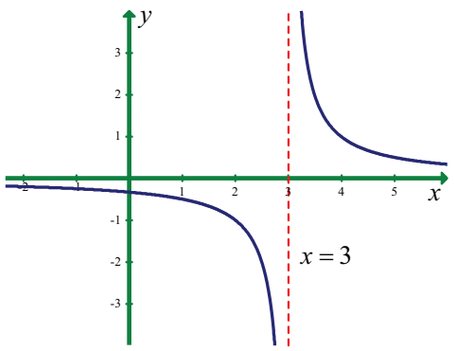
(10) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

ഇവിടെ, $f(x)=\begin{cases}x^2+2, & x\neq 1\\ 1, & x=1\end{cases}$.



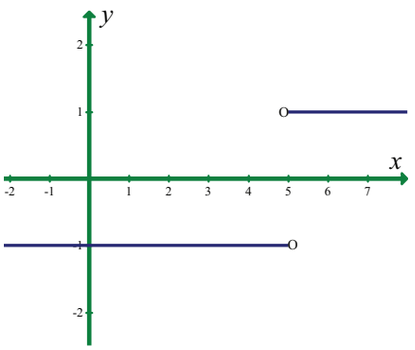
ചിത്രം 9.16

(11) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x-3}$



ചിത്രം 9.17

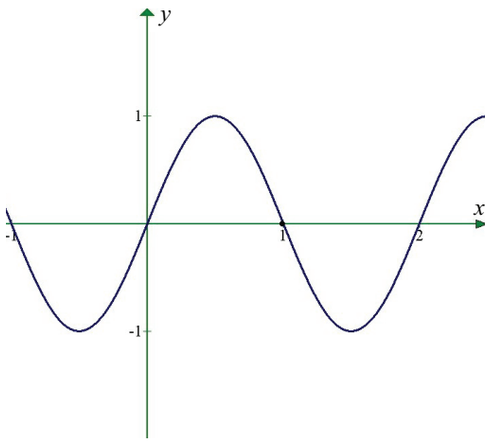
(12) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{|x\quad 5|}{x\quad 5}$



ചിത്രം 9.18

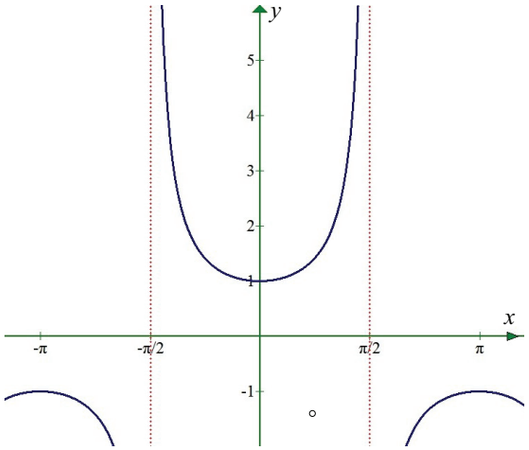
Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 96 14-02-2023 17:21:42

(13) $\lim_{x\to 1} \sin \pi x$



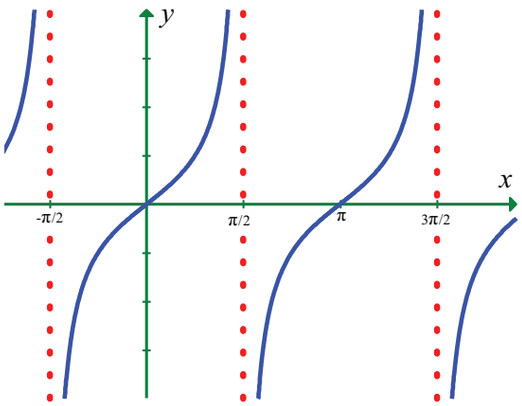
ചിത്രം 9.19

(14) $\lim_{x\to 0} \sec x$



ചിത്രം 9.20

(15) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan x$



ചിത്രം 9.21

കണക്കുകൾക്ക് f ന്റെ ഗ്രാഫ് വരച്ച് x_0 യുടെ ഏത് മൂല്യത്തിനാണ് $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ഉള്ളതെന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

(16) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 2 \\ 8-2x, & 2 < x < 4 \\ 4, & x \ge 4 \end{cases}$.

(17) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ 1-\cos x, & 0 \le x \le \pi \\ \cos x, & x > \pi \end{cases}$

(18) f കൊടുത്തിട്ടുള്ള മൂല്യങ്ങളെ തൃപ്തിയാക്കുന്ന ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക :

(i) $f(0)$ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല

$\lim_{x\to 0} f(x) = 4$

$f(2) = 6$

$\lim_{x\to 2} f(x) = 3$

(ii) $f(-2) = 0$

$f(2) = 0$

$\lim_{x\to -2} f(x) = 0$

$\lim_{x\to 2} f(x)$ എന്ന പതിധി മൂല്യം ഇല്ല.

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 97 14-02-2023 17:21:42

(19) $\lim_{x\to 8} f(x) = 25$ എന്ന ചിഹ്നമിടൽ രീതിയുടെ അർത്ഥത്തിനെ ചുരുക്കി വിവരിക്കുക.

(20) $f(2) = 4$ എങ്കിൽ, x ന്റെ മൂല്യം 2 നോട് അടുക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ പരിധി മൂല്യത്തെക്കുറിച്ച് ഏതെങ്കിലും തീരുമാനം എടുക്കാൻ സാധിക്കുമോ?

(21) x ന്റെ മൂലം 2 നോട് അടുക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ പരിധി മൂല്യം 4 എങ്കിൽ $f(2)$ നെക്കുറിച്ച് എന്തെങ്കിലും തീരുമാനം എടുക്കാൻ സാധിക്കുമോ? (ഉത്തരത്തിന് വിശദീകരണം തരുക).

(22) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$ കാണുകയും അവമൂലം $f(3^-)$, $f(3^+)$ ന്റെ മൂല്യം ഉണ്ടെങ്കിൽ ആ മൂല്യത്തെ കണ്ടു പിടിക്കുക?

(23) $\lim_{x\to 1} f(x)$, എങ്കിൽ $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$ ന് മൂല്യമുണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക?

9.2.3 പരിധികളെക്കുറിച്ചുള്ള സിദ്ധാന്തങ്ങൾ

മുൻ അധ്യായത്തിലുള്ള ചർച്ചകളുടെ ഉദ്ദേശ്യം പരിധിമൂല്യം ഉണ്ടോ ഇല്ലയോ എന്നതിനെക്കുറിച്ച് വ്യക്തമായ ബോധ്യപ്പെടൽ ഉണ്ടാക്കുക എന്നതാണ്. എന്നാലും എല്ലാ അവസരങ്ങളിലും ഗ്രാഫ് അല്ലെങ്കിൽ ഫലന മൂല്യങ്ങളുടെ പട്ടികമൂലമോ, പരിധിമൂല്യം ഉണ്ടോ എന്നതിനെക്കുറിച്ച് തീരുമാനം എടുക്കാൻ പ്രയോഗികമായി സാധ്യമല്ല. അതുകൊണ്ട് പരിധിമൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുന്നതിനും അല്ലെങ്കിൽ പരിധിമൂല്യം ഇല്ലാ എന്ന് തീരുമാനിക്കുന്നതിനും ഒരു രീതി ആവശ്യമുണ്ട്. ഈ ഭാഗത്തിൽ അതുപോലുള്ള രീതികളെ രൂപപ്പെടുത്തുന്നത് മനസ്സിലാക്കാം. ഈ സിദ്ധാന്തങ്ങളുടെ തെളിവുകൾ കൂടുതൽ സാങ്കേതികവും എന്നാൽ പാഠപുസ്തകത്തിനും അപ്പുറത്തുള്ളതാണ്.

വിശദീകരണം 9.1, $\lim_{x\to 2}(x^2+3) = 2^2+3 = 7$ എന്ന് തീരുമാനിച്ചിരുന്നു. അതായത് x ന്റെ മൂല്യം 2 ലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ $f(x) = x^2 + 3$ ന്റെ പരിധിമൂല്യം $f(x)$, $x = 2$ ന്റെ മൂല്യത്തിന് സമം. അതായത് $f(2)$ എന്നിരുന്നാലും ചില സമയങ്ങളിൽ x_0 എന്ന ബിന്ദുവിൽ $f(x)$ നിർണ്ണയിക്കപ്പെടാതെയും വരാം എന്നതിനാൽ ഈ രീതിയിൽ പരിധിമൂല്യത്തെ കണ്ടുപിടിക്കുക എല്ലാ സമയങ്ങളിലും ഉപയോഗിക്കാൻ സാധ്യമല്ല. എന്നിരുന്നാലും **f ഒരു ബഹുപദവ്യംജകശ്രേണി ആണെങ്കിൽ മൂല്യ നിർണ്ണയ രീതിയിൽ പരിധിമൂല്യത്തെ കണ്ടു പിടിക്കുവാൻ സാധിക്കും.**

സിദ്ധാന്തം 9.1

$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_n x^n$ ഒരു ബഹുപദവ്യംജകമാണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവിടെ $a_0, a_1, \cdots, a_n$ എന്നത് വാസ്തവിക സംഖ്യകൾ n എന്നത് സ്ഥിരമായ ധനപൂർണ്ണാങ്കവുമാകുന്നു എങ്കിൽ

$\lim_{x\to x_0} P(x) = a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \cdots + a_nx_0^n = P(x_0)$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 9.7

$\lim_{x\to 3}(x^3 - 2x + 6)$ ന്റെ മൂല്യത്തെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$P(x) = x^3 - 2x + 6$ ഒരു ബഹുപദവ്യംജക ശ്രേണി ആകുന്നു.

അതുകൊണ്ട്, $\lim_{x\to 3} P(x) = P(3) = 3^3 - 2\times 3 + 6 = 27.$

ഉദാഹരണം 9.8

ഏതെങ്കിലും ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ x_0 യുടെ $\lim_{x\to x_0}(5)$ മൂല്യത്തെ കണ്ടുപിടിക്കുക?.

നിർദ്ധാരണം

$f(x) = 5$ ഒരു ബഹുപദവ്യംജകമാകുന്നു (ഘാത 0 ആകുന്നു).

അതുകൊണ്ട് $\lim_{x\to x_0}(5) = f(x_0) = 5$.

സ്ഥിരഫലനത്തിന്റെ പരിധിമൂല്യം ആസ്ഥിരാങ്കമാകുന്നു.

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 98 14-02-2023 17:21:43

സിദ്ധാന്തം 9.2

$x_0 \in \mathbb{R}$ എന്ന ബിന്ദുവിനെ ഉള്ളടക്കിയ ഒരു തുറന്ന ഇടസ്ഥലം I എന്നിരിക്കട്ടെ.

$f, g : I \to \mathbb{R}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

c ഒരു സ്ഥിരാങ്കമായും $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ ന്റെ മൂല്യങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ $\lim\limits_{x\to x_0}(cf(x)), \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]$, $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]$, $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]$, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$ എന്നിവയുടെ മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നു,

(i) $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = c\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$,

(ii) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$,

(iii) $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x).g(x)] = \lim\limits_{x\to x} f(x) . \lim\limits_{x\to x} g(x)$ കൂടാതെ,

(iv) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$, ഇവിടെ, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$.

ഈ ഫലങ്ങളെ എല്ലാ പരിമിത സംഖ്യകളിലുള്ള ഫലനങ്ങൾക്കും ചേർക്കാവുന്നതാണ്. ■

ഉദാഹരണം 9.9

മൂല്യങ്ങളെ കണ്ടുപിടിക്കുക. (i) : $\lim\limits_{x\to 8}(5x)$ (ii) $\lim\limits_{x\to -2}\left(-\dfrac{3}{2}x\right)$.

നിർദ്ധാരണം

(i) $\lim\limits_{x\to 8}(5x) = 5\lim\limits_{x\to 8}(x) = 5\times 8 = 40$.

(ii) $\lim\limits_{x\to -2}\left(-\dfrac{3}{2}x\right) = -\dfrac{3}{2}\lim\limits_{x\to -2}(x) = \left(-\dfrac{3}{2}\right)(-2) = 3$.

ഉദാഹരണം 9.10

കണ്ടുപിടിക്കുക. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{x^2+x}{x}+4x^3+3\right]$.

നിർദ്ധാരണം

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^2+x}{x}+4x^3+3\right] &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+x}{x}\right) + \lim_{x\to 0}(4x^3+3)\\ &= \lim_{x\to 0}(x+1)+\lim_{x\to 0}(4x^3+3)\\ &= (0+1)+(0+3)\\ &= 4.\end{aligned}$$

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 99 14-02-2023 17:21:43

ഉദാഹരണം 9.11

കണ്ടുപിടിക്കുക. $\lim_{x\to -1}(x^2-3)^{10}$.

നിർദ്ധാരണം

$$\lim_{x\to -1}(x^2-3) = 1-3 = -2.$$

അതുകൊണ്ട്, $\lim_{x\to -1}(x^2-3)^{10} = \lim_{x\to -1}(x^2-3)\,(x^2-3)...(x^2-3)$ (10 പ്രാവശ്യം)

$$= \lim_{x\to -1}(x^2-3)\lim_{x\to -1}(x^2-3)...\lim_{x\to -1}(x^2-3) \text{ (10 പ്രാവശ്യം)}$$

$$= \left[\lim_{x\to -1}(x^2-3)\right]^{10} = (-2)^{10} = 2^{10} = 1024.$$

$\lim_{x\to -1}(x^2-3)^{10} = \left[\lim_{x\to -1}(x^2-3)\right]^{10}$ എന്നതിനെ ശ്രദ്ധിക്കുക.

സിദ്ധാന്തം 9.3

$\lim_{x\to x_0} f(x)$ ലഭിക്കുമെങ്കിൽ $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n$ ഉം ലഭിക്കുന്നു. $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n = \left[\lim_{x\to x_0} f(x)\right]^n$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 9.12

$\lim_{x\to -2}(x^3-3x+6)\,(-x^2+15)$ മൂല്യത്തെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\lim_{x\to -2}(x^3-3x+6) = (-2)^3-3(-2)+6 = -8+6+6 = 4$$

$$\lim_{x\to -2}(-x^2+15) = -(-2)^2+15 = -4+15 = 11$$

$$\lim_{x\to -2}(x^3-3x+6)\,(-x^2+15) = \lim_{x\to -2}(x^3-3x+6)\lim_{x\to -2}(-x^2+15) = 4\times 11 = 44.$$

ഉദാഹരണം 9.13

$\lim_{x\to 3}\dfrac{(x^2-6x+5)}{x^3-8x+7}$ മൂല്യത്തെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\lim_{x\to 3}(x^2-6x+5) = 3^2-6\times 3+5 = -4$$

$$\lim_{x\to 3}(x^3-8x+7) = 3^3-8\times 3+7 = 10 \neq 0.$$

അതുകൊണ്ട് , $\lim_{x\to 3}\dfrac{(x^2-6x+5)}{x^3-8x+7} = \dfrac{\lim_{x\to 3}(x^2-6x+5)}{\lim_{x\to 3}(x^3-8x+7)} = \dfrac{-4}{10} = -\dfrac{2}{5}$.

ഓർമ്മിക്കുക

$\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ എങ്കിൽ ഭിന്നഫലത്തിന് പരിധി സിദ്ധാന്തത്തെ ഉപയോഗിക്കാൻ പാടില്ല.

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 100 14-02-2023 17:21:44

ഉദാഹരണം 9.14

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇവിടെ $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$ അതുകൊണ്ട്, അംശത്തിനെ അനുപാതമാക്കുക.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(1)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

ഉദാഹരണം 9.15

$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$ ന്റെ മൂല്യത്തെ കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ഘടക സിദ്ധാന്തത്തെ ഉപയോഗിക്കാൻ സാധിക്കില്ല. അംശത്തെ അനുപാതമാക്കാൻ ജ്യാമിതീയ രീതി ഉപയോഗിക്കുക.

$$\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=\frac{\left(\sqrt{t^2+9}-3\right)\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}=\frac{t^2+9-9}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}$$

$$\ddot{u}\ \lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2\sqrt{t^2+9}+3}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3}=\frac{1}{\sqrt{9}+3}=\frac{1}{6}.$$

സിദ്ധാന്തം 9.4

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}.$$

തെളിവ്

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})}{(x-a)}$$

$$=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+x^{n-2}a+x^{n-3}a^2+\cdots+xa^{n-2}+a^{n-1})$$

$$=a^{n-1}+a^{n-1}+\cdots+a^{n-1}\ (n\ \text{പ്രാവശ്യം})$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n\quad a^n}{x\quad a}=na^{n-1}\ .$$

ഇത് എല്ലാ പരിമേയ സംഖ്യകൾ n നും ശരിയാകും. ■

ഉദാഹരണം 9.16

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1^3}{x-1}=3(1)^{3-1}=3\ .$$

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 101 14-02-2023 17:21:45

ഉദാഹരണം 9.17

$\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{\sqrt{t}-1}{t-1}$ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{t}-1}{t-1}=\lim_{x\to 1}\frac{t^{\frac{1}{2}}-1^{\frac{1}{2}}}{t-1}=\frac{1}{2}(1)^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}.$$

ഉദാഹരണം 9.18

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+x)^5-2^5}{x}$ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$2+x=y$ എന്നിരിക്കട്ടെ. $y\to 2$ as $x\to 0$.

അതിനാൽ, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(2+x)^5-2^5}{x}=\lim\limits_{y\to 2}\dfrac{y^5-2^5}{y-2}=5(2^4)=80$.

ഉദാഹരണം 9.19

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^n-3^n}{x-3}=27$ ഉള്ള ധനപൂർണ്ണാങ്ക സംഖ്യ n കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^n-3^n}{x-3}=n.3^{n-1}=27$$

അതായത് $n.3^{n-1}=3\times 3^2=3\times 3^{3-1}\Rightarrow n=3$.

ഉദാഹരണം 9.20

$\lim\limits_{x\to 3}f(x)$ കൂടാതെ $f(x)=\begin{cases}ax+b & \text{if } x>3\\ 3ax-4b+1 & \text{if } x<3\end{cases}$ ലഭിക്കുന്നുവെങ്കിൽ a യ്ക്കും b യ്ക്കും ഇടയിലുള്ള ബന്ധം കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=9a-4b+1$

$\lim\limits_{x\to 3^+}f(x)=3a+b$. പരിധി കിട്ടുന്നതുകൊണ്ടുള്ള ഫലമായി

$\lim\limits_{x\to 3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to ^+}f(x)$.

$\Rightarrow 9a-4b+1=3a+b$

$\Rightarrow 6a-5b+1=0.$

അഭ്യാസം 9.2

താഴെ പറയുന്ന പരിധി മൂല്യങ്ങളെ കണ്ടുപിടിക്കുക :

(1) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^n-1}$, m, n പൂർണ്ണാങ്കങ്ങൾ.

(3) $\lim\limits_{\sqrt{x}\to 3}\dfrac{x^2-81}{\sqrt{x}-3}$

(4) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}, x>0$

(5) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x-5}$

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 102 14-02-2023 17:21:46

(6) $\lim_{x\to 2}\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$ (7) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-x^2}{1-\sqrt{x}}$ (8) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$

(9) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ (10) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{x-1}$ (11) $\lim_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4-x}}$

(12) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ (13) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x}-1}{x^2}$ (14) $\lim_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$

(15) $\lim_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}(a>b)$

9.2.4 അനന്തമായ പരിധിയും കൂടാതെ അനന്തതയിലെ പരിധികളും

അനന്തമായ പരിധി

$f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$ എന്ന ഫലനം $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ എന്ന് നിശ്ചയിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട് എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഇപ്പോൾ $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}$ കണക്കാക്കുന്നത് എങ്ങനെ എന്ന് കാണാം.

0 ന്റെ അടുത്ത് $\dfrac{1}{x^2}$ ന്റെ മൂല്യങ്ങളെ താഴെ കാണുന്ന പട്ടിക കാണിച്ചു തരുന്നു.

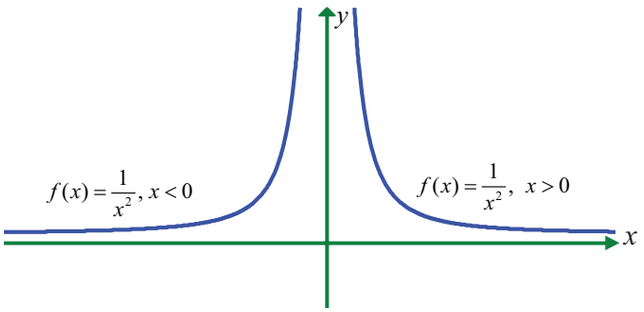
	$x\to 0^+$			$x\to 0^-$	
x	x^2	$\dfrac{1}{x^2}$	x	x^2	$\dfrac{1}{x^2}$
1	1	1	-1	1	1
0.5	0.25	4	-0.5	0.25	4
0.1	0.01	100	-0.1	0.01	100
0.01	0.0001	10,000	$-.01$	0.0001	10,000
0.001	0.000001	10,00,000	-0.001	0.000001	10,00,000
0.0001	0.00000001	10,00,00,000	-0.0001	0.00000001	10,00,00,000

പട്ടികയിൽ നിന്നും x ന്റെ മൂല്യം 0 ലേക്ക് അടുക്കുന്തോറും $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ന്റെ മൂല്യം വലിയ മൂല്യങ്ങളായി മാറുന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക. സത്യത്തിൽ x മൂല്യം ഇരുവശങ്ങളിൽ നിന്നും 0 ത്തിലേയ്ക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ $\dfrac{1}{x^2}$ ന്റെ മൂല്യം പരിധി ഇല്ലാതെ വർദ്ധിക്കുന്നു. ഈ സാഹചര്യത്തിൽ x_0 ലേക്ക് അടുക്കുമ്പോൾ $f(x)$ എന്നത് ***x* നോട് അടുക്കുന്നു എന്നു പറയാം.** $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ എങ്കിൽ $\dfrac{1}{x^2}\to\infty$, $x\to 0^-$ എങ്കിൽ $\dfrac{1}{x^2}\to\infty$, $x\to 0^-$ അതു കൊണ്ട് $\dfrac{1}{x^2}\to\infty$, $x\to 0^+$ എങ്കിൽ $\dfrac{1}{x^2}\to\infty$, $x\to 0$.

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 103 14-02-2023 17:21:47

ജ്യാമിതിയിൽ, $x = 0$ അതായത് y അക്ഷം $f(x) = \frac{1}{x^2}$ എന്ന വക്രരേഖയുടെ ലംബഅസംപാത രേഖയാകുന്നു.

$f(x) = \frac{1}{x^2}$ ഗ്രാഫ് ചിത്രം 9.22 ൽ തന്നിട്ടുണ്ട്. $x = 0$ എങ്കിൽ പരിധി മൂല്യം അനന്തമാകുന്നു.

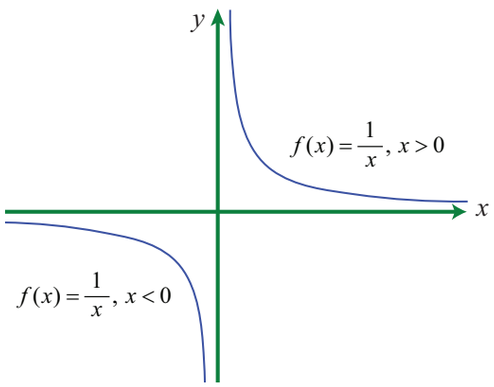


ചിത്രം 9.22

അതുകൊണ്ട് $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$ ലഭിക്കുന്നില്ല. ∞ എന്നത് $f(x) = \frac{1}{x^2}$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ പ്രവർത്തിയെ ക്കുറിക്കുന്ന ഒരു ചിഹ്നം മാത്രമാണ്. അത് ഒരു പുതിയ സംഖ്യയല്ല എന്നത് വിദ്യാർത്ഥികൾ മനസ്സിലാക്കണം.

ഇതുപോലെ $f(x) = \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} \to -\infty$, $x \to 0^-$, $\frac{1}{x} \to +\infty$, $x \to 0^+$.

(ചിത്രം 9.23) എന്ന ഗ്രാഫിന് നിർവ്വചനം താഴെതന്നിട്ടുണ്ട്. ഇതിനെ $f(x) = \frac{1}{x}$ ജ്യാമിതീയ രീതിയിൽ വ്യക്തമായി മനസ്സി ലാക്കാം.



ചിത്രം 9.23

താഴെ കാണുന്ന പൊതുവായ നിർവ്വചനങ്ങളെ പഠിക്കാം.

നിർവ്വചനം 9.4

തന്നിട്ടുള്ള മൂല്യം $M > 0$ ന് (M, ∞) എന്ന തുറന്ന ഇടസ്ഥലം ∞ ന്റെ അടുത്തുള്ള ഭാഗമാകുന്നു.

തന്നിട്ടുള്ള മൂല്യം $K < 0$ യ്ക്ക് $(-\infty, K)$ എന്ന തുറന്ന ഇടസ്ഥലം $-\infty$ ന്റെ അടുത്തുള്ള ഭാഗമാകുന്നു.

നിർവ്വചനം 9.5

$f(x) \to \infty$ തന്നിട്ടുള്ള ധനസംഖ്യ 'M' ന് x ന്റെ മൂല്യം x_0 യുടെ അടുത്ത ഭാഗത്ത് $x_0, f(x) > M$. (അതായത് $f(x) \in (M, \infty)$) എന്ന് പറയുന്ന തീതിയിൽ x_0 യുടെ അടുത്തുള്ള ഭാഗം സ്ഥിതിചെയ്യുമെ ങ്കിൽ $x_0, f(x) < K$. എന്നത് $f(x) \in (-\infty, K)$ എന്നാകുന്നു.

$f(x) \to -\infty$, x, $K < 0$, x_0, x

ഇതിനെ ചിഹ്നങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് താഴെ കാണുന്ന രീതിയിൽ എഴുതാം,

$f(x) \to \infty$ എങ്കിൽ $x \to x_0$

$f(x) \to -\infty$ എങ്കിൽ $x \to x_0$

$f(x) \to \infty$ എങ്കിൽ $x \to x_0^-$

$f(x) \to -\infty$ എങ്കിൽ $x \to x_0^+$

$f(x) \to \infty$ എങ്കിൽ $x \to x_0^+$

$f(x) \to -\infty$ എങ്കിൽ $x \to x_0^-$

ഇതിനെ **അനന്തമായ പരിധികൾ** എന്നു പറയുന്നു. മേൽപ്പറഞ്ഞ നിബന്ധനകളിൽ ഒന്ന് പരിഹരിക്ക പ്പെട്ടാൽ $x = x_0$ രേഖ $f(x)$ ഗ്രാഫിന്റെ **ലംബ അസംപാത** രേഖയായിരിക്കാം.

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 104 14-02-2023 17:21:51

ഉദാഹരണം 9.21

$\lim_{x\to 0}\frac{1}{(x^2+x^3)}$ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

പൂജ്യത്തിന്റെ അടുത്ത് (രണ്ട് വശത്തുനിന്നും) ഉള്ള x ന്റെ മൂല്യങ്ങളെ പട്ടികപ്പെടുത്തിയാൽ $f(x)=\frac{1}{x^2+x^3}$ മൂല്യം പരിധിവിട്ട് വർദ്ധിക്കുന്നു എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം. അതുകൊണ്ട് $x\to 0$ എങ്കിൽ $f(x)\to\infty$ യെ ആകുന്നു.

ഈ ഫലനത്തിന്റെ പരിധി മൂല്യത്തെ പട്ടികയില്ലാതെ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ആദ്യം അംശത്തെയും ഛേദത്തെയും x^2 കൊണ്ട് ഭാഗിക്കണം. പരിധിമൂല്യം കാണുമ്പോൾ $f(x)\to\infty$, $x\to 0$ അതുകൊണ്ട് ഭാഗിക്കാൻ സാധിക്കുന്നു. $x\neq 0, x^2\neq 0$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2+x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2+x^3}{x^2}}=\frac{\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\lim_{x\to 0}(1+x)}.$$

ഇപ്പോൾ $\frac{1}{x^2}\to\infty$ as $x\to 0$ എങ്കിൽ $\lim_{x\to 0}(1+x)=1$.

അതായത് അംശം 1 നോട് അടുത്ത് വരുമ്പോൾ ഛേദം അനന്തമായി വർദ്ധിക്കുന്നു. അതായത് $\frac{1}{(x^2+x^3)}$ അനന്തതയിലോട്ട് ചലിക്കുന്നു എന്ന് പറയാം.

ഈ ഉദാഹരണം ഒരു കഠിനമായ കണക്കിനെ ചില ബീജഗണിത മാറ്റങ്ങൾമൂലം എത്രത്തോളം ലഘൂകരിക്കാം എന്ന് വിശദീകരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 9.22

$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^3}$ മൂല്യം നിർണ്ണയിക്കുക.

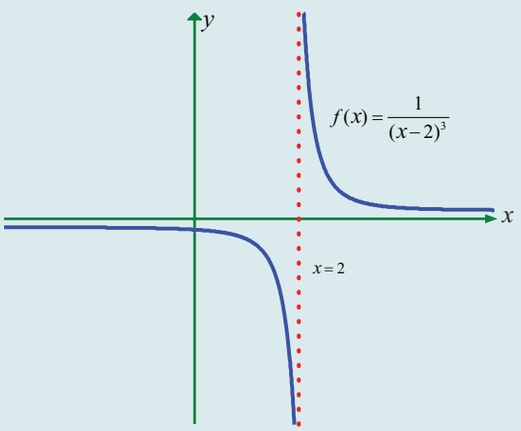
നിർദ്ധാരണം

$f(x)=\frac{1}{(x-2)^3}$ എന്ന ഗ്രാഫിൽ നിന്നും, എങ്കിൽ

$x\to 2^-$ കൂടാതെ $\frac{1}{(x-2)^3}\to\infty$ എങ്കിൽ $x\to 2^+$

ആകും.

അതുകൊണ്ട് പരിധിമൂല്യം ഇല്ല.



ചിത്രം 9.24

പൊതുവായി

(i) n ഒരു ഇരട്ട ധനപൂർണ്ണാങ്കം

$\frac{1}{(x-a)^n}\to\infty$ എങ്കിൽ $x\to a$

$\frac{1}{(x-a)^n}\to\infty$ എങ്കിൽ $x\to a^-$

$\frac{1}{(x-a)^n}\to\infty$ എങ്കിൽ $x\to a^+$

(ii) n ഒരു ഒറ്റ ധനപൂർണ്ണാങ്കം ആണെങ്കിൽ,

$\frac{1}{(x-a)^n}\to-\infty$ എങ്കിൽ $x\to a^-$

$\frac{1}{(x-a)^n}\to+\infty$ എങ്കിൽ $x\to a^+$.

$x=a$ എന്ന രേഖ ലംബ അസംപാത രേഖയായി മാറുന്നു.

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 105 14-02-2023 17:21:52

9.2.5 അനന്തതയിലെ പരിധികൾ

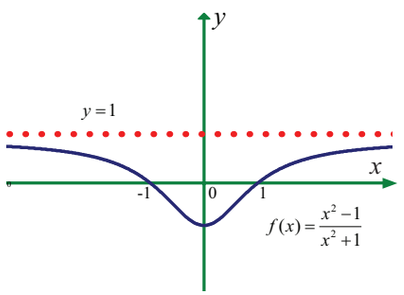
മുൻ അധ്യായത്തിൽ നാം അനന്തമായ പരിധികളെ കുറിച്ചും ലംബ അസംപാത രേഖയെക്കുറിച്ചും അവ ലോകനം ചെയ്തു. അവിടെ x ന്റെ മൂല്യം പ്രത്യേക സംഖ്യയിലേയ്ക്ക് ചലിക്കുമ്പോൾ y ന്റെ മൂല്യം നിയന്ത്രണമില്ലാതെ വർദ്ധിച്ചു. (വളരെ കൂടുതൽ ധനപരിധി അല്ലെങ്കിൽ വളരെ കൂടുതൽ ഋണ പരിധി കവിഞ്ഞും). ഈ ഭാഗത്തിൽ x ന്റെ മൂല്യം ക്രമമല്ലാതെ വർദ്ധിക്കുമ്പോൾ y ന്റെ മൂല്യം എപ്രകാരമാണുള്ളത് എന്ന് കണ്ടു പിടിക്കാം.

x വളരെ അധിക അളവിൽ വർദ്ധിക്കുമ്പോൾ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ സ്വഭാവത്തെപ്പറ്റി അന്വേഷിക്കാം. ഈ ഫലനത്തിന്റെ മൂല്യങ്ങളെ പട്ടികപ്പെടുത്താം.

x	$f(x)$
0	-1
±1	0
±2	0.6000000
±3	0.800000
±4	0.882353
±5	0.923077
±10	0.980198
±50	0.999200
±100	0.999800
±1000	0.999998

x ന്റെ മൂല്യം വർദ്ധിക്കുന്തോറും (അധിക ധന, അല്ലെങ്കിൽ അധിക ഋണ) $f(x)$ ന്റെ മൂല്യം 1 ലേയ്ക്ക് അടുത്ത് വരുന്നത് കാണാം. x ന്റെ മൂല്യത്തെ ആവശ്യമുള്ള അളവിൽ കൂടുതലായി എടുത്തുകൊണ്ട് $f(x)$ ന്റെ മൂല്യത്തെ ഒന്നിനോട് അടുത്ത് കാണാം എന്ന് മനസ്സിലാക്കുന്നു. ഈ സ്ഥിതിയെ താഴെ പറയുന്ന പ്രകാരം എഴുതാം

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1.$$



ചിത്രം 9.25

ജ്യാമിതിയിൽ ഈ അവസ്ഥ (ചിത്രം 9.25) താഴെ പറയുന്ന നിർവ്വചനത്തിലേയ്ക്ക് നമ്മെ എത്തിക്കുന്നു

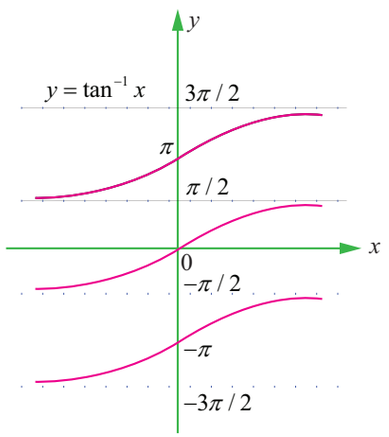
നിർവ്വചനം 9.6

$y=l$ അല്ലെങ്കിൽ $y=f(x)$ എങ്കിൽ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=l$ എന്ന രേഖ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=l$ എന്ന വക്രരേഖയുടെ **സമാന്തര അസംപാത രേഖ** ആകുന്നു.

വിശദീകരണം 9.4

$f:\ \to\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ ൽ $f(x)=\tan^{-1}x$, എങ്കിൽ

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ എന്നിവയുടെ മൂല്യം കണ്ടു പിടിക്കുക



ചിത്രം 9.26

നിർദ്ധാരണം

$y=\tan^{-1}x$ എന്ന ഗ്രാഫിനെ കാണുക,

$$\lim_{x\to-\infty}\tan^{-1}x=-\frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\tan^{-1}x=\frac{\pi}{2}.$$

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 106 14-02-2023 17:21:55

വിശദീകരണം 9.5

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-2x+3}{x^2+4x+4}$ കണക്കാക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇതിന്റെ പരിധി മൂല്യത്തെ കണ്ടുപിടിക്കാൻ പരിധി സിദ്ധാന്തങ്ങളെ ഉപയോഗപ്പെടുത്തിയാൽ നാം താഴെ കാണുന്ന സാഹചര്യത്തിൽ എത്തി ചേരുന്നു.

$(2x^2-2x+3)\to\infty$ എങ്കിൽ $x\to\infty$

$(x^2+4x+3)\to\infty$ എങ്കിൽ $x\to\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-2x+3}{x^2+4x+3}\right)=\dfrac{\infty}{\infty}$ ഇത് നിർണ്ണയിക്കപ്പെടാത്ത രൂപം എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

എന്നാൽ യഥാർത്ഥ കണക്കുകളും അതിന്റെ പട്ടികയും താഴെ പറയും പ്രകാരമാണ് :

x	$2x^2-2x+3$	x^2+4x+4	$\dfrac{2x^2-2x+3}{x^2+4x+4}$
1	3	9	0.3333
10	183	144	1.27083
100	19803	10404	1.90340
1000	1998003	1004004	1.99003
10000	199980003	100040004	1.99900

പട്ടികയിൽ നിന്നും x ആവശ്യമുള്ള അളവിൽ വർദ്ധിക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ മൂല്യം രണ്ടിലേക്ക് അടുത്ത് ചെല്ലുന്നത് കാണാം,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-2x+3}{x^2+4x+4}\right)=2.$$

ഈ കണക്കിൽ അംശത്തെയും ഛേദത്തെയും x^2 കൊണ്ട് വിഭജിക്കുന്ന വഴി ചുരുക്കാം

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x+3}{x^2+4x+4}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}\right)$$

$$=\frac{2-0+0}{1+0+0}\ \left(\frac{1}{x}\to 0\ \text{ എങ്കിൽ }\ x\to\infty,\ \frac{1}{x^2}\to 0\ \text{ എങ്കിൽ }\ x\to\infty\right)$$

$$=2.$$

ഇവിടെ അംശവും, ഛേദവും അനുസരിച്ച് സമമായി ഇരിക്കുന്നതു കാണാം.

പൊതുവെ $x\to\pm\infty$ എങ്കിൽ പരിമേയ വ്യംജകത്തിന്റെ പരിധി മൂല്യത്തെ കണ്ടുപിടിക്കാൻ അംശത്തിലുള്ള x ന്റെ ഉയർന്ന ഘാതത്താൽ അംശത്തെയും ഛേദത്തെയും വിഭജിച്ച് $x\to\infty$ $(x\to-\infty)$ അംശത്തിന്റെയും ഛേദത്തിന്റെയും പ്രത്യേകിച്ചുള്ള പരിധി മൂല്യത്തെ കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഉദാഹരണം 9.23

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+2x+3}{(5x^2+1)}$ മൂല്യം കാണുക.

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 107 14-02-2023 17:21:56

നിർദ്ധാരണം

x^2 കൊണ്ട് വിഭജിക്കുക

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x+3}{(5x^2+1)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{5+\frac{1}{x^2}} \to \infty$$

അതായത്, $\frac{x^3+2x+3}{(5x^2+1)} \to \infty$ എങ്കിൽ $x \to \infty$

അതായത് പരിധിമൂല്യത്തെ കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധ്യമല്ല.

ഛേദത്തിന്റെ ഘാതം അംശത്തിന്റെ ഘാതത്തെക്കാൾ കൂടുതലായി കാണുന്നത് ശ്രദ്ധിക്കുക.

ഉദാഹരണം 9.24

$\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^3}{3x+2}$ മൂല്യം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

x കൊണ്ട് വിഭജിക്കുമ്പോൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്,

$$\frac{1-x^3}{3x+2} = \frac{\frac{1}{x}-x^2}{3+\frac{2}{x}} \to -\infty$$ എങ്കിൽ $x \to \infty$ ലഭിക്കുന്നു.

അതുകൊണ്ട് പരിധിമൂല്യം ഇല്ല.

9.2.6 പരിമേയ ഫലനങ്ങളുടെ പരിധികൾ

$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ന്റെ ഘാതത്തെക്കാൾ $p(x)$ ന്റെ ഘാതം അധികമായിരുന്നാൽ $q(x)$, ആകുമ്പോൾ

$\frac{p(x)}{q(x)} \to +\infty$ അല്ലെങ്കിൽ $-\infty$, $x \to \infty$ ആകും.

$q(x)$ ഘാതം $p(x)$ ഘാതത്തെക്കാൾ അധികമായിരുന്നാൽ,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = 0.$$

അവസാനമായി $p(x)$, $q(x)$ ഘാതങ്ങൾ സമമെങ്കിൽ,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x) \text{ ലുള്ള } x \text{ ന്റെ കൂടിയ ഘാതത്തിന്റെ ഗുണാങ്കം}}{q(x) \text{ ലുള്ള } x \text{ ന്റെ കൂടിയ ഘാതത്തിന്റെ ഗുണാങ്കം}}.$$

കുറിപ്പ്

$f(x) \to \infty$ എങ്കിൽ $x \to a$, $f(x) \to -\infty$ എങ്കിൽ $x \to a$ എങ്കിൽ $f(x) \to \infty$ എങ്കിൽ, $x \to \infty$, $f(x) \to -\infty$ എങ്കിൽ $x \to \infty$എന്നിവ മൂല്യം ഇല്ല എന്നതിനെ വീണ്ടും തീർച്ചപ്പെടുത്തുന്നു. ∞ എന്ന അടയാളം ഒരു സംഖ്യയെ കുറിക്കുന്നില്ല. കൂടാതെ അതിനെ ഒരു സംഖ്യയായും ഉപയോഗിക്കാൻ പാടില്ല.

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 108 14-02-2023 17:21:57

9.2.7 പരിധികളുടെ ഉപയോഗം

ഉദാഹരണം 9.25

ശരീരത്തിലുള്ള ആൾക്കഹോളിനെ ശ്വാസകോശം വ്യക്കകൾ പൊലുള്ള അവയവങ്ങളും രാസ പ്രക്രിയയിലൂടെ കരളും ആൾക്കഹോളിനെ പുറം തള്ളുന്നു. ആൾക്കഹോളിന്റെ സാന്ദ്രത മിതമായി ഇരുന്നാൽ അതിനെ പുറംതള്ളുന്ന പ്രവൃത്തി കൂടുതലും 5% കുറവാകുമ്പോൾ ശ്വാസകോശവും, വൃക്കകളും അതിനെ പുറംതള്ളുന്നു. രക്തപ്രവാഹത്തിലുള്ള ആൾക്കഹോളിനെ കരൾ വേർപിരിച്ചെടുക്കുന്ന അനുപാതം r- നും രക്തത്തിലുള്ള ആൾക്കഹോളിന്റെ സാന്ദ്രത x- നും ഉള്ള ബന്ധം ഒരു പരിമേയ ഫലനം $r(x) = \dfrac{\alpha x}{x+\beta}$ എന്നു കാണപ്പെടുന്നു. ഇവിടെ α, β എന്നിവ ധനസ്ഥിരാങ്കം ആൾക്കഹോളിനെ പുറംതള്ളുന്ന സാധ്യമായ ഏറ്റവും ഉയർന്ന അനുപാതം കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

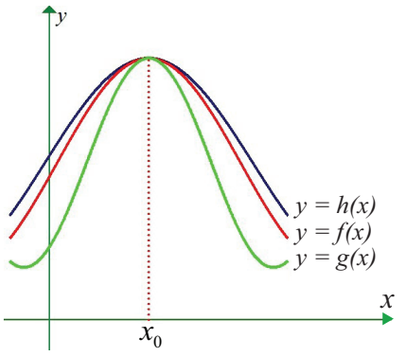
ആൾക്കഹോളിന്റെ സാന്ദ്രത x കൂടുന്നതിനനുസരിച്ച അതിനെ പുറംതള്ളുന്ന അനുപാതവും കൂടുന്നു.

അതുകൊണ്ട് പുറംതള്ളപ്പെടുന്ന ഏറ്റവും വലിയ അനുപാതം എന്നത് $= \lim\limits_{x\to\infty} r(x)$ ആകുന്നു

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha x}{x+\beta} = \lim_{x\to\infty} \frac{\alpha}{\left(1+\dfrac{\beta}{x}\right)} = \alpha.$$

9.2.8 സാന്റ്വിച്ച് സിദ്ധാന്തം

ഈ സിദ്ധാന്തത്തെ സ്ക്യൂസ് സിദ്ധാന്തം എന്നു പറയുന്നു. ചിത്രം 9.27 ൽ ഉള്ളതുപോലെ $f(x)$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ വക്രരേഖ $g(x)$, $h(x)$ എന്ന വക്രരേഖകൾക്ക് എടയിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്നു. പ്രത്യേകിച്ചും x എന്ന ബിന്ദു x_0 നോട് അടുക്കുമ്പോൾ $f(x)$ എന്നത് $h(x)$ ഇടയിൽ വളരെ അമർന്ന് കാണപ്പെടുന്നു. ഇപ്പോൾ x എന്നത് x_0 യോട് അടുക്കുമ്പോൾ g, h എന്നിവയുടെ പരിധികൾ l ആണെങ്കിൽ f ന്റെ പരിധിയും .. ആയിരിക്കും $x \to x_0, . x \to x_0$.



ചിത്രം 9.27

സിദ്ധാന്തം 9.5 (സാന്റ്വിച്ച സിദ്ധാന്തം)

I ൽ ഉള്ള x_0 യെ നീക്കിയ x യുടെ അടുത്ത് ഉള്ള എല്ലാ x നും $f, g, h : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ കൂടാതെ $g(x) \le f(x) \le h(x)$ എന്നും കാണപ്പെട്ടാൽ $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = l$, ആയി കാണപ്പെടുന്നു $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ ആകുന്നു.

ഉദാഹരണം 9.26

ഐൻസ്റ്റിന്റെ ആപേക്ഷിക സിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച് v വേഗത്തോടുകൂടിയ ഒരു വസ്തുവിന്റെ ഭാരം $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$, ഇവിടെ m_0 എന്നത് ആരംഭ ഭാരവും c എന്നത് പ്രകാശത്തിന്റെ വെഗവും ആകുന്നു.

$v \to c^-$ എങ്കിൽ m ൽ ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റം എന്താണ്? എന്തുകൊണ്ടാണ് ഇടതുവശ പരിധി ആവശ്യമായി വരുന്നത്?

നിർദ്ധാരണം

$$\lim_{v\to c^-}(m) = \lim_{v\to c^-} \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} = \frac{m_0}{\sqrt{\lim\limits_{v\to c^-}\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)}}$$

ഇതുകാരണം $h > 0$, $c - h < v < c$ അതായത് $(c-h)^2 < v^2 < c^2$

$$\frac{(c-h)^2}{c^2} < \frac{v^2}{c^2} < 1. \quad \lim_{h\to 0}\frac{(c-h)^2}{c^2} < \lim_{h\to 0}\frac{v^2}{c^2} < \lim_{h\to 0} 1.$$

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 109 14-02-2023 17:22:01

സാന്റ്വിച്ച് സിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച് $1 < \lim_{h\to 0} \frac{v^2}{c^2} < 1$. അതുകൊണ്ട് $1 < \lim_{v\to c^-} \frac{v^2}{c^2} < 1$. $\lim_{v\to c^-} = 1$.

അതുകൊണ്ട് $\lim_{v\to c^-}(m) \to \infty$.

$v \to c^-$ എങ്കിൽ ഭാരം വളരെ കുറയുന്നു (അനന്തമായി)

ഇടതുവശത്തെ പരിധി ആവശ്യമായി വരുന്നു. എന്നാൽ വലതുവശ പരിധി എടുത്താൽ $v \to c^+$ എങ്കിൽ $1 - \frac{v^2}{c^2} < 0$ ആയി വരുന്നു. അതുകൊണ്ട് നമുക്ക് ഭാരം കണ്ടുപിടിക്കാൻ സാധ്യമല്ല.

ഉദാഹരണം 9.27

ആകാശത്ത് നിന്നും താഴേക്ക് പതിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ $r(t) = -\sqrt{\frac{32}{k}} \frac{1-e^{-2t\sqrt{32k}}}{1+e^{-2t\sqrt{32k}}}$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു. വേഗത്തിനെ അടി/സെക്കന്റിൽ കണക്കാക്കുന്നു. ഇവിടെ k എന്ന സ്ഥിരാങ്കം ആ വസ്തുവിന്റെ അളവ്, ആകൃതി കൂടാതെ കാറ്റിന്റെ സാന്ദ്രതയെയും ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. ആ വസ്തുവന്റെ പരിധി വേഗത്തിനെ കണ്ടുപിടിക്കുക? അതായത് $\lim_{t\to\infty} r(t)$ കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\lim_{t\to\infty} r(t) = \lim_{t\to\infty} -\sqrt{\frac{32}{k}} \frac{1-e^{-2t\sqrt{32k}}}{1+e^{-2t\sqrt{32k}}}$$

$$= -\sqrt{\frac{32}{k}} \lim_{t\to\infty} \frac{1-e^{-2t\sqrt{32k}}}{1+e^{-2t\sqrt{32k}}}$$

$$= -\sqrt{\frac{32}{k}} \frac{(1-0)}{(1+0)} = -\sqrt{\frac{32}{k}} \text{ ft/sec.}$$

ഉദാഹരണം 9.28

ഒരു ജന്തുവിന്റെ കൃഷ്ണമണിയുടെ വ്യാസം $f(x) = \frac{160x^{-0.4}+90}{4x^{-0.4}+15}$ എന്ന ഫലനത്തിൽ തന്നിട്ടുണ്ട്. ഇവിടെ x എന്നത് പ്രകാശത്തിന്റെ തീവ്രതയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു. അതിനെ മില്ലീമീറ്ററിൽ തന്നിട്ടുണ്ട്. ആ കൃഷ്ണമണിയുടെ വ്യാസത്തെ (a) പ്രകാശത്തിന്റെ തീവ്രത കുറഞ്ഞത് (b) പ്രകാശത്തിന്റെ തീവ്രത അധികമായി കണ്ടു പിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

(a) പ്രകാശത്തിന്റെ തീവ്രത കുറവായിരിക്കുമ്പോൾ അതായത് $x \to 0^+$ ആയിരിക്കുമ്പോൾ ഫലനത്തിന്റെ പരിധിയെ കണ്ടുപിടിക്കണം.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{160x^{-0.4}+90}{4x^{-0.4}+15} = \lim_{x\to 0^+} \frac{160+90x^{0.4}}{4+15x^{0.4}}$$

$$= \frac{160}{4} = 40 \text{ മില്ലീമീറ്റർ.}$$

(b) പ്രകാശത്തിന്റെ തീവ്രത കുറവായിരിക്കുമ്പോൾ അതായത് $x \to \infty$ ആയിരിക്കുമ്പോൾ ഫലനത്തിന്റെ പരിധിയെ കണ്ടുപിടിക്കണം

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{160x^{-0.4}+90}{4x^{-0.4}+15} = \frac{90}{15} = 6 \text{ മില്ലീമീറ്റർ}$$

പ്രകാശത്തിന്റെ തീവ്രത അധികമായിരിക്കുമ്പോനാൾ കൃഷ്ണമണിയുടെ വ്യാസത്തിന്റെ പരിധി 6 മില്ലീമീറ്റർ ആയി കാണപ്പെടുന്നു.

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 110 14-02-2023 17:22:04

അഭ്യാസം 9.3

(1) (a) താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ഫലനങ്ങളുടെ ഇടതുവശ, വലതുവശ പരിധികളുടെ മൂല്യം കണ്ടു പിടിക്കുക $f(x)=\dfrac{x^2-4}{(x^2+4x+4)(x+3)}$ at $x=-2.$ ൽ

(b) $f(x)=\tan x$ ൽ $x=\dfrac{\pi}{2}$.

താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പരിധികളുടെ മൂല്യത്തെ കണ്ടുപിടിക്കുക

(2) ü $\underset{x\to 3}{}\dfrac{x^2-9}{ü^2(\ ^2-6\ +9)}$ (3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{2x+11}{x^2+x-6}$ (4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$ (6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+3x^3}$ (7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$

(8) തെളിയിക്കുക

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{3n^2+7n+2}=\dfrac{1}{6}$ (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+2^2+\ldots+(3n)^2}{(1+2+\ldots+5n)(2n+3)}=\dfrac{9}{25}$

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}+\dfrac{1}{3.4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=1$

(9) മത്സ്യബന്ധന ശാസ്ത്രത്തിന്റെ ഒരു പ്രധാന പ്രശ്നം നദികളിൽ ഉള്ള മുട്ടയിടാൻ പ്രായമുള്ള മീനുകളുടെ എണ്ണത്തെ കണക്കെടുത്ത ആ വിവരത്തിനെ ഉപയോഗിച്ച പ്രത്യുൽപ്പാദന കാലത്തിൽ നദികളിൽ പ്രവേശിക്കുന്ന എണ്ണത്തിനെ കണക്കാക്കുക എന്നതാണ്. S എന്നത് മുട്ടയിടാൻ പ്രായമായ മീനുകളുടെ എണ്ണം R എന്നത് മത്സ്യബന്ധനത്തിന് അനുയോജ്യമായ മീനുകളുടെ എണ്ണമാകുന്നു. ബിവർട്ടൻ ഹോൾട്ടിന്റെ പ്രത്യുൽപ്പാദന ഫലനം $R(S)=\dfrac{S}{(\alpha S+\beta)}$ ആകുന്നു. ഇവിടെ α, β എന്നിവ ധന സ്ഥിരാങ്കമാകുന്നു. ഈ ഫലനം പ്രത്യുൽപ്പാദന നിലയിലുള്ള മീനുകളുടെ എണ്ണം ആവശ്യമുള്ള അളവിൽ വർദ്ധിക്കുമ്പോൾ മത്സ്യബന്ധനത്തിന് യോജിച്ച മീനുകളുടെ എണ്ണം ഏകദേശം സ്ഥിരമായിരിക്കും എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(10) ഒരു തൊട്ടിയിൽ 5000 ലിറ്റർ ശുദ്ധജലം ഉണ്ട്. ഒരു ലിറ്ററിൽ 30 ഗ്രാം ഉപ്പ് അടങ്ങിയ വെള്ളം, 25 ലിറ്റർ/മിനിട്ട് എന്ന അളവിൽ ടാങ്കിലേക്ക് പമ്പ് ചെയ്യുന്നു. t മിനിട്ടിൽ ഈ വെള്ളത്തിന്റെ സാന്ദ്രത (ഗ്രാം/ലിറ്റർ) $C(t)=\dfrac{30t}{200+t}$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്. $t\to\infty$ എങ്കിൽ സാന്ദ്രത മാറുന്നത് എങ്ങനെ?.

ഉദാഹരണം 9.29

മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കുക $\lim\limits_{x\to 0}x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

നിർദ്ധാരണം

$-1\le\sin\dfrac{1}{x}\le 1\Rightarrow -x^2\le x^2\sin\dfrac{1}{x}\le x^2$ എന്ന് നമുക്കറിയാം.

ഇതിൽ നിന്നും $g(x)=-x^2, f(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}; h(x)=x^2$

ഇവിടെ $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=\lim\limits_{x\to 0}(-x^2)=0$ എന്നിരിക്കട്ടെ

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 111 14-02-2023 17:22:05

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0}(x^2) = 0 \text{ ആകുന്നു.}$$

സാന്റ്വിച്ച് സിദ്ധാന്തത്തിൽ നിന്നും,

$$\lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \text{ ആകുന്നു.}$$

പരിധിമൂല്യ സിദ്ധാന്തങ്ങളെ ഉപയോഗിച്ചിരുന്നു. എങ്കിൽ തെറ്റായ നിഗമനത്തിൽ എത്തിച്ചേരുമായിരുന്നു

$$\text{അതായത് } \lim_{x\to 0} x^2\left(\sin\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}(x^2)\lim_{x\to 0}\left(\sin\frac{1}{x}\right)$$

ഇപ്പോൾ, $\lim_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ ന് മൂല്യമില്ല, $\lim_{x\to 0} x^2 = 0$ അതുകൊണ്ട് $\lim_{x\to 0} x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ന്റെ മൂല്യം കാണപ്പെടുന്നു.

കുറിപ്പ്, $a \le f(x) \le a$, എങ്കിൽ $\lim_{x\to x_0} f(x) = a.$

ഉദാഹരണം 9.30

തെളിയിക്കുക $\lim_{x\to 0}\sin x = 0$.

നിർദ്ധാരണം

എല്ലാ $-x \le \sin x \le x,\ x \ge 0$ നും

$$\lim_{x\to 0}(-x) = 0 \text{ എന്ന് നമുക്കറിയാം}$$

$$\lim_{x\to 0}(x) = 0.$$

സാന്റ്വിച്ച് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്

$$\lim_{x\to 0}\sin x = 0.$$

ഉദാഹരണം 9.31

$\lim_{x\to 0^+} x\left[\left[\frac{1}{x}\right]+\left[\frac{2}{x}\right]+\cdots+\left[\frac{15}{x}\right]\right] = 120$ എന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\frac{1}{x}-1 \le \left[\frac{1}{x}\right] \le \frac{1}{x}+1$$

$$\frac{2}{x}-1 \le \left[\frac{2}{x}\right] \le \frac{2}{x}+1$$

$$\vdots$$

$$\frac{15}{x}-1 \le \left[\frac{15}{x}\right] \le \frac{15}{x}+1$$

ചുരുക്കത്തിൽ,

$$\frac{120}{x}-15 \le \left[\frac{1}{x}\right]+\left[\frac{2}{x}\right]+\cdots+\left[\frac{15}{x}\right] \le \frac{120}{x}+15$$

$$120-15x \le x\left[\left[\frac{1}{x}\right]+\left[\frac{2}{x}\right]+\cdots+\left[\frac{15}{x}\right]\right] \le 120+15x$$

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 112 14-02-2023 17:22:07

$$\lim_{x\to 0^+}(120-15x) \le \lim_{x\to 0^+} x\left[\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor\right] \le \lim_{x\to 0^+}(120+15x)$$

$$120 \le \lim_{x\to 0^+} x\left[\left\lfloor\frac{1}{ü}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2}{-}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{15}{—}\right\rfloor\right] \le 120$$

$$\lim_{x\to 0^+} x\left[\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{2}{x}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{15}{x}\right\rfloor\right]=120\,.$$

9.2.9 രണ്ട് പ്രത്യേക ത്രികോണമിതി പരിധികൾ

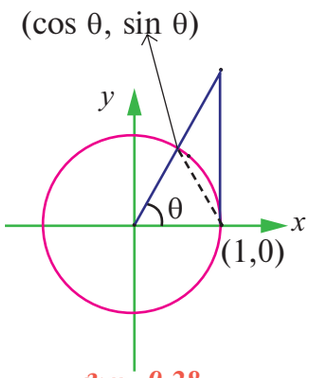
ഫലം 9.1

(a) $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ (b) $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}=0$.

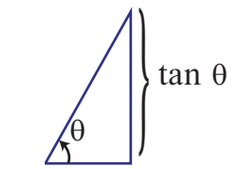
തെളിവ്

ഇതിനെ വൃത്തഖണ്ഡം ഉപയോഗിച്ച് തെളിയിക്കാം.

കേന്ദ്രം (0, 0), വ്യാസാർദ്ധം 1 ഉള്ള വൃത്തത്തെ പരിഗണിക്കും. വൃത്തത്തിൻമേലുള്ള ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു $P(\cos\theta, \sin\theta)$ എന്ന് കരുതുക.



ചിത്രം 9.28

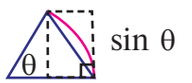


ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $\frac{\tan\theta}{2}$

ചിത്രം 9.29

വൃത്തഖണ്ഡത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $\frac{\theta}{2}$

ചിത്രം 9.30



ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം $\frac{\sin\theta}{2}$

ചിത്രം 9.31

ത്രികോണത്തിന്റെ വിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ സ്വഭാവമനുസരിച്ച വിസ്തീർണ്ണം $\frac{\tan\theta}{2} \ge \frac{\theta}{2} \ge \frac{\sin\theta}{2}$.

ഇതിനെ $\frac{2}{\sin\theta}$ കൊണ്ട് $\frac{1}{\cos\theta} \ge \frac{\theta}{\sin\theta} \ge 1$ ഗുണിക്കുമ്പോൾ

$\cos\theta \le \frac{\sin\theta}{\theta} \le 1$ എന്ന് കിട്ടുന്നു.

വ്യുൽക്രമം കാണുമ്പോൾ $\cos(-\theta)=\cos\theta$, $\frac{\sin(-\theta)}{-\theta}=\frac{\sin\theta}{\theta}$ അതുകൊണ്ട് ഈ അസമത്വം $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ എന്ന തുറന്ന ഇടസ്ഥലത്തിലുള്ള θ അല്ലാത്ത എല്ലാം മൂല്യങ്ങൾക്കും യോജിക്കും എന്ന് പറയാം.

$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta=1; \lim_{\theta\to 0}(1)=1$ എന്ന് നമുക്കറിയാം. സാന്റ്വിച്ച് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$.

(b) $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta}=0$.

$$1-\cos\theta = 2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 113 14-02-2023 17:22:08

$$\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \left(\text{ü}\quad \frac{\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

അതുകൊണ്ട്, $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\theta} = \lim_{\theta\to 0}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right).\lim_{\theta\to 0}\left(\frac{\frac{\sin\theta}{2}}{\frac{\theta}{2}}\right)$

$= 0 \times 1 = 0.$ □

9.2.10 മറ്റ് പ്രധാനപ്പെട്ട പരിധികൾ

ഫലം 9.2

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

തെളിവ്

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots \qquad \text{(അനുക്രമത്തിലും ശ്രേണിയിലും)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\ldots\right)=1.$$ □

ഫലം 9.3

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\log a,\ a>0$$

തെളിവ്

$a^x, \log_a x$ എന്നിവ ഒന്നിനോടൊന്ന് വ്യുൽക്രമത്തിലാണെന്ന് നമുക്കറിയാം.

$\log f(x)$ ന്റെ വ്യുൽക്രമം എങ്കിൽ $\exp(f(x)),\quad \exp(\log f(x)) = f(x).$

അതുകൊണ്ട്, $a^x = \exp(\log a^x)$

$= e^{x\log a}$

അതുകൊണ്ട്, $\frac{a^x-1}{x} = \frac{e^{x\log a}-1}{x\log a}\times\log a$

$x\to 0,\ y = x\log a \to 0$

അതുകൊണ്ട്, $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}\times\log a = \log a\lim_{y\to 0}\left(\frac{e^y-1}{y}\right)=\log a$ □

$\left(\text{since } \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\right).$

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 114 14-02-2023 17:22:11

ഫലം 9.4

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}=1.$$

തെളിവ്

$$\log(1+x) = y \text{ എന്നിരിക്കട്ടെ}$$

$x\to 0$ എങ്കിൽ $y\to 0$

$$1+x = e^y$$

$$x = e^y-1$$

$$\text{അതുകൊണ്ട്, } \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}$$

$$= \lim_{y\to 0}\frac{1}{\left(\frac{e^y-1}{y}\right)}=\frac{1}{1}=1.$$ □

തെളിവുകളില്ലാത്ത ചില പ്രധാനപ്പെട്ട പരിധികൾ

ഫലങ്ങൾ 9.5 മുതൽ 9.9 വരെ

(5) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^{-1}x}{x}=1$

(6) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan^{-1}x}{x}=1$

(7) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ പരിധി e ആകുന്നു.

(8) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$

(9) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x=e^k.$

e എന്ന സംഖ്യ അതീന്ദ്രിയ സംഖ്യ എന്നും പറയാം. e എന്ന സംഖ്യ $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0.$ എന്ന ബഹുപദ വ്യംജകസമികരണത്തെ എപ്പോഴും തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നില്ല.

ഉദാഹരണം 9.32

മൂല്യം കാണുക : $\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\operatorname{cosec} x}$

നിർദ്ധാരണം

$\sin x=\frac{1}{y}$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$x\to 0,\ y\to\infty$ എങ്കിൽ

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{2\operatorname{cosec} x}=\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{2y}=\left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^2=e^2.$$

ഉദാഹരണം 9.33

മൂല്യം കാണുക : $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x.$

നിർദ്ധാരണം

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2+4}{x-2}\right)^{x-2+2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x-2}\right)^{(x-2)+2}$$

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 115 14-02-2023 17:22:13

$y = x-2,\ x \to \infty,\ y \to \infty$ കൂടാതെ ($y = x-2$, എങ്കിൽ $x \to \infty, y \to \infty$)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-2}\right)^x = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^{y+2} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^y . \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{4}{y}\right)^2$$

$$= e^4.1 = e^4 .$$

ഉദാഹരണം 9.34

മൂല്യം കാണുക : $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{4\sqrt{2}-(\cos x+\sin x)^5}{1-\sin 2x}$.

നിർദ്ധാരണം

$$\frac{4\sqrt{2}-(\cos x+\sin x)^5}{1-\sin 2x} = \frac{2^{\frac{5}{2}}-\left[(\cos x+\sin x)^2\right]^{\frac{5}{2}}}{1-\sin 2x}$$

$$= \frac{2^{\frac{5}{2}}-(1+\sin 2x)^{\frac{5}{2}}}{2-(1+\sin 2x)}$$

$$= \frac{2^{\frac{5}{2}}-(1+\sin 2x)^{\frac{5}{2}}}{2-(1+\sin 2x)}$$

അതുകൊണ്ട്, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{2^{\frac{5}{2}}-[(\cos x+\sin x)^2]^{5/2}}{2-[1+\sin 2x]} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} \dfrac{2^{\frac{5}{2}}-\left[1+\sin 2x)\right]^{\frac{5}{2}}}{2-(1+\sin 2x)}$.

$y = 1 + \sin 2x$ എന്നെടുക്കുക. $x \to \dfrac{\pi}{4},\ y \to 2$

$$= \lim_{y\to 2} \frac{2^{\frac{5}{2}}-y^{\frac{5}{2}}}{2-y}$$

$$= \frac{5}{2}.2^{\frac{5}{2}-1} = \frac{5}{2}\times 2^{\frac{3}{2}} = 5\sqrt{2} .$$

ഉദാഹരണം 9.35

$x \to 0$? എന്നിരിക്കുമ്പോൾ താഴെ കൊടുത്ത ഫലനങ്ങൾക്ക് പരിധിമൂല്യം ഉണ്ടോ എന്ന് കണ്ടുപിടിക്കുക.

(i) $\dfrac{\sin|x|}{x}$ (ii) $\dfrac{\sin x}{|x|}$ (iii) $\dfrac{x\lfloor x\rfloor}{\sin|x|}$ (iv) $\dfrac{\sin\left(x-\lfloor x\rfloor\right)}{x-\lfloor x\rfloor}$.

നിർദ്ധാരണം

(i)
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(-x)}{x} & \text{എങ്കിൽ } -1 < x < 0 \\ \dfrac{\sin x}{x} & \text{എങ്കിൽ } 0 < x < 1 \end{cases}$$

അതുകൊണ്ട്, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$ കൂടാതെ

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +1$.

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 116 14-02-2023 17:22:14

അതുകൊണ്ട് പരിധിമൂല്യം ഇല്ല $f(0^-) \neq f(0^+)$.

(ii) $$\frac{\sin x}{|x|} = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{-x} & , -1 < x < 0 \\ \frac{\sin x}{x} & , 0 < x < 1 \end{cases}$$

അതുകൊണ്ട്, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$

അതുകൊണ്ട് പരിധിമൂല്യം ഇല്ല.

(iii) $$f(x) = \frac{x\lfloor x \rfloor}{\sin|x|} = \begin{cases} \frac{-x}{\sin(-x)} & , -1 < x < 0 \\ \frac{x.0}{\sin x} & , 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{x}{\sin x} & , -1 < x < 0 \\ 0 & , 0 < x < 1 \end{cases}$$

Therefore, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = +1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0.$

അതുകൊണ്ട് പരിധിമൂല്യം ഇല്ല.

(iv) $$\frac{\sin\left(x-\lfloor x \rfloor\right)}{x-\lfloor x \rfloor} = \begin{cases} \frac{\sin(x-(-1))}{x-(-1)} & , -1 < x < 0 \\ \frac{\sin(x-0)}{x-0} & , 0 < x < 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x+1)}{(x+1)} & , -1 < x < 0 \\ \frac{\sin x}{x} & , 0 < x < 1 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \frac{\sin 1}{1} = \sin 1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1.$

അതുകൊണ്ട് പരിധിമൂല്യം ഇല്ല.

അഭ്യാസം 9.4

പരിധികളുടെ മൂല്യം കാണുക:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{7x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/3x}$

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{\frac{m}{x}}$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+3}{2x^2+5}\right)^{8x^2+3}$

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 117 14-02-2023 17:22:16

(5) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x+2}$

(6) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^3\left(\frac{x}{2}\right)}{x^3}$

(7) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}$

(8) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\sin 5x}$

(9) $\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin(\alpha^n)}{(\sin\alpha)^m}$

(10) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$

(11) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+a^2}-a}{\sqrt{x^2+b^2}-b}$

(12) $\lim_{x\to 0}\frac{2\arcsin x}{3x}$

(13) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$

(14) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}$

(15) $\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{x}$

(16) $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{\sqrt{x+1}-1}$

(17) $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x\sin 2x}$

(18) $\lim_{x\to\infty} x\left[3^{\frac{1}{x}}+1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)-e^{\frac{1}{x}}\right]$

(19) $\lim_{x\to\infty}\{x[\log(x+a)-\log(x)]\}$

(20) $\lim_{x\to\pi}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}$

(21) $\lim_{x\to\pi}(1+\sin x)^{2\operatorname{cosec} x}$

(22) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$

(23) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$

(24) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^x$

(25) $\lim_{x\to 0}\frac{e^x \quad e^{\ x}}{\sin x}$

(26) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$

(27) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3}$

(28) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$

9.3 തുടർച്ചാപ്രതിഭാസം

ഒരു ഫലനത്തിന്റെ പ്രത്യേക സ്വഭാവമാണ് തുടർച്ച. പല ദൈനംദിന സാഹചര്യങ്ങളിലും ഈ പ്രതിഭാസത്തെ കാണാം. ഉദാഹരണമായി ഒരു കമ്പിയെ ചൂടാക്കുമ്പോൾ അത് നീണ്ടു വരുന്നതു കാണാം. ഒരു ജന്തുവിന്റെ തുടർച്ചയായുള്ള വളർച്ച, ഓട്ടം, അന്തരിക്ഷത്തിലെ താപനിലയിൽ ഉണ്ടാകുന്ന മാറ്റങ്ങൾ എന്നിങ്ങനെ പലതരത്തിലുള്ള വിഷയങ്ങളെക്കുറിച്ച് നാം സംസാരിക്കാറുണ്ടല്ലോ.

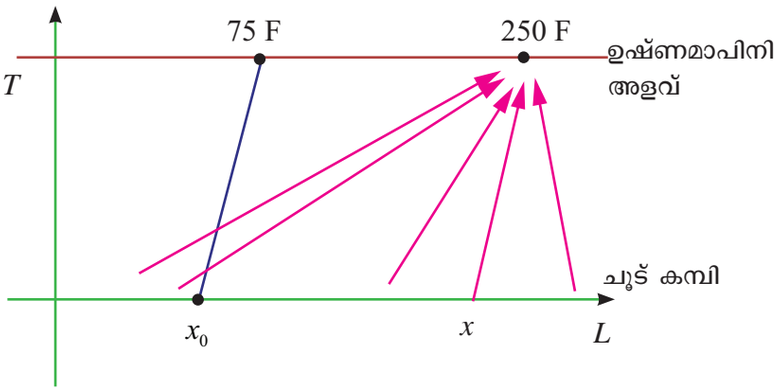
ഒരു ഫലനത്തിന്റെ തുടർച്ച എന്ന ആശയം ഫലനത്തിന്റെ വക്രരേഖ എവടെയും "വേർപെട്ടു കാണപ്പെടുന്നില്ല" എന്ന അടിസ്ഥാനത്തിലുള്ളതാണ്. "continuous" എന്ന പദം ലാറ്റിൻ ഭാഷയിലെ "continuere" ചേർന്നിരിക്കൽ എന്ന വാക്കിൽ നിന്നും ഉണ്ടായതാണ്. ഫലനങ്ങളെ വിശകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ തുടർച്ച എന്നതിനെ സൂചിപ്പിക്കുവാൻ "വേർപെട്ടു കാണപ്പെടുന്നില്ല" അല്ലെങ്കിൽ "ചേർന്നിരിക്കുന്നു" എന്നു പറയുന്നതിൽ വലിയ തെറ്റുണ്ട്. അതുകൊണ്ട് തുടർച്ച ഇല്ലായ്മയെപ്പറ്റി അറിയാൻ ഫലനത്തിന്റെ വക്രരേഖയെ പാകതയില്ലാതെ ഉപയോഗിക്കുന്നത് തെറ്റായ രിതിയാണ്. എങ്കിലും ഒരു ഫലനത്തിന് ഒരു പ്രത്യേക ഇടസ്ഥലത്ത് തുടർച്ച എന്നത് മണ്ഡലം അറിഞ്ഞുകൊണ്ട് വക്രരേഖയെ പെൻസിലിന്റെ മുനയെ മാറ്റാതെ വരയ്ക്കുന്ന വക്രരേഖയാണ് എന്നത് ഒരാൾക്ക് പിന്നീട് മനസ്സിലാക്കാൻ സാധിക്കും.

തുടർച്ചയുടെ ആശയത്തെ മനസ്സിലാക്കുവാൻ തുടർച്ചയെ പരിധിയോട് ബന്ധപ്പെടുത്തി പഠിക്കുക എന്നത് ഒരു നല്ല മാർഗ്ഗമാണ്. പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ തുടർച്ച സ്വഭാവം എന്നു പറയുമ്പോൾ അതിന്റെ അർത്ഥം ആവശ്യമുള്ള ഒരു പരിധി കിട്ടുന്നു എന്നതാണ്. പരിധിയിൽ നിന്നും തുടർച്ചയുടെ ആശയത്തെ രൂപ

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 118 14-02-2023 17:22:16

പ്പെടുത്താൻ ഒരു ബിന്ദുവിൽ നമ്മുടെ ശ്രദ്ധയെ ഏകീകരിക്കണം. ഒരു ബിന്ദുവിന്റെ പരിധിയിൽ, തുടർച്ചയും പ്രാരംഭ നില ആശയങ്ങളാകുന്നു. എന്നാൽ ഫലനത്തിന്റെ തുടർച്ച എന്നത് ബിന്ദുവിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ലഭിച്ച ഫലനത്തിന് മുഴുവനുമായ ഒരു പൊതു പ്രതിഭാസമാകുന്നു.

ഉദാഹരണമായി ഒരു തെർമോ മീറ്റർ T യെ എടുക്കുക. അതിന്റെ L എന്നത് നീളമുള്ള ചൂടായ കമ്പി യുടെ താപനിലയെ രേഖപ്പെടുത്തു ന്നതായി കരുതുക.



ചിത്രം 9.32

L മേലുള്ള ഓരോ ബിന്ദു x ലും അതിന്റെ താപനില $t(x)$ എന്നിരിക്ക ട്ടെ. L നീളമുള്ള കമ്പിയിൽ x_0 യെ എത്തുംവരെ അതിന്റെ താപനില $250°F$ എന്ന് കരുതാം. x_0 എന്ന ബിന്ദു വിൽ പെട്ടെന്ന് തന്നെ താപനില ഇൻസുലേഷൻ കാരണമായി മുറി യുടെ താപനിലയായ $75°F$ ലേയ്ക്ക് കുറയുന്നു. x_0 യ്ക്ക് ശേഷം അതിന്റെ താപനില $250°F$ ആയി തുടരുന്നു എങ്കിൽ ഫലനത്തിന്റെ ചിഹ്നമിടു മ്പോൾ

$$t(x) = \begin{cases} 250^\circ F, & x \neq x_0 \\ 75^\circ F, & x = x_0 \end{cases}$$ എന്നെഴുതാം.

അതുകൊണ്ട് x_0 എന്ന ബിന്ദു ഏകബിന്ദുവായി ("വിശിഷ്ട ബിന്ദു" അല്ലെങ്കിൽ "അസാധാരണ ബിന്ദു") മാറുന്നു. താപനിലയുടെ ശ്രേണിയെ പരിശോധിക്കുമ്പോൾ x എന്നത് x_0 യോട് അടുക്കുന്നില്ല എന്ന് മനസ്സി ലാക്കാം. ചുരുക്കത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ x_0 യിൽ ഒരു ചാട്ടം നടന്നിരിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് താപനിലാഫലനം x_0 ൽ തുടർച്ചയായി ഇല്ല എന്ന് പറയേണ്ടിവരുന്നു. എന്തെന്നാൽ x_0 യുടെ അടുത്ത് x ഉള്ളപ്പോൾ $t(x) = 250°F$ ആയി കണക്കാക്കപ്പെടുന്നതിനാൽ $t(x_0)$ യുടെ മൂല്യവും $250°F$ ആയിരിക്കണം എന്ന് പ്രതീക്ഷിക്കാം. ഇപ്പോൾ നാം തുടർച്ച എന്ന ആശയത്തെ പൊതുവൽക്കരിക്കുമ്പോൾ പ്രതിബിംബങ്ങൾ അടുത്ത് വരുമ്പോൾ അതിന്റെ ബിംബങ്ങളും അടുത്ത് വരണം എന്നു കരുതുന്നു. മേൽപ്പറഞ്ഞ ഉദാഹരണത്തിൽ കമ്പിയിന്മേലുള്ള ബിന്ദുക്കൾ പ്രതിബിംബങ്ങളാക്കുന്നു. അതിന്റെ താപനിലയുടെ ബിംബങ്ങൾ ആകുന്നു.

ഒരു വിദ്യാർത്ഥിക്ക് തുടർച്ചയെ കുറിച്ചുള്ള അവബോധജന്യമായ ആശയം അതിന്റെ തുടർച്ച പ്രതിഭാസ ത്തിൽ നിന്നും രൂപപ്പെടണം. അല്ലാതെ സാധാരണ കാണപ്പെടുന്ന പെട്ടെന്നുണ്ടാകുന്ന തുടർച്ചയില്ലാ സ്വഭാവ ത്തിൽ നിന്നും രൂപപ്പെടാൻ പാടില്ല. പെട്ടെന്ന് മനസ്സിൽ തോന്നുന്ന ചില ഫലനങ്ങളുടെ ഗണിതമാതൃകകളെ താഴെ പട്ടികപ്പെടുത്തിയിട്ടുണ്ട്:

(1) ലൈറ്റിന്റെ സ്വിച്ച് ഇടുക: ഇവിടെ പ്രകാശത്തിന്റെ തീവ്രത എന്നത് സമയത്തിനെ അടിസ്ഥാനമാക്കി യുള്ള ഫലനം.

(2) വാഹനങ്ങൾ തമ്മിൽ ഇടിക്കുന്നത: ഇവിടെ വേഗത എന്നത് സമയത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള ഫലനം.

(3) റേഡിയോ ഓഫ് ആക്കുക: ഇവിടെ ശബ്ദത്തിന്റെ തീവ്രത സമയത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള ഫലനം.

(4) ബലൂൺ പൊട്ടുന്നത്: ഇവിടെ വ്യാസാർദ്ധം അകത്ത് കടത്തപ്പെടുന്ന കാറ്റിനെ അടിസ്ഥാനമാക്കി യുള്ള ഫലനം.

(5) കയറിനെ മുറിയ്ക്കുക: ഇവിടെ പിരിമുറുക്കം എന്നത് നീളത്തിനെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള ഫലനം.

(6) താപാൽ സ്റ്റാമ്പിന്റെ വില: ഇവിടെ തപാൽ വില എന്നത് ഭാരത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള പഠനം.

(7) വരുമാന കരം: ഇവിടെ കരത്തിന്റെ നിരക്ക് എന്നത് വരുമാനത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള ഫലനം.

(8) പ്രായം വർഷത്തിൽ: ഇവിടെ വയസ്സ് പൂർണ്ണ വർഷങ്ങളിൽ എന്നത് സമയത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കി യുള്ള ഫലനം.

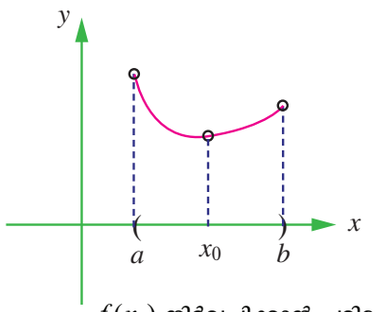
(9) ഇൻഷ്വറൻസ് തവണ: തവണ എന്നത് പ്രായത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള ഫലനം.

ഉദാഹരണങ്ങൾ (1) മുതൽ (5) വരെ അത്ര കൃത്യമായി കാണുന്നില്ല. ഉദാഹരണമായി പ്രകാശത്തിന്റെ തീവ്രത എന്നത് സുതാര്യമായി പൂജ്യ പ്രകാശ തീവ്രതയിൽ നിന്നും വളരെ ചെറിയ പ്രകാശ തീവ്രതയി

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 119 14-02-2023 17:22:17

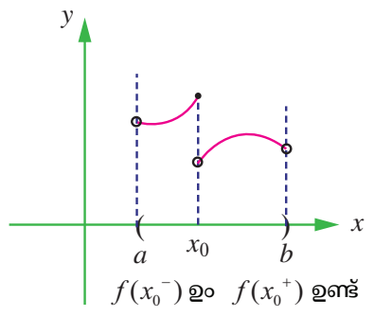
ലേക്ക് ചലിക്കുന്നു. യഥാർത്ഥത്തിൽ സ്വഭാവികമായുള്ള തുടർച്ചയില്ലാ പ്രതിഭാസത്തെ വെറുക്കുന്നതുപോലെ തോന്നുന്നു. (6) മുതൽ (9) വരെ ഉദാഹരണങ്ങൾ തുടർച്ചയില്ലാത്തതും കൂടാതെ സത്യത്തിൽ ഒരു പ്രത്യേക ബിന്ദുവിൽ ചാട്ടം ഉള്ളതിനെയും മനസ്സിലാക്കാം.

വിദ്യാർത്ഥികൾ തുടർച്ചയുടെ നിർവ്വചനത്തെ സാധാരണയായി നാം ഉപയോഗിക്കുന്ന തുടർച്ചയായ എന്ന വാക്കിന്റെ അർത്ഥവുമായി താരതമ്യം ചെയ്തു നോക്കണം. ഒരു തുടർച്ചയായ സംഭവം പടിപടിയായി യാതൊരു തടസ്സവും ഇല്ലാതെ പെട്ടെന്നുള്ള മാറ്റങ്ങൾ ഇല്ലാതെയും നടക്കുന്നതാണ്. അതായത് അതിൽ എന്തെങ്കിലും ഒരു ദ്വാരമോ, ചാട്ടമോ അല്ലെങ്കിൽ ഇടസ്ഥലമോ ഇല്ലാതിരിക്കുന്നതാണ്. താഴെ കാണുന്ന x ന്റെ മൂന്ന് മൂല്യങ്ങളിൽ തുടർച്ചയില്ലാത്ത പ്രതിഭാസം ഉള്ളത് കാണാം. ഇടസ്ഥലം (a, b) യുടെ മറ്റ് എല്ലാ സ്ഥാനങ്ങളിലും f ന്റെ വക്രരേഖ യാതൊരു തരത്തിലുമുള്ള തടസ്സവുമില്ലാതെ തുടർച്ചയായി കാണപ്പെടുന്നു.



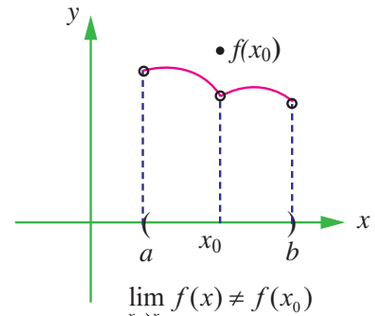
$f(x_0)$ നിർവചിക്കാൻ പറ്റില്ല

ചിത്രം 9.33



$f(x_0^-)$ ഉം $f(x_0^+)$ ഉണ്ട് എന്നാൽ സമമല്ല.

ചിത്രം 9.34



$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

ചിത്രം 9.35

മുകളിൽ പറഞ്ഞ വക്ര രേഖകളിൽ ചിത്രം 9.33 മുതൽ 9.35 വരെ മൂന്നു നിബന്ധനകളിൽ $x = x_0$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ തുടർച്ചയായ പ്രതിഭാസമില്ലാതിരിക്കുവാൻ മൂന്നു നിബന്ധനകൾ ഉണ്ട്.

(1) $x = x_0$ ഫലനം നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല.

(2) പരിധി $f(x)$ ന് $x = x_0$ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല

(3) $f(x)$ ൽ $f(x)$ ന് പരിധി ഉണ്ട്. $x = x_0$ എന്നാൽ ഇതിന്റെ മൂല്യം $f(x_0)$ യ്ക്കു സമമില്ലാത്ത രീതിയിൽ കാണപ്പെടുന്നു.

നമുക്ക് ഇപ്പോൾ ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കാം.

വിശദീകരണം 9.6

(i) $f(x) = x^2+3$ (ii) $f(x) = \dfrac{16-x^2}{4+x}$

(i) As $x \to 2$, എങ്കിൽ ഒരു വശ പരിധികൾ

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 7$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 7$$

അതുകൊണ്ട് $\lim_{x \to 2} f(x) = 7$ കൂടാതെ $f(2)$ നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു. $f(2) = 7 = \lim_{x \to 2} f(x)$

ഈ സാഹചര്യത്തിൽ $f(x)$ തുടർച്ചയായി $x = 2$.

(ii) ഇതിന്റെ ഒരു വശത്തുള്ള പരിധികൾ : $\lim_{x \to -4^-} f(x) = 8$

$$\lim_{x \to -4^+} f(x) = 8$$

അതുകൊണ്ട് $\lim_{x \to -4} f(x) = 8$ $f(-4)$ ന് മൂല്യമില്ല.

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 120 14-02-2023 17:22:17

$f(x)$ ന് പരിധിമൂല്യം ഉണ്ടായിരുന്നിട്ടും $x=-4$ ൽ ഫലനത്തിന്റെ മൂല്യം $f(-4)$ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല. അതുകൊണ്ട് $\lim_{x\to -4} f(x)$ ഉള്ളതിനും $f(-4)$ ആയി കാണപ്പെടുന്നതിനും യാതൊരു തുടർച്ചയും ഇല്ല.

നമുക്ക് ഇപ്പോൾ തുടർച്ചയെ കുറിച്ചുള്ള ശരിയായ നിർവ്വചനത്തെ മനസ്സിലാക്കാം.

നിർവ്വചനം 9.7

x_0 ഉൾക്കൊള്ളുന്ന തുറന്ന ഇടസ്ഥലം I ആണെന്നിരിക്കട്ടെ $f: I \to \mathbb{R}$ എന്നിരിക്കട്ടെ. f എന്ന ഫലനം $x = x_0$ യുടെ സമീപഭാഗത്തിൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട് $x = x_0$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഫലനത്തിന്റെ മൂല്യവും അതിന്റെ പരിധിമൂല്യവും ലഭ്യമായി സമമായി കാണുമെങ്കിൽ f എന്ന ഫലനം $x = x_0$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ തുടർച്ച ഉള്ളത് എന്ന് പറയാം.

ഇപ്രകാരം $x = x_0$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഒരു ഫലനം $y = f(x)$ തുടർച്ചയുള്ളതായിരിക്കാൻ മൂന്നു നിബന്ധനകൾ പാലിച്ചിരിക്കണം :

(i) x_0 യുടെ സമീപത്തിൽ $f(x)$ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കണം;

(ii) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ ഉണ്ടായിരിക്കണം ;

(iii) $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x)$.

നിബന്ധന (iii) $\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$ നെ ആയി മാറ്റിയും പറയാം കൂടാതെ x_0 ൽ f ന്റെ തുടർച്ചയെ താഴെ പറയും പ്രകാരം നിർവ്വചിക്കാം :

നിർവ്വചനം 9.8

x_0 എന്ന ബിന്ദുവിന്റെ സമീപത്തായി ഫലനം f നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട് $\lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$ ആയി കാണപ്പെട്ടു. എങ്കിൽ $y = f(x)$ എന്ന ഫലനം $x = x_0$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ തുടർച്ചയുള്ളത് എന്നു പറയാം.

(iii) നിബന്ധനയെ $\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)$ എന്നെഴുതാം തുടർച്ചയായി കാണപ്പെടുമെങ്കിൽ പരിധി ചിഹ്നത്തെയും ഫലന ചിഹ്നത്തെയും പരസ്പരം സ്ഥലമാറ്റം ചെയ്യാൻ സാധിക്കും.

9.3.1 ഒരു ബിന്ദിവിൻമേൽ തുടർച്ചയുള്ള ഫലനങ്ങളുടെ ഉദാഹരണങ്ങൾ

(1) സ്ഥിരാങ്കഫലനം $\mathbb{R}$ ന്റെ എല്ലാ ബിന്ദുവിലും തുടർച്ചയുണ്ട്.

$f(x) = k, k \in \mathbb{R}$ എന്നത് ഒരു സ്ഥിരാങ്കം. $x_0 \in \mathbb{R}$, എങ്കിൽ, $f(x_0) = k$

കൂടാതെ $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}(k) = k.$

(2) ധനപൂർണ്ണാങ്കഘാതമടങ്ങിയ ഘാത ഫലനങ്ങൾ $\mathbb{R}$ ന്റെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും തുടർച്ചയുള്ളവയാണ്. $f(x) = x^n$ എങ്കിൽ f ന്റെ മണ്ഡലം $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ യും പരിധി സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച് $\lim_{x\to x_0} x^n = x_o^n, x_0 \in \mathbb{R}$.

(3) $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0$ എന്ന ബഹുപദവ്യംജക ഫലനങ്ങൾ $\mathbb{R}$ ന്റെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും തുടർച്ചയുള്ളതാണ് പരിധി സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്,

$$\lim_{x\to x_0} p(x) = a_0x_0^n + a_1x_0^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x_0 + a_n = p(x_0).$$

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 121 14-02-2023 17:22:19

(4) ബഹുപദവ്യംജകത്തിന്റെ ഘടകഭാഗം അതായത്

$R(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, എന്ന പരിമേയഫലനങ്ങൾ എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും തുടർച്ചയുള്ളവയാണ് $q(x) \neq 0$,

$$\lim_{x \to x_0} R(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{p(x)}{q(x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to x_0} p(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)} = R(x_0)\,.$$

(5) വ്യുത്തഫലനങ്ങളായ $\sin x$, $\cos x$ എന്നിവ അവയുടെ മണ്ഡലം $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ ഉള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും തുടർച്ചയുള്ളവയാണ് $\lim\limits_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \cos x = \cos x_0$.

ഇതിന്റെ ഫലമായി പരിധികളുടെ വ്യുൽക്രമം കൂടാതെ വിഭജന നിയമങ്ങൾ അനുസരിച്ച്, $\tan x$, $\cot x$, $\operatorname{cosec} x$, $\sec x$ എന്ന ഫലനങ്ങൾ അവയ്ക്ക് യോജിച്ച മണ്ഡലങ്ങളിൽ തുടർച്ചയുള്ളവയാകുന്നു.

(6) $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ പോലുള്ള n ാം ഘാതഫലനങ്ങൾ അവയുടെ അനുയോജ്യമായ മണ്ഡലങ്ങളിൽ തുടർച്ചയുള്ളവയാണ്. കാരണം $\lim\limits_{x \to x_0} \left(x^{\frac{1}{n}} \right) = x_0^{\frac{1}{n}}$.

(7) വ്യുൽക്രമ ഫലനം $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 0 ൽ നിൽവ്വചിച്ചിട്ടില്ല. അതു 0 ത്തിൽ തുടർച്ചയുള്ളതല്ല. എന്നാൽ $\mathbb{R} - \{0\}$ ന്റെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കൾക്കും തുടർച്ച കാണപ്പെടുന്നു.

(8) $h(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ x^2+1, & x > 0 \end{cases}$

h ന്റെ മണ്ഡലം എല്ലാം വാസ്തവിക സംഖ്യകളാകുന്നു. കൂടാതെ

$$\lim_{x \to 0^-} h(x) = \lim_{x \to 0^-} (x+1) = 1 = h(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} h(x) = \lim_{x \to 0^+} (x^2+1) = 1 = h(0)\,.$$

അതുകൊണ്ട് $x = 0$ ൽ $h(x)$ ഒരു തുടർച്ചയായ ഫലനമാകുന്നു.

കൂടാതെ, $(-\infty, 0)$ ന്റെ ഓരോ ബിന്ദുവിലും $h(x)$ ഒരു തുടർച്ചയുള്ള ഫലനമാകുന്നു. അതുകൊണ്ട് $(0, \infty)$ ൽ പൂർണ്ണമായും h തുടർച്ചയുള്ളതാകുന്നു $(-\infty, \infty)$.

(9) വലിയ പൂർണ്ണാങ്കഫലനം $f(x) = \lfloor x \rfloor$; $x = 0$ ൽ തുടർച്ചയുള്ളതല്ല.

$\lim\limits_{x \to 0^-} \lfloor x \rfloor = -1$ കൂടാതെ,

$$\lim_{x \to 0^+} \lfloor x \rfloor = 0$$

എല്ലാ പൂർണ്ണാങ്ക ബിന്ദുവിലും ഈ ഫലനം തുടർച്ചയുള്ളതല്ല. പ്രത്യേകിച്ചും,

$$\lim_{x \to n^-} \lfloor x \rfloor = n - 1$$

$$\lim_{x \to n^+} \lfloor x \rfloor = n.$$

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 122 14-02-2023 17:22:20

(10) മോഡ് ഫലനം

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x & , \ x < 0 \\ 0 & , \ x = 0 \\ x & , \ x > 0 \end{cases}$$

$\mathbb{R}$ ന്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും തുടർച്ചയുള്ളതാകുന്നു.

പ്രത്യേകിച്ചും,

$$\lim_{x \to 0^-} |x| = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0,$$

$$\lim_{x \to 0^+} |x| = \ddot{u}_{x \to 0^+} (x) = 0,$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0 = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0 = f(0).$$

(11) ഘാത ഫലനം $f(x) = e^x$, $\mathbb{R}$ ന്റെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കൾക്കും തുടർച്ചയുള്ളതാകുന്നു.

(12) ലോഗതിക ഫലനം $f(x) = \log x$ $(x > 0)$ യിൽ, തുടർച്ചയുള്ളതാകുന്നു $(0, \infty)$.

9.3.2 തുടർച്ചയുള്ള ഫലനങ്ങളുടെ ബീജഗണിതം

f, g എന്ന ഫലനങ്ങൾ, x_0 യെ ഉള്ളടക്കിയ സമീപഭാഗത്തും x_0 എന്ന ബിന്ദുവിലും തുടർച്ചയായവ എങ്കിൽ

(1) $x = x_0$ ൽ, $f + g$ തുടർച്ചയുള്ളത്

(2) $x = x_0$ ൽ, തുടർച്ചയുള്ളത് $f - g$

(3) $x = x_0$ ൽ, തുടർച്ചയുള്ളത് $f \,.\, g$

(4) $x = x_0$, $\dfrac{f}{g}$ $(g(x) \neq 0)$ തുടർച്ചയുള്ളത്.

(5) തുടർച്ചയെക്കുറിച്ചുള്ള സംയോജന ഫലന സദ്ധാന്തം.

f എന്ന ഫലനം $g(x_0)$ ലും, g എന്ന ഫലനം x_0 ലും തുടർച്ചയായവ ആണെങ്കിൽ fog യും x_0 ൽ തുടർച്ചയായതാണ്.

അടഞ്ഞ ഇടസ്ഥലത്തിലെ തുടർച്ച

നിർവ്വചനം 9.9

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ എന്ന ഫലനം തുറന്ന ഇടസ്ഥലം $[a, b]$ ൽ തുടർച്ചയായതും

$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ ഉം $\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$ ഉം ആയും ഇരിക്കുകയാണെങ്കിൽ ആ ഫലനം അടഞ്ഞ ഇടസ്ഥലം (a, b) തുടർച്ചയായിട്ടുള്ളത് എന്നു പറയാം.

അതായത് ഫലനം a യ്ക്ക് വലതുഭാഗത്തു നിന്നും തുടർച്ചയായും b യ്ക്ക് ഇടതു ഭാഗത്തു നിന്നും തുടർച്ചയായും കൂടാതെ $[a, b]$ തുറന്ന ഇടസ്ഥലത്തിൽ ഉള്ള ഓരോ ബിന്ദുവും $x_0 \in (a, b)$. യ്ക്കും തുടർച്ചയായി ഇരിക്കണം.

വിശദീകരണം 9.7

$f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ തുടർച്ചാ പ്രതിഭാസത്തെ പരിശോധിക്കുക

ഫലനം f ന്റെ നിർവ്വചനം അനുസരിച്ച് മണ്ഡലം മൂടിയ ഇടസ്ഥലം $[-1, 1]$ ആകുന്നു.

$(1 - x^2 \geq 0)$ ആയിരിക്കുമ്പോൾ f നിർവ്വചിക്കപ്പെടുന്നു

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 123 14-02-2023 17:22:21

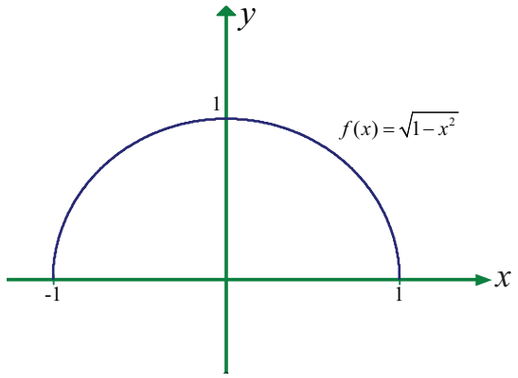
ഏതെങ്കിലും ബിന്ദു $c \in (-1,1)$

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c}\sqrt{1-x^2} = \left[\lim_{x\to c}(1-x^2)\right]^{\frac{1}{2}}$$
$$= (1-c^2)^{\frac{1}{2}} = f(c).$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 0 = f(1).$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \left[\lim_{x\to -1^-}(1-x^2)\right]^{\frac{1}{2}} = 0 = f(-1).$$

ഇപ്രകാരം f എന്ന ഫലനം $[-1, 1]$ ഇട സ്ഥലത്ത് തുടർച്ചയായിട്ടുള്ളതാണ്. ഈ കണക്കിനെ ഫലനങ്ങളുടെ സംയോജന സിദ്ധാന്തം മൂല്യവും പരിഹരിക്കാം.



ചിത്രം 9.36

ഉദാഹരണം 9.36

താഴെ കാണുന്ന ഫലനങ്ങൾ ഏത് ഇടസ്ഥലങ്ങളിൽ തുടർച്ച ഉള്ളത് എന്ന് കണ്ടു പിടിക്കുക.

(i) $f(x) = \tan x$

(ii) $g(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

(iii) $h(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

നിർദ്ധാരണം

(i) $f(x) = \tan x$ എന്ന ഫലനം $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z.$ എന്ന സ്ഥലങ്ങളിൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല. മറ്റ് എല്ലാ സ്ഥലങ്ങളിലും ഇത് തുടർച്ച ഉള്ളതാണ്. അതുകൊണ്ട് $f(x) = \tan x$ എന്ന ഫലനം $\ldots\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right), \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right), \ldots$ എന്ന തുറന്ന ഇടസ്ഥലങ്ങളിൽ തുടർച്ച ഉള്ളതാണ്.

(ii) $y = \frac{1}{x}$ എന്ന ഫലനം $x = 0$ ഒഴികെ ന്റെ മറ്റു എല്ലാ സ്ഥലങ്ങളിലും തുടർച്ച ഉള്ളതാണ്. $x = 0$ ൽ ഫലനം നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല.

$g(x) = \sin\frac{1}{x}$ എന്ന ഫലനം $x = 0$ ഒഴികെ മറ്റെല്ലാ സ്ഥലങ്ങളിലും തുടർച്ച ഉള്ളതാണ്. $\lim_{x\to 0} g(x)$ മൂല്യം ലഭിക്കുന്നില്ല. അതുകൊണ്ട് gഎന്ന ഫലനം $(-\infty, 0)$ കൂടാതെ $(0, \infty)$ ഇട സ്ഥലങ്ങളിൽ തുടർച്ച ഉള്ളതാണ്.

(iii) $h(x)$ എന്ന ഫലനം $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ $x_0 \neq 0$ എന്നുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കൾക്കും നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്.

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \left(\lim_{x\to x_0} x\sin\frac{1}{x}\right)$$
$$= x_0\sin\frac{1}{x_0} = h(x_0)$$

$x_0 = 0$ എങ്കിൽ,

$$h(x) = x.\sin\frac{1}{x}$$
$$-x \leq x\sin\frac{1}{x} \leq x$$

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 124 14-02-2023 17:22:23

$$g(x) = -x, f(x) = x\sin\frac{1}{x}, h(x) = x$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 0,\ \lim_{x\to 0} h(x) = 0$$

കൂടാതെ, $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 0.$

സാന്റ്വിച്ച് സിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച്.

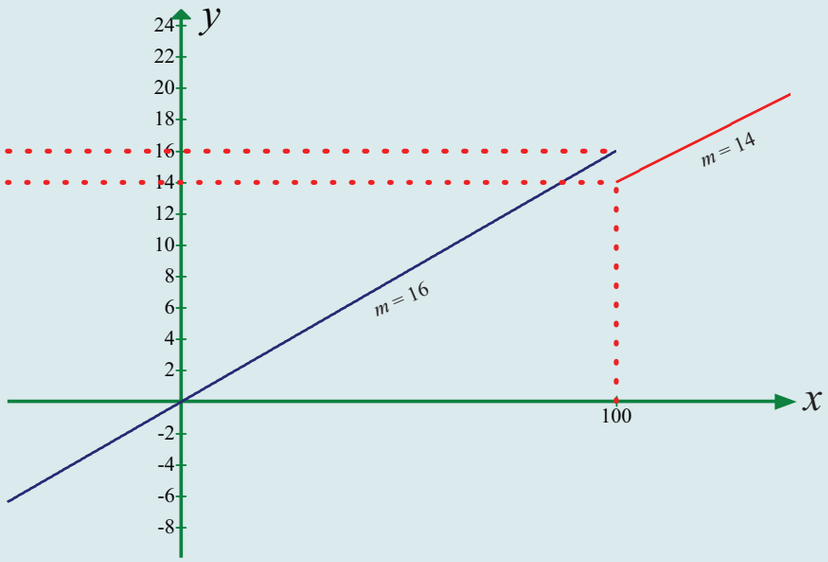
$$\lim_{x\to 0}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = 0 = h(0).$$

അതുകൊണ്ട് വാസ്തവിക സംഖ്യാ രേഖയിലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കൾക്കും $h(x)$ തുടർച്ചയുള്ളതാണ്

ഉദാഹരണം 9.37

തക്കാളിക്കച്ചവടക്കാരൻ പുതിയതായി കൊയ്തെടുത്ത തക്കാളിയുടെ വില 100 കിലോയ്ക്ക് കുറവായി വാങ്ങുമ്പോൾ ₹0.16/ kg വീതത്തിൽ കുറഞ്ഞപക്ഷം 100 കിലോ വാങ്ങിയാൽ ₹0.14/ kg വിൽക്കുന്നതായി കാണുന്നു. മൊത്ത വിലയുടെ ഫലനത്തെയും 100 കിലോ വാങ്ങുമ്പോഴുള്ള വിലയെയും കണ്ടുപിടിക്കുക?

നിർദ്ധാരണം



ചിത്രം 9.37

ഓരോ ദിവസവും വാങ്ങുന്ന തക്കാളിയുടെ അളവ് x എന്നിരിക്കട്ടെ കൂടാതെ വില C എന്നുമിരിക്കട്ടെ.

$$C(x) = \begin{cases} 0.16x, \text{ എങ്കിൽ } 0 \le x < 100 \\ 0.14x, \text{ എങ്കിൽ } x \ge 100 \end{cases}.$$

ഈ ഫലനത്തിന്റെ ചിത്രം താഴെ തന്നിട്ടുണ്ട്. ചിത്രം 9.37.

$x = 100$ ൽ ഫലനം തുടർച്ചയില്ലാത്തതാണ് എന്തെന്നാൽ $\lim\limits_{x\to 100^-} C(x) = 16$ ഉം $\lim\limits_{x\to 100^+} C(x) = 14$.

$C(100) = 14$ ഇപ്രകാരം $\lim\limits_{x\to 100^-} C(x) = 16 \neq 14 = \lim\limits_{x\to 100^+} C(x) = C(100)$.

ഇവിടെ ഫലനം ഒരു പ്രത്യേക മൂല്യം 14 ൽ നിന്നും മറ്റൊരു സംഖ്യ 16 ലേയ്ക്ക് മാറുന്നു.

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 125 14-02-2023 17:22:23

9.3.3 നീക്കപ്പെടുന്നതും കൂടാതെ ചാട്ടം കൊണ്ടും തുടർച്ചയില്ലാത്ത പ്രതിഭാസം

താഴെ പറയുന്ന ഫലനങ്ങളെ ശ്രദ്ധിക്കാം :

(i) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$

(ii) $g(x)=C(x)$, ഇവിടെ $C(x)$ നെ 9.38 എന്ന ഉദാഹരണത്തിൽ നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ട്.

$x=0$ കൂടാതെ വാസ്തവിക സംഖ്യാ രേഖയിൽ ഉള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കൾക്കും $f(x)$ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. അതായത് $f(0)$ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല. എന്നാൽ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ എന്ന് കാണപ്പെടുന്നു.

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

വാസ്തവിക സംഖ്യാ രേഖയിലുള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കൾക്കും $x=0$ യും ചേർത്ത് n നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട് കൂടാതെ $x=0$ ൽ h തുടർച്ച ഉള്ളതാണ്.

$$\lim_{x\to 0}h(x) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1=h(0)\,.$$

$x\neq 0$, $h(x)=f(x)$ എന്നതിനെ ശ്രദ്ധിക്കുക. മൂലഫലനം $f(x)$, $x=0$ ൽ തുടർച്ചയില്ലാതെ ഇരിക്കുമ്പോഴും മാറ്റി നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട ഫലനം h പൂജ്യത്തിലും തുടർച്ച ഉള്ളതായി കാണപ്പെടുന്നു. അതായത് ഫലനത്തെ മാറ്റി നിർവ്വചിച്ച് തുടർച്ച ഇല്ലാത്ത പ്രതിഭാസത്തെ തുടർച്ച ഉള്ളതായി മാറ്റാൻ കഴിയും. ഇപ്രകാരമുള്ള തുടർച്ച യില്ലാത്ത ബിന്ദുക്കൾ നീക്കാൻ പറ്റിയ തുടർച്ചയില്ലായ്മ എന്നു പറയുന്നു.

നിർവ്വചനം 9.10

$h:I\to\mathbb{R}$ എന്ന ഫലനം $h(x)=\begin{cases}f(x), & x\neq x_0\\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x), & x=x_0\end{cases}$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടാൽ $I\subseteq\mathbb{R}$ എന്ന ഇട സ്ഥലത്തിൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെടുന്ന ഫലനം f ന് $x_0\in I$ ൽ നീക്കാൻ പറ്റിയ തുടർച്ചയില്ലാത്ത പ്രതിഭാസം എന്നു പറയാം.

നീക്കാൻ പറ്റിയ തുടർച്ചയില്ലാത്ത പ്രതിഭാസത്തിന്, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ ലഭിക്കണം.

ഉദാഹരണം 9.38 ഉള്ളതുപോലെ $g(x)=C(x)$ എന്ന ഫലനത്തെ പരിശോധിക്കാം. ഇത് $[0,\infty)$ -ൽ ഉള്ള എല്ലാ ബിന്ദുക്കളിലും നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടാലും $\lim\limits_{x\to 100}g(x)$ ലഭിക്കുന്നില്ല. കൂടാതെ $\lim\limits_{x\to 100^+}g(x)-\lim\limits_{x\to 100^-}g(x)=16-14=2$, എന്ന പരിചിത മൂല്യത്തിന് ഒരു ചാട്ടം കാണപ്പെടുന്നു. $\lim\limits_{x\to 100}g(x)$ ന്റെ മൂല്യം ലഭിക്കുന്നില്ല എന്നതുകൊണ്ട് $x=100$ ൽ ഇത് തുടർച്ചയില്ലാത്തതാകുന്നു. ഇതുപോലെയുള്ള തുടർച്ചയില്ലാത്ത പ്രതിഭാസങ്ങളെ ചാട്ടം തുടർച്ചയില്ലാ പ്രതിഭാസം എന്നു പറയുന്നു. ഇതിൽ നിന്നും താഴെ പറയുന്ന നിർവ്വചനം ലഭിക്കുന്നു. :

നിർവ്വചനം 9.11

$I\subseteq\mathbb{R}$ എന്ന ഇടസ്ഥലത്തിൽ f എന്ന ഫലനം നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ.

$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ and $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ എന്നിവ ലഭിക്കുകയും $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$. എന്ന രീതിയിൽ $x_0\in I$ ൽ x_0 ൽ f നെ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടതിനാൽ ചാട്ടം തുടർച്ചയില്ലാ പ്രതിഭാസം ഉണ്ട് എന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 126 14-02-2023 17:22:24

ഉദാഹരണം 9.38

$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{if } x \neq 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \end{cases}$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടാൽ f എന്ന ഫലനം $\mathbb{R}$ ൽ തുടർച്ചയാണോ എന്ന് തീരുമാനിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

സാന്റ്വിച്ച് സിദ്ധാന്തം മൂലം $\lim_{x\to 0} x^2 \sin\frac{1}{x} = 0$ കൂടാതെ $f(x)$ ന്റെ നിർവ്വചനംമൂലം $f(0) = 0$

എന്തെന്നാൽ $x = 0$ ൽ f തുടർച്ചയുള്ളതാണ്. കൂടാതെ മറ്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും തുടർച്ചയിലാണുള്ളത് എന്ന് വ്യക്തമായി മനസ്സിലാക്കാം. അതുകൊണ്ട് f എന്ന ഫലനം R ൽ തുടർച്ചയിലാണുള്ളത്.in $\mathbb{R}$.

അഭ്യാസം 9.5

(1) $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$, $\mathbb{R}$ ന്റെ എല്ലാ ബിന്ദുക്കൾക്കും തുടർച്ചയാണുള്ളത് എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(2) താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയിൽ തുടർച്ചയിലാണോ ഉള്ളത് എന്ന് പരിശോധിക്കുക?

(i) $x + \sin x$ (ii) $x^2 \cos x$ (iii) $e^x \tan x$

(iv) $e^{2x} + x^2$ (v) $x.\ln x$ (vi) $\frac{\sin x}{x^2}$

(vii) $\frac{x^2 - 16}{x + 4}$ (viii) $|x + 2| + |x - 1|$ (ix) $\frac{|x-2|}{|x+1|}$

(x) $\cot x + \tan x$

(3) താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഫലനങ്ങൾക്ക് തുടർച്ച പ്രതിഭാസത്തെ ഇല്ലാത്ത ബിന്ദുക്കളെ കാണുക

(i) $f(x) = \begin{cases} 4x + 5, & x \leq 3 \\ 4x - 5, & x > 3 \end{cases}$ (ii) $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \geq 2 \\ x^2, & x < 2 \end{cases}$

(iii) $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3, & x \leq 2 \\ x^2 + 1, & x > 2 \end{cases}$ (iv) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ \cos x, & \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \end{cases}$

(4) തന്നിട്ടുള്ള ഫലനങ്ങൾക്ക് തന്നിട്ടുള്ള ബിന്ദു x_0 ൽ തുടർച്ചയാണോ അല്ലെങ്കിൽ തുടർച്ചയില്ലാത്തതോ എന്ന് കാരണം സഹിതം പറയുക :

(i) $x_0 = 1$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}$ (ii) $x_0 = 3$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3 \\ 5, & x = 3 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$ എന്ന ഫലനം $(-\infty, \infty)$ ൽ തുടർച്ചയാണെന്ന് തെളിയിക്കുക?

(6) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^4 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ \alpha, & x = 1 \end{cases}$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട ഫലനത്തിൽ $x = 1$ ൽ ഫലനം തുടർച്ചയാണെങ്കിൽ ∞ യുടെ മൂല്യം കാണുക?

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 127 14-02-2023 17:22:25

(7) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \le x < 2 \\ 4, & x \ge 2 \end{cases}$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക? ഈ ഫലനം $(-\infty, \infty)$ ൽ തുടർച്ചയിലാണ് എന്ന് തെളിയിക്കുക?

(8) f കൂടാതെ g തുടർച്ചയായ ഫലനങ്ങൾ കൂടാതെ $f(3) = 5$, $\lim_{x\to 3}[2f(x) - g(x)] = 4$ എങ്കിൽ $g(3)$ യെ കാണുക?

(9) തുടർച്ചയില്ലാത്ത ഫലന ബിന്ദുക്കളെ കാണുക. ഈ ബിന്ദുക്കളിൽ ഏതു ബിന്ദുക്കൾക്ക് f ന് വലതുവശ തുടർച്ച, ഇടതുവശ തുടർച്ച കൂടാതെ ഒന്നുമില്ലാത്തത് എന്ന് കാണുക f ന്റെ ഗ്രാഫ് വരയ്ക്കുക?

(i) $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \le -1 \\ 3x & -1 < x < 1 \\ 2x-1, & x \ge 1 \end{cases}$ (ii) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x < 0 \\ (x+1)^3, & x \ge 0 \end{cases}$

(10) f നെ താഴെ തന്ന രീതിയിൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0; \\ x & 0 \le x < 1; \\ -x^2 + 4x - 2 & 1 \le x < 3; \\ 4 - x & x \ge 3 \end{cases}$$

ഈ ഫലന തുടർച്ചയിലുള്ളതാണോ?

(11) താഴെതന്ന ഫലനങ്ങളിൽ ഏതിനൊക്കെ $x = x_0$ ൽ നീക്കേണ്ട തുടർച്ചയില്ലാത്ത പ്രതിഭാസം ഉള്ളത് എന്ന് കാണുക? തുടർച്ചയില്ലാത്ത പ്രതിഭാസം ഉണ്ടെങ്കിൽ f ന്റെ $x \ne x_0$ ന് യോജിക്കുന്ന രീതിയിൽ $\mathbb{R}$ ൽ തുടർച്ച ഇരിക്കുന്ന രീതിയിൽ എന്ന ഫലനത്തെ കാണുക?

(i) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 8}{x + 2}$, $x_0 = -2$.

(ii) $f(x) = \dfrac{x^3 + 64}{x + 4}$, $x_0 = -4$.

(iii) $f(x) = \dfrac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$, $x_0 = 9$.

(12) $g(x) = \begin{cases} x^2 - b^2 & x < 4 \\ bx + 20 & x \ge 4 \end{cases}$ എന്ന ഫലനം $(-\infty, \infty)$ ൽ തുടർച്ചയുള്ളതാണെങ്കിൽ സ്ഥിരാങ്കം b യെ കാണുക.

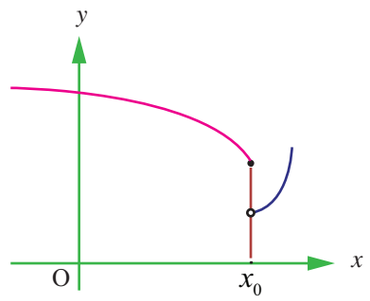
(13) $f(x) = x \sin \dfrac{\pi}{x}$. എന്നിരിക്കട്ടെ $f(0)$ യുടെ ഏതു മൂല്യത്തിനാണ് f എല്ലാ സ്ഥാനങ്ങളിലും തുടർച്ച യുള്ളതായി കാണപ്പെടും.

(14) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$ എന്ന ഫലനം $x = 1$ ൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല $f(1)$ന്റെ ഏത് മൂല്യത്തിന് $x = 1$ ൽ f തുടർച്ചയായിട്ട് ഇരിക്കും?

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 128 14-02-2023 17:22:27

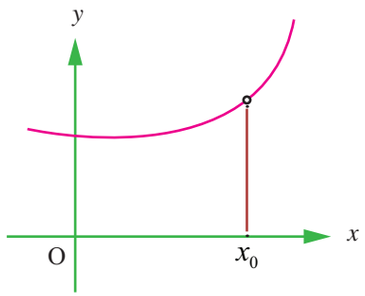
(15) താഴെ തന്ന ഗ്രാഫിന്റെ $x = x_0$ ൽ എപ്രകാരമാണ് തുടർച്ചയില്ലാത്തത് എന്ന് പറയുക?

(a)



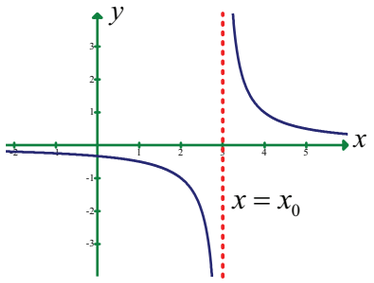
ചിത്രം 9.38

(b)



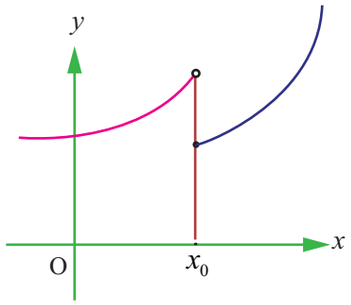
ചിത്രം 9.39

(c)



ചിത്രം 9.40

(d)



ചിത്രം 9.41

അഭ്യാസം 9.6

ശരിയായ അല്ലെങ്കിൽ ഏറ്റവും അനുയോജ്യമായ ഉത്തരത്തിനെ തന്നിരിക്കുന്നതിൽ 4 ഉത്തരത്തിൽ നിന്ന് തിരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുക?

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$

(1) 1 (2) 0 (3) ∞ (4) $-\infty$

(2) $\lim_{x\to\pi/2} \frac{2x-\pi}{\cos x}$

(1) 2 (2) 1 (3) –2 (4) 0

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{x}$

(1) 0 (2) 1 (3) $\sqrt{2}$ (4) നിലനിൽക്കുന്നില്ല

(4) $\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\sqrt{\theta}}{\sqrt{\sin\theta}}$

(1) 1 (2) – 1 (3) 0 (4) 2

(5) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2+5x+3}{x^2+x+3}\right)^x$ is

(1) e^4 (2) e^2 (3) e^3 (4) 1

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 129 14-02-2023 17:22:28

(6) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{2x+1}=$

(1) 1 (2) 0 (3) -1 (4) $\frac{1}{2}$

(7) $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-b^x}{x}=$

(1) $\log ab$ (2) $\log\left(\frac{a}{b}\right)$ (3) $\log\left(\frac{b}{a}\right)$ (4) $\frac{a}{b}$

(8) $\lim_{x\to 0}\frac{8^x-4^x-2^x+1^x}{x^2}=$

(1) $2\log 2$ (2) $2(\log 2)^2$ (3) $\log 2$ (4) $3\log 2$

(9) $f(x)=x(-1)^{\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor}$, $x\le 0$, എന്നത് x ന് സമമായ അല്ലെങ്കിലുള്ള പൂർണ്ണസംഖ്യ എങ്കിൽ $\lim_{x\to 0} f(x)$ കാണുക.

(1) -1 (2) 0 (3) 2 (4) 4

(10) $\lim_{x\to 3}\lfloor x\rfloor=$

(1) 2 (2) 3 (3) മൂല്യമില്ല (4) 0

(11) $f(x)=\begin{cases}3x & 0\le x\le 1\\ -3x+5 & 1<x\le 2\end{cases}$ എങ്കിൽ

(1) $\lim_{x\to 1} f(x)=1$ (2) $\lim_{x\to 1} f(x)=3$

(3) $\lim_{x\to 1} f(x)=2$ (4) $\lim_{x\to 1} f(x)$ ഇല്ല

(12) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ എന്നത് $f(x)=\lfloor x-3\rfloor+|x-4|$, $x\in\mathbb{R}$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടാൽ $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ ന്റെ മൂല്യം

(1) -2 (2) -1 (3) 0 (4) 1

(13) $\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-\sin x}{x}$ മൂല്യം

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 0

(14) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin px}{\tan 3x}=4$ എങ്കിൽ p യുടെ മൂല്യം (1) 6 (2) 9 (3) 12 (4) 4

(15) $\lim_{\alpha\to\pi/4}\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\alpha-\frac{\pi}{4}}$ മൂല്യം

(1) $\sqrt{2}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (3) 1 (4) 2

(16) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\ldots+\frac{n}{n^2}\right)$ മൂല്യം

(1) $\frac{1}{2}$ (2) 0 (3) 1 (4) ∞

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 130 14-02-2023 17:22:30

(17) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-1}{x}=$

(1) 1 (2) e (3) $\frac{1}{e}$ (4) 0

(18) $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\tan x}-e^{x}}{\tan x-x}=$

(1) 1 (2) e (3) $\frac{1}{2}$ (4) 0

(19) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\sqrt{x^2}}$ മൂല്യം

(1) 1 (2) – 1 (3) 0 (4) പരിധിമൂല്യം ഇല്ല

(20) $\lim_{x\to k^-} x-\lfloor x \rfloor$ മൂല്യം ഇവിടെ k

(1) – 1 (2) 1 (3) 0 (4) 2

(21) $x=\frac{3}{2}$ എന്നത് $f(x)=\frac{|2x-3|}{2x-3}$

(1) തുടർച്ചയാണ് (2) തുടർച്ചയില്ല (3) അവകലനം ചെയ്യാവുന്നത് (4) പൂജ്യമല്ലാത്തത്

(22) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ എന്നത് $f(x)=\begin{cases}x & x \text{ ഒരു പരിമേയസംഖ്യ}\\ 1-x & x \text{ ഒരു പരിമേയസംഖ്യ}\end{cases}$ f ഒരു പരിമേയ സംഖ്യ

(1) $x=\frac{1}{2}$ ൽ തുടർച്ചയില്ലാത്ത (2) $x=\frac{1}{2}$ ൽ തുടർച്ചയുള്ളത്

(3) എല്ലാ സ്ഥാനത്തിലും തുടർച്ചയുള്ളത് (4) എല്ലാ സ്ഥാനങ്ങളിലും തുടർച്ചയില്ലാത്തത്.

(23) ഫലനം $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x^3+1} & x\neq -1\\ P & x=-1\end{cases}$ ന് $x=-1$ ൽ നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ടിട്ടില്ല $f(-1)$ ന്റെ ഏത് മൂല്യത്തിന് ഈ ഫലനം തുടർച്ചയായിട്ട് കാണപ്പെടുന്നത്?

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $-\frac{2}{3}$ (3) 1 (4) 0

(24) f എന്ന ഫലനം [2, 5] തുടർച്ചയും ഇതാണെന്നിരിക്കട്ടെ x ന്റെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും f പരിമേയ മൂല്യങ്ങൾ മാത്രമേ ഉണ്ടാവുകയുള്ളൂ. കൂടാതെ $f(3)=12$ എങ്കിൽ $f(4.5)$ ന്റെ മൂല്യം?

(1) $\frac{f(3)+f(4.5)}{7.5}$ (2) 12 (3) 17.5 (4) $\frac{f(4.5)-f(3)}{1.5}$

(25) f എന്ന ഫലനം $f(x)=\frac{x-|x|}{x}$ $f(0)=2$ എന്ന് നിർവ്വചിക്കപ്പെട്ട് $f(0)=2$ എങ്കിൽ f എന്നത്

(1) എവിടെയും തുടർച്ചയുള്ളതല്ല (2) എല്ലാ സ്ഥാനങ്ങളിലും തുടർച്ചയായുള്ളത്

(3) $x=1$ ഒഴികെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും തുടർച്ചയായുള്ളത്.

(4) $x=0$ ഒഴികെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങൾക്കും തുടർച്ചയായുള്ളത്

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 131 14-02-2023 17:22:32

സംഗ്രഹം

ഈ അധ്യായത്തിൽ നാം മനസ്സിലാക്കിയത്

- x ന്റെ മൂല്യം x_0 യ്ക്ക് കുറവായ മൂല്യത്തിൽ നിന്നും x_0 യോട് അടുക്കുമ്പോൾ $y = f(x)$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ പരിധി മൂല്യം.

- x ന്റെ മൂല്യം x_0 യ്ക്ക് കൂടുതലായ മൂല്യത്തിൽ നിന്നും x_0 യോട് അടുക്കുമ്പോൾ $y = f(x)$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ പരിധിമൂല്യം.

- x_0 യെ നീക്കിയ x_0 യുടെ സമീപത്തിൽ x ന്റെ മൂല്യം x_0 യോട് അടുക്കുമ്പോൾ ഫലനം f ന്റെ പരിധിമൂല്യം ഉണ്ടെങ്കിൽ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = L = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L.$ എന്ന് കാണപ്പെടും.

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$ നിലവിലുണ്ടെങ്കിൽ x ന്റെ മൂല്യം x_0 യുടെ ഇരുവശങ്ങളിൽ നിന്നും x_0 യെ സമീപിക്കുമ്പോൾ $f(x)$ ന്റെ മൂല്യം ലഭിക്കുന്നു.

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

  (i) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

  (ii) $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x).g(x)] = \lim\limits_{x \to x_0} f(x). \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$

  (iii) $\lim\limits_{x \to x_0} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$ $g(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

- x_0 യെ നീക്കിയ x_0 യുടെ സമീപത്തിൽ x ന്റെ മൂല്യം x_0 യോട് അടുക്കുമ്പോൾ $f(x) \to \pm\infty,\ x \to x_0^-$ ഫലനം $f(x)$ ന്റെ പരിധി മൂല്യം ഉണ്ടെങ്കിൽ $f(x) \to \pm\infty$, $x \to x_0^+$ $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = l_1 \neq l_2 = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ എന്ന് കാണപ്പെടും.

- (M, ∞) സമീപഭാഗം $+\infty$, $M > 0$

  $(-\infty, K)$ സമീപഭാഗം $-\infty$, $K < 0$.

- $f(x) \to \pm\infty, x \to x_0, x = x_0$ സമാന്തര അസംപാതരേഖ ആകുന്നു.

- $y = l_1$ (l_2) സമാന്തര അസംപാത രേഖ ആകുന്നു. $y = f(x)$ അല്ലെങ്കിൽ

  $f(x) \to l_1$, $x \to \infty$ അല്ലെങ്കിൽ $f(x) \to l_2$, $x \to -\infty$.

- x_0 ൽ $f(x)$ തുടർച്ചയുള്ളതാണ് എങ്കിൽ മാത്രം

  (i) $\lim\limits_{x \ \ x_0} f(x) = f(x_0)$

  (ii) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$

  (iii) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0} x\right)$.

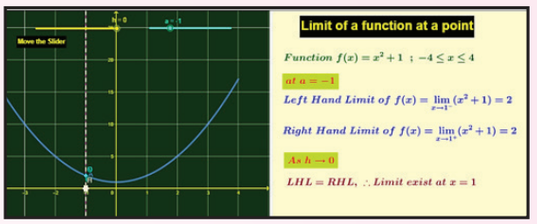
- ചാട്ടം കൂടാതെ നീക്കമുള്ള തുടർച്ചയില്ലാത്ത പ്രതിഭാസം.

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 132 14-02-2023 17:22:33

ഐസിറ്റി കോർണർ 9(a)

പരിധികളും തുടർച്ചയും

പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന ഫലങ്ങൾ



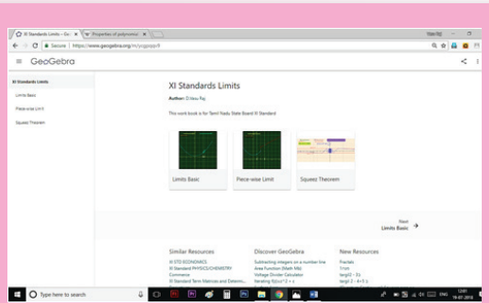
ഘട്ടം 1

ബ്രൗസറിനെ തുറക്കുക. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള URL ലിങ്കിനെ ടൈപ്പ് ചെയ്യുക. അല്ലെങ്കിൽ QR Code നെ ഓപ്പൺ ചെയ്യുക.

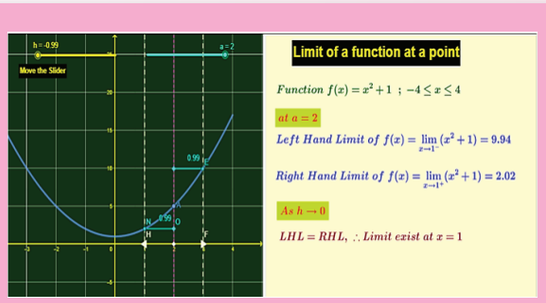
"XI Standard Limits" എന്ന വർക്ക് ബുക്ക് പ്രത്യക്ഷമാകും. അതിൽ നിങ്ങളുടെ പാഠങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ധാരാളം വർക്ക് ഷീറ്റ് കാണപ്പെടുന്നു.

ഘട്ടം 2

"Limits basic" എന്ന വർക്ക് ഷീറ്റിനെ തിരഞ്ഞെടുക്കുക. തുടർച്ചയുള്ള ഫലനം തന്നിട്ടുണ്ട്. "a" എന്ന Slider നെ ചലിപ്പിച്ച് ആവശ്യമുള്ള ബിന്ദുവിൽ പരിധിയെ തെരെഞ്ഞെടുക്കുക. പിന്നീട് $x=h$(ബിന്ദുവിന്റെ അടുത്ത്) എന്ന വരിയെ വലത്തോട്ടും ഇടത്തോട്ടും ചലിപ്പിച്ച് $f(h)$ നെ "h" എന്ന *Slider* ചലിപ്പിച്ച് പരിശോധിക്കുക.
ഇതിനെ പുസ്തകത്തിൽ തന്നിട്ടുള്ള നിർവ്വചനത്തോട് താരതമ്യം ചെയ്യുക.



ഘട്ടം 1



ഘട്ടം 2

ഈ ലിങ്കിൽ ബ്രൗസ് ചെയ്യുക:

Matrices and Determinants: https://ggbm.at/cpknpvvh

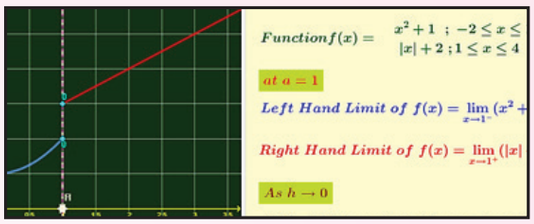
B60VK

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 133 14-02-2023 17:22:34

ഐസിറ്റി കോർണർ9(b)

പരിധികളും തുടർച്ചയും

പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന ഫലങ്ങൾ



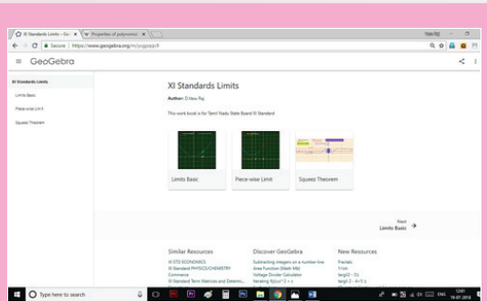
ഘട്ടം 1

ബ്രൗസറിനെ തുറക്കുക. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള URL ലിങ്കിനെ ടൈപ്പ് ചെയ്യുക. അല്ലെങ്കിൽ QR Code നെ ഓപ്പൺ ചെയ്യുക."XI Standard Limits" എന്ന GeoGebra വർക്ക് ബുക്ക് പ്രത്യക്ഷമാകും. അതിൽ നിങ്ങളുടെ പാഠങ്ങളുമായി ബന്ധപ്പെട്ട ധാരാളം വർക്ക് ഷീറ്റ് കാണപ്പെടുന്നു.

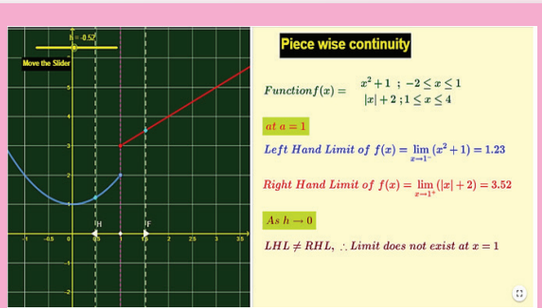
ഘട്ടം 2

"Limits basic" എന്ന വർക്ക് ഷീറ്റിനെ തിരഞ്ഞെടുക്കുക. തുടർച്ചയുള്ള ഫലനം തന്നിട്ടുണ്ട്. "a" എന്ന Slider നെ ചലിപ്പിച്ച് ആവശ്യമുള്ള ബിന്ദുവിൽ പരിധിയെ തെരെഞ്ഞെടുക്കുക. പിന്നീട് $x=h$(ബിന്ദുവിന്റെ അടുത്ത് $x = 1$) എന്ന വരിയെ വലത്തോട്ടും ഇടത്തോട്ടും ചലിപ്പിച്ച് $f(h)$ നെ "h" എന്ന *Slider* ചലിപ്പിച്ച് പരിശോധിക്കുക.

ഇതിനെ പുസ്തകത്തിൽ തന്നിട്ടുള്ള നിർവ്വചനത്തോട് താരതമ്യം ചെയ്യുക.



ഘട്ടം 1



ഘട്ടം 2

ഈ ലിങ്കിൽ ബ്രൗസ് ചെയ്യുക:

Matrices and Determinants: https://ggbm.at/cpknpvvh

BY9N6

Mal_09_11th-Maths-Vol2-Unit9.indd 134 14-02-2023 17:22:35

പാഠം **10**

ഡിഫറൻഷ്യൽ കാൽക്കുലസ് അവകലനവും അവകലന രീതികളും

"നിങ്ങൾ വേണ്ടത് എടുത്ത് കൊൾക ചെയ്യേണ്ടത് ചെയ്യുക
നിങ്ങൾക്ക് വേണ്ടത് ലഭിക്കും"

- ലെബനിസ്

10.1 ആമുഖം

ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ അവകലജങ്ങളുടെ ആശയവും അനുബന്ധ ആശയങ്ങളും ഞങ്ങൾ ചർച്ച ചെയ്യും. എന്നിട്ട് യഥാർത്ഥ ജീവിത പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നതിന് ആവശ്യമായ ഉപകരണങ്ങൾ വികസിപ്പിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. ഇതുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് ശരാശരി പ്രവേഗത്തിലെ ചില പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കുന്നത് നമുക്ക് നോക്കാം.

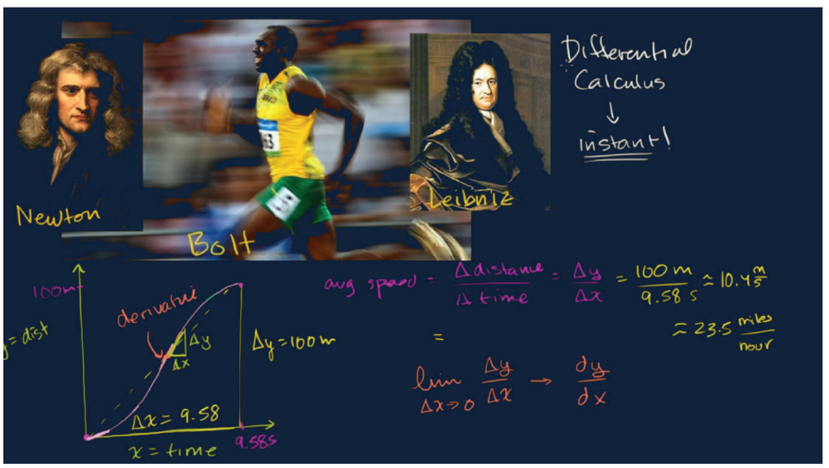
ഒരു നിശ്ചിത സമയദൈർഘ്യത്തിൽ ഒരു ദൂരം ഉൾക്കൊള്ളുന്ന നിരക്കായി വേഗത അല്ലെങ്കിൽ വേഗതയെക്കുറിച്ചുള്ള അവബോധ്യജന്യമായ ധാരണ മിക്കവാറും എല്ലാപേർക്കുമുണ്ട്. ഒരു ബസ് ഒരു മണിക്കൂറിൽ 60 കിലോമീറ്റർ സഞ്ചരിക്കുമ്പോൾ ബസിന്റെ ശരാശരി വേഗത മണിക്കൂറിൽ 60 കിലോമീറ്റർ ആയിരിക്കണം. മുഴുവൻ യാത്രയ്ക്കും മണിക്കൂറിൽ 60 കിലോമീറ്റർ എന്ന നിരക്ക് നിലനിർത്തുന്നത് ബുദ്ധിമുട്ടാണ്. കാരണം ബസ് പട്ടണത്തിലേക്ക് കടക്കുമ്പോൾ വേഗം മന്ദഗതിയിലാകുകയും കാറുകളെ മറികടക്കുമ്പോൾ വേഗത വർദ്ധിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. മറ്റൊരു വിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ വേഗത സമയത്തിനനുസരിച്ച് മാറുന്നു. ഒരു മണിക്കൂറിൽ ഒരു പട്ടണത്തിൽ നിന്ന് മറ്റൊരു പട്ടണത്തിലേക്ക് ബസ് യാത്ര ചെയ്യണമെന്ന് ബസ് കമ്പനിയുടെ വ്യവസ്ഥയിൽ ആവശ്യപ്പെടുന്നുണ്ടെങ്കിൽ യാത്രയിലെ മറ്റു ചില ഘട്ടങ്ങളിൽ വേഗതയിലുള്ള കുറവ് തീർക്കണമെന്ന് ഡ്രൈവർക്ക് സഹജമായി അറിയാം. എന്നിരുന്നാലും മണിക്കൂറിൽ 60 കിലോമീറ്റർ ശരാശരി വേഗത എന്ന് പറയുമ്പോൾ ഒരു പ്രത്യേക നിമിഷത്തിൽ ബസിന്റെ വേഗത എത്ര എന്ന ചോദ്യത്തിന് ഉത്തരം നൽകുന്നില്ല?

പൊതുവെ ഈ ശരാശരി പ്രവേഗം അല്ലെങ്കിൽ ചലിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ ശരാശരി വേഗത എന്നത് സ്ഥാനമാറ്റത്തിന്റെ സമയ നിരക്ക് അത് നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നത്

$$v_{ave} = \frac{\text{സഞ്ചരിച്ച ദൂരം}}{\text{സഞ്ചരിക്കാനെടുത്ത സമയം}}$$

ഒരു മണിക്കൂർ 15 മിനിറ്റ് (1.25 h) സമയം കൊണ്ട് 10 കിലോമീറ്റർ ഓട്ടം പൂർത്തിയാക്കുന്ന ഒരു ഓട്ടക്കാരനെ പരിഗണിക്കുക. ഈ ഓട്ടത്തിൽ ഓട്ടക്കാരന്റെ ശരാശരി പ്രവേഗം അല്ലെങ്കിൽ ശരാശരി വേഗത

$v_{ave} = \frac{10}{1.25} = 8$ ആണ്.



ഉസൈൻ ബോൾട്ടിന്റെ ശരാശരി വേഗത

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{100m}{9.58s} = 10.4$$

ഉസൈൻ ബോൾട്ടിന്റെ വേഗത എത്രയെന്ന് നോക്കൂ? → കാൽക്കുലസ്

എന്നാൽ പകുതി ദൂരം പിന്നിട്ട നിമിഷത്തെ കൃത്യമായി പ്രവേഗം നിർണ്ണയിക്കാൻ ഞങ്ങൾ ഇപ്പോൾ ആഗ്രഹിക്കുന്നുവെന്ന് കരുതുക. 0 മണിക്കൂർ മുതൽ 0.5 മണിക്കൂർ വരെയുള്ള സമയ ഇടവേളയിലെ ദൂരം 5 കിലോമീറ്ററായി കണക്കാക്കിയാൽ $v_{ave} = \frac{5}{0.5} = 10$.

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 135 3/16/2023 4:36:56 PM

ഓട്ടക്കാരൻ 0.5 മണിക്കൂർ ഓട്ടത്തിലേക്ക് നീങ്ങുന്ന തൽക്ഷണ നിരക്ക് v എന്ന സംഖ്യ ഒരു അളവ് കോലോ നല്ല സൂചകമോ അല്ല. നമ്മൾ 0.6 മണിക്കൂറിലെ നിരക്ക് കണ്ടുപിടിക്കാൻ റണ്ണർ ആരംഭ നിരയിൽ നിന്ന് 5.7 കിലോമീറ്റർ ആണെന്ന് ഞങ്ങൾ നിർണ്ണയിക്കുന്നുവെങ്കിൽ 0 മണിക്കൂർ മുതൽ 0.6 മണിക്കൂർ വരെയുള്ള ശരാശരി പ്രവേഗം $v_{ave} = \frac{5.7-5}{0.6-0.5} = 7 km/h$

ഗോട്ട്ഫ്രഡ് വില്യം ലെബ്നിസ്
(1646 - 1716)

രണ്ടാമത്തെ സംഖ്യയാണ് നിരക്ക് v യുടെ കൂടുതൽ യാഥാസ്ഥിതികമായ അളവ്. 0.5 h നു 5 കിലോമീറ്ററിനു വളരെ അടുത്തുള്ള ഒരു സ്ഥാനത്തിലെ സമയത്തിലേയ്ക്കും സമയ ഇടവേള ചുരുക്കുന്നതിലൂടെ 0.5 മണിക്കൂർ സമയത്ത് റണ്ണറുടെ പ്രവേഗത്തെക്കുറിച്ച് കൂടുതൽ മെച്ചപ്പെട്ട കണക്കുകൾ ലഭിക്കുമെന്ന് ഞങ്ങൾ പ്രതിക്ഷിക്കുന്നു.

$y = f(x)$ എന്ന വിശ്ലേഷക സമവാക്യം പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന ഒരു പെ ാതു ഗണിത മാതൃകയുടെ അവകലജം കണ്ടെത്തുക എന്ന പൊതുവായ പ്രശ്ന പരിഹാരത്തിലേക്ക് പ്രവേഗം കണ്ടെത്തുന്നതിനുള്ള ഈ പ്രശ്നം നമ്മെ നയിക്കുന്നു. തൽഫലമായി ഇനിപ്പറയുന്ന ലക്ഷ്യങ്ങൾ കൈവരിക്കുന്നതിലേക്ക് ഞങ്ങൾ നീങ്ങുകയും അവകലജങ്ങളുടെ വിശകലനത്തെ കൈകാര്യം ചെയ്യുകയും ചെയ്യും.

പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

ഈ അദ്ധ്യായം പൂർത്തിയാകുമ്പോൾ വിദ്യാർത്ഥികൾ പ്രതീക്ഷിക്കുന്നു

- ഹരണ ഫലങ്ങളുടെ പരിധിയാണ് അവകലജം എന്ന ആശയം.
- അവകലജങ്ങളുടെ ആശയം ജ്യാമിതീയമായി ദൃശ്യവൽക്കരിക്കുക.
- മാറ്റങ്ങൾ അളക്കുന്ന പ്രക്രിയയായി അവകലജം മനസ്സിലാക്കുക.
- ഒരു വക്രത്തിന്റെ തൊടുവരയുടെ ചരിവ് അളക്കാനുള്ള ഒരു ഉപാധിയായി അവകലജങ്ങളെ ഉപയോഗിക്കാം എന്ന് മനസ്സിലാക്കും.
- അവകലനങ്ങളുടെ വിവിധ രീതികൾ മനസ്സിലാക്കും
- ദൈനംദിന യഥാർത്ഥ ജീവിത പ്രശ്നം പരിഹരിക്കുന്നതിനുള്ള ഒരു ഉപകരണമായി കലനം പ്രയോഗിക്കുക

10.2 അവകലജത്തിന്റെ ആശയം

പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിൽ ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞർ പ്രവർത്തിച്ചിരുന്ന നാല് പ്രധാന പ്രശ്നങ്ങളിൽ നിന്നാണ് അവകലജ കലനം എന്ന ആശയം വളർന്നത്.

(1) സ്പർശരേഖാ പ്രശ്നം

(2) പ്രവേഗവും, ത്വരണവും സംബന്ധിച്ച പ്രശ്നങ്ങൾ

(3) മാക്സിമം, മിനിമം പ്രശ്നങ്ങൾ

(4) വിസ്തീർണ്ണം സംബന്ധിച്ച പ്രശ്നങ്ങൾ

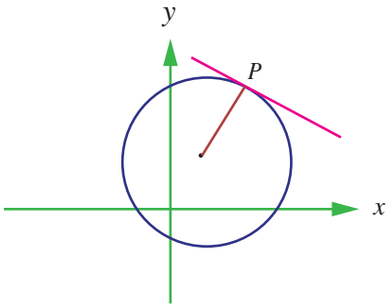
മുകളിലുള്ള പ്രശ്നങ്ങളിൽ 1, 2 എന്നിവ ഈ അദ്ധ്യായത്തിലെ ചർച്ചയ്ക്കായി ഞങ്ങൾ ഏറ്റെടുക്കുന്നു. അവസാനത്തെ രണ്ട് പ്രശ്നങ്ങൾ പിന്നീടുള്ള അദ്ധ്യായങ്ങളിൽ വിശദീകരിക്കും.

10.2.1 സ്പർശരേഖാ പ്രശ്നം

ഒരു രേഖ വക്രത്തിന്റെ ഒരു ബിന്ദുവിൽ സ്പർശിക്കുന്നുവെന്ന് പറയുന്നതിന്റെ അർത്ഥമെന്താണ്? ഒരു വൃത്തത്തിനെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം P എന്ന ഒരു ബിന്ദുവിലെ സ്പർശരേഖ അതേ ബിന്ദുവിലെ റെഡിയൽ രേഖയ്ക്ക് ലംബമായിട്ടുള്ള രേഖയാണ് (ചിത്രം 10.1 ൽ കാണിച്ചിട്ടുണ്ട്).

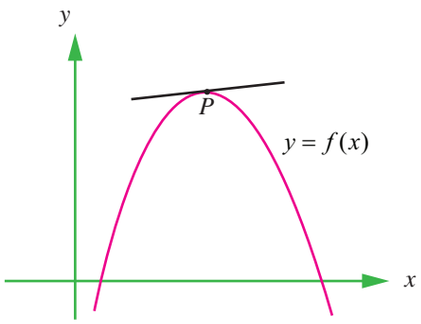
MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 136 3/16/2023 4:36:57 PM

എന്നിരുന്നാലും ഒരു പൊതു വക്രത്തിന് പ്രശ്നം കൂടുതൽ ബുദ്ധിമുട്ടാണ്, ഉദാഹരണത്തിന് ഇനി പറയുന്ന കണക്കുകളിൽ 10.2 മുതൽ 10.4 വരെ കാണിച്ചിരിക്കുന്ന സ്പർശരേഖകൾ നിങ്ങൾ എങ്ങനെ നിർവചിക്കും?

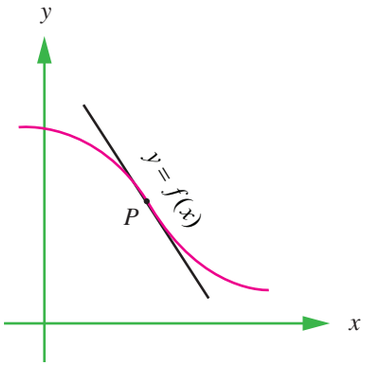


ചിത്രം. 10.1

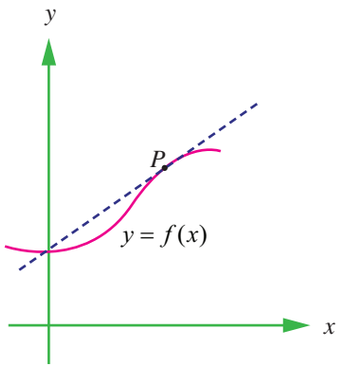
ഒരു രേഖ വക്രത്തിന്റെ P എന്ന ബിന്ദു കുറുകെ ഛേദിക്കാതെ സ്പർശിച്ച് പോകുകയാണെങ്കിൽ ആ രേഖ വക്രത്തിന്റെ P എന്ന ബിന്ദുവിലെ സ്പർശരേഖ എന്ന് നിങ്ങൾ പറയും. ആദ്യത്തെ വക്രത്തിന്റെ (10.2) കാര്യത്തിൽ ഈ നിർവചനം ശരിയായിരിക്കാം. പക്ഷേ രണ്ടാമത്തെ വക്രത്തിന് (10.3) ശരിയാകുന്നില്ല. അല്ലെങ്കിൽ ഒരു രേഖ വക്രത്തിനെ കൃത്യമായി ഒരു ബിന്ദുവിൽ മാത്രം സ്പർശിക്കുകയോ പ്രതിഛേദിക്കുകയോ ചെയ്താൽ ആരേഖ സ്പർശരേഖ എന്ന് നിങ്ങൾ പറഞ്ഞേക്കാം. ഈ നിർവ്വചനം വൃത്തത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ ശരിയാണെങ്കിലും കൂടുതൽ പൊതുവായ വക്രങ്ങൾക്ക് ശരിയാകുന്നില്ല. മൂന്നാമത്തെ വക്രം (10.4) കാണുക.



ചിത്രം 10.2



ചിത്രം 10.3



ചിത്രം 10.4

അടിസ്ഥാനപരമായി പറഞ്ഞാൽ P എന്ന ബിന്ദുവിലെ സ്പർശരേഖ കണ്ടെത്തുന്നതിനുള്ള ശ്രമം നമ്മളെ P എന്ന ബിന്ദുവിലെ സ്പർശരേഖയുടെ ചരിവ് കണ്ടെത്തുന്ന പ്രശ്നത്തിലേക്ക് നയിക്കുന്നു. വക്രത്തിന്റെ സ്പർശരേഖ ബിന്ദുവിലും മറ്റൊരു ബിന്ദുവിലും കൂടി കടന്നു പോകുന്ന സീക്കന്റ് രേഖ ഉപയോഗിച്ച് ഈ ചരിവ് കണ്ടെത്താം.

$P(x_0, f(x_0))$ സ്പർശരേഖാ ബിന്ദുവും $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ രണ്ടാമത്തെ ബിന്ദുവും എന്നിരിക്കട്ടെ

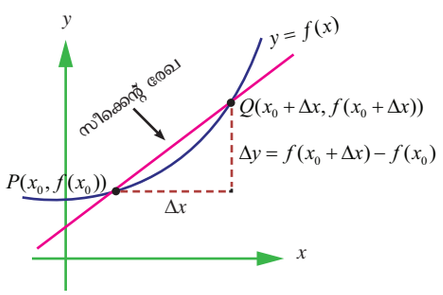
ഈ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളിലും കൂടി കടന്ന് പോകുന്ന സീക്കന്റ് രേഖയുടെ ചരിവ് കണ്ടോത്താൻ ഈ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളും ചരിവ് കണ്ടെത്തുന്ന സൂത്രവാക്യത്തിൽ പ്രതിസ്ഥാപിച്ചാൽ മതി.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{sec} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \frac{\text{ചരം } y \text{ ലെ വ്യത്യാസം}}{\text{ചരം } x \text{ ലെ വ്യത്യാസം}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

അതായത്,

$m_{sec} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, ഇത് സീക്കന്റ് രേഖയുടെ ചരിവ്



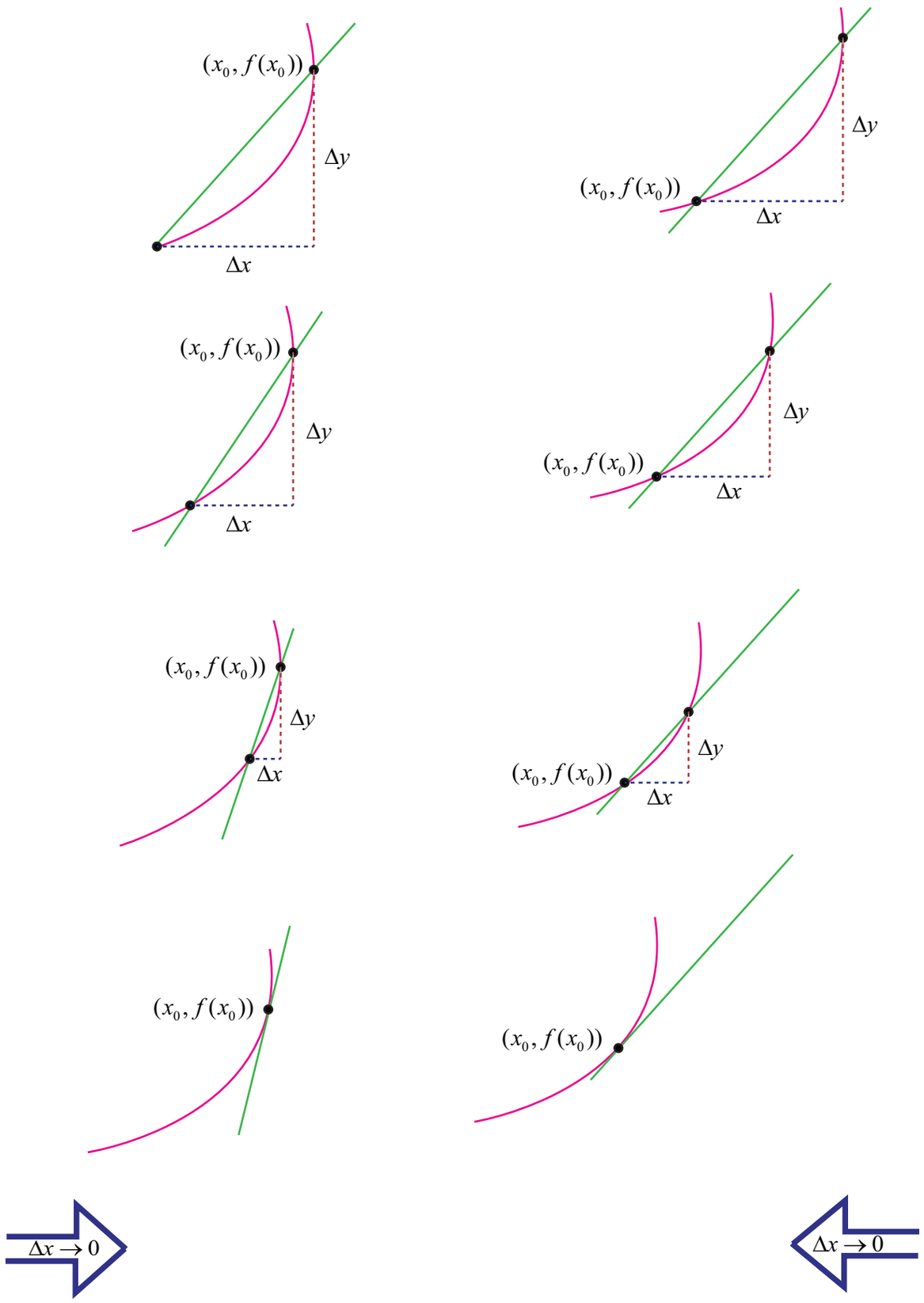
ചിത്രം 10.5

ഈ സമവാക്യത്തിന്റെ വലത്വശം **ഡിഫറൻസ് കോഷ്യന്റാണ്**.

ഛേദം Δx എന്നത് ***x* ലെ മാറ്റം** (x ലെ വർദ്ധനവ്) അതുപോലെ അംശം $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ എന്നത് ***y* ലെ മാറ്റം**.

ഈ പ്രക്രിയയുടെ ഭംഗി എന്തെന്നാൽ സ്പർശരേഖാ ബിന്ദുവിനോട് കൂടുതൽ അടുത്തു നിൽക്കുന്ന ബിന്ദുക്കൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്തോറും സ്പർഖരേഖാ ചരിവിന്റെ അളവ് കൂടുതൽ കൃത്യമായി ലഭിയ്ക്കും.

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 137 3/16/2023 4:36:58 PM

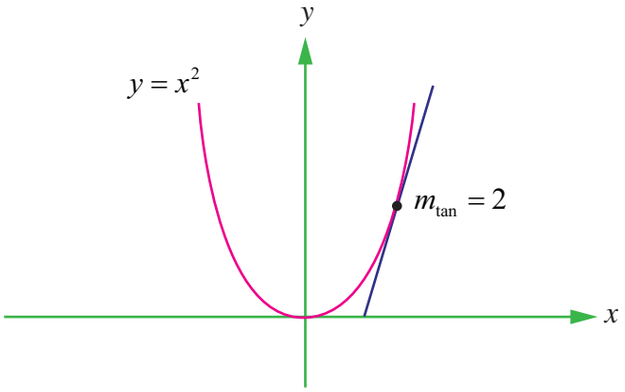


ചിത്രം 10.6 to 10.13

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 138 3/16/2023 4:36:58 PM

വിശദീകരണം 10.1

$f(x) = x^2$ എന്ന ഗ്രാഫിന്റെ $(1,1)$ എന്ന ബിന്ദുവിലെ സ്പർശരേഖാ ചരിവ് കണ്ടെത്തുന്നതിനുള്ള ശ്രമം നടത്താം.



ചിത്രം 10.14

തുടക്കത്തിൽ നമുക്ക് $\Delta x = 0.1$ എടുത്ത് $(1,1)\,(1.1,(1.1)^2)$ എന്ന ബിന്ദുക്കളിലൂടെ കടന്നു പോകുന്ന സീക്കന്റ് രേഖയുടെ ചരിവ് കണ്ടെത്താം.

(i) $f(1.1) = (1.1)^2 = 1.21$

(ii) $\Delta y = f(1.1) - f(1)$

$= 1.21 - 1 = 0.21$

(iii) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0.21}{0.1} = 2.1$

1 ന്റെ വലത്തോട്ടും ഇടത്തോട്ടും തുടർച്ചയായ മൂല്യങ്ങൾ പട്ടികയിലാക്കാം. :

Δx	$1 + \Delta x$	$f(1)$	$f(1 + \Delta x)$	Δy	$\Delta y / \Delta x$
0.1	1.1	1	1.21	0.21	2.1
0.01	1.01	1	1.0201	1.0201	2.01
0.001	1.001	1	1.002001	0.002001	2.001
– 0.1	0.9	1	0.81	– 0.19	1.9
– 0.01	0.99	1	0.9801	– 0.0199	1.99
– 0.001	0.999	1	0.998001	– 0.001999	1.999

വ്യക്തമായും, $\lim\limits_{\Delta x \to 0^-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2$; $\lim\limits_{\Delta x \to 0^+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2.$

ഇത് കാണിക്കുന്നത് $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 2$.

അതായത് $y = x^2$ എന്ന ഗ്രാഫിന്റെ (1, 1) എന്ന ബിന്ദുവിലെ സ്പർശരേഖയുടെ ചരിവ് $m_{\tan} = 2$.

ചിത്രം 10.6 മുതൽ 10.13 ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിലും, 10.1 ലെ വിവരണവും പിന്നെ നമ്മുടെ അവബോധം കൊണ്ടും പറയാൻ പ്രേരിപ്പിക്കുന്ന കാര്യം എന്തെന്നാൽ $y = f(x)$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫിൽ P എന്ന ബിന്ദുവിൽ ഒരു സ്പർശരേഖ L ഉണ്ടെങ്കിൽ അതിനർത്ഥം P,Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളിൽ കൂടി കടന്ന് പോകുന്ന സീക്കന്റ് രേഖ PQ വിന്റെ **പരിധി** അതായത് $Q \to P$ $(\Delta x \to 0)$ ആയിരിക്കും L എന്ന സ്പർശരേഖ എന്നുള്ളതാണ്. മാത്രവുമല്ല L എന്ന രേഖയിലെ ചരിവ് $m_{\tan}$ എന്നത് $m_{\sec}$ ൽ $\Delta x \to 0$ ആകുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്ന **പരിധി** മൂല്യമാണ്. ഇത് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പോലെ ചുരുക്കാം.

നിർവ്വചനം 10.1 (ചരിവ് m ആയ സ്പർശരേഖ)

f എന്നത് x_0 ഉൾപ്പെടുന്ന ഒരു തുറന്ന ഇടവേളയിൽ നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുകയാണ് എന്നിരിക്കട്ടെ തുടർന്ന്.

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = m_{\tan}$ നിലനിൽക്കുന്നു എങ്കിൽ f ന്റെ ഗ്രാഫിലെ $(x_0, f(x_0))$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ കൂടി കടന്ന് പോകുന്ന ചരിവ് m ഓടു കൂടിയ രേഖയാണ് **സ്പർശരേഖ**.

$(x_0, f(x_0))$ എന്ന ബിന്ദുവിലുള്ള സ്പർശരേഖയുടെ ചരിവ് തന്നെയാണ് അതേ ബിന്ദുവിലെ **വക്രത്തിന്റെ ചരിവ്** എന്ന് പറയുന്നത് ഒരു ഗ്രാഫിലെ ബിന്ദു സ്പർൽശരേഖ അംഗീകരിക്കുകയാണെങ്കിൽ അത് അദ്വിതീയമാണെന്ന് നിർവ്വചനം സൂചിപ്പിക്കുന്നു. കാരണം ഒരു ബിന്ദുവും ചരിവും ഒരു നേർരേഖ നിർണ്ണിക്കുന്നത് കൊണ്ട്

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 139 3/16/2023 4:37:02 PM

നിർവ്വചനത്തിന്റെ വ്യവസ്ഥകൾ നാല് ഘട്ടങ്ങളായി രൂപപ്പെടുത്താം.:

(i) f ന്റെ മൂല്യം x_0 ലും $x_0 + \Delta x$ ലും വിലയിരുത്തുക. അതായത് $f(x_0)$ ഉം $f(x_0 + \Delta x)$ ഉം

(ii) Δy കണ്ടുപിടിയ്ക്കുക $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

(iii) Δy യെ Δx $(\neq 0)$ കൊണ്ട് ഹരിക്കുക $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$

(iv) $\Delta x \to 0 (\neq 0)$: ആകുമ്പോഴുള്ള പരിധി കണ്ടെത്തുക $m_{\tan} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

വിവരണം 10.1 ലെ ഗ്രാഫിലെ ചരിവിന്റെ കണക്കു കൂട്ടൽ, നിർവ്വചനം ഉപയോഗിച്ച് സുഗമമാക്കാം.

(i) $f(1) = 1^2 = 1$. ഏതെങ്കിലുമൊരു $\Delta x \neq 0$

$$f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^2 = 1 + 2\Delta x + (\Delta x)^2$$

(ii) $$\Delta y = f(1 + \Delta x) - f(1) = 2\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x\,(2 + \Delta x)$$

(iii) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2 + \Delta x)}{\Delta x}$$
$$= 2 + \Delta x\ .$$

(iv) $$m_{\tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2 + \Delta x) = 2 + 0 = 2\ .$$

ഉദാഹരണം 10.1

$f(x) = 7x + 5$ ന്റെ ഗ്രാഫിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു $(x_0, f(x_0))$ ലെ സ്പർശരേഖയുടെ ചരിവ് കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ഘട്ടം (i) $f(x_0) = 7x_0 + 5$.

ഏതെങ്കിലുമൊരു $\Delta x \neq 0$,

$$f(x_0 + \Delta x) = 7(x_0 + \Delta x) + 5$$
$$= 7x_0 + 7\Delta x + 5$$

ഘട്ടം (ii)
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$
$$= (7x_0 + 7\Delta x + 5) - (7x_0 + 5)$$
$$= 7\Delta x$$

ഘട്ടം (iii)
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 7$$

അങ്ങനെ $f(x) = 7x + 5$, എന്ന ഗ്രാഫിന്റെ ഏതെങ്കിലുമൊരു ബിന്ദുവിൽ നമുക്ക് കിട്ടും.

ഘട്ടം (iv)
$$m_{\tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} (7)$$
$$= 7.$$

ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടത് ഒരു രേഖീയ ഗ്രാഫിന്റെ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ സ്ഥിരാങ്കമായത് കൊണ്ട് ഇത് x_0 നെയോ അല്ലെങ്കിൽ വർദ്ധനവായ Δx നെയോ ആശ്രയിക്കുന്നില്ല.

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 140 3/16/2023 4:37:05 PM

ഉദാഹരണം 10.2

$f(x) = -5x^2 + 7x$ ന്റെ ഗ്രാഫിലെ $(5, f(5))$ എന്ന ബിന്ദുവിലുള്ള സ്പർശരേഖയുടെ ചരിവ് കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ഘട്ടം (i) $f(5) = -5(5)^2 + 7 \times 5 = -125 + 35 = -90.$

ഏതെങ്കിലും $\Delta x \neq 0$,

$$f(5 + \Delta x) = -5(5 + \Delta x)^2 + 7(5 + \Delta x) = -90 - 43\Delta x - 5(\Delta x)^2.$$

ഘട്ടം (ii) $$\Delta y = f(5 + \Delta x) - f(5)$$
$$= -90 - 43\Delta x - 5(\Delta x)^2 + 90 = -43\Delta x - 5(\Delta x)^2$$
$$= \Delta x\,[-43 - 5\Delta x].$$

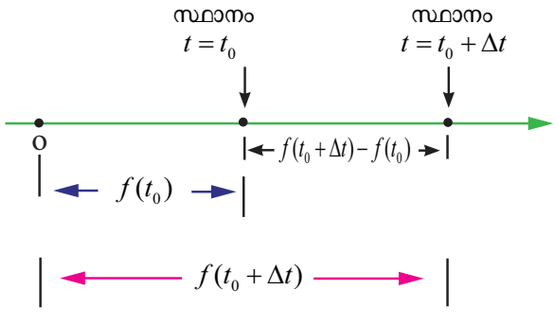
ഘട്ടം (iii) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -43 - 5\Delta x$$

ഘട്ടം (iv) $$m_{\tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -43.$$

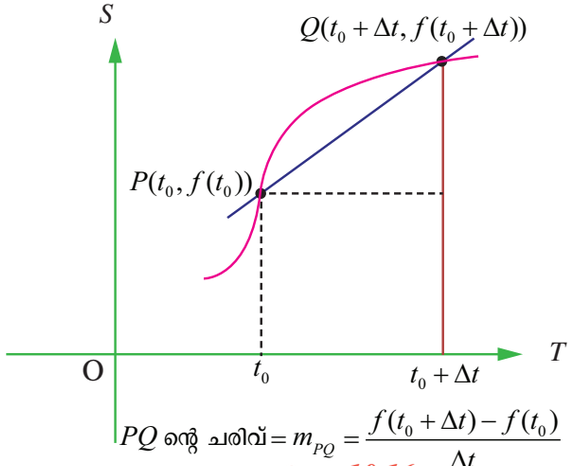
10.2.2 റെക്റ്റിലീനിയർ (ഋജുരേഖാത്മകം) ചലനത്തിന്റെ പ്രവേഗം

ചലനത്തിന്റെ ഒരു സമവാക്യം $s = f(t)$ അനുസരിച്ച് ഒരു വസ്തു നേർരേഖയിലൂടെ നിങ്ങുന്നുവെന്ന് കരുതുക. ഇവിടെ s എന്നത് t സമയത്ത് ഉത്ഭവസ്ഥാനത്ത് നിന്നുള്ള വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനചലനം (ദിശയിലുള്ള ദൂരം) ചലനത്തെ വിവരിക്കുന്ന f എന്ന ഫലനം വസ്തുവിന്റെ **സ്ഥാനഫലനം**. $t = t_0$ മുതൽ $t = t_0 + \Delta t$, വരെയുള്ള സമയ ഇടവേളയിൽ സ്ഥാനത്തിന്റെ മാറ്റം $f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ ആണ്.

$$v_{avg} = \frac{\text{സ്ഥാന വ്യത്യാസം}}{\text{സമയം}} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \frac{s \text{ ലെ മാറ്റം}}{t \text{ ലെ മാറ്റം}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$ ഇത് തന്നെയാണ് ചിത്രം 10.16 ലെ സീക്കന്റ് രേഖ PQ ന്റെ ചരിവ്.

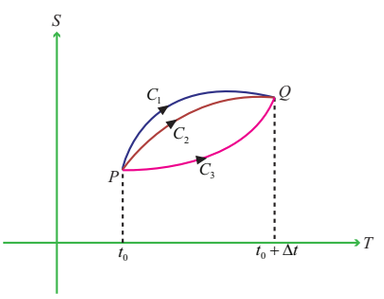


ചിത്രം 10.15



ചിത്രം 10.16

Δt സമയ ഇടവേളയിൽ (t_0 മുതൽ $t_0 + \Delta t$ വരെ) ഒരേ ദൂരത്തേയ്ക്ക് സഞ്ചരിച്ച പാത തികച്ചും വ്യത്യസ്ത തരമാകാം. ഒരു തലത്തിലെ P, Q എന്നീ ബിന്ദുക്കളുടെ ഇടയിൽ C_1, C_2, C_3 ... എന്നീ വിവിധ വക്രങ്ങൾ വരയ്ക്കാൻ സാധിക്കുമെന്ന് ഗ്രാഫിക്കലായി തന്നെ വിവരിക്കുന്നു. ഈ വക്രങ്ങൾ നിശ്ചിത സമയ ഇടവേളകളിൽ തികച്ചും വ്യത്യസ്തമായ ചലനങ്ങളുടെ ഗ്രാഫുകളാണ്. എല്ലാ ചലനങ്ങളുടെയും ശരാശരി പ്രവേഗം തുല്യമാണ്. $\frac{\Delta s}{\Delta t}$.



ചിത്രം 10.17

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 141 3/16/2023 4:37:06 PM

സമയം ഹ്രസ്വവും തീരെ കുറഞ്ഞതുമായ ഇടവേളകളിൽ $[t_0, t_0 + \Delta t]$ നമ്മൾ ശരാശരി പ്രവേഗങ്ങൾ കണക്കാക്കുന്നുവെന്ന്കരുതുക. മറ്റൊരുവിധത്തിൽ പറഞ്ഞാൽ Δt യെ 0 ത്തിനോട് അടുക്കാൻ ഞങ്ങൾ അനുവദിക്കുന്നു. എന്നിട്ട് $t = t_0$ സമയത്തെ പ്രവേഗം $v(t_0)$ (അല്ലെങ്കിൽ തൽക്ഷണ പ്രവേഗം) ഈ ശരാശരി പ്രവേഗങ്ങളുടെ പരിധിയായിനിർവ്വചിക്കുന്നു.

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

ഇതിനർത്ഥം $t = t_0$ എന്ന സമയത്തെ പ്രവേഗം P എന്ന ബിന്ദുവിലെ സ്പർശ രേഖയുടെ ചരിവിന് തുല്യമാണ്.

വിശദീകരണം 10.2

നിർവാതമാക്കപ്പെട്ട സ്ഥലത്തുകൂടി ഒരു വസ്തു സ്വതന്ത്രമായി പതിക്കുമ്പോൾ, വസ്തു സഞ്ചരിച്ച ദൂരം s വസ്തു പതിയ്ക്കാനെടുത്ത സമയം t എന്നിവ ചരങ്ങളായിരിക്കും. സ്വതന്ത്രമായ വീഴ്ചയുടെ നിയമം ഈ ആശ്രയത്തെ സ്പഷ്ടമാക്കുന്നു. :

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$ (പ്രാരംഭ പ്രവേഗത്തിന്റെ അഭാവം) g ഗുരുത്വാകർഷണ സ്ഥിരാങ്കം,

ഘട്ടം (i) $f(t_0 + \Delta t) = \frac{1}{2}g(t_0 + \Delta t)^2 = \frac{1}{2}g\left(t_0^2 + 2t_0\Delta t + (\Delta t)^2\right)$

ഘട്ടം (ii) $\Delta s = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$

$$= \frac{1}{2}g\left[(t_0^2 + 2t_0\Delta t + (\Delta t)^2\right] - \frac{1}{2}gt_0^2$$

$$= g\,\Delta t\left[t_0 + \frac{1}{2}\Delta t\right]$$

ഘട്ടം (iii) $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{g\,\Delta t\left[t_0 + \frac{1}{2}\Delta t\right]}{\Delta t} = g\left[t_0 + \frac{1}{2}\Delta t\right]$

ഘട്ടം (iv) $v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = gt_0$.

ഇതിൽ നിന്നും വ്യക്തമാകുന്നത് പ്രവേഗം പൂർണ്ണമായും നിർവ്വചിക്കുന്നത് t_0 എന്ന സമയത്താണ്. ഇത് ചലന സമയത്തിന് (വീഴ്ചയുടെ) ആനുപാതികമാണ്.

10.2.3 ഒരു ഫലനത്തിന്റെ അവകലജം

കാൽക്കുലസ് പഠനത്തിന്റെ ഒരു നിർണ്ണായ ഘട്ടത്തിലാണ് നമ്മൾ ഇപ്പോൾ എത്തി നിൽക്കുന്നത്. ഒരു സ്പർശ രേഖയുടെ ചരിവ് നിർവ്വചിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്ന പരിധി അല്ലെങ്കിൽ സ്വതന്ത്രമായി വീഴുന്ന വസ്തുവിന്റെ തൽക്ഷണ പ്രവേഗം എന്നിവ കാൽക്കുലസിന്റെ രണ്ട് അടിസ്ഥാന പ്രവർത്തനങ്ങളിൽ ഒരെണ്ണം നിർവ്വചിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്നു-അവകലനം.

നിർവ്വചനം 10.2

x_0 എന്ന ബിന്ദു അടങ്ങിയ ഒരു തുറന്ന ഇടവേളയായ $I \subseteq$ ൽ f നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ. അതുപോലെ $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ നിലനിൽക്കുന്നുവെന്നും കരുതുക. എങ്കിൽ x_0 എന്ന ബിന്ദുവിൽ f ന്റെ **അവകലനം** സാധ്യമാണ്. x_0ലെ fന്റെ **അവകലജം** സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $f'(x_0)$ എന്നാണ്.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

പരിധി നിലനിൽക്കുന്ന എല്ലാ x മൂല്യത്തിനും

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ x ലെ ഒരു ഫലനമാണിത്

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 142 3/16/2023 4:37:09 PM

ഉറപ്പാക്കേണ്ട കാര്യം x ലെ ഫലനത്തിന്റെ അവകലജം x ലെ തന്നെ ഫലനമായിരിക്കും. ഈ പുതിയ ഫലനം f ന്റെ ഗ്രാഫിലെ $(x, f(x))$ എന്ന ബിന്ദുവിലെ സ്പർശരേഖയുടെ ചരിവ് നൽകുന്നു. ഇവിടെ ബിന്ദുവിൽ ഗ്രാഫിന് ഒരു സ്പർശരേഖ ഉണ്ടായിരിക്കും.

ഒരു ഫലനത്തിന്റെ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുന്ന പ്രക്രിയയാണ് **അവകലനം** എന്നു പറയുന്നത്. ഒരു ഫലനത്തിന്റെ **അവകലജം** x ൽ നിലനിൽക്കുന്നുവെങ്കിൽ മാത്രമേ ആ ഫലനം x ൽ ഡിഫറൻഷ്യബിൾ ആകുന്നുള്ളൂ. അതുപോലെ **തുറന്ന ഇടവേളയിൽ** (a, b) ഡിഫറൻഷ്യബിൾ ആകണമെങ്കിൽ (a, b) ലെ എല്ലാ ബിന്ദുവിലും ഡിഫറൻഷ്യബിൾ ആകണം.

$f'(x)$ ഇതിനെ 'f പ്രൈം ഓഫ് x' അല്ലെങ്കിൽ "f ഡാഷ് ഓഫ് x" എന്നു പറയും. $y = f(x)$ ന്റെ അവകലജത്തെ പൊതുവായി അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത്

$$f'(x), \frac{dy}{dx}, y', \frac{d}{dx}[f(x)], D_x[y]$$ അല്ലെങ്കിൽ Dy അല്ലെങ്കിൽ y_1 ഇവിടെ $\frac{d}{dx}$ അല്ലെങ്കിൽ D എന്നത് അവകലന ഓപ്പറേറ്റർ.

$\frac{dy}{dx}$ എന്ന അടയാളത്തെ ഡെറിവേറ്റീവ് ഓഫ് y വിത്ത് റെസ്പെക്ട് റ്റു x" അല്ലെങ്കിൽ ലഘുവായി "$dy-dx$" അല്ലെങ്കിൽ ഡീy ഡീx" അല്ലെങ്കിൽ ഡീ ഡീx ഓഫ് y എന്നു പറയാം. ഇവിടെ ശ്രദ്ധിക്കാനുള്ളത് $\frac{dy}{dx}$ നെ $dy \div dx$ എന്ന ഹരണമായി കണക്കാക്കരുത്. അതുപോലെ "dy ബൈ dx" എന്നും പരാമർശിക്കരുത്. $\frac{dy}{dx}$ എന്ന ചിഹ്നം **ലെബനിസ് ചിഹ്നം** എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

10.2.4 ഒരു വശം ചേർന്ന അവകലജങ്ങൾ (ഇടതുവശ, വലതുവശ അവകലജങ്ങൾ)

x_0 എന്ന ബിന്ദു ഉൾപ്പെടുന്ന തുറന്ന ഇടവേളയായ (a, b) യിൽ നിർവ്വചിച്ചിട്ടുള്ള $y = f(x)$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ $x = x_0$ എന്ന ബിന്ദുവിലെ **ഇടതുവശ, വലതുവശ അവകലജങ്ങളായ** $f'(x_0^-)$, $f'(x_0^+)$, എന്ന് യഥാക്രമം അടയാളപ്പെടുത്തിയിട്ടുള്ളവ നിർവ്വചിക്കുന്നത്.

$$f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

$$f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$ പരിധി നിലനിൽക്കുന്നുവെങ്കിൽ മാത്രം.

അതായത് ഫലനം ഇടതുവശത്തു നിന്നും വലതുവശത്തു നിന്നും ഡിഫറൻഷ്യബിളാണ്. x_0, ബിന്ദുവിലെ ഫലനത്തിന്റെ പരിധികളുടെ നിലനിൽപ്പിന്റെ കാര്യത്തിലെന്ന പോലെ $f'(x_0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, $f'(x_0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ എന്നിവ നിലനിൽക്കുകയും $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$ ആണെങ്കിൽ മാത്രമേ $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ന് നിലനിൽപ്പുള്ളൂ. അതായത് $f'(x_0^-) = f'(x_0^+)$ എങ്കിൽ മാത്രം $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ ഇതിൽ ഏതെങ്കിലും ഒരു വ്യവസ്ഥ പരാജയപ്പെട്ടാൽ x_0. ബിന്ദുവിൽ f ഡിഫറൻഷ്യബിൾ അല്ല. h അനുസൃണമായി $h = \Delta x > 0$

$$f'(x_0^+) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$ അതുപോലെ

$$f'(x_0^-) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}.$$

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 143 3/16/2023 4:37:11 PM

നിർവ്വചനം 10.3

ഒരു ഫലനം f **അടഞ്ഞ ഇടവേള** $[a,b]$ യിൽ ഡിഫറൻഷ്യബിൾ ആകണമെങ്കിൽ അത് തുറന്ന ഇടവേള (a,b) യിലും അതിന്റെ അഗ്രബിന്ദുക്കളായ a,b എന്നിവയിലും ഡിഫറൻഷ്യബിൾ ആയിരിക്കണം.

$$f'(a) = \lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h},\ h>0$$

$$f'(b) = \lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(b+\Delta x)-f(b)}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(b-h)-f(b)}{-h},\ h>0.$$

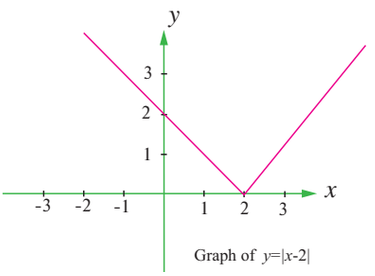
$x=x_0$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ f ഡിഫറൻഷ്യബിളാണെങ്കിൽ $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, ഇവിടെ $x=x_0+\Delta x$ ഇതിൽ $\Delta x\to 0$ ആകുമ്പോൾ $x\to x_0$. ഈ കണക്കുക്കൂട്ടലാണ് ചിലപ്പോൾ കൂടുതൽ സൗകര്യപ്രദം.

സൗകര്യാർത്ഥം നമ്മൾ $h=\Delta x$, അനുവദിക്കുകയാണെങ്കിൽ $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, പരിധി നിലവിലുണ്ടെങ്കിൽ

10.3 ഡിഫറൻഷ്യബിലിറ്റിയും തുടർച്ചാപ്രതിഭാസവും

വിശദീകരണം 10.3

$f(x)=|x-2|$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ $x=2$ ലെ അവകലന സാധ്യത പരിശോധിക്കുക.



ചിത്രം 10.18

നിർദ്ധാരണം

നമുക്കറിയാം $x=2$ ൽ ഫലനത്തിന് തുടർച്ചയുണ്ട്.

പക്ഷേ $$f'(2^-) = \lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|-0}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^-}\frac{|x-2|}{x-2} = \lim_{x\to 2^-}\frac{-(x-2)}{(x-2)} = -1$$ അതുപോലെ

$$f'(2^+) = \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|-0}{x-2} = \lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)}{(x-2)} = 1$$

ഒരു വശ അവകലജങ്ങൾ $f'(2^-)$, $f'(2^+)$ എന്നിവ തുല്യമല്ല. $f'(2^+)$ ന് അസ്ഥിത്വമില്ല. അതായത് $x=2$ ൽ f ന്റെ അവകലനം സാധ്യമല്ല. മറ്റെല്ലാ ബിന്ദുവിലും ഫലനത്തിന്റെ അവകലനം സാധ്യമാണ്.

$x_0\neq 2$ മറ്റേതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദു എന്നിരിക്കട്ടെ

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{|x-x_0|}{x-x_0} = \begin{cases}1 \text{ ആണെങ്കിൽ } x>x_0\\ -1 \text{ ആണെങ്കിൽ } x<x_0\end{cases}$$

അങ്ങനെ $$f'(2) = \begin{cases}1 \text{ ആണെങ്കിൽ } x>2\\ -1 \text{ ആണെങ്കിൽ } x<2\end{cases}$$

$f'(2)$ ന് അസ്ഥിത്വമില്ല എന്ന കാര്യം ജ്യാമിതീയമായി പ്രതിഫലിക്കുന്നത് $y=|x-2|$ എന്ന വക്രത്തിന് $(2,0)$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശ രേഖയില്ല എന്നതാണ്. $(2,0)$ ൽ വക്രത്തിന് കൂർത്ത അഗ്രമാണുള്ളത്.

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 144 3/16/2023 4:37:18 PM

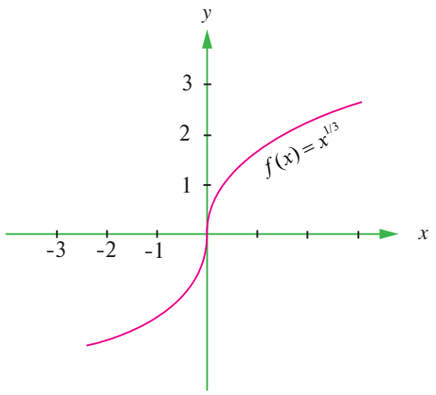
വിശദീകരണം 10.4

$f(x) = x^{-}$ ന് $x = 0$ലെ അവകലന സാധ്യത പരിശോധിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

$f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ എന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവിടെ ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫിൽ പൊട്ടലോ ദ്വാരമോ ഇല്ലാത്തതിനാൽ അതിന്റെ മണ്ഡലത്തിലെ എല്ലാ ബിന്ദുവിലും തുടർച്ചയുണ്ട്.

$f'(0)$ ന്റെ അസ്തിത്വം പരിശോധിക്കാം.



ചിത്രം 10.19

ഇപ്പോൾ $f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{1}{3}}-0}{x}$

$= \lim_{x\to 0} x^{\frac{-2}{3}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \to \infty$

അതിനാൽ $x = 0$ ൽ ഫലനത്തിന്റെ അവകലനം സാധ്യമല്ല. ചിത്രം 10.19 ൽ നിന്ന് $x = 0$ ൽ സ്പർശരേഖ ലംബമാണെന്ന് ഉപസംഹരിക്കാം. അതുകൊണ്ട് $x = 0$ ൽ f ന് അവകലനം സാധ്യമല്ല.

ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഒരു ഫലനത്തിന് തുടർച്ചയുണ്ടെങ്കിൽ ആ ബിന്ദുവിൽ ഫലനത്തിന്റെ അവകലനം സാധ്യമാവണമെന്നില്ല.

ഉദാഹരണം 10.3

ഉയർന്ന പൂർണ്ണാങ്ക ഫലനമായ $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ന് ഒരൊറ്റ പൂർണ്ണാങ്കത്തിൽ പോലും അവകലനം സാധ്യമല്ലെന്ന് തെളിയിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

എല്ലാ പൂർണ്ണാങ്കബിന്ദു n ലും ഉയർന്ന പൂർണ്ണാങ്കഫലനമായ $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ന് തുടർച്ചയില്ല

കാരണം $\lim_{x\to n^-} \lfloor x \rfloor = n-1$ മറ്റും $\lim_{x\to n^+} \lfloor x \rfloor = n$. അപ്പോൾ $f'(n)$ ന് അസ്തിത്വം ഇല്ല.

മറ്റു ബിന്ദുക്കളിലെ അവകലന സാധ്യതകളെക്കുറിച്ച് നിങ്ങൾക്ക് എന്താണ് പറയാനുള്ളത്?

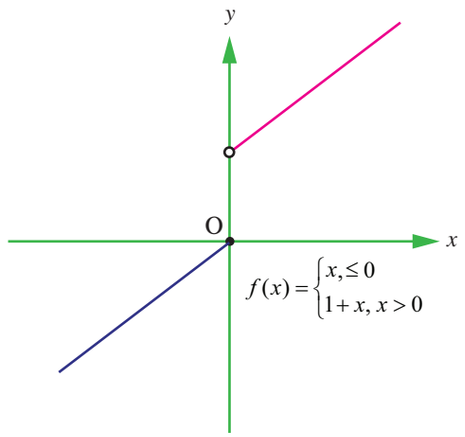
നിർദ്ധാരണം 10.5

$$f(x) = \begin{cases} x & x \le 0 \\ 1+x & x > 0 \end{cases}$$

$f'(0)$ നിലനിൽക്കുന്നുവെങ്കിൽ കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

വരച്ചിരിക്കുന്ന ഗ്രാഫ് നോക്കുക.



ചിത്രം 10.20

$$f'(0^-) = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$f'(0^-) = \lim_{\Delta x\to 0^-} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$f'(0^+) = \lim_{\Delta x\to 0^+} \frac{1+\Delta x}{\Delta x}$$

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 145 3/16/2023 4:37:21 PM

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{\Delta x}\right) \to \infty$$

അതുകൊണ്ട് $f'(0)$ നിലനിൽക്കുന്നില്ല

$x = 0$ ൽ ഗ്രാഫ് മുകളിലേയ്ക്ക് ഉയർന്നിട്ടാണ്. അതായത് $x = 0$ ൽ ഉയർന്ന് വിരാമമിടുന്നു.

ഇനിപ്പറയുന്ന ഉപസംഹാരത്തിനായി മുകളിലുള്ള വിവരണങ്ങളും ഉദാഹരണങ്ങളും സംഗ്രഹിക്കാം.

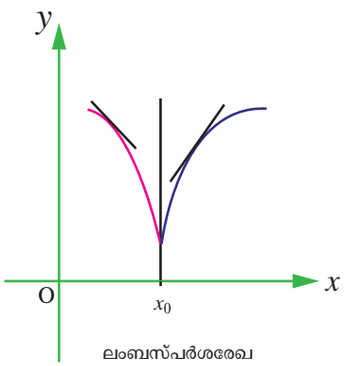
ഇനിപ്പറയുന്ന ഒരു സാഹചര്യമുണ്ടെങ്കിൽ f ന്റെ മണ്ഡലത്തിൽ സ്ഥിതിചെയ്യുന്ന x_0 എന്ന ബിന്ദുവിൽ f ന് അവകലനം സാധ്യമാകില്ല.:

(i) f ന് x_0 ൽ ഒരു ലംബ സ്പർശരേഖ ഉണ്ടെങ്കിൽ.

(ii) f ന്റെ ഗ്രാഫ് x_0 എന്ന ഒരു ബിന്ദുവിലേയ്ക്ക് വരുന്നു (ഒന്നുകിൽ മൂർച്ചയുള്ള എഡ്ജ് $\vee$ അല്ലെങ്കിൽ മൂർച്ചയുള്ള പീക്ക്)

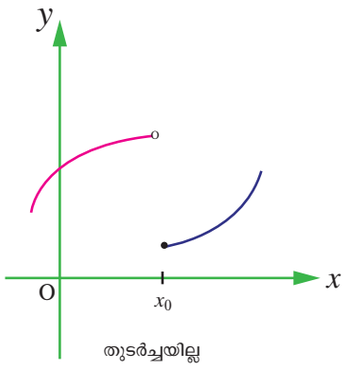
(iii) x_0 ൽ f ന് തുടർച്ചയില്ല

ഈ പറയുന്ന സാഹചര്യങ്ങളിൽ ഒരു ഫലനത്തിന്റെ അവകലന സാധ്യത പരാജയപ്പെടുന്നു :



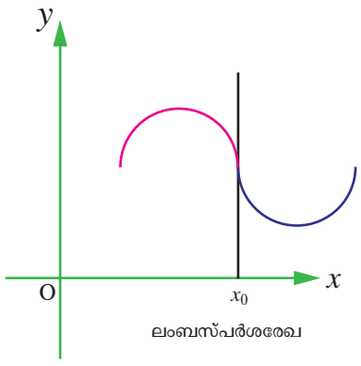
ലംബസ്പർശരേഖ

ചിത്രം 10.21



തുടർച്ചയില്ല

ചിത്രം 10.22



ലംബസ്പർശരേഖ

ചിത്രം 10.23

വിവരണം 10.3, 10.4, എന്നിവയിൽ നമ്മൾ കണ്ട ഫലനങ്ങൾ $f(x) = |x-2|$ and $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ എന്നിവ യഥാക്രമം $x = 2$ ലും $x = 0$ ത്തിലും തുടർച്ചയുണ്ട് പക്ഷേ അവിടെ അവകലനം പരാജയപ്പെട്ടു, എന്നാൽ ഉദാഹരണം 10.3 മറ്റും വിവരണം 10.5 എന്നിവയിൽ ഫലനങ്ങൾ $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ഉം $f(x) = \begin{cases} x & x \le 0 \\ 1+x & x > 0 \end{cases}$ എന്നിവ യഥാക്രമം ഏതൊരു പൂർണ്ണാങ്കം $x = n$ ലും $x = 0$ ത്തിലും തുടർച്ചയുമില്ല അവകലനവും സാധ്യമല്ല. മുകളിലെ വാദങ്ങൾ നമ്മളെക്കൊണ്ട് നിർത്തുന്നത് തുടർച്ചയില്ല എന്നാൽ അവകലനം സാധ്യമല്ല എന്നതിലാണ്.

സിദ്ധാന്തം 10.1 (അവകലനം തുടർച്ചയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു)

f ന് x_0 എന്ന ബിന്ദുവിൽ അവകലനമുണ്ടെങ്കിൽ f ന് $x = x_0$ ൽ തുടർച്ചയുമുണ്ട്.

തെളിവ്

x_0 എന്ന ബിന്ദു ഉൾപ്പെടുന്ന ഇടവേള (a, b) യിൽ അവകലന സാധ്യതയുള്ള ഫലനമാണ് $f(x)$ എന്നിരിക്കട്ടെ, അപ്പോൾ $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ നിലനിൽക്കും, $f'(x_0)$ അദ്വിതീയമായ വാസ്തവിക സംഖ്യ എന്ന ധാരണയിൽ.

ഇപ്പോൾ $\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \times \Delta x$

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 146 3/16/2023 4:37:23 PM

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\right] \times \lim_{\Delta x \to 0}(\Delta x)$$

$$= f'(x_0)\times 0 = 0 .$$

ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $x = x_0$ ൽ f ന് തുടർച്ചയുണ്ടെന്നാണ്

പ്രഥമതത്വത്തിൽ നിന്ന് അവകലജങ്ങൾ

അവകലജങ്ങളുടെ നിർവ്വചനത്തിൽ പറഞ്ഞിരിക്കുന്ന വ്യവസ്ഥകൾ ഉപയോഗിച്ച് ഒരു ഫലനത്തിന്റെ അവകലജം കണ്ടെത്തുന്ന പ്രക്രിയയെ പ്രഥമതത്വത്തിൽ നിന്നുള്ള അവകലജങ്ങൾ എന്ന് പറയുന്നു.

അഭ്യാസം 10.1

(1) പ്രഥമതത്വം ഉപയോഗിച്ച് അവകലജങ്ങൾ കാണുക.

(i) $f(x) = 6$ (ii) $f(x) = -4x + 7$ (iii) $f(x) = -x^2 + 2$

(2) ഇടത്വശത്ത് നിന്നും വലത് വശത്ത് നിന്നും $x = 1$ ലെ അവകലജങ്ങൾ നിലനിൽക്കുന്നുവെങ്കിൽ) കാണുക. ഈ ഫലനങ്ങൾക്കെല്ലാം $x = 1$ ൽ അവകലനം സാധ്യമാണോ?

(i) $f(x) = |x - 1|$ (ii) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ (iii) $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$

(3) ചുവടെയുള്ള ഫലനങ്ങൾ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന മൂല്യങ്ങളിൽ അവകലനം സാധ്യമാണോ എന്ന് കാണുക.

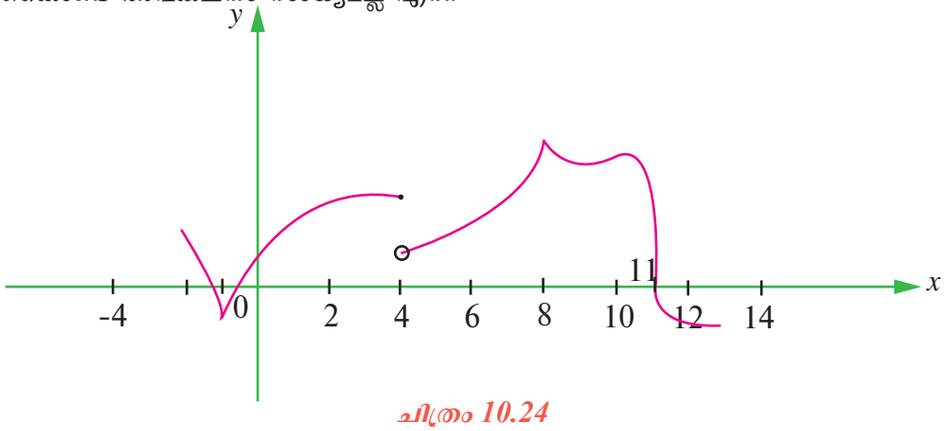
(i) $f(x) = x\,|\,x\,|\,, x = 0$ (ii) $f(x) = |\,x^2 - 1\,|\,,\quad x = 1$

(iii) $f(x) = |x| + |x - 1|, x = 0, 1$ (iv) $f(x) = \sin|\,x\,|\,,\quad x = 0$

(4) ചുവടെയുള്ള ഫലനങ്ങൾ സൂചിപ്പിച്ചിരിക്കുന്ന മൂല്യങ്ങളിൽ അവകലനം സാധ്യമല്ല എന്ന് തെളിയിക്കുക.

(i) $f(x) = \begin{cases} -x+2, & x \le 2 \\ 2x-4, & x > 2 \end{cases}$; $x = 2$ (ii) $f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 0 \\ -4x, & x \ge 0 \end{cases}$, $x = 0$

(5) f ന്റെ ഗ്രാഫ് ചുവടെ കാണിച്ചിട്ടുണ്ട്. കാരണസഹിതം വിവരിക്കുക. ചില x മൂല്യത്തിൽ f എന്തുകൊണ്ട് അവകലനം സാധ്യമല്ല എന്ന്



ചിത്രം 10.24

(6) $f(x) = |x + 100| + x^2$, എങ്കിൽ $f'(-100)$ നിലനിൽക്കുന്നുണ്ടോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

(7) ചിത്രം വരച്ച് ഫലനങ്ങളുടെ $\mathbb{R}$ ലെ അവകലനം പരിശോധിക്കുക

(i) $|\sin x|$ (ii) $|\cos x|$.

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 147 3/16/2023 4:37:24 PM

10.4 അവകലന നിയമങ്ങൾ

തുറന്ന ഇടവേള I യിൽ നിർവ്വചിച്ചിട്ടുള്ള വാസ്തവിക ചരമുള്ള വാസ്തവിക മൂല്യ ഫലന മാണ് f എന്നും അതുപോലെ $y = f(x)$ എന്നത് x ലെ അവകലനസാധ്യമായ ഫലനവുമാണ് എങ്കിൽ $\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ പൊതുവായി പ്രഥമ തത്വം ഉപയോഗിച്ച് അത്തരം നേരിട്ടുള്ള അവക ലജ്ം കണ്ടെത്തുന്നത് മിക്ക സന്ദർഭങ്ങളിലും വളരെ അദ്ധ്വാനവും പ്രയാസകരവുമാണ്. എന്നാൽ എല്ലാ അടി സ്ഥാന എലിമെന്ററി ഫലനങ്ങളുടെയും അവകലജങ്ങൾ അറിയാമെങ്കിൽ അതിന്റെ കൂടെ, ഫലനങ്ങളുടെ ഫലനത്തെയും ഫലനങ്ങളുടെ ബീജഗണിതത്തെയും അവകലനം ചെയ്യുന്ന നിയമം കൂടിയായാൽ ഓരോ പ്രാവശ്യവും പരിധി പ്രക്രിയ കൂടാതെ തന്നെ ഏത് മൂലകത്തിന്റെയോ ഫലനത്തിന്റെയോ അവകലജം കണ്ടു പിടിക്കാൻ സാധിക്കും. അങ്ങനെ അവകലന പ്രക്രിയ ഞങ്ങളെ സംബന്ധിച്ചിടത്തോളം യാന്ത്രികമാക്കാം.

ഇപ്പോൾ നമ്മുടെ ശ്രദ്ധ സങ്കലനം, ഗുണനം, ഹരണം എന്നിവയുടെ അവകലന നിയമത്തിലേയ്ക്ക് തിരിക്കുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 10.2

രണ്ട് (അതിൽ കൂടുതലോ) അവകലന ഫലനങ്ങളുടെ തുകയുടെ അവകലജം അവയുടെ അവ കലജങ്ങളുടെ തുകയ്ക്ക് തുല്യമാണ്. അതായത് u, v എന്നിവ രണ്ട് അവകലന ഫലനങ്ങളാണെങ്കിൽ

$$\boxed{\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}u + \frac{d}{dx}v}$$

തെളിവ്

ഒരു തുറന്ന ഇടവേള $I \subseteq$ ൽ നിർവ്വചിച്ചിട്ടുള്ളതും അവകലനീയവുമായ രണ്ട് വാസ്തവിക മൂല്യ ഫലനങ്ങളാണ് u, v എന്നിരിക്കട്ടെ. $y = u + v$, അപ്പോൾ $y = f(x)$, I ൽ നിർവ്വചിച്ചിട്ടുള്ള ഒരു ഫലനം

$$u'(x) = \frac{du}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

$$v'(x) = \frac{dv}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x} \text{ നിലനിൽക്കുന്നു.}$$

$$f(x+\Delta x) = u(x+\Delta x) + v(x+\Delta x)$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = u(x+\Delta x) - u(x) + v(x+\Delta x) - v(x).$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \frac{v(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}.$$

ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x) - v(x)}{\Delta x}$.

അതായത്, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = u'(x) + v'(x)$.

അതായത്, $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

അല്ലെങ്കിൽ $(u+v)'(x) = u'(x) + v'(x)$.

അതായത്, $\boxed{\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{d}{dx}u + \frac{d}{dx}v}$. □

ഇത് പരിമിത എണ്ണം അവകലന ഫലനം $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ലേയ്ക്ക് നീട്ടാം $(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)' = u_1' + u_2' + \ldots + u_n'$.

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 148 3/16/2023 4:37:26 PM

സിദ്ധാന്തം 10.3

u, v എന്നിവ രണ്ട് അവകലനീയ ഫലനം എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ $\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$.

തെളിവ്

u, v എന്നിവ രണ്ട് അവകലന ഫലനങ്ങളാണ്.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x} = \frac{du}{dx},\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}.$$

$y = f(x) = u.v$ എന്നിരിക്കട്ടെ

അപ്പോൾ $f(x+\Delta x) = u(x+\Delta x)\, v(x+\Delta x)$, അതുപോലെ

$$f(x+\Delta x) - f(x) = u(x+\Delta x)\, v(x+\Delta x) - u(x).v(x)$$

$$= v(x+\Delta x)\,\big[u(x+\Delta x)-u(x)\big] + u(x)\big[v(x+\Delta x)-v(x)\big].$$

ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്, $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = u(x)\frac{\big[v(x+\Delta x)-v(x)\big]}{\Delta x} + v(x+\Delta x)\frac{\big[u(x+\Delta x)-u(x)\big]}{\Delta x}$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}$$

$= u(x)v'(x) + v(x)u'(x)$ (v യ്ക്ക് തുടർച്ചയുണ്ട്, $\lim_{\Delta x\to 0} v(x+\Delta x) = v(x)$.

അതായത്, $f'(x) = \boxed{\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}}$.

or $\boxed{(uv)' = uv' + vu'}$

അതുപോലെ $(uvw)' = uvw' + uv'w + u'vw$.

പരിമിത എണ്ണം അവകലന ഫലനങ്ങളിലേയ്ക്ക് u_1, u_2, ... u_n, ലേക്ക് നീട്ടാം.:

$$(u_1.u_2...,u_n)' = u_1u_2...u_{n-1}u_n' + u_1u_2...u_{n-1}'u_n + \cdots + u_1'u_2\cdots u_n.$$

സിദ്ധാന്തം 10.4 (ഹരണ നിയമം)

u, v എന്നിവ രണ്ട് അവകലനീയ ഫലനങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ. ഇവിടെ $v(x) \neq 0$. $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$.

തെളിവ്

$y = f(x) = \frac{u}{v}$, എന്നിരിക്കട്ടെ. u, v എന്നിവ x ലെ അവകലനീയ ഫലനങ്ങൾ അതുപോലെ $v(x) \neq 0$

ഇപ്പോൾ $f(x+\Delta x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}$

ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്, $f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)}$

$$= \frac{v(x)u(x+\Delta x) - u(x)v(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)v(x)}.$$

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 149 3/16/2023 4:37:33 PM

ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്, $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{\dfrac{v(x)\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]}{\Delta x}-\dfrac{u(x)\left[v(x+\Delta x-v(x)\right]}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)v(x)}$

ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}-u(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}}{v(x)\lim\limits_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)}$

$$=\frac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{v(x)v(x)} \qquad \left(\because \lim_{\Delta x\to 0}v(x+\Delta x)=v(x)\right)$$

ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നത്, $f'(x)=\dfrac{v(x)u'(x)-u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$.

അതായത്, $\dfrac{d}{dx}(f)=\dfrac{vu'-uv'}{v^2}$

അല്ലെങ്കിൽ $\boxed{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\dfrac{du}{dx}-u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}}$.

സിദ്ധാന്തം 10.5 (ശൃംഖല നിയമം /കോമ്പോസിറ്റ് ഫലന നിയമം അല്ലെങ്കിൽ ഫലനങ്ങളുടെ ഫലന നിയമം)

$y=f(u)$, u വിലുള്ള ഫലനം ഒപ്പം $u=g(x)$, x ലുള്ള ഫലനം. അപ്പോൾ $y=f\left(g(x)\right)=(fog)(x)$. അപ്പോൾ $\dfrac{d}{dx}(f(g(x))=f'(g(x))g'(x)$.

തെളിവ്

മുകളിലെ ഫലനം $u=g(x)$ ഉൾഫലനവും മറ്റും f പുറം ഫലനവും ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടത് അന്തിമമായി y എന്നത് x ലെ ഫലനം

ഇപ്പോൾ $\Delta u=g(x+\Delta x)-g(x)$

അതുകൊണ്ട് $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\times\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=\dfrac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\times\dfrac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$.

$\Delta u\to 0$ as $\Delta x\to 0$

അതുകൊണ്ട് $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\times\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$

$$=\lim_{\Delta u\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\right).\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

$$=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{f(u+\Delta u)-f(u)}{\Delta u}\times\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

$$=f'(u)\times u'(x)$$

$=f'\left(g(x)\right)g'(x)$ അല്ലെങ്കിൽ $\boxed{\dfrac{d}{dx}\left(f(g(x))=f'\left(g(x)\right)g'(x)\right.}$.

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 150 3/16/2023 4:37:37 PM

അങ്ങനെ $y = f\left(g(x)\right)$ എന്ന ഫലനങ്ങളുടെ ഫലനം അവകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ $g(x) = u$ എന്ന് കണക്കാക്കി പുറം ഫലനം f അവകലനം ചെയ്യുക. എന്നിട്ട് ഉൾഫലനം $g(x)$ നെ x ആസ്പദമാക്കി അവകലജം കണ്ടുപിടിച്ച് ഗുണനം ചെയ്യുക. ഇവിടെ ചരം u വിനെ ഇന്റർമീഡിയേറ്റ് ആർഗുമെന്റ് എന്നു പറയും.

സിദ്ധാന്തം 10.6

$f(x)$ അവകലനീയ ഫലനവും $y = k\,f(x), k \neq 0.$ എന്നിരിക്കട്ടെ. അപ്പോൾ $\dfrac{d}{dx}(k\,f(x)) = k\dfrac{d}{dx}f(x).$

തെളിവ്

f അവകലനീയമായതുകൊണ്ട്, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$$\begin{aligned}
\text{Let } y &= h(x) = k\,f(x)\\
h(x+\Delta x) &= k\,f(x+\Delta x)\\
h(x+\Delta x)-h(x) &= kf(x+\Delta x) - kf(x)\\
&= k\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right].\\
\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} &= k\frac{\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]}{\Delta x}.
\end{aligned}$$

ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} k\,\dfrac{\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]}{\Delta x}$

$$\begin{aligned}
&= k\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[f(x+\Delta x)-f(x)\right]}{\Delta x}\\
&= kf'(x) = k\frac{d}{dx}f(x)
\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}\left(h(x)\right) = k\frac{d}{dx}f(x).$$

അതായത് $\boxed{\dfrac{d}{dx}\left(kf(x)\right) = k\dfrac{d}{dx}f(x)}.$

10.4.1 അടിസ്ഥാന എലിമെന്ററി ഫലനങ്ങളുടെ അവകലജങ്ങൾ

നമ്മൾ ഇവിടെ എല്ലാ അടിസ്ഥാന എലിമെന്ററി ഫലനങ്ങളുടെയും അവകലജങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കും. ആദ്യം സ്ഥിരാങ്ക ഫലനത്തിൽ നിന്നും തുടങ്ങാം.

(1) സ്ഥിരാങ്ക ഫലനത്തിന്റെ അവകലജം പൂജ്യമാണ്.

$$\begin{aligned}
y &= f(x) = k,\ k \text{ ഒരു സ്ഥിരാങ്കം എന്നിരിക്കട്ടെ.}\\
\text{അപ്പോൾ } f(x+\Delta x) &= k \text{ മറ്റും}\\
f(x+\Delta x)-f(x) &= k-k = 0.
\end{aligned}$$

ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = 0$

ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = 0.$

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 151 3/16/2023 4:37:43 PM

അതായത് , $f'(x) = 0$.

അല്ലെങ്കിൽ $\boxed{\frac{d}{dx}(k)=0}$.

(2) കൃതി ഫലനം $y = x^n$, $n > 0$ ഒരു പൂർണ്ണാങ്കം

$f(x) = x^n$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

എങ്കിൽ $f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^n$ അതുപോലെ

$f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x)^n - x^n$.

ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{(x+\Delta x)-x}$

ഇത് സൂചിപ്പിക്കുന്നത് $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{(x+\Delta x)-x}$

$= \lim\limits_{y\to x}\frac{y^n - x^n}{y-x} = nx^{n-1}$, ഇവിടെ $y = x+\Delta x$ അതുപോലെ $\Delta x \to 0$. ആകുമ്പോൾ $y \to x$, ആകും

അതായത് , $\frac{d}{dx}f(x) = nx^{n-1}$ അല്ലെങ്കിൽ $\boxed{\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}}$.

ഉപസിദ്ധാന്തം 10.1

$n = \frac{p}{q}, (p,q) = 1$, $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{p}{q}}\right) = \frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}$ ആണെങ്കിൽ

ഉപസിദ്ധാന്തം 10.2

α, ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ എങ്കിൽ , $\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}$.

ഉദാഹരണമായി ,

(1) $\frac{d}{dx}(5) = 0$ — 5 സ്ഥിരാങ്കമായതുകൊണ്ട്

(2) $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$, — കൃതി നിയമം

(3) $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$, — കൃതി നിയമം

(4) $\frac{d}{dx}\left(x^{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}$, — കൃതി നിയമം

(5) $\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{2}{3}}\right) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}, (x \neq 0)$, — കൃതി നിയമം

(6) $\frac{d}{dx}(100x^9) = 100\frac{d}{dx}(x^9) = 100\times 9x^{9-1} = 900x^8$ — സിദ്ധാന്തം 10.6.

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 152 3/16/2023 4:37:48 PM

(3) ലോഗരിതമിക് ഫലനത്തിന്റെ

$\log_e x$ അല്ലെങ്കിൽ $\log x$ അല്ലെങ്കിൽ $\ln x$ എന്നിങ്ങനെയാണ് x ന്റെ സ്വാഭാവിക ലോഗരിതം കുറിക്കുന്നത്

$y = f(x) = \log x$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഇപ്പോൾ $f(x+\Delta x) = \log(x+\Delta x)$ മറ്റും

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \log(x+\Delta x) - \log x$$

$$= \log\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right).$$

$$= \log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}.$$

നമുക്കറിയാം $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\log(1+\alpha k)}{\alpha} = k\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\log(1+k\alpha)}{k\alpha} = k$

അതുകൊണ്ട് $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\log\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x}.$

അതായത് $\boxed{\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x}}$.

ഉപസിദ്ധാന്തം 10.3

$y = f(x) = \log_a x$ എന്നിരിക്കട്ടെ. അപ്പോൾ $f'(x) = \frac{1}{(\log a)x}$.

$f(x) = \log_a x = \log_a e \times \log_e x = (\log_a e)\log x$ ഇത് കൈവശമുണ്ട് നമുക്ക്

അതുകൊണ്ട് $\frac{d}{dx}(f(x)) = \frac{d}{dx}(\log_a e \times \log x)$

$= (\log_a e)\frac{d}{dx}(\log x)$ (സ്ഥിരാങ്ക ഗുണന നിയമം അനുസരിച്ച്)

$= \log_a e.\frac{1}{x}$ (അല്ലെങ്കിൽ) $\frac{1}{(\log a)x}$.

(4) ഘാതാങ്ക ഫലനത്തിന്റെ അവകലജം

Let $y = a^x$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

അപ്പോൾ $f(x+\Delta x) - f(x) = a^{x+\Delta x} - a^x$

$= a^x(a^{\Delta x} - 1)$

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 153 3/16/2023 4:37:52 PM

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = a^x\left(\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right).$$

നമുക്കറിയാം $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \log a$.

അതുകൊണ്ട് $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = a^x \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}\right)$

$= a^x \times \log a$

അല്ലെങ്കിൽ $\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \log a}$.

അതുപോലെ, $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \log e$

$\boxed{\frac{d}{dx}(e^x) = e^x}$.

(5) ത്രികോണമിതീയ ഫലനത്തിന്റെ അവകലജങ്ങൾ

(i) sine ഫലനം sin*x*.

$y = f(x) = \sin x$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

അപ്പോൾ $f(x+\Delta x) = \sin(x+\Delta x)$ മറ്റും

$$f(x+\Delta x)-f(x) = \sin(x+\Delta x)-\sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{x}{2}\right).$$

ഇപ്പോൾ $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$.

അതായത്, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}.\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$

$= 1 \times \cos x$ ($\cos x$ ന് തുടർച്ചയുള്ളത് കൊണ്ട് $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\cos(x+\Delta x) = \cos x$) .

$= \cos x$

അതായത് $\boxed{\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x}$.

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 154 3/16/2023 4:37:59 PM

(ii) cosine ഫലനം cos x

$$y = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \text{ എന്നിരിക്കട്ടെ.}$$

$$\text{അപ്പോൾ } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{Let } u = x + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{du}{dx} = 1 + 0 = 1$$

$$\text{അതായത് } \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin u) = \frac{d}{dx}(\sin u)\frac{du}{dx} \text{ ശൃംഖലാ നിയമപ്രകാരം}$$

$$= \cos u \times 1 = \cos u = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \ .$$

അതായത് $\boxed{\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x}$.

(iii) tangent ഫലനം tan x

$$y = f(x) = \tan x \text{ എന്നിരിക്കട്ടെ.}$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\text{അതുകൊണ്ട് } \frac{d}{dx}(\tan x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x} \quad \text{(ഹരണ ഫലനിയമം)}$$

$$= \frac{\cos x(\cos x) - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x} \ .$$

അതായത് $\boxed{\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x}$.

(iv) secant ഫലനം sec x

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x} = (\cos x)^{-1} \text{ എന്നിരിക്കട്ടെ.}$$

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 155 3/16/2023 4:38:04 PM

അപ്പോൾ $\frac{dy}{dx} = (-1)(\cos x)^{-2}(-\sin x)$ (ശൃംഖല നിയമം)

$= \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}.\frac{\sin x}{\cos x} = \sec x.\tan x$.

അതായത് $\boxed{\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x}$.

(v) cosecant ഫലനം cosec x

$y = \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x} = (\sin x)^{-1}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$\frac{dy}{dx} = (-1)(\sin x)^{-2}(\cos x)$ (ശൃംഖല നിയമം)

$= -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x}.\frac{\cos x}{\sin x} = -\operatorname{cosec} x \cot x$.

അതായത് $\boxed{\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \cot x}$.

(vi) cotangent ഫലനം cot x

$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$

$= \frac{\sin x \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \frac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x}$

$= \frac{\sin x(-\sin x) - \cos x(\cos x)}{\sin^2 x}$

$= \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{\quad}{\sin x} = -\operatorname{cosec} x$

അതായത് $\boxed{\frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x}$.

(6) വിപരീത ത്രികോണമിതീയ ഫലനങ്ങളുടെ അവകലജങ്ങൾ

(i) arcsin x അല്ലെങ്കിൽ $\sin^{-1} x$ ന്റെ അവകലനം

$y = f(x) = \sin^{-1}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

അപ്പോൾ $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \sin^{-1}(x + \Delta x)$

അർത്ഥമാക്കുന്നത് $x = \sin y$

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 156 3/16/2023 4:38:12 PM

$$x + \Delta x = \sin(y + \Delta y).$$

അതുകൊണ്ട് $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\sin(y+\Delta y) - \sin y} = \frac{1}{\frac{\sin(y+\Delta y)-\sin y}{\Delta y}}$$

$\Delta x \to 0$, ആകുമ്പോൾ $\Delta y \to 0$ ആകും.

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\sin(y+\Delta y)-\sin y}{\Delta y}}$$

$$= \frac{1}{\cos y}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

അതായത് $$\boxed{\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

(ii) arccos x അല്ലെങ്കിൽ $\cos^{-1} x$ ന്റെ അവകലജം

നമുക്കറിയാവുന്ന :

$$\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}.$$

ഇതിനാൽ , $$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x + \cos^{-1} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

അതുകൊണ്ട് $$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) + \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = 0$$

അതുകൊണ്ട് $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = 0$$

അല്ലെങ്കിൽ $$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}.$$

(iii) arctan x അല്ലെങ്കിൽ $\tan^{-1} x$ ന്റെ അവകലനം

$y = f(x) = \tan^{-1} x$ എന്നിരിക്കട്ടെ.. ... (1)

അപ്പോൾ $y + \Delta y = f(x + \Delta x) = \tan^{-1}(x + \Delta x)$ ... (2)

$x = \tan y$ മറ്റും

$x + \Delta x = \tan(y + \Delta y)$

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 157 3/16/2023 4:38:17 PM

അപ്പോൾ $\Delta x = \tan(y + \Delta y) - \tan y$

അതുകൊണ്ട് $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\tan(y+\Delta y) - \tan y}$

$= \frac{1}{\frac{\tan(\ddot{u}+\Delta) - \tan}{\Delta v}}$.

$\Delta x \to 0$, ആകുമ്പോൾ $\Delta y \to 0$ ആകും, അപ്പോൾ

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\frac{\lim_{\Delta y \to 0} \tan(y+\Delta y) - \tan y}{\Delta y}} = \frac{1}{\frac{d}{dy}(\tan y)}$$

$$= \frac{1}{\sec^2 y}$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

അതായത് $\boxed{\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}}$.

(iv) arccot x അല്ലെങ്കിൽ $\cot^{-1} x$ ന്റെ അവകലജം

നമുക്കറിയാവുന്ന ഐഡന്റിറ്റി

$$\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} .$$

ആയതിനാൽ, $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x + \cot^{-1} x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

അതായത് $\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) + \frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = 0$

അതായത് $\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}$

അതായത് $\boxed{\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}}$.

(v) arcsec x ന്റെ അവകലജം അല്ലെങ്കിൽ $\boxed{\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}}$.

(vi) arccosec x ന്റെ അവകലജം അല്ലെങ്കിൽ $\boxed{\frac{d}{dx}(\text{cosec}^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}}$.

(v), (vi) ഇവയുടെ തെളിവുകൾ അഭ്യാസങ്ങൾക്കായി നൽകിയിട്ടുണ്ട്.

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 158 3/16/2023 4:38:25 PM

ഉദാഹരണം 10.7

ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവ x ആസ്പദമാക്കി അവകലനം ചെയ്യുക.:

(i) $y = x^3 + 5x^2 + 3x + 7$ (ii) $y = e^x + \sin x + 2$

(iii) $y = 4\text{cosec}\, x - \log x - 2e^x$ (iv) $y = \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$ (v) $y = xe^x \log x$

(vi) $y = \frac{\cos x}{x^3}$ (vii) $y = \frac{\log x}{e^x}$

(viii) $f'(3)$ കൂടാതെ $f'(5)$ if $f(x) = |x-4|$ എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക

നിർദ്ധാരണം

(i) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 10x + 3.$ (ii) $\frac{dy}{dx} = e^x + \cos x.$

(iii) $\frac{dy}{dx} = -4\ \text{cosec}\ x.\cot x - \frac{1}{x} - 2e^x.$

(iv) $y = x^{ü} + \frac{1}{x^2} - 2 = x\ + x^{-}\ - 2$

$\frac{dy}{dx} = 2x - 2x^{-2-1} = 2x - \frac{2}{x^3}.$

(v) $\frac{dy}{dx} = xe^x\left(\frac{1}{x}\right) + e^x.\log x(1) + x\log x(e^x)$

$= e^x + e^x \log x + xe^x \log x = e^x(1 + \log x + x\log x).$

(vi) $y = \frac{\cos x}{x^3}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3(-\sin x) - \cos x(3x^2)}{x^6} = \frac{-x^2(x\sin x + 3\cos x)}{x^6} = -\frac{(x\sin x + 3\cos x)}{x^4}.$

(vii) $y = \frac{\log x}{e^x} = e^{-x}.\log x$

$\frac{dy}{dx} = e^{-x}\left(\frac{1}{x}\right) + \log x(e^{-x})(-1)$

$= e^{-x}\left[\frac{1}{x} - \log x\right].$

(viii) $f(x) = |x-4| = \begin{cases} -(x-4) & ;\ x < 4 \\ (x-4) & ;\ x \geq 4 \end{cases}$

$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{if}\ \ x < 4 \\ +1 & \text{if}\ \ x \geq 4 \end{cases}$

അതുകൊണ്ട് $f'(3) = -1$

$f'(5) = 1.$

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 159 3/16/2023 4:38:30 PM

അഭ്യാസം 10.2

ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള ഫലനങ്ങളുടെ അനുബന്ധ സ്വതന്ത്ര ചരങ്ങളെ ആസ്പദമാക്കി അവകലജങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കുക:

(1) $f(x) = x - 3\sin x$

(2) $y = \sin x + \cos x$

(3) $f(x) = x \sin x$

(4) $y = \cos x - 2\tan x$

(5) $g(t) = t^3 \cos t$

(6) $g(t) = 4\sec t + \tan t$

(7) $y = e^x \sin x$

(8) $y = \dfrac{\tan x}{x}$

(9) $y = \dfrac{\sin x}{1+\cos x}$

(10) $y = \dfrac{x}{\sin x + \cos x}$

(11) $y = \dfrac{\tan x - 1}{\sec x}$

(12) $y = \dfrac{\sin x}{x^2}$

(13) $y = \tan\theta(\sin\theta + \cos\theta)$

(14) $y = \operatorname{cosec} x \cdot \cot x$

(15) $y = x \sin x \cos x$

(16) $y = e^{-x}.\log x$

(17) $y = (x^2+5)\log(1+x)e^{-3x}$

(18) $y = \sin x°$

(19) $y = \log_{10} x$

(20) $f'(x)$ $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ ന്റെ ചിത്രം വരയ്ക്കുക

10.4.2 ശൃംഖല നിയമത്തിന് ചില ഉദാഹരണങ്ങൾ

ഉദാഹരണം 10.8

$F(x) = \sqrt{x^2+1}$ എങ്കിൽ $F'(x)$ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$\text{ഇവിടെ } u = g(x) = x^2+1 \text{ ഉം } f(u) = \sqrt{u}$$

$$\therefore F(x) = (fog)(x) = f(g(x))$$

$$\text{ആയതിനാൽ } f'(u) = \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \text{ ഉം}$$

$$g'(x) = 2x,$$

$$F'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}.2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ .$$

ഉദാഹരണം 10.9

അവകലനം ചെയ്യുക : (i) $y = \sin(x^2)$ (ii) $y = \sin^2 x$

നിർദ്ധാരണം

(i) പുറമേയുള്ളത് ഫലനവും ഉള്ളിൽ വർഗ്ഗഫലനവും എന്നിരിക്കട്ടെ.

അതായത് . $u = x^2$

അതുകൊണ്ട് $y = \sin u$.

$$\text{അപ്പോൾ } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 160 3/16/2023 4:38:35 PM

$$= \cos u \times (2x)$$
$$= \cos(x^2).2x$$
$$= 2x\cos(x^2).$$

(ii) $u = \sin x$

അപ്പോൾ, $y = u^2$

അതുപോലെ $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$

$$= 2u \times \cos x$$
$$= 2\sin x \,.\, \cos x$$
$$= \sin 2x.$$

ഉദാഹരണം 10.10

അവകലനം ചെയ്യുക : $y = (x^3 - 1)^{100}$.

നിർദ്ധാരണം

$u = x^3 - 1$ so എന്നിരിക്കട്ടെ

$y = u^{100}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$
$$= 100u^{100-1} \times (3x^2 - 0)$$
$$= 100(x^3 - 1)^{99} \times 3x^2$$
$$= 300x^2(x^3 - 1)^{99}.$$

ഉദാഹരണം 10.11

$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$ ആണെങ്കിൽ $f'(x)$ കാണുക

നിർദ്ധാരണം

ആദ്യം നമുക്കെഴുതാം : $f(x) = (x^2 + x + 1)^{\frac{-1}{3}}$

അപ്പോൾ, $f'(x) = -\frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{\frac{-1}{3}-1} \frac{d}{dx}(x^2 + x + 1)$

$$= -\frac{1}{3}(x^2 + x + 1)^{\frac{-4}{3}} \times (2x + 1)$$
$$= -\frac{1}{3}(2x + 1)(x^2 + x + 1)^{\frac{-4}{3}}.$$

ഉദാഹരണം 10.12

$g(t) = \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^9$ എന്ന ഫലനത്തിന്റെ അവകലജം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$g'(t) = 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^{9-1} \frac{d}{dt}\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)$$

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 161 3/16/2023 4:38:37 PM

$$= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8\left[\frac{(2t+1)\frac{d}{dt}(t-2)-(t-2)\frac{d}{dt}(2t+1)}{(2t+1)^2}\right]$$

$$= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8\left[\frac{(2t+1)\times 1-(t-2)\times 2}{(2t+1)^2}\right]$$

$$= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8\left[\frac{2t+1-2t+4}{(2t+1)^2}\right]$$

$$= \frac{45(t-2)^8}{(2t+1)^{10}}\ .$$

ഉദാഹരണം 10.13

$(2x+1)^5\ (x^3-x+1)^4$ ഇതിനെ അവകലനം ചെയ്യുക

നിർദ്ധാരണം

$y = (2x+1)^5\ (x^3-x+1)^4$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$u = 2x+1\ ;\ v = x^3-x+1$ എന്നെടുക്കുക

$y = u^5\ .\ v^4$

$$\frac{dy}{dx} = u^5.\frac{d}{dx}(v^4)+v^4\frac{d}{dx}(u^5)$$ ഗുണന നിയമം

$$= u^5.4v^{4-1}\frac{dv}{dx}+v^4.5u^{5-1}\frac{du}{dx}$$ ശൃംഖല നിയമം

$$= 4u^5.v^3\times(3x^2-1)+5v^4u^4\times 2$$

$$= 4(2x+1)^5(x^3-x+1)^3(3x^2-1)+10(x^3-x+1)^4(2x+1)^4$$

$$= (2x+1)^4(x^3-x+1)^3\left[4(2x+1)(3x^2-1)+10(x^3-x+1)\right]$$

$$= 2(2x+1)^4(x^3-x+1)^3(17x^3+6x^2-9x+3)\,.$$

ഉദാഹരണം 10.14

$y = e^{\sin x}$ അവകലനം ചെയ്യുക

നിർദ്ധാരണം

$u = \sin x$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$y = e^u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^u)}{du}\times\frac{du}{dx} = e^u\times\cos x = \cos x\ e^{\sin x}.$$

ഉദാഹരണം 10.15

2^x അവകലനം ചെയ്യുക..

നിർദ്ധാരണം

$y = 2^x = e^{x\log 2}.$ എന്നിരിക്കട്ടെ

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 162 3/16/2023 4:38:41 PM

$u = (\log 2)x$ എന്നെടുക്കുക

അപ്പോൾ $y = e^u$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = e^u \times \log 2 = \log 2\, e^{x \log 2}$$

$$= (\log 2) 2^x$$

a^x, ന്റെ അവകലന സൂത്രവാക്യം നേരിട്ട് പ്രയോഗിച്ചും അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഉദാഹരണം 10.16

$y = \tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ എങ്കിൽ y' കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$y = \tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$\frac{1+x}{1-x} = t$ എന്നിരിക്കട്ടെ

അപ്പോൾ $y = \tan^{-1} t$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dt}(\tan^{-} t).\frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{1}{1+t^2}.\frac{(1-x).1-(1+x)(-1)}{(1-x)^2}$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2}.\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{1+x^2}\ .$$

അഭ്യാസം 10.3

ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയുടെ അവകലനം കാണുക :

(1) $y = (x^2+4x+6)^5$ (2) $y = \tan 3x$ (3) $y = \cos(\tan x)$

(4) $y = \sqrt[3]{1+x^3}$ (5) $y = e^{\sqrt{x}}$ (6) $y = \sin(e^x)$

(7) $F(x) = (x^3+4x)^7$ (8) $h(t) = \left(t - \frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{2}}$ (9) $f(t) = \sqrt[3]{1+\tan t}$

(10) $y = \cos(a^3 + x^3)$ (11) $y = e^{-mx}$ (12) $y = 4 \sec 5x$

(13) $y = (2x-5)^4(8x^2-5)^{-3}$ (14) $y = (x^2+1)\sqrt[3]{x^2+2}$ (15) $y = xe^{-x^2}$

(16) $s(t) = \sqrt[4]{\frac{t^3+1}{t^3-1}}$ (17) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{7-3x}}$ (18) $y = \tan(\cos x)$

(19) $y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$ (20) $y = 5^{\frac{-1}{x}}$ (21) $y = \sqrt{1+2\tan x}$

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 163 3/16/2023 4:38:46 PM

(22) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$ (23) $y = \sin^2(\cos kx)$ (24) $y = (1+\cos^2 x)^6$

(25) $y = \dfrac{e^{3x}}{1+e^x}$ (26) $y = \sqrt{x+\sqrt{x}}$ (27) $y = e^{x\cos x}$

(28) $y = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ (29) $y = \sin\left(\tan\left(\sqrt{\sin x}\right)\right)$ (30) $y = \sin^{-1}\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

10.4.3 ഇംപ്ലിസിറ്റ് അവകലനം

ഒരു ഫലനത്തിൽ ആശ്രയ ചരം സ്വതന്ത്ര ചരം x ൽ മാത്രം പ്രകടിപ്പിച്ചിരിക്കുന്നെങ്കിൽ അതായത് $y = f(x)$ ആ ഫലനം **എക്സിപ്ലിസിറ്റ് ഫലനം**. ഉദാഹരണത്തിന് $y = \frac{1}{2}x^3 - 1$ എന്ന എക്സ്പ്ലിസിറ്റ് ഫലനത്തിന്റെ സദൃശ്യസമവാക്യമായ $2y - x^3 + 2 = 0$ ഫലനം വ്യക്തമായി നിർവ്വചിക്കുന്നു. അതായത് y എന്നത് x ലെ **ഇപ്ലിസിറ്റ് ഫലനമാണ്**.

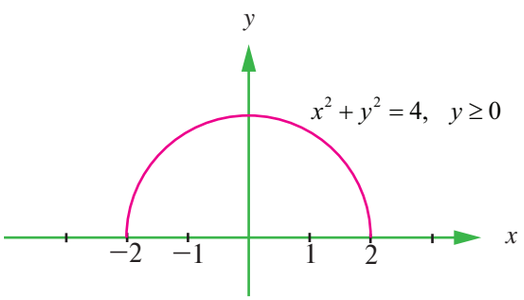
നമുക്കറിയാം $x^2 + y^2 = 4$ (1)

ഈ സമവാക്യം ആരം 2 ഉം മൂലബിന്ദു കേന്ദ്രീകൃതവുമായ ഒരു വൃത്തമാണ് പക്ഷെ സമവാക്യം (1) ഫലനമല്ല എന്തെന്നാൽ $-2 < x < 2$ എന്ന ഇടവേളയിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്ന ഓരോ x മൂല്യത്തിനും അനുബന്ധമായി രണ്ട് y മൂല്യങ്ങൾ ലഭിക്കും. അതായത്

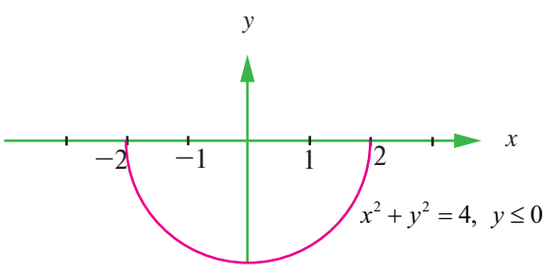
$$f(x) = \sqrt{4-x^2}, -2 \le x \le 2 \quad (2)$$

$$g(x) = -\sqrt{4-x^2}, -2 \le x \le 2 \quad (3)$$

സമവാക്യം (2) വൃത്തം (1) ന്റെ മേൽ പകുതിയെയും സമവാക്യം (3) വൃത്തം (1) ന്റെ കീഴ്പകുതിയെയും പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു. ഒന്നുകിൽ വൃത്തത്തിന്റെ മേൽ പകുതി അല്ലെങ്കിൽ കീഴ് പകുതി മാത്രം പരിഗണിച്ചാൽ ഫലനം ലഭിക്കും. $-2 \le x \le 2$എന്ന ഇടവേളയിൽ (1) കുറഞ്ഞപക്ഷം x ലെ രണ്ട് ഇപ്ലിസിറ്റ് ഫലനം നിർവ്വഹിക്കും എന്ന് നമുക്ക് പറയാം.



ചിത്രം 10.25



ചിത്രം 10.26

ശ്രദ്ധിക്കാനുള്ളത് രണ്ട് സമവാക്യങ്ങളും

$x^2 + [f(x)]^2 = 4$, $x^2 + [g(x)]^2 = 4$, $-2 \le x \le 2$ എന്ന ഇടവേളയിലെ ഐഡന്റിറ്റിയാണ്.

പൊതുവായി പറഞ്ഞാൽ സമവാക്യം $F(x, y) = 0$ ഏതെങ്കിലുമൊരു ഇടവേളയിൽ f എന്ന ഫലനം വ്യക്തമായി നിർവ്വചിക്കുന്നുണ്ടെങ്കിൽ അതേ ഇടവേളയിലെ ഐഡന്റിറ്റി ആയിരിക്കും $F(x, f(x)) = 0$.

കൂടുതൽ സങ്കീർണ്ണ സമവാക്യമായ $x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x + 1$ എന്നത് x അക്ഷത്തിലെ നിയന്ത്രിത ഇടവേളയിൽ ധാരാളം ഇപ്ലിസിറ്റ് ഫലനങ്ങൾ നിർണ്ണയിക്കുമെങ്കിലും y യ്ക്ക് x അനുശ്രണമായി

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 164 3/16/2023 4:38:53 PM

നിർദ്ധാരണം സാധ്യമല്ല. ഇങ്ങനെയായാലും **ഇപ്ലിസിറ്റ് അവകലനം** എന്ന പ്രക്രിയയിലൂടെ അവകലജം $\frac{dy}{dx}$ കണ്ടുപിടിക്കാം. ഈ പ്രക്രിയയിൽ അവകലന നിയമങ്ങളുപയോഗിച്ച് സമവാക്യത്തിന്റെ ഇരുവശവും x അനുശ്രണമായി അവകലനം ചെയ്തതിനുശേഷം $\frac{dy}{dx}$ നായി നിർദ്ധാരണം നടത്തും.

$$\frac{d}{dx}(y^n) = n\,y^{n-1}\frac{dy}{dx},$$ ഇവിടെ n ഒരു പൂർണ്ണാങ്കമാണ്.

ഉദാഹരണം 10.17

$x^2 + y^2 = 1$ ആണെങ്കിൽ $\frac{dy}{dx}$ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

സമവാക്യത്തിന്റെ ഇരുവശവും നമ്മൾ അവകലനം ചെയ്യും.

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(1)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

അവകലജത്തിനായി നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുമ്പോൾ ലഭിക്കുന്നത്

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

ഉദാഹരണം 10.18

$x^2 + y^2 = 4$ ന്റെ ഗ്രാഫിൽ $x = 1$ ന് അനുബന്ധമായ ബിന്ദുക്കളിലുള്ള സ്പർശ രേഖകളുടെ ചരിവുകൾ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യത്തിൽ $x = 1$ പ്രതിസ്ഥാപിക്കുമ്പോൾ $y^2 = 3$ അല്ലെങ്കിൽ $y = \pm\sqrt{3}$. ലഭിക്കും

അതുകൊണ്ട് $\left(1, \sqrt{3}\right), \left(1, -\sqrt{3}\right)$ എന്നിവയിൽ സ്പർശ രേഖയുണ്ട്. $\left(1, \sqrt{3}\right), \left(1, -\sqrt{3}\right)$ എന്നിവ രണ്ട് വ്യത്യസ്ത ഇപ്ലിസിറ്റ് ഫലന ഗ്രാഫിലെ ബിന്ദുക്കളായതിനാൽ ഓരോ ബിന്ദുവിലും ശരിയായ ചരിവ് ലഭിക്കും.

$\frac{dy}{dx}\left(1, \sqrt{3}\right)$ ൽ $= -\frac{1}{\sqrt{3}}$ അതുപോലെ $\frac{dy}{dx}\left(1, -\sqrt{3}\right)$ ൽ $= \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

ഉദാഹരണം 10.19

$x^4 + x^2y^3 - y^5 = 2x + 1$ എങ്കിൽ $\frac{dy}{dx}$ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ഇപ്ലിസിറ്റായി അവകലനം ചെയ്താൽ

$$\frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(x^2y^3) - \frac{d}{dx}(y^5) = \frac{d}{dx}(2x+1)$$

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 165 3/16/2023 4:39:00 PM

അതായത് $4x^3 + x^2\left(3y^2\frac{dy}{dx}\right) + (2x)y^3 - 5y^4\frac{dy}{dx} = 2 + 0$

അതായത് $4x^3 + 3x^2y^2\frac{dy}{dx} + 2xy^3 - 5y^4\frac{dy}{dx} = 2$

അതായത് $(3x^2y^2 - 5y^4)\frac{dy}{dx} = 2 - 4x^3 - 2xy^3$

അല്ലെങ്കിൽ $\frac{dy}{dx} = \frac{2 - 4x^3 - 2xy^3}{3x^2y^2 - 5y^4}$.

ഉദാഹരണം 10.20

$\sin y = y\cos 2x$ അതായത് $\frac{dy}{dx}$ കാണുക

നിർദ്ധാരണം

$\sin y = y\cos 2x$.

അവകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ, $\frac{d}{dx}\sin y = \frac{d}{dx}(y\cos 2x)$

അതായത് $\cos y\frac{dy}{dx} = y(-2\sin 2x) + \cos 2x\frac{dy}{dx}$

അതായത് $(\cos y - \cos 2x)\frac{dy}{dx} = -2y\sin 2x$

അല്ലെങ്കിൽ $\frac{dy}{dx} = \frac{-2y\sin 2x}{\cos y - \cos 2x}$.

10.4.4 ലോഗരിതമിക് അവകലനം

അവകലന നിയമവും അടിസ്ഥാന എലിമെന്ററി ഫലനങ്ങളുടെ അവകലജങ്ങളുടെ പട്ടികയും ഉപയോഗിക്കുന്നതിലൂടെ ഒരോ ഒരുതരം ഒഴികെ മറ്റ് ഏത് എലിമെന്ററി ഫലനത്തിന്റെയും അവകലജങ്ങൾ നമുക്ക് സ്വപ്രേരിതമായി കണ്ടെത്താൻ കഴിയും, ഇതിന്റെ ഏറ്റവും ലളിതമായ പ്രതിനിധി $y = x^x$ അത്തരം ഫലനങ്ങളെ കൃതി ഘാതാങ്കം എന്ന് വിശേഷിപ്പിക്കുന്നു പൊതുവേ കൃതിയിൽ എഴുതിയ ഏതൊരു ഫലനത്തിന്റെ ബേസും ഇന്റക്സും സ്വതന്ത്രചരത്തെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു.

$y = x^x$ എന്ന കൃതി ഘാതാങ്ക ഫലനത്തിന്റെ അവകലജം പൊതു നിയമം ഉപയോഗിച്ച് കണ്ടുപിടിക്കാനായി രണ്ട് വശത്തും ലോഗരിതം എടുക്കും.

$\log y = x\log x, x > 0$

ഇതൊരു ഐഡന്റിറ്റി ആയതുകൊണ്ട് x ആസ്പദമായി അവകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ ഇടതുവശത്തു കിട്ടുന്ന അവകലജം തന്നെയാകണം വലതുവശത്തേയും അവകലജം. (ഇടതുവശത്ത് ഫലനത്തിന്റെ ഫലനം എന്ന വസ്തു മനസ്സിൽ വയ്ക്കണം). :

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \log x + 1$$

അങ്ങനെ $\frac{dy}{dx} = y(\log x + 1) = x^x(\log x + 1)$

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 166 3/16/2023 4:39:05 PM

ഈ പ്രക്രിയയിൽ ആദ്യം ഫലനത്തിന്റെ ലോഗരിതം എടുക്കുകയും ശേഷം അവകലനം ചെയ്യുന്നതു കൊണ്ട് **ലോഗരിതമിക് അവകലനം** എന്നു പറയുന്നു. $f(x)$

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}}.$$

ഇതിനെ $f(x)$ ന്റെ ലോഗരിതമിക് അവകലജമെന്ന് പറയും.

ഗുണനം, ഹരണം, കൃതി എന്നിവ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന സങ്കീർണ്ണമായ ഫലനങ്ങളുടെ അവകലജങ്ങൾ കണ്ടുപിടിക്കാൻ പലപ്പോഴും ലോഗരിതം എടുക്കുന്നതിലൂടെ ലളിതമാക്കാം എന്നതാണ് ഈ രീതിയുടെ പ്രയോജനം.

ഉദാഹരണം 10.21

$y = \sqrt{x^2+4}\,.\sin^2 x\,.2^x$ ന്റെ അവകലനം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ലോഗരിത നിയമം അനുസരിച്ച് രണ്ട് വശവും ലോഗരിതം എടുക്കുക.

അതായത്, $\log y = \frac{1}{2}\log(x^2+4) + 2\log(\sin x) + x\log(2).$

അതുകൊണ്ട്, $\frac{y'}{y} = \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+4} + 2.\frac{\cos x}{\sin x} + \log 2$

$$= \frac{x}{x^2+4} + 2\cot x + \log 2$$

അതുകൊണ്ട് $y' = \frac{dy}{dx} = y\left(\frac{x}{x^2+4} + 2\cot x + \log 2\right)$.

ഉദാഹരണം 10.22

$y = \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{(3x+2)^5}$ അവകലനം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ലോഗരിത നിയമം അനുസരിച്ച് രണ്ട് വശവും ലോഗരിതമെടുക്കുമ്പോൾ

$\log y = \frac{3}{4}\log x + \frac{1}{2}\log(x^2+1) - 5\log(3x+2).$

ഇംപ്ലിസിറ്റായി അവകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ

$$\frac{y'}{y} = \frac{3}{4x} + \frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+1)} - \frac{5\times 3}{3x+2}$$

$$= \frac{3}{4x} + \frac{x}{(x^2+1)} - \frac{15}{3x+2}$$

അതുകൊണ്ട് $\frac{dy}{dx} = y' = \frac{\sqrt[3]{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left[\frac{3}{4x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right]$.

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 167 3/16/2023 4:39:09 PM

ലോഗരിതമിക് അവകലനത്തിന്റെ പല ഘട്ടങ്ങൾ

(1) സമവാക്യം $y = f(x)$ ന്റെ ഇരുവശത്തും സ്വാഭാവിക ലോഗരിതമെടുത്തതിനുശേഷം ലോഗരിത നിയമം പ്രയോഗിച്ച് ലഘൂകരിക്കുക.

(2) x അനുശ്രണമായി ഇംപ്ലിസിറ്റ് അവകലനം ചെയ്യുക.

(3) ഇവിടെ ലഭിച്ച സമവാക്യം y' നായി നിർദ്ധാരണം ചെയ്യുക.

പൊതുവായി നാല് തരത്തിലുള്ള ഘാതാങ്കവും ബേസും

(1) $\frac{d}{dx}(a^b) = 0$ (a, b എന്നിവ സ്ഥിരാങ്കങ്ങൾ).

(2) $\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]^b = b\left[f(x)\right]^{b-1} f'(x)$

(3) $\frac{d}{dx}[a^{g(x)}] = a^{g(x)}(\log a)g'(x)$

(4) $\frac{d}{dx}\left[f(x)\right]^{g(x)} = [f(x)]^{g(x)}\left[\frac{g(x)f'(x)}{f(x)} + \log f(x).g'(x)\right]$

ഉദാഹരണം 10.23

$y = x^{\sqrt{x}}$ അവകലനം കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

ലോഗരിതമെടുത്താൽ:

$$\log y = \sqrt{x}\log x$$

ഇംപ്ലിസിറ്റ് അവകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ,

$$\frac{y'}{y} = \sqrt{x}.\frac{1}{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}.\log x$$

$$= \frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}$$

അതുകൊണ്ട് $\frac{d}{dx}(x^{\sqrt{x}}) = y' = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\log x + 2}{2\sqrt{x}}\right)$.

10.4.5 പ്രതിസ്ഥാപിത രീതി

അവകലന പ്രക്രിയയിൽ വളരെ ഉപകാരപ്രദമായ ഒരു രീതിയാണ് ഇത്. പ്രത്യേകിച്ചും വിപരീത ത്രികോണമിതീയ ഫലനങ്ങളുടെ കാര്യത്തിൽ

$f(x) = \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$. കണക്കിലെടുക്കുക

ഈ ഫലനത്തിന്റെ $f'(x)$ കാണാൻ ഫലനങ്ങളുടെ ഫലന നിയമം ഉപയോഗിക്കാം. പക്ഷേ അത് കഠിനമായത് കൊണ്ട് അതിനു പകരം പ്രതിസ്ഥാപിത രീതി ഉപയോഗിക്കാം.

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 168 3/16/2023 4:39:13 PM

$x = \tan\theta$ എന്നെടുക്കുക.

അപ്പോൾ $\dfrac{2x}{1-x^2} = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \tan 2\theta$ and

$$f(x) = \tan^{-1}(\tan 2\theta) = 2\theta$$
$$= 2\tan^{-1}x$$
$$f'(x) = \frac{2}{1+x^2}\ .$$

ഉദാഹരണം 10.24

$y = \tan^{-1}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$, എങ്കിൽ y' കാണുക

നിർദ്ധാരണം

$x = \tan\theta$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

എങ്കിൽ $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{1+\tan\theta}{1-\tan\theta} = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\theta\right)$.

$$\tan^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \tan^{-1}\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\right] = \frac{\pi}{4}+\theta = \frac{\pi}{4}+\tan^{-1}x$$

$$y = \frac{\pi}{4}+\tan^{-1}x$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}\ .$$

ഉദാഹരണം 10.25

$f'(x)$ if $f(x) = \cos^{-1}(4x^3-3x)$ കാണുക..

നിർദ്ധാരണം

$x = \cos\theta$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

അപ്പോൾ $4x^3-3x = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \cos 3\theta$ and

$$f(x) = \cos^{-1}(\cos 3\theta) = 3\theta = 3\cos^{-1}x$$

അതുകൊണ്ട് $f'(x) = 3\left(\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \dfrac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$.

10.4.6 പരാമെട്രിക് സമവാക്യം വഴി നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്ന ചരങ്ങളുടെ അവകലനം

$x = f(t), y = g(t)$ എന്നീ സമവാക്യങ്ങൾ പരിഗണിക്കാം.

ഈ സമവാക്യങ്ങൾ x, y എന്നീ ചരങ്ങളുടെ ഫലന ബന്ധത്തെക്കുറിച്ച് അറിവ് നൽകുന്നു. $[a, b]$ യുടെ മണ്ഡലത്തിലെ മൂല്യം t യ്ക്ക് നൽകുക വഴി x, y കണ്ടുപിടിക്കാം.

x, y എന്നീ രണ്ട് ചരങ്ങൾ പ്രത്യേകം പ്രത്യേകമായി മധ്യവർത്തിയായ ചരം t യിലെ ഫലനമായി നിർവ്വചിച്ചിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ x, y എന്നിവയ്ക്കിടയിൽ വിശേഷമായി നിർദ്ദേശിച്ചിട്ടുള്ള ഫലന ബന്ധത്തെ **പരാമെട്രിക്** എന്നും മധ്യവർത്തിയായ ചരത്തെ **പരാമീറ്റർ** എന്നും പറയുന്നു.

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 169 3/16/2023 4:39:17 PM

മധ്യവർത്തിയായ ചരം t യുടെ അഭാവത്തിൽ x, y എന്നിവയുടെ നേരിട്ടുള്ള ബന്ധത്തെ കണ്ടുപിടിക്കുന്ന പ്രക്രിയയാണ് **പരാമീറ്റർ ഒഴിവാക്കൽ** എന്നു പറയുന്നത് നമ്മൾ ഇവിടെ പരാമെട്രിക് സമവാക്യം കൈകാര്യം ചെയ്യുന്നത് എന്തിനാണെന്നുവച്ചാൽ രണ്ടോ അതിലധികമോ ചരങ്ങൾ ഒറ്റചരം t യിലേയ്ക്ക് ചുരുങ്ങും.

ഉദാഹരണമായി കേന്ദ്രം $(0, 0)$ ഉം ആരം r മായ വൃത്തത്തിന്റെ സമവാക്യം $x^2 + y^2 = r^2$ ഈ സമവാക്യം x, y എന്നിവയുടെ ബന്ധത്തെ കാണിക്കുന്നു.

$x = r\cos t$; $y = r\sin t$ എന്നീ സമവാക്യങ്ങൾ പരാമെട്രിക് സമവാക്യങ്ങൾ മറിച്ച്, നമ്മൾ t ഒഴിവാക്കിയാൽ $x^2 + y^2 = r^2$ ലഭിക്കും

ചരം y യെ x ലെ ഒരു ഫലനമായി കണക്കാക്കിയാൽ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$.

നമ്മൾ x നെ y ലെ ഒരു ഫലനമായി കണക്കാക്കി, y അനുശ്രണമായി x ന്റെ അവകലജം

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\frac{dy}{dt}} = \frac{f'(t)}{g'(t)}.$$

വൃത്തത്തിന്റെ കാര്യത്തിൽ $\frac{dy}{dx}$ വൃത്തത്തിന്റെ സ്പർശ രേഖയുടെ ചരിവ് അതായത്

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{r\cos t}{-r\sin t} = -\cot t \ .$$

ഉദാഹരണം 10.26

$x = at^2$; $y = 2at$, $t \neq 0$ എങ്കിൽ $\frac{dy}{dx}$ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത് $x = at^2$; $y = 2at$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2a}{2at} = \frac{1}{t}.$$

ഉദാഹരണം 10.27

$x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ എങ്കിൽ $\frac{dy}{dx}$ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത് $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$.

ഇപ്പോൾ $\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$; $\frac{dy}{dt} = a\sin t$

അതുകൊണ്ട് , $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{(1-\cos t)}$.

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 170 3/16/2023 4:39:19 PM

10.4.7 ഒരു ഫലനത്തെ മറ്റൊരു ഫലനത്തിന് അനുശ്രണമായി അവകലനം ചെയ്യുന്നത്

If $y = f(x)$ അവകലന സാധ്യമെങ്കിൽ x അനുശ്രണമായി y യുടെ അവകലജം എന്നത്

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} .$$

f, g എന്നിവ ചരം x ലുള്ള അവകലന ഫലനവും $\frac{dg}{dx} = g'(x) \neq 0,$ ആയാൽ

$$\frac{df}{dg} = \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{dg}{dx}} = \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ഉദാഹരണം 10.28

$x \log x$ ന് അനുസ്യൂണമായി x^x ന്റെ അവകലജം കാണുക

നിർദ്ധാരണം

$= x^x, v = x \log x$

$$\log u = x \log x$$

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dx} = x.\frac{1}{x} + 1.\log x = 1 + \log x$$

$$\frac{du}{dx} = u(1 + \log x) = x^x(1 + \log x)$$

$$\frac{dv}{dx} = 1 + \log x$$

$$\frac{d(x^x)}{d(x \log x)} = \frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}} = x^x .$$

ശ്രദ്ധിക്കുക g ഒരു ഐഡന്റിറ്റി ഫലനമാണെങ്കിൽ $g(x) = x$ അപ്പോൾ $\frac{df}{dg}$ എന്നത് $\frac{df}{dx} = f'(x).$

ഉദാഹരണം 10.29

$x^2 + x + 1.$ അനുസ്യൂണമായി $\tan^{1}(1 \quad x^2)$ ന്റെ അവകലജം കാണുക

നിർദ്ധാരണം :

$$f(x) = \tan^{-1}(1 + x^2)$$

$$g(x) = x^2 + x + 1$$

$$\frac{df}{dg} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{\left(x^4 + 2x^2 + 2\right)}$$

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 171 3/16/2023 4:39:25 PM

$$g'(x) = 2x+1$$

$$\frac{df}{dg} = \frac{2x}{(2x+1)(x^4+2x^2+2)} .$$

ഉദാഹരണം 10.30

$\cos(lx^2+mx+n)$ ന് ആസ്പദമായി $\sin(ax^2+bx+c)$ അവകലനം ചെയ്യുക.

നിർദ്ധാരണം

$$u = \sin(ax^2+bx+c) \text{ എന്നിരിക്കട്ടെ}$$

$$v = \cos(lx^2+mx+n)$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{u'(x)}{v'(x)}$$

$$u'(x) = \cos(ax^2+bx+c)(2ax+b)$$

$$v'(x) = -\sin(lx^2+mx+n)(2lx+m)$$

$$\frac{du}{dv} = \frac{u'(x)}{v'(x)} = \frac{(2ax+b)\cos(ax^2+bx+c)}{-(2lx+m)\sin(lx^2+mx+n)} .$$

10.4.8 ഉയർന്ന ക്രമത്തോടുകൂടിയ അവകലജങ്ങൾ

ഒരു നേർരേഖയിൽ നീങ്ങുന്ന വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാന ഫലനം (സ്ഥാന ചലനം) $s = s(t)$ ആണെങ്കിൽ അതിന്റെ ആദ്യ അവകലജത്തിന് സമയത്തിന്റെ ഫലനമെന്ന നിലയിൽ പ്രവേഗം $v(t)$ എന്ന ലളിതമായ വ്യാഖ്യാനം ഉണ്ടെന്ന് നമുക്കറിയാം. :

$$v(t) = s'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} .$$

തൽക്ഷണ നിരക്ക് സമയവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട പ്രവേഗത്തിന്റെ മാറ്റത്തെ വസ്തുവിന്റെ ത്വരണം $a(t)$ എന്നു വിളിക്കുന്നു. അപ്പോൾ ത്വരണ ഫലനം പ്രവേഗ ഫലനത്തിന്റെ അവകലജമാണ്, അതിനാൽ സ്ഥാന ഫലനത്തിന്റെ രണ്ടാമത്തെ അവകലജം:

$$a(t) = v'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{d}{dt}(v(t))$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2s}{dt^2} = s''(t)$$

ആയതിനാൽ f എന്നത് x ലുള്ള അവകലന ഫലനമാണെങ്കിൽ അതിന്റെ ആദ്യ അവകലജം $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ എന്നത് $y = f(x)$ ന്റെ ഗ്രാഫിലുള്ള സ്പർശരേഖയുടെ ചരിവ് എന്ന് ലളിതമായ ജ്യാമിതീയ വ്യാഖ്യാനമുണ്ട്. f' എന്നത് x, ലെ ഒരു ഫലനം കൂടി ആയതിനാൽ f' ന് അതിന്റെതായ ഒരു അവകലജമുണ്ടാകാം, അത് നിലവിലുണ്ടെങ്കിൽ $(f')' = f''$ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിക്കുന്നു.,

$$f''(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x} .$$

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 172 3/16/2023 4:39:29 PM

$$= \frac{d}{dx}\left(f'(x)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)$$

$$= \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2}$$

മറ്റു പ്രതീകങ്ങൾ $D^2 f(x) = D^2 y = y_2 = y''$

രണ്ടാമത്തെ അവകലജത്തിനെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കിന്റെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കായി നമുക്ക് വ്യാഖ്യാനിക്കാം. എന്നാൽ അതിന്റെ ജ്യാമിതീയ വ്യാഖ്യാനം അത്ര ലളിതമല്ല. എന്നിരുന്നാലും രണ്ടാമത്തെ അവകലജ $f''(x)$ ഉം $y = f(x)$ ന്റെ ഗ്രാഫിന്റെ വക്രതയുടെ ദൂരവും തമ്മിൽ അടുത്ത ബന്ധമുണ്ട്, അത് നിങ്ങൾ ഉയർന്ന ക്ലാസുകളിൽ പഠിക്കും.

അതുപോലെ f'' നിലവിലുണ്ടെങ്കിൽ അവകലനം സാധ്യമാകുകയോ അല്ലാതിരിക്കുകയോ ചെയ്യാം. സാധ്യമാണെങ്കിൽ f'' ന്റെ അവകലജത്തെ f ന്റെ **മൂന്നാമത്തെ അവകലജമെന്ന്** പറയാം.

$$f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3} = y''' = y_3.$$

ഫലനം: $f(t)$ എന്നത് നേർരേഖയിലൂടെ സഞ്ചരിക്കുന്ന ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനഫലനമെങ്കിൽ നമുക്ക് മൂന്നാമത്തെ അവകലജത്തെ ഭൗതികമായി വ്യാഖ്യാനിക്കാൻ കഴിയും. കാരണം സ്ഥാനഫലനത്തിന്റെ മൂന്നാമത്തെ അവകലജം $s''' = (s'')' = a'(t)$ ത്വരണ ഫലനത്തിന്റെ അവകലജമാണ്. ഇതിനെ **ജെർക്** എന്ന് പറയും

$$j = \frac{da}{dt} = \frac{d^3 s}{dt^3}\ .$$

അതിനാൽ ത്വരണത്തിന്റെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്കാണ് ജെർക് .

ഒരു വലിയ ജെർക് എന്നാൽ ത്വരണത്തിലെ പെട്ടെന്നുള്ള മാറ്റം എന്നർത്ഥം. ഇത് ഒരു വാഹനത്തിൽ പെട്ടെന്നുള്ള ചലനത്തിന് കാരണമാകുന്നു.

ഉദാഹരണം 10.31

$y = x^3 - 6x^2 - 5x + 3$ എങ്കിൽ y', y'' കൂടാതെ y''' എന്നിവ കാണുക

നിർദ്ധാരണം

$$y = x^3 - 6x^2 - 5x + 3$$

$$y' = 3x^2 - 12x - 5$$

$$y'' = 6x - 12$$

$$y''' = 6.$$

ഉദാഹരണം 10.32

$y = \frac{1}{x}$ എങ്കിൽ y''' കാണുക

നിർദ്ധാരണം

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$y' = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$y'' = (-1)(-2)x^{-3} = \frac{(-1)^2 2!}{x^3}.$$

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 173 3/16/2023 4:39:34 PM

അതുപോലെ $y''' = (-1)(-2)(-3)x^{-4} = \frac{(-1)^3 3!}{x^4}$.

ഉദാഹരണം 10.33

$f(x) = x\cos x$ എങ്കിൽ f'' കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$, f(x) = x\cos x.$$

$$f'(x) = -x\sin x + \cos x, \text{ കൂടാതെ,}$$

$$f''(x) = -(x\cos x + \sin x) - \sin x$$

$$= -x\cos x - 2\sin x.$$

ഉദാഹരണം 10.34

$x^4 + y^4 = 16$ എങ്കിൽ y'' കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$x^4 + y^4 = 16 .$$

ഇംപ്ലിസിറ്റ് അവകലനം നടത്തുമ്പോൾ $4x^3 + 4y^3 y' = 0$

y' നായി നിർദ്ധാരണം നടത്തുമ്പോൾ

$$y' = -\frac{x^3}{y^3} .$$

y'' കണ്ടെത്തുന്നതിന് തന്നിരിക്കുന്ന പ്രയോഗത്തെ y' നായി ഹരണഫല നിയമം അനുസരിച്ച് അവകലനം ചെയ്യുകയും y എന്നത് x ന്റെ ഒരു ഫലനമാണെന്ന് ഓർമ്മിക്കുകയും ചെയ്യുന്നു.

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{-x^3}{y^3}\right) = \frac{-\left[y^3\frac{d}{dx}(x^3) - x^3\frac{d}{dx}(y^3)\right]}{(y^3)^2}$$

$$= -\frac{\left[y^3.3x^2 - x^3(3y^2y')\right]}{y^6}$$

$$= -\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2\left(-\frac{x^3}{y^3}\right)}{y^6}$$

$$= -\frac{3(x^2y^4 + x^6)}{y^7} = \frac{-3x^2[x^4 + y^4]}{y^7}$$

$$= \frac{-3x^2(16)}{y^7} = \frac{-48x^2}{y^7} .$$

ഉദാഹരണം 10.35

x, y എന്നിവ തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ രണ്ടാം ക്രമ അവകലജം കാണുക.

$$x = a\cos t$$

$$y = a\sin t.$$

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 174 3/16/2023 4:39:38 PM

നിർദ്ധാരണം

x ആസ്പദമാക്കി തന്നിട്ടുള്ള ഫലനത്തെ അവകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{a\cos t}{-a\sin t} = -\frac{\cos t}{\sin t}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{-\cos t}{\sin t}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{-\cos t}{\sin t}\right)\frac{dt}{dx} = -[-\text{cosec}^2 t]\times\frac{1}{x'(t)}$$

$$= \text{cosec}^2 t \times \frac{1}{-a\sin t}$$

$$= -\frac{\cos ec^3 t}{a} .$$

ഉദാഹരണം 10.36

$x^2 + y^2 = 4$ എങ്കിൽ $\frac{d^2y}{dx^2}$ കാണുക

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ളത് $x^2 + y^2 = 4$

മുമ്പത്തെപ്പോലെ, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

അങ്ങനെ ഹരണഫല നിയമം അനുസരിച്ച്

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= -\frac{y.1 - x.\frac{dy}{dx}}{y^2}$$

$$= -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2}$$

$$= -\frac{x^2 + y^2}{y^3} = -\frac{4}{y^3} .$$

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 175 3/16/2023 4:39:42 PM

അഭ്യാസം 10.4

ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ളവയുടെ (1 – 18) അവകലജം കാണുക.

(1) $y = x^{\cos x}$

(2) $y = x^{\log x} + (\log x)^x$

(3) $\sqrt{xy} = e^{(x-y)}$

(4) $x^y = y^x$

(5) $(\cos x)^{\log x}$

(6) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(7) $\sqrt{x^2 + y^2} = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

(8) $\tan(x + y) + \tan(x - y) = x$

(9) $\cos(xy) = x$, ആണെങ്കിൽ $\frac{dy}{dx} = \frac{-(1 + y\sin(xy))}{x\sin xy}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

(10) $\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

(11) $\tan^{-1}\left(\frac{6x}{1-9x^2}\right)$

(12) $\cos\left(2\tan^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

(13) $x = a\cos^3 t$; $y = a\sin^3 t$

(14) $x = a(\cos t + t\sin t)$; $y = a(\sin t - t\cos t)$

(15) $x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2}$

(16) $\cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

(17) $\sin^{-1}(3x - 4x^3)$

(18) $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}\right)$.

(19) x^2. നെ ആസ്പദമാക്കി $\sin x^2$ ന്റെ അവകലജം കാണുക.

(20) $\tan^{-1} x$. നെ ആസ്പദമാക്കി $\sin^{-1}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ അവകലനം കാണുക

(21) $u = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$, $v = \tan^{-1} x$. എങ്കിൽ $\frac{du}{dv}$ കാണുക.

(22) $\tan^{-1}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)$ നെ ആസ്പദമാക്കി $\tan^{-1}\left(\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$. ന്റെ അവകലജം കാണുക.

(23) $y = \sin^{-1} x$ ആണെങ്കിൽ y'' എത്ര

(24) $y = e^{\tan^{-1} x}$, ആണെങ്കിൽ $(1 + x^2)y'' + (2x - 1)y' = 0$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

(25) $y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$, ആണെങ്കിൽ $(1 - x^2)y_2 - 3xy_1 - y = 0$. എന്ന് തെളിയിക്കുക

(26) $x = a(\theta + \sin\theta)$, യും $y = a(1 - \cos\theta)$ യും ആണെങ്കിൽ $\theta = \frac{\pi}{2}$ ആകുമ്പോൾ $y'' = \frac{1}{a}$ എന്ന് തെളിയിക്കുക

(27) $\sin y = x\sin(a + y)$, ആണെങ്കിൽ തെളിയിക്കുക $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$, $a \neq n\pi$.

(28) $y = (\cos^{-1} x)^2$, ആണെങ്കിൽ $(1 - x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} - 2 = 0$. തെളിയിക്കുക. ശേഷം $x = 0$ ആകുമ്പോൾ y_2 കാണുക

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 176 3/16/2023 4:39:56 PM

അഭ്യാസം 10.5

തന്നിട്ടുള്ള നാലെണ്ണത്തിൽ നിന്ന് ശരിയുത്തരം അല്ലെങ്കിൽ ഏറ്റവും ഉചിതമായ ഉത്തരം തിരഞ്ഞെടുക്കുക.

(1) $\frac{d}{dx}\left(\frac{2}{\pi}\sin x^\circ\right)$

(1) $\frac{\pi}{180}\cos x^\circ$ (2) $\frac{1}{90}\cos x^\circ$ (3) $\frac{\pi}{90}\cos x^\circ$ (4) $\frac{2}{\pi}\cos x^\circ$

(2) $y = f(x^2+2)$, $f'(3)=5$ എങ്കിൽ, $\frac{dy}{dx}$, $x=1$ ൽ

(1) 5 (2) 25 (3) 15 (4) 10

(3) $y=\frac{1}{4}u^4$, $u=\frac{2}{3}x^3+5$ എങ്കിൽ $\frac{dy}{dx}$ എത്ര?

(1) $\frac{1}{27}x^2(2x^3+15)^3$ (2) $\frac{2}{27}x(2x^3+5)^3$

(3) $\frac{2}{27}x^2(2x^3+15)^3$ (4) $-\frac{2}{27}x(2x^3+5)^3$

(4) $f(x)=x^2-3x$, ആണെങ്കിൽ $f(x)=f'(x)$ ആകുന്ന ബിന്ദുക്കൾ ഏതെല്ലാം

(1) രണ്ടും ധനാങ്കം (2) രണ്ടും ഋണാങ്കം

(3) രണ്ടും അപരിമേയ സംഖ്യ (4) ഒന്ന് പരിമേയം മറ്റൊന്ന് അപരിമേയ സംഖ്യ.

(5) $y=\frac{1}{a-z}$ എങ്കിൽ $\frac{dz}{dy}$

(1) $(a-z)^2$ (2) $-(z-a)^2$ (3) $(z+a)^2$ (4) $-(z+a)^2$

(6) $y=\cos(\sin x^2)$ എങ്കിൽ $\frac{dy}{dx}$, $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ ൽ എത്ര?

(1) -2 (2) 2 (3) $-2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ (4) 0

(7) $y=mx+c$ അതുപോലെ $f(0)=f'(0)=1$ എങ്കിൽ $f(2)$ എത്ര?

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) -3

(8) $f(x)=x\tan^{-1}x$ എങ്കിൽ $f'(1)$ എത്ര?

(1) $1+\frac{\pi}{4}$ (2) $\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$ (3) $\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$ (4) 2

(9) $\frac{d}{dx}(e^{x+5\log x})$

(1) $e^x.x^4(x+5)$ (2) $e^x.x(x+5)$ (3) $e^x+\frac{5}{x}$ (4) $e^x-\frac{5}{x}$

(10) $x=0$ യിൽ $(ax-5)e^{3x}$ ന്റെ അവകലജം -13 എങ്കിൽ a യുടെ മൂല്യം

(1) 8 (2) -2 (3) 5 (4) 2

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 177 3/16/2023 4:40:05 PM

(11) $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, y=\frac{2t}{1+t^2}$ എങ്കിൽ $\frac{dy}{dx}$ എത്ര?

(1) $-\frac{y}{x}$ (2) $\frac{y}{x}$ (3) $-\frac{x}{y}$ (4) $\frac{x}{y}$

(12) $x=a\sin\theta$, $y=b\cos\theta$ എങ്കിൽ $\frac{d^2y}{dx^2}$ എത്ര?

(1) $\frac{a}{b^2}\sec^2\theta$ (2) $-\frac{b}{a}\sec^2\theta$ (3) $-\frac{b}{a^2}\sec^3\theta$ (4) $-\frac{b^2}{a^2}\sec^3\theta$

(13) $\log_{10} x$ നെ $\log_x 10$ ആസ്പദമാക്കി അവകലനം ചെയ്യുമ്പോൾ അവകലന ഗുണാങ്കം എത്ര?

(1) 1 (2) $-(\log_{10} x)^2$ (3) $(\log_x 10)^2$ (4) $\frac{x^2}{100}$

(14) $f(x)=x+2$ അപ്പോൾ $f'(f(x))$, $x=4$ ൽ എത്ര?

(1) 8 (2) 1 (3) 4 (4) 5

(15) $y=\frac{(1-x)^2}{x^2}$ എങ്കിൽ $\frac{dy}{dx}$ എത്ര?

(1) $\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}$ (2) $-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}$ (3) $-\frac{2}{x^2}-\frac{2}{x^3}$ (4) $-\frac{2}{x^3}+\frac{2}{x^2}$

(16) $pv=81$ എങ്കിൽ $\frac{dp}{dv}$ $9v=$ ൽ എത്ര?

(1) 1 (2) – 1 (3) 2 (4) –2

(17) $f(x)=\begin{cases} x-5 \text{ എങ്കിൽ } x\le 1 \\ 4x^2-9 \text{ എങ്കിൽ } 1<x<2 \\ 3x+4 \text{ എങ്കിൽ } x\ge 2 \end{cases}$, $x=2$ ന്റെ f $f(x)$ വലത്വശ അവകലജം എത്ര?

(1) 0 (2) 2 (3) 3 (4) 4

(18) $f'(a)$ നിലനിൽക്കുന്നുവെങ്കിൽ $\lim\limits_{x\to a}\frac{xf(a)-af(x)}{x-a}$ എത്ര?

(1) $f(a)-af'(a)$ (2) $f'(a)$ (3) $-f'(a)$ (4) $f(a)+af'(a)$

(19) $f(x)=\begin{cases} x+1, \text{ എങ്കിൽ } x<2 \\ 2x-1 \text{ എങ്കിൽ } x\ge 2 \end{cases}$, എങ്കിൽ അപ്പോൾ $f'(2)$ എത്ര?

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) നിലനിൽക്കുന്നില്ല

(20) $g(x)=(x^2+2x+1)f(x)$, $f(0)=5$ അതുപോലെ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x}=4$ എങ്കിൽ $g'(0)$ എത്ര?

(1) 20 (2) 14 (3) 18 (4) 12

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 178 3/16/2023 4:40:13 PM

(21) $f(x)=\begin{cases}x+2, & -1<x<3\\ 5 & x=3\\ 8-x & x>3\end{cases}$, എങ്കിൽ $x=3$ ൽ $f'(x)$

(1) 1 (2) -1 (3) 0 (4) നിലനിൽക്കുന്നില്ല

(22) $f(x)=x|x|$ ന്റെ $x=-3$ ലെ അവകലജം എത്ര

(1) 6 (2) -6 (3) നിലനിൽക്കുന്നില്ല (4) 0

(23) $f(x)=\begin{cases}2a-x & -a<x<a\\ 3x-2a & x\geq a\end{cases}$, എങ്കിൽ ചുവടെയുള്ളതിൽ ശരി ഏത്?

(1) $x=a$ ൽ $f(x)$ അവകലനം സാധ്യമല്ല (2) $x=a$ ൽ $f(x)$ തുടർച്ചയില്ല.

(3) $\mathbb{R}$ ലെ എല്ലാ x മൂല്യത്തിനും $f(x)$ ന് തുടർച്ചയുണ്ട്

(4) എല്ലാ $x\geq a$ യ്ക്കും $f(x)$ ന് അവകലന സാധ്യതയുണ്ട്.

(24) If $f(x)=\begin{cases}ax^2-b, & -1<x<1\\ \dfrac{1}{|x|}, \text{ മറ്റെല്ലായിടത്തും}\end{cases}$, $x=1$ ൽ അവകലനം സാധ്യമാണെങ്കിൽ

(1) $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{-3}{2}$ (2) $a=\frac{-1}{2},\ b=\frac{3}{2}$ (3) $a=-\frac{1}{2},\ b=-\frac{3}{2}$ (4) $a=\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2}$

(25) $\mathbb{R}$ ൽ എത്രയിടത്താണ് ഫലനം $f(x)=|x-1|+|x-3|+\sin x$ ന് അവകലന സാധ്യത ഇല്ലാത്തത്?

(1) 3 (2) 2 (3) 1 (4) 4

സംഗ്രഹം

ഈ പാഠത്തിൽ നിന്ന് നമ്മൾ ആർജ്ജിച്ച അറിവുകൾ

- മാറ്റത്തിന്റെ തോത് എന്ന നിലയിൽ അവകലജത്തെ കുറിച്ചുള്ള അറിവുകൾ $y=f(x)$ ആണെങ്കിൽ x ആസ്പദമാക്കി x_0 എന്ന ബിന്ദുവിൽ y യെ അവകലനം ചെയ്താൽ $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$, പരിധി നിലനിൽക്കുന്നുവെങ്കിൽ മാത്രം, ഇവിടെ നിലനിൽപ്പുകൊണ്ട് അർത്ഥമാക്കുന്നത് $f'(x_0^+)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0^-)$ അദ്വിതീയായ വാസ്തവിക സംഖ്യ
- $y=f(x)$ ന്റെ $x=x_0$ ബിന്ദുവിലെ അവകലജം $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{x=x_0}=f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.
- $y=f(x)$ ന്റെ അവകലജത്തിന്റെ ജ്യാമിതീയമായ അർത്ഥം എന്തെന്നാൽ $y=f(x)$ എന്ന വക്രത്തിന്റെ ഗ്രാഫിലെ $(x,f(x))$. എന്ന ബിന്ദുവിലെ സ്പർശരേഖയുടെ ചരിവാണ്.
- $s=f(t)$ ആസ്പദമാക്കി അവകലനം ചെയ്യുന്നതിന്റെ ഭൗതികമായ അർത്ഥം സ്ഥാനചലനത്തിന്റെ മാത്തിന്റെ തോത് അതായത് പ്രവേഗം. രണ്ടാമത്തെയും മൂന്നാമത്തെയും അവകലജങ്ങൾ യഥാക്രമം ത്വരണം, ജർക്
- $y=f(x)$ ഫലനം $x=x_0$ ൽ തുടർച്ചയില്ല എന്നത് കൊണ്ടുദ്ദേശിക്കുന്നത് $x=x_0$ ൽ $f(x)$ അവകലനം സാധ്യമല്ല.

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 179 3/16/2023 4:40:21 PM

- $y = f(x)$ ന് $x = x_0$ ൽ അവകലജം നിലവില്ല എന്നത് കൊണ്ടുദ്ദേശിക്കുന്നത് $y = f(x)$ ന്റെ ഗ്രാഫിലെ $(x_0, f(x_0))$. എന്ന ബിന്ദുവിൽ സ്പർശരേഖ പരാജയപ്പെടുന്നതുകൊണ്ടാണ്.
- ജ്യാമതീയമായി $y = f(x)$ ന്റെ ഗ്രാഫിലെ $x = x_0$ എന്ന ബിന്ദുവിൽ കപ്പുകളോ ($\vee$) ക്യാപ്പുകളോ ($\wedge$)ഉണ്ടെങ്കിൽ ആ ബിന്ദുവിൽ അവകലജം നിലവിലില്ല.
- അവകലജം ഒരു പ്രക്രിയയാണെന്നും ഒരു കൂട്ടം നിയമങ്ങളല്ലെന്നും മനസ്സിലാക്കണം.
- അവകലനമെന്നാൽ തുടർച്ചയെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു മറിച്ച് ശരിയല്ല.
- അവകലന സാധ്യതയുള്ള ഫലനത്തിന്റെ സങ്കലനം, വ്യത്യാസം, ഗുണനം, കോമ്പോസിറ്റ് എന്നിവ ഡിഫറൻഷ്യബിളായിരിക്കും. അതുപോലെ രണ്ട് ഡിഫറൻഷ്യബിൾ ഫലനത്തിന്റെ കോഷ്യന്റ് ഡിഫറൻഷ്യബിളായിരിക്കും.

(i) $\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx} f(x) \pm \frac{d}{dx} g(x)$

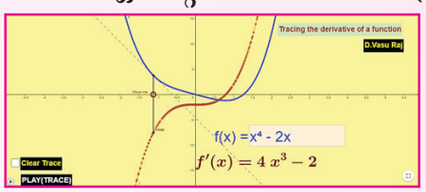
(ii) $\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f(x)\frac{dg}{dx} + g(x)\frac{df}{dx}$

(iii) $\frac{d}{dx}((fog)(x)) = f'(g(x))g'(x)$

(iv) $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$, ഇവിടെ $g(x) \neq 0$.

ഐസിറ്റി കോർണർ 10(a)

നിർണ്ണയ ഫലം



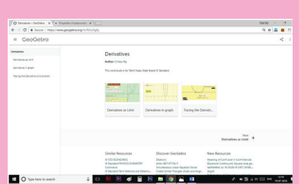
ഘട്ടം 1

ബ്രൗസർ ഓപ്പൺ ചെയ്ത് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള URL ടൈപ്പ് ചെയ്യുക (അല്ലെങ്കിൽ) QR Code സ്കാൻ ചെയ്യുക. ജിയോജീബ്ര വർക്ക് ബുക്ക് എന്ന ഡേറിവേറ്റീസ് കാണും. അതിൽ അനേകം വർക്ക് ഷീറ്റുകൾ പാഠഭാഗത്തെ സംബന്ധിച്ച് കിട്ടുന്നതാണ്.

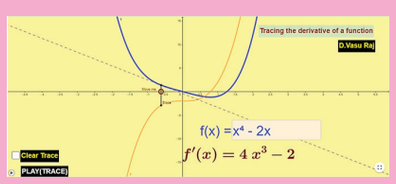
ഘട്ടം 2

ഫലനത്തിന്റെ ഡേറിവേറ്റീവ് വർക്ക് ഷീറ്റ് സെലക്റ്റ് ചെയ്യുക. അവിടെ ഏത് ഫലനവും ബോക്സിൽ ടൈപ്പ് ചെയ്താൽ ഫലനം നീല നിറത്തിലും ഡേറിവേറ്റീവ് ഓറഞ്ച് നിറത്തിലും കാണും. ഡേറിവേറ്റീവിന്റെ അനിമേഷനും ലോക്കസ്സും കാണാവുന്നതാണ്

$f(x)$ ലെ ഒരോ ബിന്ദുവിലും ഡേറിവേറ്റീവിന്റെ പാതയെ നിരീക്ഷിക്കാനാകും.



ഘട്ടം1



ഘട്ടം2

ഈ ലിങ്കിൽ ബ്രൗസ് ചെയ്യുക:

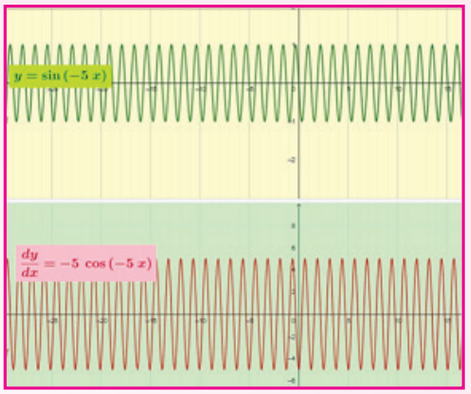
Derivatives: https://ggbm.at/fk3w5g8y

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 180 3/16/2023 4:40:29 PM

ഐസിറ്റി കോർണർ 10(b)

ഡിഫറൻഷ്യൽ കാൽക്കുലസ്

നിർണ്ണയ ഫലം



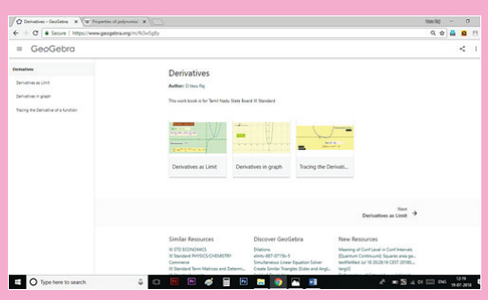
ഘട്ടം 1

ബ്രൗസർ തുറന്ന് താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള URL ലിങ്ക് ടൈപ്പ് ചെയ്യുക. അല്ലെങ്കിൽ QR കോഡ് സ്കാൻ ചെയ്യുക. ഡെറിവേറ്റീവ് എന്ന ജിയോജീബ്ര ബുക്ക് പ്രത്യക്ഷപ്പെടും. നിങ്ങളുടെ പാഠവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട് നിരവധി വർക്ക് ഷീറ്റുകൾ അതിലുണ്ടാകും.

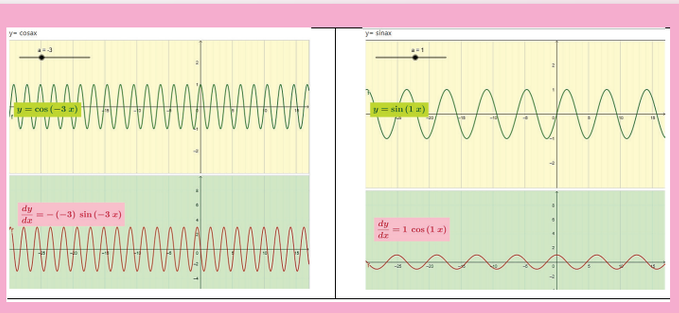
ഘട്ടം 2

ഡെറിവേറ്റീവ് ഇൻ ഗ്രാഫ് എന്ന വർക്ക് ഷീറ്റ് തിരഞ്ഞെടുക്കുക. ചില അടിസ്ഥാന ഫലനങ്ങളും അവയുടെ അവകലജങ്ങളും ഒന്നിനു പുറകെ ഒന്നായി കൊടുത്തിരിക്കും.

നിങ്ങൾക്ക് സ്ലൈഡർ ഉപയോഗിച്ച് "a" മാറ്റി നിരവധി ഫലനങ്ങളുടെ അവകലജങ്ങൾ നിരീക്ഷിയ്ക്കാം.



ഘട്ടം 1



ഘട്ടം 2

ഈ ലിങ്കിൽ ബ്രൗസ് ചെയ്യുക:

Derivatives: https://ggbm.at/fk3w5g8y

MAI 10_11th-Maths-Vol2-Unit10.indd 181 3/16/2023 4:40:32 PM

അദ്ധ്യായം 11 സമാകലകലനം

7NB3G

പ്രതീകങ്ങൾ പുതിയ കണ്ടുപിടിത്തങ്ങളെ സുഗമമാക്കുന്നു എന്നത് ശ്രദ്ധേയമാണ്. ഇത് ഏറ്റവും അത്ഭുതകരമായ രീതിയിൽ ചിന്തനയെ ലളിതമാക്കുന്നു.
- ഗോട്ട്ഫ്രഡ് വിൽഹെം ലെബ്നിറ്റ്സ്

11.1 ആമുഖം

ന്യൂട്ടൻ

ലെബ്നിറ്റ്സ്

ഗോട്ട്ഫ്രഡ് വിൽഹെം ലെബ്നിറ്റ്സ് (1646-1716) സർ ഐസക് ന്യൂട്ടൻ (1643-1727) എന്നിവർ പതിനേഴാം നൂറ്റാണ്ടിന്റെ മധ്യത്തിൽ തനിതനിയായികലനം കണ്ടെത്തി. ജർമ്മൻ തത്വചിന്തകനും ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞനും രാഷ്ട്രീയ ഉപദേഷ്ടാവും പ്രധാനമായി അദ്ധ്യാത്മ ജ്ഞാനിയും തർക്ക ശാസ്ത്ര നിപുണനും ആയിരുന്ന **ലെബ്നിറ്റ്സ്** അവകലനം കൂടാതെ സമാകലന കലനത്തിന്റെ ഒരു സ്വതന്ത്ര കണ്ടുപിടിത്തക്കാരനുമായിരുന്നു. ഈ കാലഘട്ടത്തിൽ സർ ഐസക് ന്യൂട്ടൻ ഒരു വക്രത്തിന് കീഴിലുള്ളവിസ്തീർണ്ണത്തിന്റെ വ്യംജകം കണ്ടുപിടിക്കാൻ കലനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തത്തെ സൃഷ്ടിച്ചു. അദ്ദേഹത്തിന്റെ പ്രവർത്തനങ്ങളും കണ്ടെത്തലുകളും ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ മാത്രമല്ല പ്രകാശശാസ്ത്രം, ഗുരുത്വാകർഷണം എന്നിവയിലും സിദ്ധാന്തങ്ങൾ വികസിപ്പിച്ചു.

അവകലനവും സമാകലനവും ഇല്ലാത്ത ഒരു ലോകത്തെ സങ്കൽപ്പിക്കാൻ ആർക്കും കഴിയില്ല. ഗണിതത്തിലെ ഈ രണ്ട് അടിസ്ഥാന ഘടകങ്ങളുടെ സമർത്ഥമായ പ്രയോഗംമൂലം ഈ നൂറ്റാണ്ടിൽ ശ്രദ്ധേയമായ ശാസ്ത്രീയ മുന്നേറ്റത്തിന് സാക്ഷ്യം വഹിച്ചു. ഭൗതികശാസ്ത്രം, ജ്യോതിശാസ്ത്രം, എഞ്ചിനീയറിംഗ് രസതന്ത്രം, ഭൂമിശാസ്ത്രം, ജീവശാസ്ത്രം, സാമൂഹ്യശാസ്ത്രം എന്നിവയിൽ ഉണ്ടാകുന്ന വിവിധ പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് പരിഹാരം കണ്ടെത്തുന്നതിനുള്ള ഒഴിവാക്കാനാവാത്ത ഉപകരണമായി കലനം പ്രവർത്തിക്കുന്നു.

കലനം പ്രധാനമായും രണ്ട് ജ്യാമിതീയ പ്രശ്നങ്ങളെ കൊണ്ടുള്ളത്.

(i) വക്രത്തിന്റെ സ്പർശരേഖയുടെ **ചായ്വ്** പരിമിത പ്രക്രിയയിലൂടെ **അവകലനം** കണ്ടുപിടിക്കുന്നതാണ്.

(ii) ഒരു വക്രത്തിന് കീഴിലുള്ള ഭാഗത്തിന്റെ **വിസ്തീർണ്ണം** പരിമിത പ്രക്രിയയിലൂടെ **സമാകലനം** കണ്ടുപിടിക്കുന്നതാണ്.

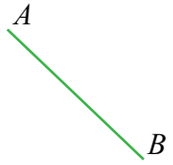
9, 10 അദ്ധ്യായങ്ങളിൽ അവകലന കലനം പഠിച്ചു. ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ സമാകലനത്തിന്റെ ചില അടിസ്ഥാന കാര്യങ്ങൾ പഠിക്കാം.

ചുവടെ ചിത്രീകരിച്ചിരിക്കുന്ന ചില ലളിതമായ സാഹചര്യങ്ങൾ പരിഗണിക്കുക.

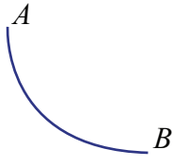
സാഹചര്യം 1

ഒരു പ്രതലത്തിലെ A,B എന്നീ രണ്ട് ബിന്ദുക്കൾ തമ്മിലുള്ള കുറഞ്ഞ ദൂരം ആ രണ്ട് ബിന്ദുക്കളെ യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖാഖണ്ഡം ആകുന്നു. ലംബ രേഖയിലില്ലാത്ത ഒരു കണിക A യിലിരുന്ന് B ലേക്ക് ചരുക്കി പോകുമ്പോൾ എടുത്ത് കൊള്ളുന്ന ഹ്രസ്വ സമയം കണ്ടെത്തേണ്ടതുണ്ടെന്ന് കരുതുക. നമ്മിൽ മിക്കവരും ഹ്രസ്വ ദൂരം ഉള്ള AB എന്ന നേർരേഖയിലൂടെ കടക്കുമ്പോൾ (ചിത്രം 11.1 (എ)) എടുത്തു കൊള്ളുന്ന സമയം ഹ്രസ്വ സമയം എന്ന് വിശ്വസിക്കുന്നു.

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 182 14-02-2023 17:29:54



A യ്ക്കും B യ്ക്കും കുറഞ്ഞ ദൂരം ഉള്ള വഴി (ചിത്രം 11.1 (എ)
ചിത്രം. 11.1 (a)

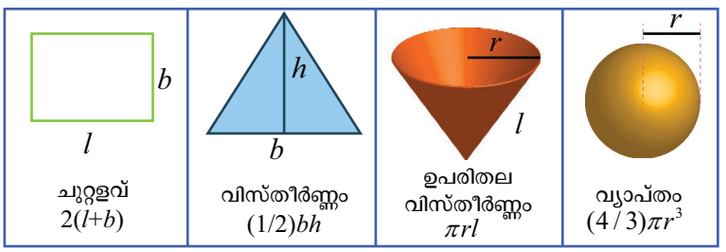


A യ്ക്കും B യ്ക്കും കുറഞ്ഞ സമയമുള്ള വഴി ചിത്രം 11.1 (ബി)
ചിത്രം. 11.1 (b)

എന്നാൽ A യെയും B യെയും യോജിപ്പിക്കുന്ന നേർരേഖ ഹ്രസ്വ സമയം ഉള്ള വഴിയല്ല. എന്ത് കൊണ്ടെന്നാൽ A യുടെ അടുത്ത് കൂടുതൽ ചായ്വ് ഉള്ള വക്രത്തിന്റെ (ചിത്രം 11.1 (ബി)) പ്രവേഗം, നേർരേഖയിൽ (ചിത്രം 11.1 (എ)) ചലിക്കുന്ന പ്രവേഗത്തേക്കാൾ കൂടുതലായിരിക്കും. ഈ വക്ര പാത കൂടുതൽ നീളമുള്ളതായിരുന്നാലും പെട്ടെന്ന് കുറഞ്ഞ സമയത്തിൽ എത്തിച്ചേരാം. കലനം മുഖേന ഈ കണക്കിന്റെ നിർദ്ധാരണം കാണാം. ഇത് ബ്രാച്ചിസ്റ്റോക്രോൺ കണക്ക് എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു.

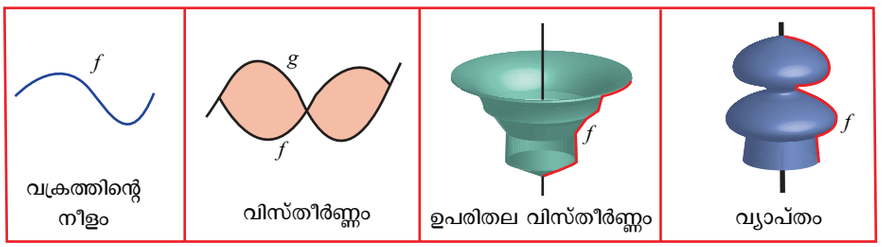
സാഹചര്യം 2

പ്രാഥമിക ജ്യാമിതിയിലുള്ള സൂത്രവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് താഴെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള സ്ഥിരരൂപങ്ങളുടെ അളവ് കണ്ടുപിടിക്കാൻ നാം പഠിച്ചിട്ടുണ്ട്.



ചിത്രം. 11.2 (a)

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ചിത്രങ്ങളിൽ അളവുകളെ പ്രവർത്തനങ്ങൾമൂലം എങ്ങനെ കണക്കാക്കാം.



ചിത്രം. 11.2 (b)

ഈ കണക്കുകൾ പ്രയാസമായിരുന്നാലും സമാകലനം മുഖേന പരിഹരിക്കാം.

സാഹചര്യം 3

ഒരു പ്രത്യേക സാഹചര്യത്തിൽ ഒരു വിദ്യാർത്ഥി തന്റെ വേഗതയേറിയ ബൈക്ക് 40 മീറ്റർ അകലെയുള്ള തടസ്സവുമായി കൂട്ടിയിടിക്കുന്നത് ഒഴിവാക്കാൻ 8 മീറ്റർ / സെക്കന്റ്^{2} എന്ന നിരക്കിൽ ബ്രേക്ക് പ്രയോഗിച്ച് ബൈക്കിന്റെ വേഗത കുറയ്ക്കുന്നു. ബൈക്ക് 24 മീറ്റർ / സെക്കന്റ് വേഗതയിൽ സഞ്ചരിക്കുകയാണെങ്കിൽ ബ്രേക്ക് പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ കൂട്ടിയിടിയ്ക്ക് മുമ്പ് അത് നിറുത്താനാകുമോ?

നമ്മിൽ സ്വാഭാവികമായി സംഭവിക്കുന്ന ഇനിപ്പറയുന്ന സംഭവങ്ങളും നോക്കുക

ചിത്രം. 11.3

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 183 14-02-2023 17:29:55

- ഏത് വേഗതയിൽ മുകളിലോട്ട് പോകുന്ന ഒരു ഉപഗ്രഹം ഭൂമിയിലേയ്ക്ക് മടങ്ങിവരില്ല.
- തന്നിട്ടുള്ള ചുറ്റളവ് P ഉള്ള ദ്വിസമഭുജ ത്രികോണം ഉൾക്കൊള്ളുന്ന ചെറിയ വൃത്താകൃതിയിലുള്ള ചക്രത്തിന്റെ ആരം എത്ര?
- $2r$ ആരമുള്ള ഖരഗോളത്തിന്റെ കേന്ദ്രത്തിൽ r ആരമുള്ള ഒരു ദ്വാരം ഉണ്ടാക്കിയാൽ നീക്കം ചെയ്ത വസ്തുവിന്റെ ഘന അളവ് എത്ര?
- ബാക്ടീരിയയുടെ വളർച്ച. നിരക്ക് അപ്പോഴുള്ള തുകയ്ക്ക് ആനുപാതികമായി മാറുന്നു. കൂടാതെ അതിന്റെ വളർച്ച ഒരു മണിക്കൂറിൽ ഇരട്ടിയാവുകയാണെങ്കിൽ രണ്ട് മണിക്കൂറിൽ എത്രത്തോളം വർദ്ധിക്കും

സമാകലനം മുകളിലുള്ള എല്ലാ പ്രശ്നങ്ങൾക്കും ഉത്തരം നൽകുന്നു.

പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

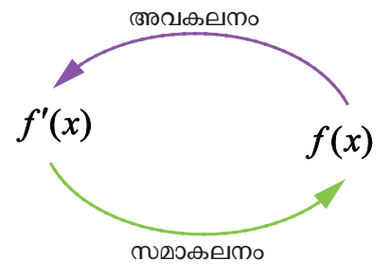
ഈ അദ്ധ്യായം പൂർത്തിയാകുമ്പോൾ വിദ്യാർത്ഥികളിൽ നിന്ന് പ്രതീക്ഷിക്കുന്നത്

- അനിർവചനീയ സമാകലത്തിന്റെ നിർവ്വചനം തൽഫലമായി അവകലനത്തിന്റെ വിപരീത ദിശയിലുള്ളത് എന്ന് മനസ്സിലാക്കുന്നു.
- ചില പ്രാഥമിക ഘടകങ്ങളുടെ ആകെ തുക, വ്യത്യാസങ്ങൾ, സ്ഥിരമായ ഗുണിതങ്ങൾ എന്നിവയുടെ അനിർവചനീയ സമാകലം കണ്ടുപിടിക്കുന്നത്.
- സംയോജിത ഘടകങ്ങളുടെ അനിർവചനീയ സമാകലം കണ്ടെത്തുന്നതിന് ഉചിതമായ സാങ്കേതിക വിദ്യകൾ ഉപയോഗിക്കുക.
- ഒരു ഫലനത്തിന്റെ മാറ്റനിരക്ക് നൽകുമ്പോൾ ഫലനം കണ്ടെത്തുന്നതിന് സമാകലനം ഉപയോഗിക്കുക.

11.2 ന്യൂട്ടൻ ലെബ്നിസ് സമകലം

സമാകലന കലനം പ്രധാനമായും അനിർവചനീയ സമാകലം നിർവ്വചനീയ സമാകലം എന്ന് തിരിച്ചിരിക്കുന്നു. ഈ അധ്യായത്തിൽ അനിർവചനീയ സമാകലനത്തെ അവകലജത്തിലിരുന്ന് ഫലനം കണ്ടെത്തുന്ന പ്രക്രിയയിലൂടെ മനസ്സിലാക്കാം.

വിപരീത പ്രക്രിയകൾ നമുക്ക് പരിചയമുണ്ട്. $(+,-)$, $(\times,\div)$, $\left(()^n, \sqrt[n]{}\right)$ എന്നിവ വിപരീത പ്രക്രിയകളുടെ ചില ജോഡികളാണ്. അതുപോലെ അവകലനവും സമാകലനവും വിപരീത പ്രക്രിയകളാണ്. അവകലനത്തിന്റെ വിപരീത പ്രക്രിയയെ എതിർ അവകലനം എന്നുപറയാം.



ചിത്രം. 11.4

നിർവ്വചനം 11.1

I എന്ന ഇടവെളിയിൽ ഫലനം $F(x)$ ന്റെ എതിർ **അവകലജം** (ന്യൂട്ടൻ ലെബ്നിറ്റ്സ് സമാകലം) ഫലനം $F(x)$ ആണെങ്കിൽ I യിലുള്ള x ന്റെ എല്ലാ മൂല്യത്തിനും

$$F'(x) = f(x)\text{, ആയിരിക്കും}$$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 184 14-02-2023 17:29:57

വിശദീകരണം 11.1

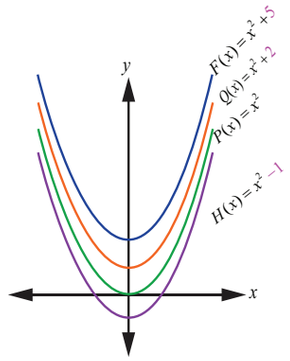
$F(x) = x^2 + 5$ എങ്കിൽ

$F'(x) = 2x$.

അങ്ങനെ $f(x)$ നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നത്

$f(x) = 2x$, എങ്കിൽ

$f(x)$ ന്റെ അവകലജം $F(x)$ ആണ്. $F(x)$ ന്റെ എതിർ അവകലജം $f(x)$ ആണ്.



ചിത്രം. 11.5

ഇനിപ്പറയുന്ന പട്ടിക പരിഗണിക്കുക

$F(x)$	$F'(x) = f(x)$	$f(x) = 2x$ ന്റെ എതിർ അവകലജം
$P(x) = x^2 + 0$ $Q(x) = x^2 + 2$ $H(x) = x^2 - 1$	$P'(x) = 2x$ $Q'(x) = 2x$ $H'(x) = 2x$ } $f(x) = 2x$	$F(x) = x^2 + ?$

$F(x), P(x), Q(x), H(x)$ എന്നിവയുടെ അവകലജം $f(x)$ എന്ന് നമുക്ക് കാണാൻ കഴിയും. എന്നാൽ $f(x) = 2x$ ന്റെ എതിർ അവകലജം സാധാരണമാണ്. അതായത് $f(x)$ ന്റെ എതിർ അവകലജം പല ഫലനങ്ങളുടെ കൂട്ടമാണ്.

സിദ്ധാന്തം 11.1

***I* എന്ന ഇടവെളിയിൽ ഒരു ഫലനം $f(x)$ ന്റെ പ്രത്യേക എതിർ അവകലജം $f(x)$ എങ്കിൽ *I* യിലുള്ള $f(x)$ ന്റെ എല്ലാ എതിർ അവകലജത്തിനും**

$$\int f(x)dx = F(x) + c \text{ എന്ന് കിട്ടും.}$$

ഇവിടെ c സ്ഥിരാങ്കം കൂടാതെ I യിലുള്ള $f(x)$ ന്റെ എല്ലാ എതിർ അവകലജത്തെയും c യുടെ പ്രത്യേക മൂല്യം മുഖേന കാണാം.

ഫലനം ***f(x)*** നെ **സമാകല്യം** എന്നു പറയാം.

dx ൽ ഉള്ള ചരം ***x*** നെ **സമാകലനത്തിലെ ചരം** എന്നു പറയാം. സമാകലം കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതിയെ **സമാകലനം** അല്ലെങ്കിൽ **എതിർ അവകലനം** എന്നു പറയാം

Sum എന്ന വാക്കിന്റെ ആദ്യാക്ഷരമായ S ന്റെ ദീർഘമാണ് $\int$ (Σ) എന്ന സമാകല ചിഹ്നം.

അവകലനംഉൾക്കൊള്ളുന്നകണക്കുകളിൽപ്രത്യേകസമാകലനഎതിർഅവകലജംകണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ചില വ്യവസ്ഥകൾ നിറവേറ്റേണ്ടതുണ്ട്. ഇത് പ്രാരംഭനില അല്ലെങ്കിൽ പരിധിനില എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു.

$\frac{dy}{dx}$ ഉൾക്കൊള്ളുന്ന സമവാക്യത്തിൽ പ്രാരംഭനില $y = y_1$ $x = x_1$, എന്നു തന്നിരുന്നാൽ അതിന്റെ എതിർ അവകലജം കണ്ട് അതിലുള്ള സ്ഥിരാങ്കം c യെ കണ്ടുപിടിക്കാം.

വിശദീകരണം 11.2

$\frac{dy}{dx} = 2x$ എന്ന സമവാക്യത്തിന്റെ എതിർ അവകലജം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന്

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 185 14-02-2023 17:29:58

പ്രാരംഭനില $x = 2$ എങ്കിൽ $y = 10$

തന്നിട്ടുള്ള സമവാക്യം

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$y = \int 2x\, dx$$

$$y = x^2 + c$$

മുകളിലുള്ള സമവാക്യത്തിൽ $x = 2$ എങ്കിൽ $y = 10$ എന്നു കൊടുത്താൽ

$$10 = 2^2 + c \;\Rightarrow\; c = 6$$

c =6 എന്ന് കൊടുത്താൽ

$$y = x^2 + 6$$

ഇതാണ് ആവശ്യമായ എതിർ അവകലജം.

11.3 സമാകലനത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന നിയമങ്ങൾ

അടിസ്ഥാന ഫലങ്ങൾ:

സമാകലനം എന്നത് അവകലനത്തിന്റെ വിപരീത പ്രക്രിയ ആയതുകൊണ്ട് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള അടിസ്ഥാന സമാകലന സൂത്രവാക്യങ്ങൾ അതിനനുസരിച്ച അവകലജത്തിലിരുന്ന് കാണാം.

അവകലജം	ഇതിർ അവകലജം
$\frac{d}{dx}(c) = 0,$ ഇവിടെ c ഒരു സ്ഥിരാങ്കം	$\int 0\, dx = c$, ഇവിടെ ഒരു സ്ഥിരാങ്കം
$\frac{d}{dx}(kx) = k,$ ഇവിടെ k ഒരു സ്ഥിരാങ്കം	$\int k\, dx = kx + c$ ഇവിടെ c ഒരു സ്ഥിരാങ്കം
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) = x^n$	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$ (കൃത്യങ്ക നിയമം)
$\frac{d}{dx}(\log x) = \left(\frac{1}{x}\right)$	$\int \frac{1}{x}\, dx = \log\lvert x\rvert + c$
$\frac{d}{dx}(-\cos x) = \sin x$	$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$
$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$	$\int \cos x\, dx = \sin x + c$
$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 186 14-02-2023 17:29:59

$\frac{d}{dx}(-\cot x) = \operatorname{cosec}^2 x$	$\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + c$
$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$
$\frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec} x) = \operatorname{cosec} x \cot x$	$\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = -\operatorname{cosec} x + c$
$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$	$\int e^x dx = e^x + c$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right) = a^x$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + c$
$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$
$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$

ഉദാഹരണം 11.1

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാകലം ചെയ്യുക.

(i) x^{10} (ii) $\frac{1}{x^{10}}$ (iii) $\sqrt{x}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{x}}$

നിർദ്ധാരണം

(i) നമുക്കറിയാം $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1.$

$n = 10,$ എന്നു കൊടുത്താൽ

$$\int ii^{10} = \frac{x^{10+1}}{10+1} + c = \frac{x^{11}}{11} + c$$

(ii) $\int \frac{1}{x^{10}} dx = \int x^{-10} dx = \frac{x^{-10+1}}{-10+1} + c = -\frac{1}{9x^9} + c$

(iii) $\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + c$

(iv) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2\sqrt{x} + c$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 187 14-02-2023 17:30:01

ഉദാഹരണം 11.2

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാകലം ചെയ്യുക.

(i) $\frac{1}{\cos^2 x}$ (ii) $\frac{\cot x}{\sin x}$ (iii) $\frac{\sin x}{\cos^2 x}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$

(ii) $\int \frac{\cot x}{\sin x} dx = \int \operatorname{cosec} x \cot x\, dx = -\operatorname{cosec} x + c$

(iii) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} . \frac{1}{\cos x} dx = \int \tan x \sec x\, dx = \sec x + c$

(iv) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \sin^{-1} x + c$

ഉദാഹരണം 11.3

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാകലം ചെയ്യുക.

(i) $\frac{1}{e^{-x}}$ (ii) $\frac{x^2}{x^3}$ (iii) $\frac{1}{x^3}$ (iv) $\frac{1}{1+x^2}$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\int \frac{1}{e^{-x}} dx = \int e^x dx = e^x + c$

(ii) $\int \frac{x^2}{x^3} dx = \int \frac{1}{x} dx = \log|x| + c$

(iii) $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + c = -\frac{1}{2x^2} + c$

(iv) $\int \frac{1}{1+x^2} dx =$ ü $^{1} x + c$

അഭ്യാസം 11.1

തന്നിട്ടുള്ളവ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാകലനം ചെയ്യുക:

(1) (i) x^{11} (ii) $\frac{1}{x^7}$ (iii) $\sqrt[3]{x^4}$ (iv) $(x^5)^{\frac{1}{8}}$

(2) (i) $\frac{1}{\sin^2 x}$ (ii) $\frac{\tan x}{\cos x}$ (iii) $\frac{\text{ü}\quad x}{\text{ü}\quad^2 x}$ (iv) $\frac{1}{\cos^2 x}$

(3) (i) 12^3 (ii) $\frac{x^{24}}{x^{25}}$ (iii) e^x

(4) (i) $(1+x^2)^{-1}$ (ii) $\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

11.4 $\int f(ax+b)dx$ എന്ന തരത്തിലുള്ള സമാകലങ്ങൾ

നമുക്കറിയാം

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(x-a)^{10}}{10}\right] = (x-a)^9 \Rightarrow \int (x-a)^9 dx = \frac{(x-a)^{10}}{10} + c$$

$$\frac{d}{dx}[\sin(x+k)] = \cos(x+k) \Rightarrow \int \cos(x+k)dx = \sin(x+k) + c$$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 188 14-02-2023 17:30:02

അനാശ്രിതചരം x നോട് ഒരു സ്ഥിരാങ്കം കൂട്ടുകയോ കുറയ്ക്കുകയോ ചെയ്താൽ അടിസ്ഥാന സൂത്രം മാറുകയില്ല എന്ന് വ്യക്തമായി.

എന്നാൽ

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{l}(e^{lx+m})\right] = e^{lx+m} \Rightarrow \int e^{lx+m}dx = \frac{1}{l}e^{(lx+m)} + c$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{a}\sin(ax+b)]\right] = \cos(ax+b) \Rightarrow \int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + c$$

അനാശ്രിതചരം x നെ ഒരു സ്ഥിരാങ്കം കൊണ്ട് ഗുണിച്ചാൽ അതിനെ x കൊണ്ട് ഹരിച്ചതിനുശേഷം അടിസ്ഥാന സൂത്രം പ്രയോഗിക്കാം.അതായത്

$$\int f(x)dx = g(x) + c, \text{ എങ്കിൽ } \int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}g(ax+b) + c$$

പ്രതിസ്ഥാപന രീതി ഉപയോഗിച്ച് മുകളിലുള്ള സൂത്രവാക്യത്തെ അനുമാനിക്കാം.

ഉദാഹരണം 11.4

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ മൂല്യം കാണുക.:

(i) $\int (4x+5)^6\,dx$ (ii) $\int \sqrt{(15-2x)}\,dx$ (iii) $\int \frac{1}{(3x+7)^4}dx$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\int (4x+5)^6\,dx = \frac{1}{4}\frac{(4x+5)^{6+1}}{6+1} = \frac{(4x+5)^7}{28} + c$

(ii) $\int \sqrt{(15-2x)}\,dx = \int (15-2x)^{\frac{1}{2}}\,dx = \left(\frac{1}{-2}\right)\frac{(15-2x)^{\frac{1}{2}+1}}{(1/2)+1} = -\frac{(15-2x)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$

(iii) $\int \frac{1}{(3x+7)^4}dx = \int (3x+7)^{-4}\,dx = \frac{1}{3}\frac{(3x+7)^{-4+1}}{-4+1} = -\frac{1}{9(3x+7)^3} + c$

ഉദാഹരണം 11.5

തന്നിട്ടുള്ളവയെ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാകലനം ചെയ്യുക:

(i) $\sin(2x\ +\ 4)$ (ii) $\sec^2(3+4x)$ (iii) $\text{cosec}(ax+b)\cot(ax+b)$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\int \sin(2x\ +\ 4)\,dx = \left(\frac{1}{2}\right)\left(-\cos(2x+4)\right) + c = -\frac{1}{2}\cos(2x+4) + c$

(ii) $\int \sec^2(3+4x)\,dx = \frac{1}{4}\tan(3+4x) + c$

(iii) $\int \text{cosec}(ax+b)\cot(ax+b)\,dx = \left(\frac{1}{a}\right)\left(-\text{cosec}(ax+b)\right) + c = -\frac{1}{a}\text{cosec}(ax+b) + c$

ഉദാഹരണം 11.6 താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാകലനം ചെയ്യുക:

(i) e^{3x} (ii) e^{5-4x} (iii) $\frac{1}{(3x-2)}$ (iv) $\frac{1}{(5-4x)}$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x} + c$ (ii) $\int e^{5-4x}\,dx = -\frac{e^{5-4x}}{4} + c$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 189 14-02-2023 17:30:08

(iii) $\int \frac{1}{(3x-2)}dx = \frac{1}{3}\log|(3x-2)|+c$ (iv) $\int \frac{1}{(5-4x)}dx = -\frac{1}{4}\log|(5-4x)|+c$

ഉദാഹരണം 11.7

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാകലനം ചെയ്യുക:

(i) $\frac{1}{1+(2x)^2}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{1-(9x)^2}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\int \frac{1}{1+(2x)^2}dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}(2x)+c$ (ii) $\int \frac{1}{\sqrt{1-(9x)^2}}dx = \frac{1}{9}\sin^{-1}(9x)+c$

(iii) $\int \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}}dx = \frac{1}{5}\sin^{-1}(5x)+c$

അഭ്യാസം 11.2

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഫലനങ്ങളെ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാകലനം ചെയ്യുക:

(1) (i) $(x+5)^6$ (ii) $\frac{1}{(2-3x)^4}$ (iii) $\sqrt{3x+2}$

(2) (i) $\sin 3x$ (ii) $\cos(5-11x)$ (iii) $\text{cosec}^2(5x-7)$

(3) (i) e^{3x-6} (ii) e^{8-7x} (iii) $\frac{1}{6-4x}$

(4) (i) $\sec^2\frac{x}{5}$ (ii) $\text{cosec}(5x+3)\cot(5x+3)$ (iii) $\sec(2-15x)\tan(2-15x)$

(5) (i) $\frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{1-81x^2}}$ (iii) $\frac{1}{1+36x^2}$

11.5 സമാകലങ്ങളുടെ ഗുണങ്ങൾ

(1) k ഒരു സ്ഥിര സംഖ്യയെങ്കിൽ $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$

(2) $\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

കുറിപ്പ് 11.1

മുകളിലുള്ള രണ്ട് ഗണങ്ങളും ഉൾപ്പെടുത്തി ഈ രീതിയിൽ വ്യക്തമാക്കാം.

$$\int (k_1f_1(x) \pm k_2f_2(x) \pm k_3f_3(x) \pm \cdots \pm k_nf_n(x))\,dx$$

$$= k_1\int f_1(x)dx \pm k_2\int f_2(x)dx \pm k_3\int f_3(x)dx \pm \cdots \pm k_n\int f_n(x)dx.$$

അതായത് പരിമിത എണ്ണങ്ങളുള്ള ഫലനങ്ങളുടെ രേഖീയ സംയോജനത്തിന്റെ സമാകലനം അവയുടെ സമാകലത്തിന്റെ രേഖീയ സംയോജനത്തിന് തുല്യമാണ്.

ഉദാഹരണം 11.8

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാകലം ചെയ്യുക:

(i) $5x^4$ (ii) $5x^2 - 4 + \frac{7}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$ (iii) $2\cos x - 4\sin x + 5\sec^2 x + \text{cosec}^2 x$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 190 14-02-2023 17:30:11

നിർദ്ധാരണം

(i) $\int 5x^4 dx = 5\int x^4 dx = 5\frac{x^{4+1}}{4+1} = 5\frac{x^5}{5} = x^5 + c.$

(ii) $\int\left(5x^2 - 4 + \frac{7}{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = 5\int x^2 dx - 4\int dx + 7\int\frac{1}{x}dx + 2\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx$

$= 5\frac{x^{2+1}}{2+1} - 4x + 7\log|x| + 2\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c$

$= \frac{5}{3}x^3 - 4x + 7\log|x| + 4\sqrt{x} + c$

(iii) $\int(2\cos x - 4\sin x + 5\sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x)dx$

$= 2\int\cos x\,dx - 4\int\sin x\,dx + 5\int\sec^2 x\,dx + \int\operatorname{cosec}^2 x\,dx$

$= 2\sin x + 4\cos x + 5\tan x - \cot x + c$

ഉദാഹരണം 11.9

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സമാകലങ്ങളുടെ മൂല്യം മാണുക.:

(i) $\frac{12}{(4x-5)^3} + \frac{6}{3x+2} + 16e^{4x+3}$ (ii) $\frac{15}{\sqrt{5x-4}} - 8\cot(4x+2)\operatorname{cosec}(4x+2)$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\int\left(\frac{12}{(4x-5)^3} + \frac{6}{3x+2} + 16e^{4x+3}\right)dx$

$= 12\int\frac{1}{(4x-5)^3}dx + 6\int\frac{1}{3x+2}dx + 16\int e^{4x+3}dx$

$= 12\left(\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{2(4x-5)^2}\right) + 6\left(\frac{1}{3}\right)\log|3x+2| + 16\left(\frac{1}{4}\right)e^{4x+3} + c$

$= -\frac{3}{2(4x-5)^2} + 2\log|3x+2| + 4e^{4x+3} + c.$

(ii) $\int\left(\frac{15}{\sqrt{5x-4}} - 8\cot(4x+2)\operatorname{cosec}(4x+2)\right)dx$

$= 15\int\frac{1}{\sqrt{5x-4}}dx - 8\int\cot(4x+2)\operatorname{cosec}(4x+2)\,dx$

$= 15\left(\frac{1}{5}\right)(2\sqrt{5x-4}) - 8\left(\frac{1}{4}\right)(-\operatorname{cosec}(4x+2)) + c$

$= 6\sqrt{5x-4} + 2\operatorname{cosec}(4x+2) + c.$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 191 14-02-2023 17:30:12

അഭ്യാസം 11.3

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാകലനം ചെയ്യുക.:

(1) $(x+4)^5+\frac{5}{(2-5x)^4}-\operatorname{cosec}^2(3x-1)$

(2) $4\cos(5-2x)+9e^{3x-6}+\frac{24}{6-4x}$

(3) $\sec^2\frac{x}{5}+18\cos 2x+10\sec(5x+3)\tan(5x+3)$

(4) $\frac{8}{\sqrt{1-(4x)^2}}+\frac{27}{\sqrt{1-9x^2}}-\frac{15}{1+25x^2}$

(5) $\frac{6}{1+(3x+2)^2}-\frac{12}{\sqrt{1-(3-4x)^2}}$

(6) $\frac{1}{3}\cos\left(\frac{x}{3}-4\right)+\frac{7}{7x+9}+e^{\frac{x}{5}+3}$

11.6 ലളിതമായ പ്രയോഗങ്ങൾ

ഇതുവരെ നാം x എന്നത് സമാകലനത്തിന്റെ ചരമായി ഉപയോഗിച്ചു. പലപ്പോഴും സമാകലനത്തിന് വ്യത്യസ്ത ചരങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കേണ്ടി വരും. ഉദാഹരണമായി ചലന സമവാക്യത്തിൽ അനാശ്രിതചരം സമയവും സമാകലനത്തിന്റെ ചരം t യും ആകുന്നു.

ഒരു വസ്തുവിന്റെ സ്ഥാനവും പ്രവേഗവും കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ത്വരണവും സമാനതലത്തിലുള്ള പ്രശ്നങ്ങളും കണക്കിലെടുക്കുമ്പോൾ സമാകലനം എങ്ങനെ ഉപയോഗിക്കുന്നുവെന്ന് ഈ വിഭാഗത്തിൽ ഞങ്ങൾ ചർച്ച ചെയ്യുന്നു. ഗണിതപരമായി ഇതിനർത്ഥം ഒരു ഫലനത്തിന്റെ അവകലജത്തിൽ നിന്ന് ആരംഭിച്ച് യഥാർത്ഥ ഫലനം കണ്ടെത്തണം എന്നതാണ്. നിരക്ക്, വളർച്ച, ക്ഷയം, നാമമാത്രമായ മാറ്റം, വ്യത്യാസപ്പെടുക, വർദ്ധിപ്പിക്കുക, എന്നീ സാധാരണ വാക്കുകൾ അവകലജത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 11.10

$f'(x)=3x^2-4x+5$ ഉം $f(1)=3$, ആണെങ്കിൽ $f(x)$ കണ്ടെത്തുക.

നിർദ്ധാരണം

തന്നിരിക്കുന്നത് $f'(x)=\frac{d}{dx}(f(x))=3x^2-4x+5$

x ആധാരമാക്കി ഇരുവശത്തും സമാകലനം ചെയ്താൽ

$$\int f'(x)\,dx=\int(3x^2-4x+5)\,dx$$

$$f(x)=x^3-2x^2+5x+c$$

സമാകലനത്തിന്റെ സ്ഥിരസംഖ്യ നിർണ്ണയിക്കാൻ തന്നിരിക്കുന്ന വിവരങ്ങൾ ഉപയോഗിക്കുക. $f(1)=3$

$$f(1)=3\Rightarrow 3=(1)^3-2(1)^2+5(1)+c\Rightarrow c=-1$$

അങ്ങനെ $f(x)=x^3-2x^2+5x-1$.

ഉദാഹരണം 11.11

ഒരു ട്രെയിൻ മധുരയിലിരുന്ന് കോയമ്പത്തൂരിലേയ്ക്ക് ഉച്ചകഴിഞ്ഞ് 3 മണിക്ക്, $v(t)=20t+50$ കിലോമീറ്റർ / മണിക്കൂർ എന്ന പ്രവേഗത്തിൽ സഞ്ചരിക്കുന്നു. ഇവിടെ t മണിക്കൂറിൽ കണക്കാക്കുന്നു. വൈകുന്നേരം 5 മണിവരെ ആ ട്രെയിൻ സഞ്ചരിച്ച ദൂരം കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

കലന പദാവലിയിൽ, പ്രവേഗം $v=\frac{ds}{dt}$ എന്നത് സമയത്തിനനുസരിച്ച് സ്ഥാനമാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് ഇവിടെ s എന്നത് അകലം. ട്രെയിനിന്റെ പ്രവേഗം നൽകിയിരിക്കുന്നത്,

$$v(t)=20t+50$$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 192 14-02-2023 17:30:14

അതായത് $\frac{ds}{dt} = 20t + 50$

അകല ഫലനത്തെ കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് അവകലജ ഫലനത്തെ സമാകലനം ചെയ്യുക.

അതായത്, $s = \int (20t + 50)\, dt$

$$s = 10t^2 + 50t + c$$

സമയം പൂജ്യമായിരുന്നാൽ ട്രെയിൻ സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരവും പൂജ്യമായിരിക്കും. പ്രാഥമിക നില $t = 0$ എങ്കിൽ $s = 0$ എന്നു ഉപയോഗിച്ച് സമാകലന സ്ഥിരസംഖ്യ c യുടെ മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കാം

$$\Rightarrow s = 10t^2 + 50t + c \quad \Rightarrow c = 0$$

അതായത്, $s = 10t^2 + 50t$

2 മണിക്കൂറിൽ ട്രെയിൻ സഞ്ചരിക്കുന്ന ദൂരം കാണാൻ മുകളിലുള്ള സമവാക്യത്തിൽ $t = 2$ എന്നു പ്രതിയിടുക

$$s = 10(2)^2 + 50(2) = 140 \text{ km.}$$

ഉദാഹരണം 11.12

ഒരു വ്യക്തിയുടെ ഉയരം h സെന്റീമീറ്റർ കൂടാതെ ഭാരം w കിലോ ഗ്രാം അവരുടെ ഭാരത്തിന്റെ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് ഉയരത്തിനനുസരിച്ച് ഏകദേശം $\frac{dw}{dh} = 4.364 \times 10^{-5} h^2$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്. ഭാരത്തെ ഉയരത്തിന്റെ ഏകദത്തിൽ കണ്ടുപിടിക്കുക. കൂടാതെ 150 സെന്റീമീറ്റർ ഉയരമുള്ള ഒരു വ്യക്തിയുടെ ഭാരം കണ്ടുപിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം

ഉയരത്തിനനുസരിച്ച് ഭാരത്തിന്റെ നിരക്ക്

$$\frac{dw}{dh} = 4.364 \times 10^{-5} h^2$$

$$w = \int 4.364 \times 10^{-5} h^2 \, dh$$

$$w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{h^3}{3} \right) + c$$

ഉയരം പൂജ്യമാകുമ്പോൾ ഒരു വ്യക്തിയുടെ ഭാരം പൂജ്യമാണെന്ന് ഒരാൾക്ക് വ്യക്തമായി മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിയും.

പ്രാരംഭനില $h = 0$, എങ്കിൽ $w = 0$, എന്നത് മുകളിലുള്ള സമവാക്യത്തിൽ പ്രതിയിട്ടാൽ സമാകലനത്തിന്റെ സ്ഥിരസംഖ്യ c യുടെ മൂല്യം കണ്ടെത്താം

$$w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{h^3}{3} \right) + c \Rightarrow c = 0$$

ഒരു വ്യക്തിയുടെ ഭാരത്തിനും ഉയരത്തിനും ഇടയ്ക്കുള്ള ആവശ്യമായ ബന്ധം എന്നത്

$$w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{h^3}{3} \right)$$

ഉയരം h =150cm,

$$w = 4.364 \times 10^{-5} \left(\frac{150^3}{3} \right)$$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 193 14-02-2023 17:30:14

h = 150 സെന്റീമീറ്റർ ആയിരിക്കുമ്പോൾ ഭാരം $w = 49$. കിലോഗ്രാം (ഏകദേശമായി) അതായത് ഒരു വ്യക്തിയുടെ ഉയരം 150 സെന്റീമീറ്റർ ആയിരിക്കുമ്പോൾ ഭാരം 49 കിലോഗ്രാമാണ്.

ഉദാഹരണം 11.13

ഒരു വൃക്ഷത്തിന്റെ വളർച്ച t വർഷങ്ങളിൽ $\frac{18}{\sqrt{t}}$ സെന്റീമീറ്റർ/വർഷം എന്ന നിരക്കിൽ വർദ്ധിക്കുന്നു.

$t = 0$, എങ്കിൽ ഉയരം 5 സെന്റീമീറ്റർ എന്നു കരുതുക.

(i) 4 വർഷങ്ങൾക്ക് ശേഷമുള്ള മരത്തിന്റെ ഉയരം കാണുക.

(ii) എത്ര വർഷങ്ങൾക്കു ശേഷം മരത്തിന്റെ ഉയരം 149 സെന്റീമീറ്റർ ആകും?

നിർദ്ധാരണം

സമയം t യുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ഉയരം h ന്റെ മാറ്റനിരക്ക് എന്നത് t യുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ h ന്റെ അവകലജമാണ്.

$$\text{അതിനാൽ, } \frac{dh}{dt} = \frac{18}{\sqrt{t}} = 18t^{-\frac{1}{2}}$$

ഉയരത്തിന്റെ പൊതു രൂപം ലഭിക്കുന്നതിനെ മുകളിലുള്ള സമവാക്യത്തെ സമാകലനം ചെയ്യുക.

$$h = \int 18t^{-\frac{1}{2}}dt = 18(2t^{\frac{1}{2}}) + c = 36\sqrt{t} + c$$

$t = 0$, ആയിരിക്കുമ്പോൾ ഉയരം h = 5 cm.

$$5 = 0 + c \Rightarrow c = 5$$

$$h = 36\sqrt{t} + 5.$$

(i) 4 വർഷത്തിനു ശേഷം മരത്തിന്റെ ഉയരം കണ്ടെത്തുന്നതിന്.

When t = 4 വർഷം,

$$h = 36\sqrt{t} + 5 \Rightarrow h = 36\sqrt{4} + 5 = 77$$

4 വർഷത്തിനുശേഷം മരത്തിന്റെ ഉയരം 77 സെന്റീമീറ്റർ

(ii) $$h = 149\text{cm}$$

$$h = 36\sqrt{t} + 5 \Rightarrow 149 = 36\sqrt{t} + 5$$

$$\sqrt{t} = \frac{149 - 5}{36} = 4 \Rightarrow t = 16$$

അങ്ങനെ 16 വർഷത്തിനു ശേഷം മരത്തിന്റെ ഉയരം 149 സെന്റീമീറ്റർ ആകും.

ഉദാഹരണം 11.14

ഒരു പ്രത്യേക സാഹചര്യത്തിൽ ഒരു വിദ്യാർത്ഥി തന്റെ വേഗതയേറിയ ബൈക്ക് 40 മീറ്റർ അകലെയുള്ള തടസ്സവുമായി കൂട്ടിയിക്കുന്നത് ഒഴിവാക്കാൻ 8 മീറ്റർ / സെക്കന്റ്^{2} എന്ന നിരക്കിൽ ബ്രേക്ക് പ്രയോഗിച്ച് ബൈക്കിന്റെ വേഗത കുറയ്ക്കുന്നു. ബൈക്ക് 24 മീറ്റർ/സെക്കന്റ് വേഗതയിൽ സഞ്ചരിക്കുകയാണെങ്കിൽ ബ്രേക്ക് പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ കൂട്ടിയിടിക്കു മുമ്പ് അത് നിറുത്താനാകുമോ?

നിർദ്ധാരണം

ബൈക്കിന്റെ ത്വരണം a, പ്രവേഗം v, ദൂരം s എന്നിരിക്കട്ടെ.

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 194 14-02-2023 17:30:19

കലനപദാവലിപ്രസ്താവനമൂലംപ്രവേഗം, $v = \frac{ds}{dt}$, എന്നത് സമയത്തിനനുസരിച്ച്സ്ഥാനമാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക് ത്വരണം, $a = \frac{dv}{dt}$, എന്നത് സമയത്തിനനുസരിച്ച് പ്രവേഗ മാറ്റത്തിന്റെ നിരക്ക്

ബൈക്കിന്റെ വേഗത കുറയ്ക്കുമ്പോൾ അതിന്റെ ത്വരണം ചലനദിശയുടെ എതിർദിശയിലായിരിക്കും. അതുകൊണ്ട് ത്വരണത്തെ നെഗറ്റീവ് ചിഹ്നത്തിലെഴുതാം.
ബൈക്കിന്റെ എതിർ ത്വരണം 8 മീറ്റർ/സെക്കന്റ്^{2} എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

അതുകൊണ്ട് $a = \frac{dv}{dt} = -8$ മീറ്റർ/സെക്കന്റ്^{2}

അതായത്, $v = \int a\,dt = \int -8dt = -8t + c_1$

$v = -8t + c_1.$

ബ്രേക്ക് പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ

$t = 0$, കൂടാതെ $v = 24$m/s.

അതുകൊണ്ട്, $24 = -8(0) + c_1 \Rightarrow c_1 = 24$

അതിനാൽ, $v = -8t + 24.$

അതായത്, $\frac{ds}{dt} = -8t + 24.$

ദൂരം കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന് ഒരിക്കൽകൂടി സമാകലനം കാണേണ്ടതാണ്.

$$s = \int v\,dt = \int (-8t + 24)dt$$

$$s = -4t^2 + 24t + c_2$$

c_2, കണ്ടുപിടിക്കുന്നതിന്, ബ്രേക്ക് എവിടെ ഉപയോഗിക്കുന്നുവോ അവിടെയിരുന്ന് നിറുത്തുന്ന ദൂരം s യെ അളക്കുന്നു. അതായത് $t = 0$, $s = 0$ എങ്കിൽ

$$s = -4t^2 + 24t + c_2 \Rightarrow 0 = -4(0)^2 + 24(0) + c_2 \Rightarrow c_2 = 0$$

$$s = -4t^2 + 24t$$

ബ്രേക്ക് പ്രയോഗിച്ച ശേഷം ബൈക്ക് നിർത്തുന്ന സമയം അറിഞ്ഞിരുന്നാൽ നിർത്തുന്ന ദൂരത്തെ കണ്ടുപിടിക്കാം. വേഗത പ്രസ്താവനയിലിരുന്ന് സമയം കണ്ടുപിടിക്കാം.

ബൈക്ക് നിർത്തുമ്പോൾ $v = 0$, $\Rightarrow v = -8t + 24 \Rightarrow 0 = -8t + 24 \Rightarrow t = 3.$ ആകുന്നു.
അതിനാൽ

$$s = -4t^2 + 24t \Rightarrow s = -4(3)^2 + 24(3)$$

$$s = 36 \text{ മീറ്റർ} < 40 \text{ മീറ്റർ}$$

ബൈക്ക് തടസ്സത്തിന് 4 മീറ്റർ മുമ്പേ നിൽക്കും.

അഭ്യാസം 11.4

(1) $f'(x) = 4x - 5$ കൂടാതെ $f(2) = 1$, എങ്കിൽ $f(x)$. കാണുക

(2) $f'(x) = 9x^2 - 6x$ കൂടാതെ $f(0) = -3$, എങ്കിൽ $f(x)$. കാണുക

(3) $f''(x) = 12x - 6$ കൂടാതെ $f(1) = 30$, $f'(1) = 5$ എങ്കിൽ $f(x)$. കാണുക

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 195 14-02-2023 17:30:26

(4) ഒരു പന്ത് 39.2 മീറ്റർ /സെക്കന്റ് പ്രാരംഭ പ്രവേഗത്തിൽ നിലത്തിലിരുന്ന് മുകളിലേയ്ക്ക് ലംബമായി എറിയുന്നു. ഗുരുത്വാകർഷണംമൂലമുള്ള ത്വരണം കണക്കാക്കുമ്പോൾ

(i) പന്ത് നിലത്ത് വീഴാൻ എത്ര സമയമെടുക്കും?

(ii) ഏത് വേഗതയിൽ പന്ത് നിലത്ത് വീഴും

(iii) പന്ത് എത്ര ഉയരത്തിൽ ഉയരും, എന്നിവ കണ്ടുപിടിക്കുക?

(5) ഒരു വ്യക്തിക്ക് ഉണ്ടായ മുറിവ് t ദിവസങ്ങളിൽ സുഖമാകുന്നു. ഞായറാഴ്ച മുതൽ $-\frac{6}{(t+2)^2}$ സെന്റീമീറ്റർ/ദിവസം, $0<t\leq 8$ എന്ന നിരക്കിൽ മുറിവിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം കുറയുന്നു. തിങ്കളാഴ്ച മുറിവിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം 1.4 ചതുരശ്ര സെന്റീമീറ്റർ എങ്കിൽ

(i) ഞായറാഴ്ച മുറിവിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം എന്തായിരിക്കും?

(ii) ഇതേ നിരക്കിൽ സുഖപ്പെടുന്നത് തുടരുമ്പോൾ വ്യാഴാഴ്ച, പ്രതീക്ഷിക്കുന്ന മുറിവിന്റെ വിസ്തീർണ്ണം എന്താണ്?

11.7 സമാകലനത്തിന്റെ രീതികൾ

അവകലനത്തെ പോലെ സമാകലനം അത്ര എളുപ്പമല്ല. അവകലനത്തിന്റെ സൃഷ്ടിപരമായ സ്വഭാവം തന്നിരിക്കുന്ന ഫലനത്തിന്റെ അവകലജം കണ്ടെത്തുന്നത് സുഗമമാക്കുന്നു അവകലജം ലളിതമായി നിർവ്വചിക്കപ്പെടുന്നു

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ഈ വിശദാംശങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച് $\log x$ ന്റെ അവകലജം കണ്ടെത്താനുള്ള രീതികൾ നമുക്കറിയാം. എന്നാൽ $\log x$ ന്റെ സമാകലനം കണ്ടെത്താൻ ആവശ്യമായ ക്രിയാത്മക രീതി നമുക്കില്ല.

അവകലനത്തിൽ, അതിന്റെ നിയമങ്ങളുപയോഗിച്ച് വിവിധ ഏകദങ്ങളുടെ തുക, ഗുണനം, ഹരണം, ഏകദങ്ങളുടെ സംയോജനം എന്നിവയുടെ അവകലജം കണ്ടെത്താം.

സമാകലന സിദ്ധാന്തത്തിൽ അത്തരം നിയമങ്ങൾ വളരെ കുറച്ച് മാത്രമേ ലഭ്യമാകൂ.

അവയുടെ പ്രയോഗം പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നു. എന്നാൽ ഈ സമാകലന രീതികളുടെ പ്രാധാന്യം വളരെ വലുതാണ്.

എല്ലാ സാഹചര്യങ്ങളിലും ഏറ്റവും അനുയോജ്യമായ രീതി തെരഞ്ഞെടുത്ത് ഏറ്റവും സൗകര്യപ്രദമായി ഉപയോഗിക്കാൻ നീണ്ട പരശീലനത്തിനു ശേഷം മാത്രമേ കഴിയൂ.

സമാകലനത്തിന്റെ രണ്ട് പ്രധാന സവിശേഷതകൾ ഇതിനകം ഞങ്ങൾ പഠിച്ചു. സമാകലനത്തിന്റെ 4 പ്രധാന രീതികൾ ഇനിപ്പറയുന്നവയാണ്.

(1) തുകയോ വ്യത്യാസമോ ആയി വിഘടിപ്പിക്കുന്നതിലൂടെ സമാകലനം

(2) പ്രതിസ്ഥാപന രീതിയിൽ സമാകലനം

(3) ഭാഗങ്ങളിനാൽ സമാകലണം

(4) തുടർച്ചയായി ചുരുക്കുന്നതിലൂടെ സമാകലനം

സമാകലനത്തിന്റെ ആദ്യ മൂന്ന് രീതികൾ മാത്രമാണ് ഇവിടെ ചർച്ച ചെയ്യുന്നത്. മറ്റൊന്ന് ഉയർന്ന ക്ലാസുകളിൽ പഠിക്കാം.

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 196 14-02-2023 17:30:27

11.7.1 വിഘടിപ്പിക്കൽ രീതി

തന്നിരിക്കുന്ന ഫലനത്തെ നേരിട്ട് സമാകലനം ചെയ്യുന്നത് ചിലപ്പോൾ വളരെ ബുദ്ധിമുട്ടാണ്. എന്നാൽ സമാകലനം അറിയാവുന്ന ഫലനങ്ങളുടെ തുകയോ വ്യത്യാസമോ ആയി വിഘടിപ്പിച്ച് സമാകലനം കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഉദാഹരണത്തിന് $\left(1-x^3\right)^2$, $\frac{x^2-x+1}{x^3}$, $\cos 5x \sin 3x$, $\cos^3 x$, $\frac{e^{2x}-1}{e^x}$, എന്നിവയുടെ സമാകലനത്തിന് നേരിട്ടുള്ള സൂത്രവാക്യമില്ല. എന്നാൽ ഈ ഫലനങ്ങളെ വ്യക്തിഗത സമാകലനം അറിയാവുന്ന ഫലനങ്ങളുടെ തുകയോ വ്യത്യാസമോ ആയി വിഘടിപ്പിക്കാം. പലപ്പോഴും തന്നിരിക്കുന്ന സമാകല്യം, ബീജഗണിതം, ത്രികോണമിതി, ഘാതാങ്ക രൂപങ്ങൾ അല്ലെങ്കിൽ ഈ ഫലനങ്ങളുടെ സംയോജനം ഇവയിൽ ഏതെങ്കിലും ഒന്നായിരിക്കും.

ഉദാഹരണം 11.15

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാകലനം ചെയ്യുക:

(i) $\left(1-x^3\right)^2$ (ii) $\frac{x^2-x+1}{x^3}$

നിർദ്ധാരണം

(i)
$$\begin{aligned}\int\left(1-x^3\right)^2 dx &= \int(1-2x^3+x^6)dx\\ &= \int dx-2\int x^3dx+\int x^6dx\\ &= x-\frac{x^4}{2}+\frac{x^7}{7}+c.\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}\int\frac{x^2-x+1}{x^3}dx &= \int(\frac{x^2}{x^3}-\frac{x}{x^3}+\frac{1}{x^3})\,dx\\ &= \int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x^2}dx+\int\frac{1}{x^3}dx.\end{aligned}$$

$$\int\frac{x^2-x+1}{x^3}dx = \log|x|+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+c.$$

ഉദാഹരണം 11.16

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാകലനം ചെയ്യുക:

(i) $\cos 5x \sin 3x$ (ii) $\cos^3 x$.

നിർദ്ധാരണം

(i)
$$\begin{aligned}\int\cos 5x\sin 3x\,dx &= \frac{1}{2}\int 2\cos 5x\sin 3x\,dx\\ &= \frac{1}{2}\int(\sin 8x-\sin 2x)\,dx\end{aligned}$$

$$\int\cos 5x\sin 3x\,dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 8x}{8}+\frac{\cos 2x}{2}\right)+c.$$

(ii)
$$\begin{aligned}\int\cos^3 x\,dx &= \frac{1}{4}\int(3\cos x+\cos 3x)\,dx\\ &= \frac{1}{4}\left(3\sin x+\frac{\sin 3x}{3}\right)+c\end{aligned}$$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 197 14-02-2023 17:30:28

ഉദാഹരണം 11.17

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാകലനം ചെയ്യുക.:

(i) $\frac{e^{2x}-1}{e^x}$ (ii) $e^{3x}\left(e^{2x}-1\right)$.

നിർദ്ധാരണം

(i)
$$\int \frac{e^{2x}-1}{e^x}dx = \int\left(\frac{e^{2x}}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)dx$$
$$= \int\left(e^x-e^{-x}\right)dx = e^x+e^{-x}+c.$$

(ii)
$$\int e^{3x}\left(e^{2x}-1\right)dx = \int\left(e^{5x}-e^{3x}\right)dx = \frac{e^{5x}}{5}-\frac{e^{3x}}{3}+c.$$

ഉദാഹരണം 11.18

മൂല്യം കാണുക : $\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx.$

നിർദ്ധാരണം

$$\int \frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$$
$$= \int \frac{1}{\cos^2 x}dx+\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$$
$$= \int \sec^2 x dx+\int \operatorname{cosec}^2 x dx$$
$$= \tan x-\cot x+c.$$

ഉദാഹരണം 11.19

മൂല്യം കാണുക: $\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx.$

നിർദ്ധാരണം

$$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}dx = \int\left(\frac{\sin x}{1+\sin x}\right)\left(\frac{1-\sin x}{1-\sin x}\right)dx$$
$$= \int \frac{\sin x-\sin^2 x}{1-\sin^2 x}dx = \int \frac{\sin x-\sin^2 x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx-\int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx$$
$$= \int \tan x\sec x dx-\int \tan^2 x dx$$
$$= \int \tan x\sec x dx-\int (\sec^2 x-1)dx$$
$$= \sec x-\tan x+x+c.$$

ഉദാഹരണം 11.20

മൂല്യം കാണുക : $\int \sqrt{1+\cos 2x}\,dx.$

നിർദ്ധാരണം

$$\int \sqrt{1+\cos 2x}\,dx = \int \sqrt{2\cos^2 x}\,dx = \sqrt{2}\int \cos x dx = \sqrt{2}\sin x+c$$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 198 14-02-2023 17:30:29

ഉദാഹരണം 11.21

മൂല്യം കാണുക : $\int \frac{(x-1)^2}{x^3+x}\,dx.$

നിർദ്ധാരണം

$$\begin{aligned}\int \frac{(x-1)^2}{x^3+x}\,dx &= \int \frac{x^2+1-2x}{x(x^2+1)}\,dx \\ &= \int\left(\frac{(x^2+1)}{x(x^2+1)}-\frac{2x}{x(x^2+1)}\right)dx \\ &= \int \frac{1}{x}\,dx-2\int \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= \log|x|-2\tan^{-1}x+c.\end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 11.22

മൂല്യം കാണുക : $\int(\tan x+\cot x)^2\,dx.$

നിർദ്ധാരണം

$$\begin{aligned}\int(\tan x+\cot x)^2\,dx &= \int[\tan^2 x+2\tan x\cot x+\cot^2 x]\,dx \\ &= \int[(\sec^2 x-1)+2+(\operatorname{cosec}^2 x-1)]\,dx \\ &= \int(\sec^2 x+\operatorname{cosec}^2 x)\,dx \\ &= \tan x+(-\cot x)+c \\ &= \tan x-\cot x+c.\end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 11.23

മൂല്യം കാണുക: $\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx.$

നിർദ്ധാരണം

$$\begin{aligned}\int \frac{1-\cos x}{1+\cos x}\,dx &= \int \frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}\,dx=\int \tan^2\frac{x}{2}\,dx \\ &= \int\left(\sec^2\frac{x}{2}-1\right)dx=\frac{\tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{2}}-x+c \\ &= 2\tan\frac{x}{2}-x+c.\end{aligned}$$

ഉദാഹരണം 11.24

മൂല്യം കാണുക : $\int\sqrt{1+\sin 2x}\,dx.$

നിർദ്ധാരണം

$$\int\sqrt{1+\sin 2x}\,dx = \int\sqrt{(\cos^2 x+\sin^2 x)+(2\sin x\cos x)}\,dx$$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 199 14-02-2023 17:30:29

$$= \int \sqrt{(\cos x + \sin x)^2}\, dx = \int (\cos x + \sin x) dx$$

$$= \sin x - \cos x + c$$

ഉദാഹരണം 11.25

മൂല്യംകാണുക : $\int \frac{x^3+2}{x-1} dx.$

നിർദ്ധാരണം

$$\int \frac{x^3+2}{x-1} dx = \int \frac{x^3-1+3}{x-1} dx = \int \left(\frac{x^3-1}{x-1} + \frac{3}{x-1} \right) dx$$

$$= \int \left[\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} + \frac{3}{x-1} \right] dx$$

$$= \int \left(x^2 + x + 1 + \frac{3}{x-1} \right) dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 3\log|(x-1)| + c.$$

ഉദാഹരണം 11.26

മൂല്യംകാണുക : (i) $\int a^x e^x dx$ (ii) $\int e^{x\log 2} e^x\, dx.$

നിർദ്ധാരണം

(i) $$\int a^x e^x dx = \int (ae)^x dx = \frac{(ae)^x}{\log(ae)} + c$$

(ii) $$\int e^{x\log 2} e^x dx = \int e^{\log 2^x} e^x dx = \int 2^x e^x dx$$

$$= \int (2e)^x dx = \frac{(2e)^x}{\log(2e)} + c.$$

ഉദാഹരണം 11.27

മൂല്യംകാണുക : $\int (x-3)\sqrt{x+2}\, dx.$

നിർദ്ധാരണം

$$\int (x-3)\sqrt{x+2}\, dx = \int (x+2-5)\sqrt{x+2}\, dx$$

$$= \int (x+2)\sqrt{x+2}\, dx - 5\int \sqrt{x+2}\, dx$$

$$= \int (x+2)^{\frac{3}{2}} dx - 5\int (x+2)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \frac{(x+2)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 5\frac{(x+2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{10}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + c.$$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 200 14-02-2023 17:30:31

ഉദാഹരണം 11.28

മൂല്യംകാണുക : $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,dx.$

നിർദ്ധാരണം

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}\left[\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\right]dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x+1}^{2}\right)-\left(\sqrt{x}\right)^{2}}\,dx$$

$$= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{x+1-x}\,dx = \int\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)dx$$

$$= \int \sqrt{x+1}\,dx - \int \sqrt{x}\,dx = \int (x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx - \int x^{\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \frac{(x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{3}\left[(x+1)^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right] + c.$$

11.7.2 ഭാഗിക ഭിന്നസംഖ്യാ രൂപത്തിൽ വിഘടനം

സമാകലനം വിലയിരുത്തുന്നതിനുള്ള ഒരു പ്രധാന മാർഗ്ഗം ഭാഗിക ഭിന്നസംഖ്യകളാണ്. സമാകലനം ഒരു ബീജഗണിത ഭിന്നസംഖ്യയുടെ രൂപത്തിലാണെങ്കിൽ ലളിതമായ രീതികളിലൂടെ സമാകലനത്തെ വിലയിരുത്താൻ കഴിയുന്നില്ലെങ്കിൽ സമാകലനം കാണുന്നതിനു മുമ്പ് ആ ഭിന്ന സംഖ്യകളെ ഭാഗിക ഭിന്ന സംഖ്യകളാക്കി മാറ്റേണ്ടതാണ്. പരിമേയ ഫലനം $\frac{p(x)}{q(x)}$, $\left(q(x)\neq 0\right)$ അതിന്റെ കൃതി $p\,(x) < q\,(x)$ അങ്ങനെയല്ലങ്കിൽ അതിനെ ഭാഗിച്ച് ഭാഗിക ഭിന്നങ്ങളാക്കി മാറ്റി സമകലനം കാണേണ്ടതാണ്.

ഉദാഹരണം 11.29

മൂല്യം കാണുക : (i) $\int \frac{3x+7}{x^2-3x+2}\,dx$ (ii) $\int \frac{x+3}{(x+2)^2(x+1)}\,dx.$

നിർദ്ധാരണം

(i) $$\int \frac{3x+7}{x^2-3x+2}\,dx = \int \frac{13}{x-2}\,dx - \int \frac{10}{x-1}\,dx$$ ഭാഗിക ഭിന്നങ്ങളാക്കി മാറ്റുക

$$= 13\log\left|ü-2\right| - 10\log\left|\ -1\right| +$$

(ii) $$\int \frac{x+3}{(x+2)^2(x+1)}\,dx = \int \frac{-2}{x+2}\,dx - \int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx + \int \frac{2}{x+1}\,dx$$ ഭാഗിക ഭിന്നങ്ങളാക്കി മാറ്റുക

$$= -2\int \frac{1}{x+2}\,dx - \int \frac{1}{(x+2)^2}\,dx + 2\int \frac{1}{x+1}\,dx$$

$$= -2\log\left|x+2\right| - \int (x+2)^{-2}\,dx + 2\log\left|x+1\right| + c$$

$$= -2\log\left|x+2\right| + \frac{1}{x+2} + 2\log|\,x+1\,| + c.$$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 201 14-02-2023 17:30:33

അഭ്യാസം 11.5

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഫലനങ്ങളെ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാകലം ചെയ്യുക:

(1) $\dfrac{x^3+4x^2-3x+2}{x^2}$ (2) $\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$ (3) $(2x-5)(36+4x)$

(4) $\cot^2 x+\tan^2 x$ (5) $\dfrac{\cos 2x-\cos 2\alpha}{\cos x-\cos\alpha}$ (6) $\dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}$

(7) $\dfrac{3+4\cos x}{\sin^2 x}$ (8) $\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos x}$ (9) $\dfrac{\sin 4x}{\sin x}$

(10) $\cos 3x\cos 2x$ (11) $\sin^2 5x$ (12) $\dfrac{1+\cos 4x}{\cot x-\tan x}$

(13) $e^{x\log a}e^x$ (14) $(3x+4)\sqrt{3x+7}$ (15) $\dfrac{8^{1+x}+4^{1-x}}{2^x}$

(16) $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{x-4}}$ (17) $\dfrac{x+1}{(x+2)(x+3)}$ (18) $\dfrac{1}{(x-1)(x+2)^2}$

(19) $\dfrac{3x-9}{(x-1)(x+2)(x^2+1)}$ (20) $\dfrac{x^3}{(x-1)(x-2)}$

11.7.3 പ്രതിയിടുന്ന രീതി അല്ലെങ്കിൽ ചരത്തെ മാറ്റി രൂപീകരിക്കുന്ന രീതി

സമാകലനത്തിൽ പ്രതിയിടുന്ന രീതി എന്നത് അവകലനത്തിൽ ഫലനങ്ങളുടെ ഫലനങ്ങൾക്ക് അവകലജം കണ്ടെത്തുന്നതിന് സമാനമാണ്. അനുയോജ്യമായ പ്രതിയിടലിനെ ഉപയോഗിച്ച് സമാകലനത്തിന്റെ ചരത്തെ പുതിയ ചരമായി മാറ്റി എളുപ്പത്തിൽ സമാകലനം ചെയ്യാം.

u എന്നത് x ന്റെ ഒരു ഫലനമാണെങ്കിൽ $\dfrac{du}{dx}=u'$ എന്ന് നമുക്കറിയാം.

അതുകൊണ്ട് $\int f(u)u'dx=\int f(u)du$ എന്ന് എഴുതാം. അതിനാൽ

$\int f[g(x)]g'(x)dx=\int f(u)du$, ഇവിടെ $u=g(x)$

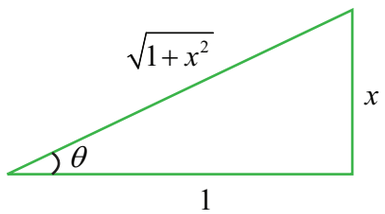
$x=\phi(u)$ അല്ലെങ്കിൽ $u=g(x)$ എന്ന അനുയോജ്യമായ പ്രതിയിടലിനെ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിന് അനുസരിച്ച് മുകളിലുള്ള രീതി എളുപ്പമാകുന്നു.

കുറിപ്പ് 11.2

സമാകലന ചരത്തിന്റെ പ്രതിയിടൽ ത്രികോണമിതി ഫലനത്തിലായിരുന്നാൽ അതിന്റെ വീണ്ടും പ്രതിയിടൽ മൂല്യം കണ്ടുപിടിക്കാൻ മാതൃകാ ചിത്രം ഉപയോഗിക്കുക. സമാകലനത്തിന് ശേഷം നിർദ്ധാരണം $\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta$ എന്ന് കരുതുക. ഉദാഹരണത്തിന്, $x=\tan\theta$. എങ്കിൽ ചിത്രത്തിലിരുന്ന്

$$\operatorname{cosec}\theta=\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right),$$

$$\sec\theta=\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{1}\right)$$



$$\sec\theta+\operatorname{cosec}\theta=\sqrt{1+x^2}+\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right).$$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 202 14-02-2023 17:30:37

ഉദാഹരണം 11.30

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന സമാകലങ്ങളുടെ മൂല്യം കാണുക. :

(i) $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$ (ii) $\int e^{-x^2}x\,dx$ (iii) $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx$

(iv) $\int \frac{1}{1+x^2}dx$ (v) $\int x(a-x)^8\,dx$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx$

$1+x^2=u$, എങ്കിൽ $2x\,dx=du$

$$\int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{u}\,du$$

$$= \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+c\,.$$

(ii) $\int e^{-x^2}xdx$

$x^2=u$ എങ്കിൽ $2x\,dx=du$

അതിനാൽ, $\int e^{-x^2}x\,dx = \int e^{-u}\frac{du}{2}$

$$= \frac{1}{2}\int e^{-u}du = \frac{1}{2}(-e^{-u})+c = -\frac{1}{2}e^{-u}+c = -\frac{1}{2}e^{-x^2}+c.$$

(iii) $\int \frac{\text{ü}\quad x}{1+\cos x}dx$

$1+\cos x=u$, എങ്കിൽ $-\sin x\,dx=du$

അതിനാൽ $\int \frac{\sin x}{1+\cos x}dx = \int \frac{-du}{u} = -\log|u|+c = -\log|1+\cos x|+c.$

(iv) $\int \frac{1}{1+x^2}dx$

$x=\tan u$, എങ്കിൽ $dx=\sec^2 u\,du$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \int \frac{\sec^2 u}{1+\tan^2 u}du = \int \frac{\sec^2 u}{\sec^2 u}du = \int du = u+c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}x+c.$$

(v) $\int x(a-x)^8\,dx$

$u=a-x$, എങ്കിൽ $du=-dx$

$$\int x(a-x)^8\,dx = \int x(a-x)^8\,dx$$

$$= \int (a-u)(u)^8(-du)$$

$$= \int \left(-a(u)^8+u^9\right)du$$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 203 14-02-2023 17:30:45

$$= \int u^9 du - a\int u^8 du$$

$$= \frac{u^{10}}{10} - a\frac{u^9}{9} + c$$

$$\int x(a-x)^8\, dx = \frac{(a-x)^{10}}{10} - \frac{a(a-x)^9}{9} + c.$$

11.7.4 പ്രധാന ഫലങ്ങൾ

(1) $$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| + c$$

(2) $$\int f'(x)[f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$$

തെളിവ്

(1) $I = \int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$f(x) = u$ എങ്കിൽ $f'(x)dx = du$

$I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c$ ആയതുകൊണ്ട്

അതിനാൽ, $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \log|f(x)| \quad c.$

(2) $I = \int f'(x)[f(x)]^n dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$f(x) = u$ എങ്കിൽ $f'(x)dx = du$

$I = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$ ആയതുകൊണ്ട്

അതിനാൽ $\int f'(x)[f(x)]^n dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c.$

ഉദാഹരണം 11.31

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാകലനം ചെയ്യുക.

(i) $\int \tan x\, dx$ (ii) $\int \cot x\, dx$ (iii) $\int \text{cosec}\, ü$ (iv) $\int \sec x\, dx$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\therefore I = \int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$\cos x = u$ എങ്കിൽ $-\sin x\, dx = du$

അതുകൊണ്ട് $I = \int -\frac{1}{u}du = -\log|u| + c = -\log|\cos x| + c = \log|\sec x| + c.$

(ii) $I = \int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$\sin x = u$ എങ്കിൽ $\cos x\, dx = du$

അതുകൊണ്ട് $I = \int \frac{1}{u}du = \log|u| + c = \log|\sin x| + c.$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 204 14-02-2023 17:30:53

(iii) $I = \int \text{cosec}\, x dx = \dfrac{\int \text{cosec}\, x(\text{cosec}\, x - \cot x)}{\text{cosec}\, x - \cot x} dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$$= \int \frac{\text{cosec}^2 x - \text{cosec} x \cot x}{\text{cosec} x - \cot x} dx$$

$\text{cosec}\, x - \cot x = u$, എങ്കിൽ $(\text{cosec}^2 x - \text{cosec}\, x\ \cot x)\, dx = du$

അതുകൊണ്ട് $I = \int \frac{1}{u} du = \log|u| + c = \log|\text{cosec} x - \cot x| + c.$

(iv) $I = \int \sec x dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x} dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$\sec x + \tan x = u$, എങ്കിൽ $(\sec^2 x + \sec x \tan x)\, dx = du$

അതുകൊണ്ട് $I = \int \frac{1}{u} du = \log|u| + c = \log|\sec x + \tan x| + c$

$\int \sec x dx = \log|\sec x + \tan x| + c.$

അങ്ങനെ പ്രധാനപ്പെട്ട അടിസ്ഥാന ഫലങ്ങൾ ഇനിപ്പറയുന്നവയാണ്.

(1)	$\int \tan x\, dx = \log\|\sec x\| + c$
(2)	$\int$ ü $x\, dx = \log\|\sin x\| + c$
(3)	$\int \text{cosec} x\, dx = \log\|\text{cosec}\, x - \cot x\| + c$
(4)	$\int \sec x\, dx = \log\|\sec x + \tan x\| + c$

ഉദാഹരണം 11.32

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാകലനം ചെയ്യുക.

(i) $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6} dx$ (ii) $\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx$ (iii) $\int \frac{1}{x \log x} dx$

(iv) $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx$ (v) $\int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2} dx$

നിർദ്ധാരണം

(i) $I = \int \frac{2x+4}{x^2+4x+6} dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$x^2 + 4x + 6 = u$, എങ്കിൽ $(2x+4)\, dx = du$

$$I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log|x^2 + 4x + 6| + c$$

അതുകൊണ്ട്, $\int \frac{2x+4}{x^2+4x+6} dx = \log|x^2 + 4x + 6| + c.$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 205 14-02-2023 17:30:58

(ii) $I = \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx$. എന്നിരിക്കട്ടെ

$e^x - 1 = u$, എങ്കിൽ $e^x dx = du$

$$I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log|e^x - 1| + c$$

അതുകൊണ്ട് $\int \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \log|e^x - 1| + c.$

(iii) $I = \int \frac{1}{x \log x} dx$. എന്നിരിക്കട്ടെ

$\log x = u$, എങ്കിൽ $\frac{1}{x} dx = du$

$$I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log|\log x| + c$$

അതുകൊണ്ട് $\int \frac{1}{x \log x} dx = \log|\log x| + c.$

(iv) $I = \int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx$. എന്നിരിക്കട്ടെ

$\sin x - \cos x = u$, എങ്കിൽ $(\cos x + \sin x)\, dx = du$

Thus, $I = \int \frac{du}{u} = \log|u| + c = \log|\sin x - \cos x| + c$

അതുകൊണ്ട്, $\int \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} dx = \log|\sin x - \cos x| + c$

(v) $I = \int \frac{\cos 2x}{(\sin x + \cos x)^2} dx = \int \frac{\cos 2x}{1 + \sin 2x} dx$. എന്നിരിക്കട്ടെ

$1 + \sin 2x = u$, എങ്കിൽ $2 \cos 2x\, dx = du$

അതുകൊണ്ട്, $I = \int \frac{du}{2u} = \frac{1}{2}\log|u| + c = \frac{1}{2}\log|1 + \sin 2x| + c.$

അഭ്യാസം 11.6

താഴെ തന്നിട്ടുളവയെ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാകലനം ചെയ്യുക.

(1) $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (2) $\frac{x^2}{1+x^6}$ (3) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ (4) $\frac{10x^9 + 10^x \log_e 10}{10^x + x^{10}}$

(5) $\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ (6) $\frac{\cot x}{\log(\sin x)}$ (7) $\frac{\operatorname{cosec} x}{\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)}$ (8) $\frac{\sin 2x}{a^2 + b^2 \sin^2 x}$

(9) $\frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ (10) $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ (11) $\frac{1}{x \log x \log(\log x)}$ (12) $\alpha\beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x^\alpha}$

(13) $\tan x\sqrt{\sec x}$ (14) $x(1-x)^{17}$ (15) $\sin^5 x \cos^3 x$ (16) $\frac{\cos x}{\cos(x-a)}$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 206 14-02-2023 17:31:04

11.7.5 ഭാഗിക സമാകലനം

സമാകലനം രണ്ട് ഫലനങ്ങളുടെ ഗുണനമായോ അല്ലെങ്കിൽ ഒരു ലോഗരിത ഫലനമായോ അല്ലെങ്കിൽ ഒരൊറ്റ വിപരീത ത്രികോണമിതി ഫലനമായോ അല്ലെങ്കിൽ നേരിട്ട് സമാകലനം കാണാൻ കഴിയാത്ത ഫലന മായോ ഇരുന്നാൽ സമാകലനം കണ്ടെത്തുന്നതിന് ഭാഗിക സമാകലന രീതി ഉപയോഗിക്കാം. രണ്ട് ഫലന ങ്ങളുടെ ഗുണന അവകലജ്ഞത്തിന്റെ സൂത്രവാക്യത്തിലിരുന്നു ഈ സമാകലനരീതി ലഭിക്കുന്നു.

u , v എന്നിവ രണ്ട് അവകലന ഫലനങ്ങൾ എങ്കിൽ

$$d(uv) = vdu + udv$$

$$udv = d(uv) - vdu$$

സമാകലനം കാണുക

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$\int udv$ യിലിരുന്ന് മറ്റൊരു സമാകലനം $\int udv$ ലഭിക്കുന്നു. കൂടാതെ $\int udv$ യ്ക്ക് അവസാന രൂപം ലഭിക്കുന്നില്ല. ഇത് $u\,dv$. എന്ന ഗുണനത്തിന്റെ സമാകലനത്തിന്റെ ഒരു **ഭാഗത്തിന്റെ നിർദ്ധാരണം** ആണ്.

അതിനാൽ **ഭാഗിക സമാകലനം** എന്ന പദം പല യൂറോപ്യൻ രാജ്യങ്ങളിലും ഉപയോഗിക്കുന്നു. മറ്റ് പല രാജ്യങ്ങളെ പോലെ നാമും ഉപയോഗിക്കുന്നു.

ഈ രീതിയുടെ വിജയം u ന്റെ ശരിയായ തിരഞ്ഞെടുപ്പിനെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു.

(i) $\log x$, $\tan^{-1} x$ പോലുള്ള നേരിട്ട് സമകലനം കാണാൻ കഴിയാത്ത ഏതെങ്കിലും ഏകദങ്ങൾ സമാകലനത്തിൽ അടങ്ങിയിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ അവയെ u,dv പോലെ എടുക്കണം.

(ii) സമാകലനത്തിൽ സമാകലന ഏകദങ്ങൾ രണ്ടും അടങ്ങിയിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ ഇവയിലൊന്ന് x^n (ഇവിടെ n ഒരു പോസിറ്റീവ് സംഖ്യ) ആയിരുന്നാൽ $u = x^n$ എന്നെടുക്കുക.

(iii) മറ്റ് സന്ദർഭങ്ങളിൽ നാം u തിരഞ്ഞെടുക്കാം.

ഉദാഹരണം 11.33

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സമാകലങ്ങളുടെ മൂല്യം കാണുക

(i) $\int xe^x dx$ (ii) $\int x\cos x\,dx$ (iii) $\int \log x\,dx$ (iv) $\int \sin^{-1} x\,dx$

നിർദ്ധാരണം

(i) $I = \int xe^x dx.$ എന്നിരിക്കട്ടെ

x ഒരു ബീജഗണിത ഫലനവും e^x ഒരു ഘാതാങ്ക ഫലനവും ആയതിനാൽ,

$u = x$ എങ്കിൽ $du = dx$

$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

ഭാഗിക സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച്

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\Rightarrow \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx$$

അതായത് $\int xe^x dx = xe^x - e^x + c.$

(ii) Let $I = \int x\cos x\,dx$

xഒരു ബീജഗണിത ഫലനവും x ഒരു ത്രികോണമിതി ഫലനവും,

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 207 14-02-2023 17:31:08

ആയതിനാൽ $u = x$ എങ്കിൽ $du = dx$

$dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \sin x$

ഭാഗിക സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച്

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\Rightarrow \int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx$$

$$\Rightarrow \int x\cos x\,dx = x\sin x + \cos x + c$$

(iii) $I = \int \log x\,dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$u = \log x$ എങ്കിൽ $du = \frac{1}{x}dx$

$dv = dx \Rightarrow v = x$

ഭാഗിക സമാകലനം ഉപയോഗിച്ചു

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\Rightarrow \int \log x\,dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}dx$$

$$\Rightarrow \int \log x\,dx = x\log x - x + c$$

(iv) $I = \int \sin^{-1} x\,dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$u = \sin^{-1}(x), dv = dx$

എങ്കിൽ $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, v = x$

$$\int \sin^{-1} x dx = x\,\text{ü}\ ^{-1}x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$\int \sin^{-1} x dx = x\sin^{-1} x + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} \quad \text{ഇവിടെ} \quad t = 1-x^2$$

$$= x\sin^{-1} x + \sqrt{t} + c$$

$$= x\sin^{-1} x + \sqrt{1-x^2} + c$$

ഉദാഹരണം 11.34

മൂല്യം കാണുക : $\int \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)dx$

നിർദ്ധാരണം

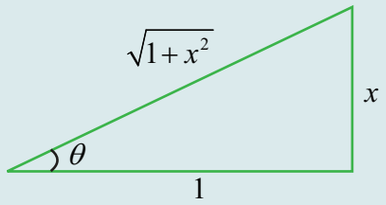
$$I = \int \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)dx \text{ എന്നിരിക്കട്ടെ}$$

$$x = \tan\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta\,d\theta$$

അതായത്, $I = \int \tan^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right)\sec^2\theta\,d\theta$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 208 14-02-2023 17:31:08

$$= \int \tan^{-1}(\tan 2\theta)\sec^2\theta\, d\theta$$
$$= \int 2\theta \sec^2\theta\, d\theta$$
$$= 2\int(\theta)(\sec^2\theta\, d\theta)$$



ഭാഗിക സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച്

$$I = 2\left[\theta\tan\theta - \int\tan\theta d\theta\right] \qquad \tan\theta = x$$
$$= 2(\theta\tan\theta - \log|\sec\theta|) + c \qquad \sec\theta = \sqrt{1+x^2}$$
$$\int \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)dx = 2x\tan^{-1}x - 2\log|\sqrt{1+x^2}| + c$$

11.7.6 ഭാഗിക സമാകലനത്തിന് ബെർനോലിയുടെ സൂത്രവാക്യം

u , v എന്നിവ x, ന്റെ ഫലനങ്ങൾ എങ്കിൽ ബെർനോലിയുടെ സൂത്രവാക്യം

$\int udv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \cdots$

ഇവിടെ $u', u'', u''', \ldots$ എന്നിവ u ന്റെ തുടർച്ചയായ അവകലജവും

$v, v_1, v_2, v_3, \cdots$ എന്നിവ dv യുടെ തുടർച്ചയായ സമാകലനവും ആണ്.

$u = x^n$ (n ഒരു പോസിറ്റീവ് സംഖ്യ) ആയിരിക്കുമ്പോൾ ബെർനോലി സൂത്രവാക്യം എളുപ്പത്തിൽ ഉപയോഗിക്കാം.

ഇനിപ്പറയുന്ന പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് നിർദ്ധാരണം കണ്ടെത്തുന്നതിന് രണ്ടോ അതിലധികമോ പ്രാവശ്യം ഭാഗിക സമാകലനം ഉപയോഗിക്കേണ്ടതാണ്. ഈ സാഹചര്യത്തിൽ നിർദ്ധാരണം എളുപ്പത്തിൽ കണ്ടെത്താൻ ബെർനോലിയുടെ സൂത്രവാക്യം സഹായിക്കുന്നു

ഉദാഹരണം 11.35

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാകലനം ചെയ്യുക.

(i) x^2e^{5x} (ii) $x^3\cos x$ (iii) x^3e^{-x}

	$dv = e^{5x}dx$
$u = x^2$	$v = \frac{e^{5x}}{5}$
$u' = 2x$	$v_1 = \frac{e^{5x}}{5^2}$
$u'' = 2$	$v_2 = \frac{e^{5x}}{5^3}$
$u''' = 0$	$v_3 = \frac{e^{5x}}{5^4}$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\int x^2e^{5x}dx.$

ബെർനോലി സൂത്രവാക്യം ഉയോഗിക്കുക.

$\int udv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \cdots$

$$\int x^2e^{5x}\,dx = (x^2)\left(\frac{e^{5x}}{5}\right) - (2x)\left(\frac{e^{5x}}{5^2}\right) + (2)\left(\frac{e^{5x}}{5^3}\right) - (0)\left(\frac{e^{5x}}{5^4}\right) + 0 + \cdots + 0 + c$$
$$= \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} + c.$$

(ii) $\int x^3\cos x\,dx.$

	$dv = \cos x\,dx$
$u = x^3,$	$v = \sin x$
$u' = 3x,^2$	$v_1 = -\cos x$
$u'' = 6x,$	$v_2 = -\sin x$
$u''' = 6,$	$v_3 = \cos x$

ബെർനോലി സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കുക.

$\int udv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \cdots$

$$\int x^3\cos x\,dx = (x^3)(\sin x) - (3x^2)(-\cos x) + (6x)(-\sin x) - (6)(\cos x) + c$$
$$= x^3\sin x + 3x^2\cos x - 6x\sin x - 6\cos x + c.$$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 209 14-02-2023 17:31:13

(iii) $\int x^3 e^{-x}\,dx.$

ബെർനോലി സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിക്കുക.

$$\int u\,dv = uv - u'v_1 + u''v_2 - \cdots$$

$$\int x^3 e^{-x}\,dx = \left(x^3\right)\left(-e^{-x}\right) - \left(3x^2\right)\left(e^{-x}\right) + \left(6x\right)\left(-e^{-x}\right) - \left(6\right)\left(e^{-x}\right) + c$$

$$= -x^3 e^{-x} - 3x^2 e^{-x} - 6xe^{-x} - 6e^{-x} + c.$$

$dv = e^{-x}\,dx$

$u = x^3, \quad v = -e^{-x}$

$u' = 3x^2, \quad v_1 = +e^{-x}$

$u'' = 6x, \quad v_2 = -e^{-x}$

$u''' = 6, \quad v_3 = e^{-x}$

അഭ്യാസം 11.7

താഴെതന്നിട്ടുള്ളവയെ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാകലനം ചെയ്യുക:

(1) (i) $9xe^{3x}$ (ii) $x\sin 3x$ (iii) $25xe^{-5x}$ (iv) $x\sec x\tan x$

(2) (i) $x\log x$ (ii) $27\,x^2e^{3x}$ (iii) $x^2\cos x$ (iv) $x^3\sin x$

(3) (i) $\dfrac{x\sin^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$ (ii) $x^5e^{x^2}$ (iii) $\tan^{-1}\left(\dfrac{8x}{1-16x^2}\right)$ (iv) $\sin^{-1}\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)$

11.7.8 (i) $\int e^{ax}\sin bx\,dx$ (ii) $\int e^{ax}\cos bx\,dx$ എന്നീ രൂപങ്ങളുടെ സമാകലനം

ചില സമാകലങ്ങളുടെ സമാകലനം എപ്പോഴും തുടരുന്നുയെന്ന് ഇനിപ്പറയുന്ന ഉദാഹരണങ്ങൾ വ്യക്തമാക്കുന്നു. $e^{ax}\cos bx$ കൂടാതെ $e^{ax}\sin bx$ എന്ന രൂപത്തിലുള്ള ഫലനത്തിന്റെസമാകലനത്തിന് ഭാഗിക സമാകലന നിയമം രണ്ട് പ്രാവശ്യം പ്രയോഗിച്ച് രണ്ട് വശവും ഒരേ സമാകലനം ചെയ്ത് നിർദ്ധാരണം കാണാം.

ഫലം 11.1

(i) $$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + c$$

(ii) $$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + c$$

തെളിവ്: (i)

$$I = \int e^{ax}\sin bx\,dx \text{ എന്നിരിക്കട്ടെ}$$

$$u = \sin bx; du = b\cos bx\,dx$$

$$dv = e^{ax}; v = \frac{e^{ax}}{a},$$

ഭാഗിക സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച്

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \int \frac{e^{ax}}{a} b\cos bx\,dx$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bx\,dx$$

$$u = \cos bx; du = -b\sin bx\,dx,$$

$$dv = e^{ax}; v = \frac{e^{ax}}{a},$$

വീണ്ടും ഭാഗിക സമാകലനം ഉപയോഗിച്ച്

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\left[\frac{e^{ax}}{a}\cos bx + \int \frac{e^{ax}}{a} b\sin bx\,dx\right]$$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 210 14-02-2023 17:31:14

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a}\frac{e^{ax}}{a}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}\int e^{ax}\sin bx\,dx$$

$$I = \frac{e^{ax}}{a}\sin bx - \frac{b}{a^2}e^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}I$$

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)I = \frac{ae^{ax}\sin bx - be^{ax}\cos bx}{a^2}$$

$$\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)I = \frac{e^{ax}[a\sin bx - b\cos bx]}{a^2}$$

അതായത്, $I = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + c$

അതായത്, $\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + c$

അതുപോലെ, $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + c$

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + c$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + c$$

ഓർമ്മിക്കേണ്ടത്

ഭാഗങ്ങളുടെ സമാകലനം പ്രയോഗിക്കുമ്പോൾ u കൂടാതെ dv യെ തുടർച്ചയായ സമാകലങ്ങളിൽ ഒരേ രീതിയിൽ തിരഞ്ഞെടുക്കണം. (മുകളിലുള്ള രണ്ട് ഉദാഹരണങ്ങൾ നോക്കുക) ഫലനങ്ങളിലെ ജോഡിയെ പരസ്പരം മാറ്റരുത്.

ഉദാഹരണം 11.36

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സമാകലങ്ങളുടെ മൂല്യം കാണുക

(i) $\int e^{3x}\cos 2x\,dx$ (ii) $\int e^{-5x}\sin 3x\,dx$

(i) $\int e^{3x}\cos 2x\,dx$

സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച്

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + c$$

$a = 3$ കൂടാതെ $b = 2$,

$$\int e^{3x}\cos 2x\,dx = \left(\frac{e^{3x}}{3^2+2^2}\right)(3\cos 2x + 2\sin 2x) + c$$

$$= \left(\frac{e^{3x}}{13}\right)(3\cos 2ü + 2\sin 2\ ) + \ .$$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 211 14-02-2023 17:31:15

(ii) $\int e^{-5x} \sin 3x \, dx$

സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ച്

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a \sin bx - b \cos bx] + c$$

for $a = -5, b = 3$, we get

$$\int e^{-5x} \sin 3x \, dx = \left(\frac{e^{-5x}}{(-5)^2+3^2}\right)(-5 \sin 3x - 3 \cos 3x) + c$$

$$\int e^{-5x} \sin 3x \, dx = -\left(\frac{e^{-5x}}{34}\right)(5 \sin 3x + 3 \cos 3x) + c$$

അഭ്യാസം 11.8

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാകലനം ചെയ്യുക.

(1) (i) $e^{ax} \cos bx$ (ii) $e^{2x} \sin x$ (iii) $e^{-x} \cos 2x$

(2) (i) $e^{-3x} \sin 2x$ (ii) $e^{-4x} \sin 2x$ (iii) $e^{-3x} \cos x$

ഫലം 11.2

$$\int e^x [f(x) + f'(x)]dx = e^x f(x) + c$$

തെളിവ്

$I = \int e^x [f(x) + f'(x)]dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$= \int e^x f(x)dx + \int e^x f'(x)dx$

$u = f(x)$; $du = f'(x)\,dx$, ആദ്യത്തെ സമാകലത്തിൽ

അതായത്, $dv = e^x$; $v = e^x$,

$I = e^x f(x) - \int e^x f'(x)dx + \int e^x f'(x)dx + c$

അതിനാൽ $I = e^x f(x) + c$.

ഉദാഹരണം 11.37

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സമാകലങ്ങളുടെ മൂല്യം കാണുക.

(i) $\int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$ (ii) $\int e^x (\sin x + \cos x)\, dx$ (iii) $\int e^x \left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2 dx$

നിർദ്ധാരണം

(i) $I = \int e^x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$f(x) = \frac{1}{x}$ എങ്കിൽ $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 212 14-02-2023 17:31:17

$\int e^x[f(x)+f'(x)]dx$ എന്ന രൂപത്തിൽ

$$\int e^x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)dx = e^x\frac{1}{x}+c.$$

(ii) $I = \int e^x(\sin x+\cos x)\,dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$f(x) = \sin x$, എങ്കിൽ $f'(x)=\cos x$

$\int e^x[f(x)+f'(x)]\,dx$ എന്ന രൂപത്തിൽ

$$\int e^x(\sin x+\cos x)\,dx = e^x\sin x+c.$$

(iii) $\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2dx$

$I = \int e^x\frac{(1-x)^2}{(1+x^2)^2}dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$$= \int e^x\frac{(1+x^2-2x)}{(1+x^2)^2}dx$$

$$= \int e^x\left(\frac{1}{(1+x^2)}-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)dx$$

$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)}$ എങ്കിൽ $f'(x)=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}$

$$\int e^x\left(f(x)+f'(x)\right)dx = e^xf(x)+c$$

$$\int e^x\left(\frac{1-x}{1+x^2}\right)^2dx = \int e^x\left(\frac{1}{(1+x^2)}-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\right)dx = e^x\frac{1}{(1+x^2)}+c.$$

അഭ്യാസം 11.9

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാകലനം ചെയ്യുക. :

(1) $e^x(\tan x+\log\sec x)$ (2) $\left(\frac{-1}{2^{\,2}}\right)$ (3) $e^x\sec x(1+\tan x)$

(4) $e^x\left(\frac{2+\sin 2x}{1+\cos 2x}\right)$ (5) $e^{\tan^{-1}x}\left(\frac{1+x+x^2}{1+x^2}\right)$ (6) $\frac{\log x}{(1+\log x)^2}$

11.7.9 പരിമേയ ബീജഗണിത ഫലനങ്ങളുടെ സമാകലനം

ഈ വിഭാഗത്തിൽ പരിമേയ ബീജഗണിത ഫലനങ്ങളുടെ അംശത്തിലും ഛേദത്തിലും സ്ഥിരസംഖ്യ ഗുണകവും x ന്റെ പോസിറ്റീവ് കൃതിയുമിരുന്നാൽ എങ്ങനെ സമാകലനം ചെയ്യും എന്നതിനെക്കുറിച്ച് ചർച്ച ചെയ്യുന്നു.

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 213 14-02-2023 17:31:19

രീതി I

സമാകലത്തിന്റെ രൂപം $\int \frac{dx}{a^2 \pm x^2}$, $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}}$, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$

(i) $$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$$

(ii) $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c$$

(iii) $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

(iv) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \text{ü}^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + c$$

(v) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + c$$

(vi) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \log \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + c$$

തെളിവ്

(i) $I = \int \frac{dx}{a^2 - x^2}$. എന്നിരിക്കട്ടെ

$$= \int \frac{dx}{(a-x)(a+x)}$$

$$= \frac{1}{2a} \int \left[\frac{1}{a+x} + \frac{1}{a-x} \right] dx$$ ഭാഗിക ഭിന്നങ്ങളായി മാറ്റുക

$$= \frac{1}{2a} \left[\log |a+x| - \log |a-x| \right] + c$$

$$= \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + c$$

(ii) $I = \int \frac{dx}{x^2 - a^2}$. എന്നിരിക്കട്ടെ

$$= \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)}$$

$$= \frac{1}{2a} \int \left[\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right] dx$$ ഭാഗിക ഭിന്നങ്ങളായി മാറ്റുക

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 214 14-02-2023 17:31:21

$$= \frac{1}{2a}[\log|x-a| - \log|x+a|] + c$$

$$= \frac{1}{2ü}ü \left|\frac{x-a}{+}\right| + c$$

അതായത് $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c$

(iii) $I = \int \frac{dx}{a^2+x^2}$. എന്നിരിക്കട്ടെ

$x = a\tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{x}{a}$

$dx = a\sec^2$

$$I = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2+a^2\tan^2\theta}d\theta = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2(1+\tan^2\theta)}d\theta = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^2\sec^2\theta}d\theta = \frac{1}{a}\int d\theta$$

$$= \frac{1}{a}\theta + c = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

അതായത് , $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

(iv) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$. എന്നിരിക്കട്ടെ

$x = a\sin\theta \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$dx = a\cos\theta$

$$I = \int \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}}d\theta = \int \frac{a\cos\theta}{\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}}d\theta = \int \frac{a\cos\theta}{a\cos\theta}d\theta = \int d\theta$$

$$= \theta + c = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

അതായത് , $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$

(v) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$x = a\sec\theta \Rightarrow \theta = \sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

$dx = a\sec\theta\tan\theta d\theta$

$$I = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{a^2\sec^2\theta-a^2}}d\theta = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{\sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)}}d\theta = \int \frac{a\sec\theta\tan\theta}{a\tan\theta}d\theta = \int \sec\theta d\theta$$

$$= \log|\sec\theta + \tan\theta| + c$$

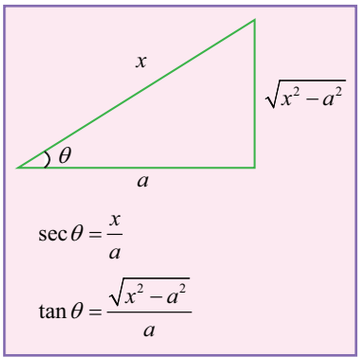
MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 215 14-02-2023 17:31:24

$$= \log\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right|+c$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|-\log a+c$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c_1 \text{ ഇവിടെ } c_1 = c-\log a$$

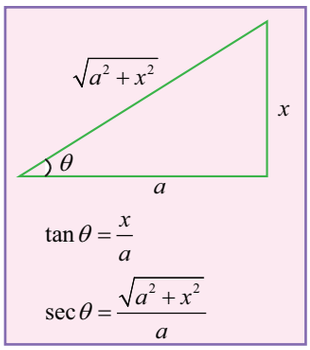
അതായത്, $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c_1$



(vi) $I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$x = a\ \tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(-\right)$

$dx = a\sec^2\theta d\theta$



$$I = \int \frac{a\sec^2\theta}{\sqrt{a^2\tan^2\theta+a^2}}d\theta = \int \frac{a\sec^2\theta}{\sqrt{a^2(\tan^2\theta+1)}}d\theta$$

$$= \int \frac{a\sec^2\theta}{a\sec\theta}d\theta = \int \sec\theta d\theta$$

$$= \log|\sec\theta+\tan\theta|+c$$

$$= \log\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+1}\right|+c$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|-\log a+c$$

$$= \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c_1 \text{ ഇവിടെ } c_1 = c-\log a$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c_1$$

കുറിപ്പ്: a^2-x^2, a^2+x^2 and x^2-a^2. എന്നീ ഫലനങ്ങളെ എളുപ്പത്തിൽ സമാകലനം ചെയ്യാൻ പ്രയോജനമുള്ള താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പ്രതിസ്ഥാപനത്തെ ഓർമ്മിക്കുക.

തന്നിട്ടുള്ളത്	പ്രതിസ്ഥാപനം
a^2-x^2	$x = a\sin\theta$
a^2+x^2	$x = a\tan\theta$
x^2-a^2	$x = a\sec\theta$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 216 14-02-2023 17:31:30

ഉദാഹരണം 11.38

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സമാകലങ്ങളുടെ മൂല്യം കാണുക.

(i) $\int \frac{1}{(x-2)^2+1}dx$ (ii) $\int \frac{x^2}{x^2+5}dx$ (iii) $\int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}dx$ (iv) $\int \frac{1}{\sqrt{4x^2-25}}dx$

നിർദ്ധാരണം

(i) $I = \int \frac{1}{(x-2)^2+1}dx = \int \frac{1}{(x-2)^2+1^2}dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$x - 2 = t \Rightarrow dx = dt$

അതിനാൽ, $I = \int \frac{1}{t^2+1^2}dt = \tan^{-1}(t)+c = \tan^{-1}(x-2)+c$

(ii) $I = \int \frac{x^2}{x^2+5}dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$$= \int \frac{x^2+5-5}{x^2+5}dx = \int\left(1-\frac{5}{x^2+5}\right)dx = \int dx - \int \frac{5}{x^2+5}dx$$

$$= x-5\int \frac{1}{x^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}dx$$

$$= x-5\frac{1}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+c$$

$$I = x-\sqrt{5}\tan^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)+c$$

(iii) $I = \int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+(2x)^2}}dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$2x = t \Rightarrow 2\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$

അതിനാൽ, $I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1^2+t^2}}dt$

$$I = \frac{1}{2}\log\left|t+\sqrt{t^2+1}\right|+c = \frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{(2x)^2+1}\right|+c$$

$$I = \frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{4x^2+1}\right|+c$$

(iv) $I = \int \frac{1}{\sqrt{4x^2-25}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{(2x)^2-25}}dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$2x = t \Rightarrow 2\,dx = dt \Rightarrow dx = \frac{1}{2}dt$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 217 14-02-2023 17:31:30

അതിനാൽ, $I = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{t^2-5^2}}\,dt$

$= \frac{1}{2}\log\left|t+\sqrt{t^2-5^2}\right|+c$

$I = \frac{1}{2}\log\left|2x+\sqrt{4x^2-25}\right|+c$

രീതി II

സമാകലത്തിന്റെ രൂപം $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ കൂടാതെ $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$

ആദ്യം ax^2+bx+c യെ രണ്ട് വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക അല്ലെങ്കിൽ വ്യത്യാസമായി രീതി I ന്റെ ഏതെങ്കിലും ഒരു രൂപത്തിൽ സൂചിപ്പിക്കുക. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള നിയമം ഉപയോഗിച്ച് ax^2+bx+c യെ രണ്ട് വർഗ്ഗങ്ങളുടെ തുക അല്ലെങ്കിൽ വ്യത്യാസമായി എഴുതാം.

(1) x^2 ന്റെ ഗുണകത്തെ 1 ആയി മാറ്റുക.

(2) x ന്റെ ഗുണകത്തെ 2 കൊണ്ട് ഭാഗിച്ച് അതിന്റെ വർഗ്ഗത്തിനെ കൂട്ടിയോ കുറച്ചോ പൂർണ്ണ വർഗ്ഗമായി മാറ്റുക.

അതായത്, $ax^2+bx+c = a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right]$

$= a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$

ഉദാഹരണം 11.39

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള സമാകലങ്ങളുടെ മൂല്യം കാണുക.

(i) $\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx$ (ii) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+12x+11}}\,dx$ (iii) $\int \frac{1}{\sqrt{12+4x-x^2}}\,dx$

നിർദ്ധാരണം

(i) $\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{1}{x^2-2(1)x+(1)^2+4}\,dx$

$= \int \frac{1}{(x-1)^2+2^2}\,dx$

$\int \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)+c$

(ii) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+12x+11}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+6)^2-25}}\,dx$

$= \int \frac{1}{\sqrt{(x+6)^2-5^2}}\,dx$

$= \log\left|x+6+\sqrt{(x+6)^2-5^2}\right|+c$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 218 14-02-2023 17:31:32

അതായത്, $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+12x+11}}dx = \log\left|x+6+\sqrt{x^2+12x+11}\right|+c$

(iii) $$\int \frac{1}{\sqrt{12+4x-x^2}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{12-(x^2-4x)}}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{12-\{(x-2)^2-4\}}}dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{4^2-(x-2)^2}}dx$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{(x-2)}{4}\right)+c$$

അഭ്യാസം 11.10

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയുടെ സമാകലനം കണ്ടുപിടിക്കുക.:

(1) (i) $\frac{1}{4-x^2}$ (ii) $\frac{1}{25-4x^2}$ (iii) $\frac{1}{9x^2-4}$

(2) (i) $\frac{1}{6x-7-x^2}$ (ii) $\frac{1}{(x+1)^2-25}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{x^2+4x+2}}$

(3) (i) $\frac{1}{\sqrt{(2+x)^2-1}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+5}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{9+8x-x^2}}$

രീതി III

സമാകലനങ്ങളുടെ രൂപം $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx$ കൂടാതെ $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$

മുകളിലുള്ള സമാകലനങ്ങളുടെ മൂല്യത്തിന് ആദ്യം ഇങ്ങനെ എഴുതാം.

$$px+q = A\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)+B$$

$$px+q = A(2ax+b)+B$$

രണ്ട് വശങ്ങളിലും ഒരേ കൃതിയുള്ള x ന്റെ ഗുണകങ്ങളെ തുല്യമാക്കി A യുടെയും B യുടെയും മൂല്യങ്ങൾ കണക്കാക്കാം.

(i) തന്നിട്ടുള്ള ആദ്യത്തെ സമാകലനത്തെ ഇപ്രകാരം എഴുതാം

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}dx = \int \frac{A(2ax+b)+B}{ax^2+bx+c}dx$$

$$= A\int \frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}dx + B\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

(ആദ്യസമാകലനത്തിന്റെ രൂപം $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$)

$$= A\log|ax^2+bx+c| + B\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx$$

മുമ്പുള്ള രീതി ഉപയോഗിച്ച് വലതുവശത്തിലുള്ള രണ്ടാമത്തെ പദത്തിന്റെ മൂല്യം കാണാം.

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 219 14-02-2023 17:31:33

(ii) തന്നിട്ടുള്ള രണ്ടാമത്തെ സമാകലനം ഇപ്രകാരം എഴുതാം

$$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \int \frac{A(2ax+b)+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

$$= A\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + B\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

(ആദ്യ സമാകലനത്തിന്റെ രൂപം $\int f'(x)[f(x)]^n dx$)

$$= A\left(2\sqrt{ax^2+bx+c}\right) + B\int \frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$$

മുമ്പുള്ള രിതി ഉപയോഗിച്ച് വലതു ഭാഗത്തിലുള്ള രണ്ടാമത്തെ പദത്തിന്റെ മൂല്യം കാണാം.

ഉദാഹരണം 11.40

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന സമാകലനങ്ങളുടെ മൂല്യം കാണുക.

(i) $\int \frac{3x+5}{x^2+4x+7}dx$ (ii) $\int \frac{x+1}{x^2-3x+1}dx$ (iii) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$ (iv) $\int \frac{5x-7}{\sqrt{3x-x^2-2}}dx$

നിർദ്ധാരണം

(i) $I = \int \frac{3\ \ +5}{x^2+4x+7}dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$$3x+5 = A\ \frac{d}{dx}(x^2+4x+7)+B$$

$$3x+5 = A(2x+4)+B$$

സമാന പദങ്ങളുടെ ഗുണകങ്ങളെ താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ നമുക്ക് ലഭിക്കുന്നത്

$$2A = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{2}; 4\ddot{u} + \quad = 5 \Rightarrow \quad = -1$$

$$I = \int \frac{\frac{3}{2}(2x+4)-1}{x^2+4x+7}dx$$

$$I = \frac{3}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+7}dx - \int \frac{1}{x^2+4x+7}dx$$

$$= \frac{3}{2}\log\left|x^2+4x+7\right| - \int \frac{1}{(x+2)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}dx$$

$$= \frac{3}{2}\log\left|x^2+4x+7\right| - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)+c$$

(ii) $I = \int \frac{x+1}{x^2-3x+1}dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$$x+1 = A\frac{d}{dx}(x^2-3x+1)+B$$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 220 14-02-2023 17:31:34

$$x+1 = A(2x-3)+B$$

സമാന പദങ്ങളുടെ ഗുണകങ്ങളെ താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ

$$2A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}; -3A + B = 1 \Rightarrow B = \frac{5}{2}$$

$$I = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-3)+\frac{5}{2}}{x^2-3x+1}dx$$

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x-3}{x^2-3x+1}dx + \frac{5}{2}\int \frac{1}{x^2-3x+1}dx$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x^2-3x+1\right| + \frac{5}{2}\int \frac{1}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2}dx$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x^2-3x+1\right| + \frac{5}{2}\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}\log\left|\frac{x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\log\left|x^2-3x+1\right| + \frac{\sqrt{5}}{2}\log\left|\frac{2x-3-\sqrt{5}}{2x-3+\sqrt{5}}\right| + c$$

(iii) $$I = \int \frac{2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$$2x+3 = A\frac{d}{dx}(x^2+x+1)+B$$

$$2x+3 = A(2x+1)+B$$

സമാന പദങ്ങളുടെ ഗുണകങ്ങളെ താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ.

$$2A = 2 \Rightarrow A = 1; \quad A + B = 3 \Rightarrow B = 2$$

$$I = \int \frac{(2x+1)+2}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$$

$$I = \int \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx + 2\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$$

$$= 2\sqrt{x^2+x+1} + 2\int \frac{1}{\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}dx$$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 221 14-02-2023 17:31:34

$$= 2\sqrt{x^2+x+1}+2\log\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right|+c$$

അതായത് $I = 2\sqrt{x^2+x+1}+2\log\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+c$

(iv) $\int\frac{5x-7}{\sqrt{3x-x^2-2}}dx$

$$5x-7 = A\frac{d}{dx}(3x-x^2-2)+B$$

$$5x-7 = A(3-2x)+B$$

സമാന പദങ്ങളുടെ ഗുണകങ്ങളെ താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ

$$-2A = 5 \Rightarrow A = -\frac{5}{2}; 3A+B = -7 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$I = \int\frac{\frac{-5}{2}(3-2x)+\frac{1}{2}}{\sqrt{3x-x^2+2}}dx$$

$$I = -\frac{5}{2}\int\frac{3-2x}{\sqrt{3x-x^2+2}}dx+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{3x-x^2+2}}dx$$

$$= \left(-\frac{5}{2}\right)2\sqrt{3x-x^2+2}+\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{17}}{2}\right)^2-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}}dx$$

$$= -5\sqrt{3x-x^2+2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{17}}{2}}\right)+c$$

അതിനാൽ, $I = -5\sqrt{3x-x^2+2}+\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x-3}{\sqrt{17}}\right)+c$

അഭ്യാസം 11.11

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാകലനം ചെയ്യുക.:

(1) (i) $\frac{2x-3}{x^2+4x-12}$ (ii) $\frac{5x-2}{2+2x+x^2}$ (iii) $\frac{3x+1}{2x^2-2x+3}$

(2) (i) $\frac{2x+1}{\sqrt{9+4x-x^2}}$ (ii) $\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}$ (iii) $\frac{2x+3}{\sqrt{x^2+4x+1}}$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 222 14-02-2023 17:31:38

രീതി IV

സമാകലനത്തിന്റെ രൂപം $\int\sqrt{a^2\pm x^2}\,dx, \int\sqrt{x^2-a^2}\,dx$

ഫലം 11.3

(1) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$

(2) $\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2}-\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$

(3) $\int\sqrt{x^2+a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\log\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$

തെളിവ് :

(1) $I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$u=\sqrt{a^2-x^2}$ then $du=\frac{-2x}{2\sqrt{a^2-x^2}}dx$

$dv=dx\Rightarrow v=x$

ഭാഗിക സമാകലനം ഉപയോഗിക്കുമ്പോൾ

$$\int udv = uv-\int vdu$$

$$\Rightarrow I= x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{a^2-x^2-a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2}-\int\left(\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{(-a^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\right)dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx+\int\frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$= x\sqrt{a^2-x^2}-I+a^2\int\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$$

$$2I= x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

അതായത്, $I=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$

അതുപോലെ മറ്റ് രണ്ടു ഫലങ്ങളും നമുക്ക് തെളിയിക്കാൻ കഴിയും.

കുറിപ്പ് 11.3

$x=a\sin\theta$ എന്ന് പ്രസ്ഥാപിച്ചും മുകളിലുള്ള പ്രശ്നങ്ങൾക്ക് നിർദ്ധാരണം കണ്ടുപിടിക്കാം.

ഉദാഹരണം 11.41

താഴെ തന്നിരിക്കുന്നവയുടെ മൂല്യം കാണുക. :

(i) $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$ (ii) $\int\sqrt{25x^2-9}\,dx$ (iii) $\int\sqrt{x^2+x+1}\,dx$ (iv) $\int\sqrt{(x-3)(5-x)}\,dx$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 223 14-02-2023 17:31:40

നിർദ്ധാരണം

(i) $I = \sqrt{4-x^2}\,dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$= \int \sqrt{2^2 - ü^2}$

$= \frac{x}{2}\sqrt{2^2-x^2} + \frac{2^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

അതിനാൽ, $I = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + c$

(ii) $I = \int \sqrt{ü\ \ ü^2 -}$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$= \int \sqrt{(5x)^2 - 3^2}\,dx$

$= \frac{1}{5}\left[\frac{5x}{2}\sqrt{(5x)^2-3^2} - \frac{3^2}{2}\log\left|5x + \sqrt{(5x)^2-3^2}\right|\right] + c$

അതിനാൽ, $I = \frac{1}{5}\left[\frac{5x}{2}\sqrt{25x^2-9} - \frac{9}{2}\log\left|5x + \sqrt{25x^2-9}\right|\right] + c$

(iii) $I = \int \sqrt{x^2+x+1}\,dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$= \int \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx$

$= \frac{x+\frac{1}{2}}{2}\sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2}\log\left|\left[x+\frac{1}{2} + \sqrt{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right]\right| + c$

അതിനാൽ, $I = \frac{2x+1}{4}\sqrt{x^2+x+1} + \frac{3}{8}\log\left|x+\frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1}\right| + c$

(iv) $I = \int \sqrt{(x-3)(5-x)}\,dx$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$= \int \sqrt{8x - x^2 - 15}\,dx$

$= \int \sqrt{1^2 - (x-4)^2}\,dx$

$= \frac{x-4}{2}\sqrt{1^2-(x-4)^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x-4}{1}\right) + c$

അതിനാൽ, $I = \frac{x-4}{2}\sqrt{8x-x^2-15} + \frac{1}{2}\sin^{-1}(x-4) + c$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 224 14-02-2023 17:31:41

അഭ്യാസം 11.12

താഴെ തന്നിട്ടുള്ളവയെ x ന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ സമാകലനം ചെയ്യുക.:

(1) (i) $\sqrt{x^2+2x+10}$ (ii) $\sqrt{x^2-2x-3}$ (iii) $\sqrt{(6-x)(x-4)}$

(2) (i) $\sqrt{9-(2x+5)^2}$ (ii) $\sqrt{81+(2x+1)^2}$ (iii) $\sqrt{(x+1)^2-4}$

അഭ്യാസം 11.13

തന്നിട്ടുള്ള നാല് ഇതര ഉത്തരങ്ങളിലിരുന്ന് ശരിയായ അല്ലെങ്കിൽ ഏറ്റവും അനുയോജ്യമായ ഉത്തരം തിരഞ്ഞെടുക്കുക.

(1) $\int f(x)dx = g(x)+c$ എങ്കിൽ $\int f(x)g'(x)dx$

(1) $\int (f(x))^2 dx$ (2) $\int f(x)g(x)dx$ (3) $\int f'(x)g(x)dx$ (4) $\int (g(x))^2 dx$

(2) $\int \frac{3^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx = k\ (3^{\frac{1}{x}})+c$, എങ്കിൽ k യുടെ മൂല്യം

(1) $\log 3$ (2) $-\log 3$ (3) $-\frac{1}{\log 3}$ (4) $\frac{1}{\log 3}$

(3) $\int f'(x)e^{x^2}dx = (x-1)e^{x^2}+c$, എങ്കിൽ $f(x)$ എന്നത്

(1) $2x^3-\frac{x^2}{2}+x+c$ (2) $\frac{x^3}{2}+3x^2+4x+c$ (3) x^3+4x^2+6x+c (4) $\frac{2x^3}{3}-x^2+x+c$

(4) T (x, y) എന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു ബിന്ദുവിൽ ഒരു വക്രത്തിന്റെ ചായ്‌വ് $\frac{x^2-4}{x^2}$ ആണ്. ഈ വക്രം (2,7) എന്ന ബിന്ദുവിലൂടെ കടന്നുപോയാൽ വക്രത്തിന്റെ സമവാക്യം എന്നത്.

(1) $y = x+\frac{4}{x}+3$ (2) $y = x+\frac{4}{x}+4$ (3) $y = x^2+3x+4$ (4) $y = x^2-3x+6$

(5) $\int \frac{e^x(1+x)}{\cos^2(xe^x)}\ dx$ എന്നത്

(1) $\cot(xe^x)+c$ (2) $\sec(xe^x)+c$ (3) $\tan(xe^x)+c$ (4) $\cos(xe^x)+c$

(6) $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\sin 2x}dx$ എന്നത്

(1) $\sqrt{\tan x}+c$ (2) $2\sqrt{\tan x}\quad c$ (3) $\frac{1}{2}\sqrt{\tan x}+c$ (4) $\frac{1}{4}\sqrt{\tan x}+c$

(7) $\int \sin^3 x dx$

(1) $\frac{-3}{4}\cos x-\frac{\cos 3x}{12}+c$ (2) $\frac{3}{4}\cos x+\frac{\cos 3x}{12}+c$

(3) $\frac{-3}{4}\cos x+\frac{\cos 3x}{12}+c$ (4) $\frac{-3}{4}\sin x-\frac{\sin 3x}{12}+c$

(8) $\int \frac{e^{6\log x}-e^{5\log x}}{e^{4\log x}-e^{3\log x}}dx$ എന്നത്

(1) $x+c$ (2) $\frac{x^3}{3}+c$ (3) $\frac{3}{x^3}+c$ (4) $\frac{1}{x^2}+c$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 225 14-02-2023 17:31:46

(9) $\int \frac{\sec x}{\sqrt{\cos 2x}} dx$ എന്നത്

(1) $\tan^{-1}(\sin x)+c$ (2) $2\sin^{-1}(\tan x)+c$ (3) $\tan^{-1}(\cos x)+c$ (4) $\sin^{-1}(\tan x)+c$

(10) $\int \tan^{-1}\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}\, dx$ എന്നത്

(1) x^2+c (2) $2x^2+c$ (3) $\frac{x^2}{2}+c$ (4) $-\frac{x^2}{2}+c$

(11) $\int 2^{3x+5} dx$ എന്നത്

(1) $\frac{3(2^{3x+5})}{\log 2}+c$ (2) $\frac{2^{3x+5}}{2\log(3x+5)}+c$ (3) $\frac{2^{3x+5}}{2\log 3}+c$ (4) $\frac{2^{3x+5}}{3\log 2}+c$

(12) $\int \frac{\sin^8 x-\cos^8 x}{1-2\sin^2 x\cos^2 x}\, dx$ എന്നത്

(1) $\frac{1}{2}\sin 2x+c$ (2) $-\frac{1}{2}\sin 2x+c$ (3) $\frac{1}{2}\cos 2x+c$ (4) $-\frac{1}{2}\cos 2x+c$

(13) $\int \frac{e^x(x^2\tan^{-1}x+\tan^{-1}x+1)}{x^2+1}\, dx$

(1) $e^x\tan^{-1}(x+1)+c$ (2) $\tan^{-}(e^x)+c$ (3) $e^x\frac{(\tan^{-1}x)^2}{2}+c$ (4) $e^x\tan^{-1}x+c$

(14) $\int \frac{x^2+\cos^2 x}{x^2+1}\operatorname{cosec}^2 x dx$

(1) $\cot x+\sin^{-1}x+c$ (2) $-\cot x+\tan^{-1}x+c$

(3) $-\tan x+\cot^{-1}x+c$ (4) $-\cot x-\tan^{-1}x+c$

(15) $\int x^2\cos x\, dx$

(1) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+c$ (2) $x^2\sin x-2x\cos x-2\sin x+c$

(3) $-x^2\sin x+2x\cos x+2\sin x+c$ (4) $-x^2\sin x-2x\cos x+2\sin x+c$

(16) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx$

(1) $\sqrt{1-x^2}+\sin^{-1}x+c$ (2) $\sin^{-1}x-\sqrt{1-x^2}+c$

(3) $\log\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|-\sqrt{1-x^2}+c$ (4) $\sqrt{1-x^2}+\log\left|x+\sqrt{1-x^2}\right|+c$

(17) $\int \frac{dx}{e^x-1}$

(1) $\log|e^x|-\log|e^x-1|+c$ (2) $\log|e^x|+\log|e^x-1|+c$

(3) $\log|e^x-1|-\log|e^x|+c$ (4) $\log|e^x+1|-\log|e^x|+c$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 226 14-02-2023 17:31:55

(18) $\int e^{-x}\cos x\,dx$

(1) $\frac{e^{-4x}}{17}[4\cos x-\sin x]+c$ (2) $\frac{e^{-4x}}{17}[-4\cos x+\sin x]+c$

(3) $\frac{e^{-4x}}{17}[4\cos x+\sin x]+c$ (4) $\frac{e^{-4x}}{17}[-4\cos x-\sin x]+c$

(19) $\int\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x-1}dx$

(1) $2\log\left|\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\right|+c$ (2) $\log\left|\frac{1+\tan x}{1-\tan x}\right|+c$

(3) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{\tan x+1}{\tan x-1}\right|+c$ (4) $\frac{1}{2}\log\left|\frac{\tan x-1}{\tan x+1}\right|+c$

(20) $\int e^{-7x}\sin 5x\,dx$

(1) $\frac{e^{-7x}}{74}[-7\sin 5x-5\cos 5x]+c$ (2) $\frac{e^{-7x}}{74}[7\sin 5\ddot{u}+5\cos 5\ ]+$

(3) $\frac{e^{-7x}}{74}[7\sin 5x-5\cos 5x]+c$ (4) $\frac{e^{-7x}}{74}[-7\sin 5x+5\cos 5x]+c$

(21) $\int x^2e^{\frac{x}{2}}dx$

(1) $x^2e^{\frac{x}{2}}-4xe^{\frac{x}{2}}-8e^{\frac{x}{2}}+c$ (2) $2x^2e^{\frac{x}{2}}-8xe^{\frac{x}{2}}-16e^{\frac{x}{2}}+c$

(3) $2x^2e^{\frac{x}{2}}-8xe^{\frac{x}{2}}+16e^{\frac{x}{2}}+c$ (4) $x^2\frac{e^{\frac{x}{2}}}{2}-\frac{xe^{\frac{x}{2}}}{4}+\frac{e^{\frac{x}{2}}}{8}+c$

(22) $\int\frac{x+2}{\sqrt{x^2-1}}dx$

(1) $\sqrt{x^2-1}-2\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$ (2) $\sin^{-1}x-2\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

(3) $2\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|-\sin^{-1}x+c$ (4) $\sqrt{x^2-1}+2\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

(23) $\int\frac{1}{x\sqrt{(\log x)^2-5}}dx$

(1) $\log\left|x+\sqrt{x^2-5}\right|+c$ (2) $\log\left|\log x+\sqrt{\log x-5}\right|+c$

(3) $\log\left|\log x+\sqrt{(\log x)^2-5}\right|+c$ (4) $\log\left|\log x-\sqrt{(\log x)^2-5}\right|+c$

(24) $\int\sin\sqrt{x}dx$

(1) $2\left(-\sqrt{x}\cos\sqrt{x}+\sin\sqrt{x}\right)+c$ (2) $2\left(-\sqrt{x}\cos\sqrt{x}-\sin\sqrt{x}\right)+c$

(3) $2\left(-\sqrt{x}\sin\sqrt{x}-\cos\sqrt{x}\right)+c$ (4) $2\left(-\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+\cos\sqrt{x}\right)+c$

(25) $\int e^{\sqrt{x}}dx$

(1) $2\sqrt{x}(1-e^{\sqrt{x}})+c$ (2) $2\sqrt{x}(e^{\sqrt{x}}-1)+c$

(3) $2e^{\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})+c$ (4) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1)+c$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 227 14-02-2023 17:32:03

സംഗ്രഹം

അവകലജം	എതിർ അവകലജം
$\frac{d}{dx}(c)=0$, ഇവിടെ c ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ	$\int 0\,dx=c$, ഇവിടെ c ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ
$\frac{d}{dx}(kx)=k$, ഇവിടെ k ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ	$\int k\,dx=kx+c$ ഇവിടെ c ഒരു സ്ഥിരസംഖ്യ
$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n$	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+c, \quad n\neq -1$ (ക്യത്യങ്ക നിയമം)
$\frac{d}{dx}\log x=\left(\frac{1}{x}\right)$	$\int \frac{1}{x}\,dx=\log\lvert x\rvert+c$
$\frac{d}{dx}(-\cos x)=\sin x$	$\int \sin x\,dx=-\cos x+c$
$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$	$\int \cos x\,dx=\sin x+c$
$\frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$	$\int \sec^2 x\,dx=\tan x+c$
$\frac{d}{dx}(-\cot x)=\operatorname{cosec}^2 x$	$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx=-\cot x+c$
$\frac{d}{dx}(\sec x)=\sec x\tan x$	$\int \sec x\tan x\,dx=\sec x+c$
$\frac{d}{dx}(-\operatorname{cosec} x)=\operatorname{cosec} x\cot x$	$\int \operatorname{cosec} x\cot x\,dx=-\operatorname{cosec} x+c$
$\frac{d}{dx}(e^x)=e^x$	$\int e^x dx=e^x+c$
$\frac{d}{dx}\left(\frac{a^x}{\log a}\right)=a^x$	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\log a}+c$
$\frac{d}{dx}(\sin^{-1}x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\sin^{-1}x+c$
$\frac{d}{dx}(\tan^{-1}x)=\frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{1}{1+x^2}dx=\tan^{-1}x+c$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 228 14-02-2023 17:32:04

(1) k ഒരു സ്ഥിര സംഖ്യ എങ്കിൽ $\int kf(x)dx = k\int f(x)\,dx$

(2) $\int (f_1(x) \pm f_2(x))\,dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx$

If $\int f(x)\,dx = g(x)+c$, then $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\,g(ax+b)+c$

(1)	$\int \tan x\,dx = \log\lvert\sec x\rvert + c$
(2)	$\int \cot x\,dx = \log\lvert\sin x\rvert + c$
(3)	$\int cosecx\,dx = \log\lvert\text{cosec}\,x - \cot x\rvert + c$
(4)	$\int \sec x\,dx = \log\lvert\sec x + \tan x\rvert + c$

ഭാഗിക സമാകലനത്തിന് ബെർനോലിയുടെ സൂത്രവാക്യം:

u , v എന്നിവ x, ന്റെ ഫലനങ്ങൾ എങ്കിൽ ബെർനോലിയുടെ സൂത്രവാക്യം എന്നത്
$\int udv = uv - u'v_1 + u''v_2 + \ldots$
ഇവിടെ u', u'', u''',... എന്നിവ u ന്റെ തുടർച്ചയായ അവകലജ്ഞവും
v, v_1, v_2 , v_3 ,..., എന്നിവ dv യുടെ തുടർച്ചയായ സമാകലനങ്ങളും ആണ്.

$$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\sin bx - b\cos bx] + c$$

$$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx + b\sin bx] + c$$

$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\log\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\log\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + c$	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \log\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + c$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \log\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert + c$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + c$$

$$\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\log\left\lvert x+\sqrt{x^2-a^2}\right\rvert + c$$

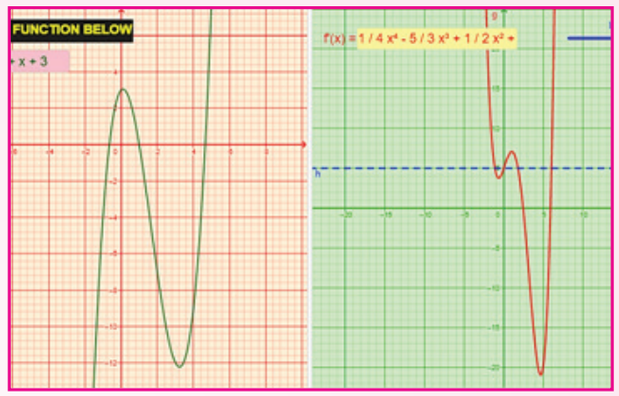
$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\log\left\lvert x+\sqrt{x^2+a^2}\right\rvert + c$$

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 229 14-02-2023 17:32:11

ഐ സി ടി കോർണർ 11(a)

പ്രായോഗികം

സമാകലന കലനം

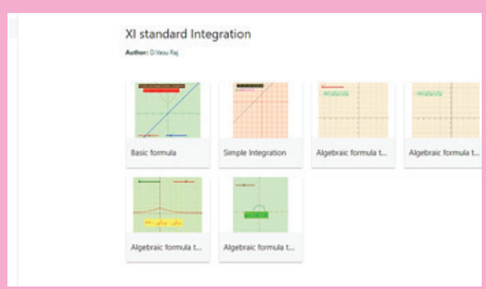


ഘട്ടം 1

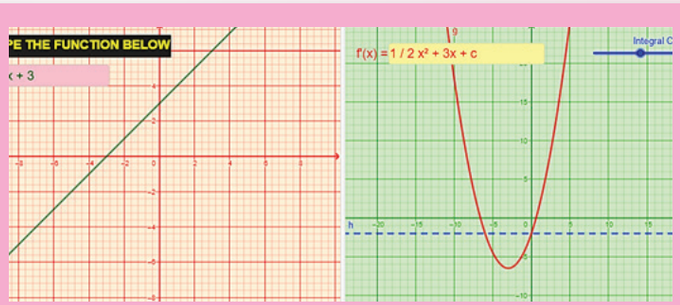
ബ്രൗസർ ഓപ്പൺ ചെയ്ത് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള URL Link ടൈപ്പ് ചെയ്യുക. GeoGebra യുടെ "XI standard Integration" എന്ന വർക്ക് ഷീറ്റ് ഭാഗം ദൃശ്യമാകും. അതിൽ നിങ്ങളുടെ പാഠവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട നിരവധി വർക്ക് ഷീറ്റ് കൊടുത്തിരിക്കും.

ഘട്ടം 2

"Simple Integration" എന്ന വർക്ക് ഷീറ്റ് തിരഞ്ഞെടുക്കുക f(x) ന് ഏത് ഫലനവും നൽകാം. അങ്ങനെ ചെയ്യുമ്പോൾ f(x) ന്റെ ഗ്രാഫ് ഇടതുഭാഗത്തും സമാകലന ഫലനം വലതു ഭാഗത്തും ദൃശ്യമാകും.



ഘട്ടം 1



ഘട്ടം 2

ഈ ലിങ്കിൽ ബ്രൗസ് ചെയ്യുക:

XI standard Integration: https://ggbm.at/c63hdegc

LC8NQ

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 230 14-02-2023 17:32:12

ഐ സി ടി കോർണർ 11(b)

പ്രായോഗികം

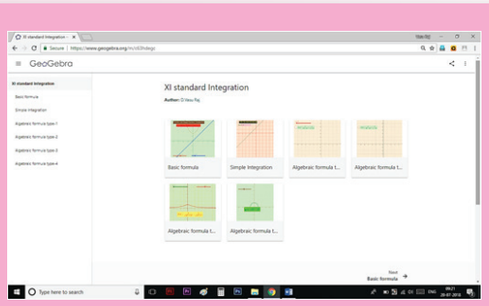
സമാകലന കലനം

ഘട്ടം 1

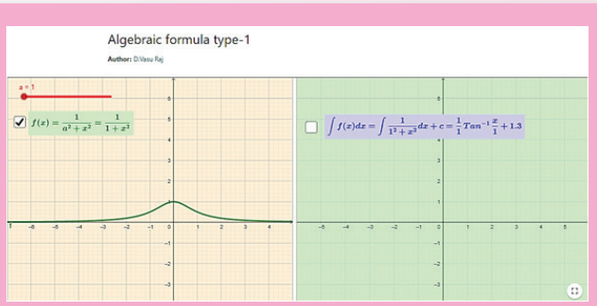
ബ്രൗസർ ഓപ്പൺ ചെയ്ത് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള URL ടൈപ്പ് ചെയ്യുക. QR Code സ്കാൻ ചെയ്യുക. GeoGebra യുടെ "XI standard Integration" എന്ന വർക്ക് ഷീറ്റ് ഭാഗം ദൃശ്യമാകും. അതിൽ നിങ്ങളുടെ പാഠവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട നിരവധി വർക്ക്ഷീറ്റ് കൊടുത്തിരിക്കും.

ഘട്ടം 2

"Algebraic type-1" എന്ന വർക്ക്ഷീറ്റ് തിരഞ്ഞെടുക്കുക. ഫലനത്തിന്റെ ഗ്രാഫ് ഇടത്വശത്തും സമാകലനം വലത് ഭാഗത്തും ദൃശ്യമാകും. രണ്ടും അമർത്തിയാൽ ഗ്രാഫ് ദൃശ്യമാകും "a" യെ മാറ്റി മൂല്യം എടുക്കാം. 4 രീതികളിൽ ഉള്ള ബീജ ഗണിത രീതികൾ നിരീക്ഷിക്കാം.



ഘട്ടം 1



ഘട്ടം 2

ഈ ലിങ്കിൽ ബ്രൗസ് ചെയ്യുക:

XI standard Integration: https://ggbm.at/c63hdegc

C3HVG

MAL_11th-Maths-Vol2-Unit11.indd 231 14-02-2023 17:32:13

അദ്ധ്യായം 12

സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തത്തിന് ഒരു ആമുഖം

ജീവിതത്തിലെ വളരെ പ്രധാന ചോദ്യങ്ങളിൽ മിക്കതും
സംഭാവ്യതയുടെ പ്രശ്നങ്ങളാണ്
പിയറി - സൈമൺ ലാപ്ലേസ്

12.1 ആമുഖം

ലാപ്ലേസ്
1749-1827

1654 ലെ ഒരു ചൂതാട്ടക്കാരന്റെ തർക്കം രണ്ട് പ്രശസ്ത ഫ്രഞ്ച് ഗണിതശാസ്ത്രജ്ഞരായ ബ്ലെയ്സ് പാസ്കലും പീയറി ഡി ഫെർമാറ്റും ഒരു ഗണിതശാസ്ത്ര സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തം സൃഷ്ടിക്കുന്നതിലേക്ക് നയിച്ചു. സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന തത്വങ്ങൾ ആദ്യമായി രൂപികരിച്ചത് പാസ്കലും ഫെർമറ്റും ആണ്. വിപുലമായ ഗവേഷണത്തിനുശേഷം, ലാപ്ലേസ് 1812 ൽ തന്റെ സമാരക കൃതി പ്രസിദ്ധികരിച്ചു. കൂടാതെ, സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തത്തിന് അടിത്തറയിട്ടു. സ്ഥിതിവിവരകണക്കുകളിൽ ബയേഷ്യൻ ആവിഷ്ക്കാരം പ്രധാനമായും വികസിപ്പിച്ചെടുത്തത് ലാപ്ലേസ് ആണ്.

ആധുനിക ലോകത്തിന്റെ പല ഭാഗങ്ങളിലും സംഭാവ്യതയുടെ വിഷയം കാണാം. ഗെയിമുകൾ പഠിക്കുന്നതിനുള്ള ഒരു മാർഗ്ഗമെന്ന നിലയിൽ അതിന്റെ ഉത്ഭവം മുതൽ, ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ ശക്തവും വ്യാപകമായി ബാധകവുമായ ഒരു ശാഖയിൽ സംഭാവ്യത ഉൾപ്പെടുന്നു. ലൈഫ് ഇൻഷ്വറൻസ് പ്രിമിയം നിർണ്ണയിക്കുന്നത് മുതൽ തിരഞ്ഞെടുപ്പ് ഫലങ്ങളുടെ പ്രവചനം, ഒരു വാതകത്തിലെ തന്മാത്രകളുടെ സ്വഭാവത്തെക്കുറിച്ചുള്ള വിവരണം എന്നിവയ്ക്കെല്ലാം സംഭാവ്യത ഉപയോഗപ്രദമാണ്. ഒരു സ്കൂൾ പാഠപുസ്തകത്തിലേക്ക് സംഭാവ്യതയുടെ പഠനം കൊണ്ടുവന്നതിൽ ഒരു നല്ല കാരണമാണ് ഇതിന്റെ ഉപയോഗം. സംഭാവ്യതഎന്ന വാക്കിന്റെ ആവിഷ്ക്കാരത്തിൽ സാധ്യത, പ്രതിക്ഷ, സാധ്യമായത് മുതലായ പര്യായങ്ങൾ ഉൾപ്പെടുന്നു.

നമ്മുടെ ലോകം മുഴുവൻ അനിശ്ചിതത്വത്തിൽ നിറഞ്ഞിരിക്കുന്നു. ഫലത്തിൽ എല്ലാ ദിവസവും അനിശ്ചിതത്വം ബാധിച്ച തീരുമാനങ്ങൾ നമ്മൾ എടുക്കുന്നു. അനിശ്ചിതത്വം ഗണിക്കുന്നതിന് നമ്മൾ സംഭാവ്യതയുടെ സിദ്ധാന്തം എന്ന ഗണിതശാസ്ത്ര ശാഖയിലേക്ക് തിരിയുന്നു. ഒരു സംഭവം സംഭവിക്കാനുള്ള സാധ്യതയുടെ അളവുകോലാണ് സംഭാവ്യത.

പഠന ലക്ഷ്യങ്ങൾ

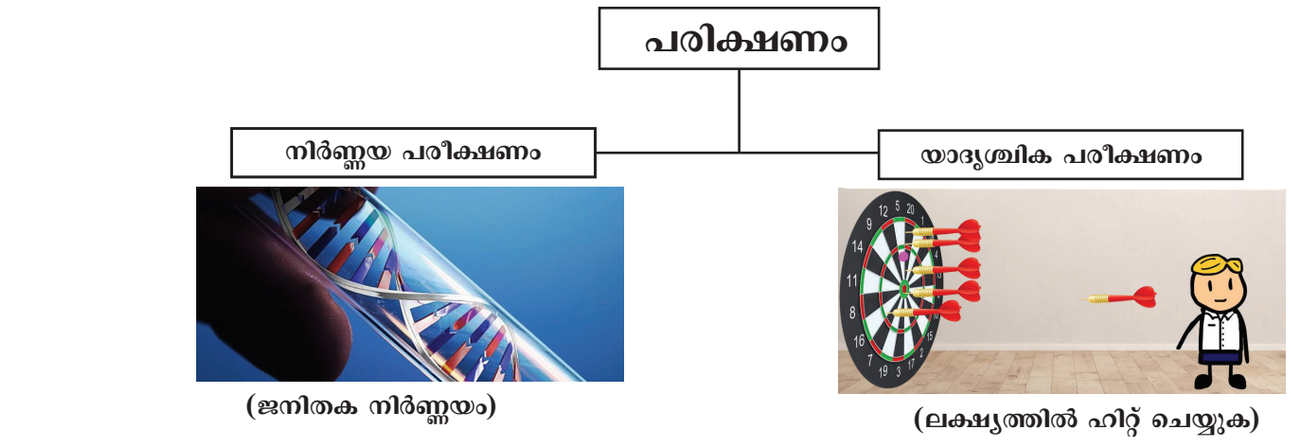
ഈ അദ്ധ്യായം പൂർത്തിയാക്കുമ്പോൾ വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് ഇവ ചെയ്യാനാകും

- സംഭാവ്യതയുടെ ശാസ്ത്രീയ സിദ്ധാന്തവും സംഭാവ്യതയുടെ ആക്സിയോമാറ്റിക് സമീപനവും മനസ്സിലാക്കുക
- പരസ്പര വർജ്ജകം, പരസ്പരം ഉൾപ്പെടുന്നതും സമ്പൂർണ്ണ സംഭാവനകളെക്കുറിച്ച് മനസ്സിലാക്കുക.
- നിബന്ധനയുള്ള സംഭാവ്യതയും സ്വതന്ത്ര്യ സംഭവങ്ങളുടേയും ആശയങ്ങളെ മനസ്സിലാക്കുക.
- ബെയ്സ് സിദ്ധാന്തം പ്രയോഗിക്കൽ.
- ദൈനംദിന ജീവിതത്തിൽ സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തം പ്രയോഗിക്കൽ.

12.2 അടിസ്ഥാന നിർവ്വചനങ്ങൾ

സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തം പഠിക്കുന്നതിന് മുമ്പ്, നമുക്ക് കഴിഞ്ഞ ക്ലാസ്സിൽ എപ്പോഴും പ്രയോഗിക്കുന്ന പദപ്രയോഗങ്ങളായ നിർവ്വചനത്തെക്കുറിച്ച് നോക്കാം.

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 232 3/16/2023 4:41:25 PM



നിർവ്വചനം 12.1

ഒരു വ്യക്തമായ ഫലം കിട്ടുന്നതിനുള്ള പ്രക്രിയയാണ് **പരിക്ഷണം** എന്നു വിളിക്കുന്നത്.

നിർവ്വചനം 12.2

നിർണ്ണയ പരിക്ഷണം എന്നത് പരിക്ഷണത്തിലെ ഓരോ ഫലത്തേയും ചില നിബന്ധനകൾ കൊണ്ട് പ്രവചിക്കാൻ സാധിക്കും.

നിർവ്വചനം 12.3

ഒരു യാദൃശ്ചിക പരിക്ഷണം (നിർണ്ണയ പരിക്ഷണമല്ലാത്ത) എന്ന പരിക്ഷണത്തിൽ

(i) എല്ലാ ഫലത്തേയും മുൻപേ അറിയാൻ സാധിക്കും,

(ii) ഓരോ ഫലങ്ങളേയും മുൻപേ പ്രവചിക്കാൻ സാധിക്കില്ല

(iii) ചില നിബന്ധനകൾ മൂലം തുടർച്ചയായി ലഭിക്കും.

ഒരു പകിട ഉരുട്ടുന്നു, ഒരു നാണയം ടോസ്സ് ചെയ്യുന്നു എന്നതെല്ലാം യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിന്റെ ഉദാഹരണങ്ങളാണ്

നിർവ്വചനം 12.4

ഒരു **സാധാരണ സംഭവം** (പ്രാഥമിക സംഭവം) എന്നത് യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിന്റെ സാധ്യമായ ഫലമാണ്. കൂടാതെ അതിനെ പിരിക്കാൻ സാധിക്കുകയില്ല.

നിർവ്വചനം 12.5

ഒരു **സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ്** എന്നത് യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിലെ ഒരു കൂട്ടം സാധ്യതകളാണ്. സാമ്പിൾ സ്പെയ്സിലെ ഓരോ അംഗവും പ്രാഥമിക സംഭവമാണ്.

വിശദികരണം 12.1

(1) (i) ഒരു പകിട ഉരുട്ടുന്നുവെങ്കിൽ, സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(ii) ഒരു നാണയം ടോസിട്ടാൽ, സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് $S = \{H, T\}$.

(2) (i) ഒരു നാണയം തല കിട്ടുന്നവരെ ടോസിടുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ. എങ്കിൽ എത്ര തവണ ടോസിടണമെന്നും സാമ്പിൾ സ്പെയ്സും ആർക്കും മുൻകൂട്ടി നിർവ്വചിക്കാൻ പറ്റില്ല.
$S = \{H, TH, TTH, TTTH, ...\}$ ഒരു അനന്തത ഗണമാണ്.

(ii) ട്രെയിൻ ടിക്കറ്റ് വാങ്ങാൻ കാത്തിരിക്കുന്ന യാത്രാക്കാരുടെ എണ്ണവുമായി ബന്ധപ്പെട്ട സാമ്പിൾ സപെയ്സ് $S = \{0,1,2,...\}$.

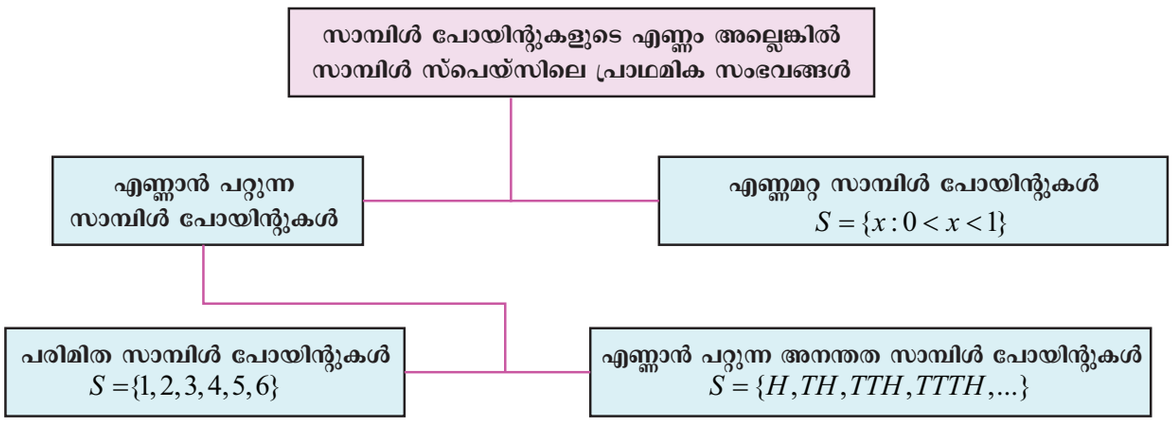
(3) (i) 0 നും 1 നും ഇടയിൽ യാദൃശ്ചികമായി ഒരു സംഖ്യ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നത് ഒരു പരിക്ഷണമെങ്കിൽ സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് $S = \{ x: 0 < x < 1\}$.

(ii) ഒരു ട്യൂബ് ലൈറ്റിന്റെ ആയുസിന്റെ (t മണിക്കൂർ) സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ്
$S = \{ t: 0 < t < 1000\}$.

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 233 3/16/2023 4:41:27 PM

2,3 ൽ നിന്നും നമ്മൾക്ക് രണ്ട് തരം അനന്തമായ ഗണങ്ങളെ വേർതിരിച്ചറിയേണ്ടതുണ്ട്, ഇവിടെ ഒന്ന് മറ്റൊന്നിനേക്കാൾ വലുതാണ്. പ്രത്യേകിച്ചും 2 ലെ S നെ **എണ്ണാൻ പറ്റുന്ന അനന്തതയെന്നും**, അതേ സമയം 3 ലെ S നെ **എണ്ണമറ്റ അനന്തതയെന്നും** വിളിക്കുന്നു. എണ്ണാൻ പറ്റുന്ന അനന്ത ഗണത്തിലെ ഓരോ അംഗവും നിസർഗ്ഗ സംഖ്യകളുമായി വൺ ടു വൺ ഫലത്തിലാണ്. വേറെ രിതിയിൽ, നമ്മൾക്ക് ഈ അംഗത്തിനെ എണ്ണമറ്റ ഗണത്തിൽ ചേർക്കാൻ സാധിക്കില്ല.

മേൽപ്പറഞ്ഞ ഉദാഹരണത്തിൽ, സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് എന്നത് എണ്ണാൻ പറ്റുന്ന അല്ലെങ്കിൽ എണ്ണമറ്റ പ്രാഥമിക സംഭവങ്ങളുടെ ഒരു കൂട്ടമാണ്.



12.3 പരിമിത സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ്

ഈ വിഭാഗത്തിൽ നമ്മൾ സാമ്പിൾ സ്പെയിസിനെ അധികപക്ഷമായി പരിമിത എണ്ണം പോയിന്റുകളു മായി ചുരുക്കുന്നു.

സംഭവങ്ങളുടെ തരങ്ങൾ

ഈ അദ്ധ്യായത്തിൽ പൊതുവായി ഉപയോഗിക്കുന്ന വിവിധ തര സംഭവങ്ങളെ നമുക്ക് നിർവ്വചിക്കാം.

- സുനിശ്ചിത സംഭവം
- പൂരക സംഭവം
- പരസ്പര ഉൾക്കൊള്ളുന്ന സംഭവം
- സമസന്ദർഭ സംഭവം
- അസാദ്ധ്യ സംഭവം
- പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങൾ
- സമ്പൂർണ്ണ സംഭവങ്ങൾ
- സ്വതന്ത്ര സംഭവങ്ങൾ (സംഭാവ്യതയുടെ ആശയങ്ങൾ പഠിച്ചതിനുശേഷം നിർവ്വചിക്കാം)

നിർവ്വചനം 12.6

സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് പരിമിതമാണെങ്കിൽ, സാമ്പിൾ സ്പെയ്സിലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ഉപഗണത്തെ **സംഭവം** എന്നു പറയുന്നു. അതായത്, ഘാത ഗണത്തിലെ $\mathcal{P}(S)$ എല്ലാ അംഗങ്ങളെ സംഭവമെന്ന് നിർവ്വചിക്കുന്നു. ഒരു സംഭവമെന്നത് സാമ്പിൾ പോയിന്റുകളുടെ അല്ലെങ്കിൽ പ്രാഥമിക സംഖയകളുടെ കൂട്ടമാണ്.

സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് S എന്നത് **സുനിശ്ചിത സംഭവമാണ്**. S ലെ ശൂന്യഗണം $\varnothing$ എന്നത് **അസാദ്ധ്യ സംഭവമാണ്.**

നിർവ്വചനം 12.7

എല്ലാ സംഭവം A യ്ക്കും മറ്റൊരു സംഭവമായ $\overline{A}$ നെ യോജിപ്പിക്കുകയും അതിനെ A യുടെ **പൂരക സംഭവമെന്നും** വിളിക്കുന്നു. ഇതിനെ A അല്ല എന്ന സംഭവമായി വിളിക്കുന്നു.

വിശദികരണം 12.2

എന്നത് ഒരു സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് $S = \{1,2,3,4\}$ എന്നിരിക്കട്ടെ.

S ന്റെ എല്ലാ സാദ്ധ്യമായ ഉപഗണങ്ങളെ കുറിക്കുന്നത് $P(S)$ എന്നിരിക്കട്ടെ

$$\mathcal{P}(S) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\},$$
$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$$

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 234 3/16/2023 4:41:27 PM

(i) $\mathscr{P}(S)$ ലെ എല്ലാ അംഗങ്ങളും സംഭവങ്ങളാണ്.

(ii) $\varnothing$ ഒരു അസാധ്യ സംഭവമാണ്.

(iii) $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$ എന്നിവ സാധാരണ സംഭവങ്ങൾ (അല്ലെങ്കിൽ) പ്രാഥമിക സംഭവങ്ങളാണ്.

(iv) $\{1, 2, 3, 4\}$ ഒരു സുനിശ്ചിത സംഭവമാണ്.

നിർവ്വചനം 12.8

രണ്ട് സംഭവങ്ങൾ ഒരേ സമയം സംഭവിക്കാൻ കഴിയാത്തതിനെ പരസ്പര **വർജ്ജക സംഭവങ്ങൾ** എന്നു പറയുന്നു. $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ നെ പരസ്പര വർജ്ജകങ്ങളെങ്കിൽ $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j.$

നിർവ്വചനം 12.9

രണ്ട് സംഭവങ്ങൾ **പരസ്പരം ഉൾക്കൊള്ളുന്നു.** രണ്ടും ഒരേസമയം സംഭവിക്കുമ്പോൾ $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ പരസ്പരം ഉൾക്കൊള്ളുന്നുവെങ്കിൽ $A_i \cap A_j \neq \varnothing,\ i \neq j$

വിശദീകരണം 12.3

ഒരു പകിട നമ്മൾ ഉരുട്ടുമ്പോൾ, സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

(i) $\{1, 3\} \cap \{2, 4, 5, 6\} = \varnothing$, ആയതുകൊണ്ട്, സംഭവങ്ങൾ $\{1,3\}$ഉം$\{2,4,5,6\}$ ഉം പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങളാണ്.

(ii) സംഭവങ്ങൾ $\{1,6,\},\{2,3,5\}$ എന്നിവ പരസ്പര വർജ്ജകങ്ങളാണ്.

(iii) സംഭവങ്ങൾ $\{2,3,5\},\{5,6\}$ ഉം പരസ്പര ഉൾക്കൊള്ളുന്ന സംഭവങ്ങളാണ്, കാരണം $\{2, 3, 5\} \cap \{5, 6\} = \{5\} \neq \varnothing$

നിർവ്വചനം 12.10

$A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ എന്നിവ **സമ്പൂർണ്ണ സംഭവങ്ങളെങ്കിൽ,** $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k = S$

നിർവ്വചനം 12.11

$A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ എന്നിവ **പരസ്പര വർജ്ജകങ്ങളും സമ്പൂർണ്ണ സംഭവങ്ങളെങ്കിൽ**

(i) $A_i \cap A_j = \varnothing,\ i \neq j$ (ii) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k = S$

വിശദീകരണം 12.4

ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ, സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

ചില സംഭവങ്ങൾ $\{2,3\},\{1,3,5\},\{4,6\},\{6\}$ ഉം$\{1,5\}$ ഉം ആണ്.

(i) $\{2, 3\} \cup \{1, 3, 5\} \cup \{4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$ (സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ്) ആയതിനാൽ $\{2,3\},\{1,3,5\},\{4,6\}$ എന്ന സംഭവങ്ങൾ സമ്പൂർണ്ണ സംഭവങ്ങളാണ്.

(ii) അതുപോലെ $\{2,3\},\{4,6\}$ഉം$\{1,5\}$ ഉം സമ്പൂർണ്ണ സംഭവങ്ങളാണ്.

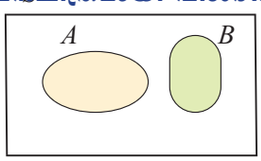
(iii) $\{1,3,5\},\{4,6\},\{6\}$ ഉം$\{1,5\}$ ഉം സമ്പൂർണ്ണ സംഭവങ്ങൾ അല്ല.

(കാരണം $\{1, 3, 5\} \cup \{4, 6\} \cup \{6\} \cup \{1, 5\} \neq S$)

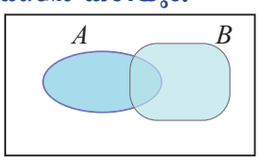
(iv) $\{2,3\},\{4,6\}$,ഉം$\{1,5\}$ പരസ്പര വർജ്ജകങ്ങളും സമ്പൂർണ്ണ സംഭവങ്ങളുമാണ്. കാരണം

$\{2,3\} \cap \{4,6\} = \varnothing,\ \{2,3\} \cap \{1,5\} = \varnothing, \{4,6\} \cap \{1,5\} = \varnothing$ and $\{2, 3\} \cup \{4, 6\} \cup \{1, 5\} = S$

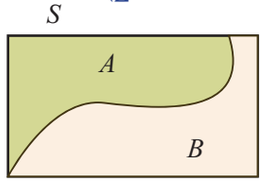
സംഭവങ്ങളുടെ തരങ്ങളെ സാമ്പിൾ സ്പെയ്സുമായി യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ അവയെ താഴെ കാണുന്ന വെൻചിത്രമായി വിശദീകരിക്കാൻ കഴിയും.



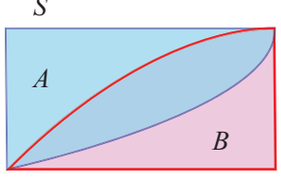
A യും B യും പരസ്പര വർജ്ജകം



A യും B യും പരസ്പരം ഉൾക്കൊള്ളുന്നു



A യും B യും പരസ്പരം വർജ്ജകവും സമ്പൂർണ്ണവും



A യും B യും പരസ്പരം ഉൾക്കൊള്ളുകയും വർജ്ജകവും

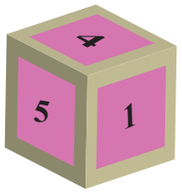
നിർവ്വചനം 12.12

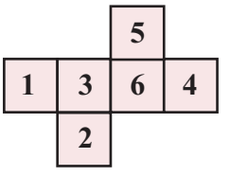
സംഭവങ്ങളിൽ തുല്യ സാധ്യതയുള്ളവയെ **സമസാദ്ധ്യത സംഭവങ്ങൾ** എന്നു വിളിക്കുന്നു.

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 235 3/16/2023 4:41:29 PM

സമസന്ദർഭ സംഭവങ്ങളുടെ ഉദാഹരണങ്ങൾ.

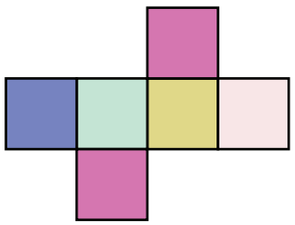
മുഖത്തിലെ സംഖ്യ	1	2	3	4	5	6
കിട്ടുന്നതിനുള്ള സാധ്യത	1	1	1	1	1	1





സമസന്ദർഭ സംഭവങ്ങളല്ലാത്തതിന്റെ ഉദാഹരണം: ഒരു നിറപകിട ചിത്രത്തിൽ ഉള്ളതുപോലെ ഉരുട്ടുന്നു.

മുഖത്തിലെ നിറം					
കിട്ടുന്നതിനുള്ള സാധ്യത	1	1	1	2	1



അതുപോലെ, നമ്മൾ ഒരു നാണയം ടോസിട്ടാൽ, തല കിട്ടുന്നതിനും അല്ലെങ്കിൽ പൂവ് കിട്ടുന്നതും സമസന്ദർഭമാണ്.

സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് കണ്ടുപിടിക്കുന്ന രീതികൾ

വിശദീകരണം 12.5

രണ്ട് നാണയങ്ങൾ ടോസിട്ടാൽ സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ്

(i) $S = \{H, T\} \times \{H, T\} = \{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$ or $\{HH, HT, TH, TT\}$

(ii) ഒരു നാണയവും പകിടയും ഒരേ സമയം ഉരുട്ടിയാൽ, സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ്

$S = \{H, T\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$ or

$S = \{(H, 1), (H, 2), (H, 3), (H, 4), (H, 5), (H, 6), (T, 1), (T, 2), (T, 3), (T, 4), (T, 5), (T, 6)\}$.

കൂടാതെ നമുക്ക് ഫലത്തിലെ ക്രമം മാറ്റുവാൻ സാധിക്കും. താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പട്ടികയിൽ ചില പരീക്ഷണങ്ങളുടെ സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് കൊടുത്തിട്ടുണ്ട്.

യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണം	ആകെ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം	സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ്
ഒരു നാണയം ടോസ്സിടുന്നു.	$2^1 = 2$	$\{H,\ T\}$
രണ്ട് നാണയങ്ങൾ ടോസ്സിടുന്നു.	$2^2 = 4$	$\{HH,\ HT,\ TH,\ TT\}$
മൂന്ന് നാണയങ്ങൾ ടോസ്സിടുന്നു.	$2^3 = 8$	$\{HHH,\ HHT,\ HTH,\ THH,\ HTT,\ THT,\ TTH,\ TTT\}$
ഒരു പകിട ഉരുട്ടുന്നു.	$6^1 = 6$	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
രണ്ട് പകിടകൾ ഉരുട്ടുന്നു. അല്ലെങ്കിൽ ഒരു പകിട രണ്ട് പ്രാവശ്യം	$6^2 = 36$	$\{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 236 3/16/2023 4:41:30 PM

ചിഹ്നങ്ങൾ

A യും B യും രണ്ട് സംഭവങ്ങളെന്നിരിക്കട്ടെ

(i) $A \cup B$ യെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് A അല്ലെങ്കിൽB രണ്ടും കിട്ടുന്നതിനുള്ള ഫലം.

(ii) $A \cap B$ യെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് A യും B. $A \cap B$ യും ഒരേ സമയം സംഭവിക്കുന്നതിനുള്ള ഫലമാണ് AB എന്ന് എഴുതാം

(iii) $\overline{A}$ or A' or A^c നെ A യുടെ സംഭവിക്കാത്ത ഫലമാണ്.

(iv) $(A \cap \overline{B})$ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് A മാത്രം സംഭവിക്കുന്നതിനുള്ള ഫലമാണ്.

പ്രയോഗി: സിദ്ധാന്തങ്ങൾ മുഖേന കിട്ടുന്ന അറിവ് നിരീക്ഷണത്തിൽ നിന്നും അല്ലെങ്കിൽ അനുഭവത്തിൽ നിന്നും അല്ല

12.4 സംഭാവ്യത

12.4.1 സംഭാവ്യതയുടെ ശാസ്ത്രീയമായ നിർവ്വചനം (സമസന്ദർഭങ്ങളിൽ ബെർണോലിയുടെ തത്വം)

മുമ്പുള്ള ക്ലാസ്സുകളിൽ സംഭാവ്യതയുടെ ആവർത്തന നിർവ്വചന (A posteriori) നിരീക്ഷണത്തിൽ നിന്നും അല്ലെങ്കിൽ അനുഭവത്തിൽ നിന്നും കിട്ടുന്ന അറിവും അതിന്റെ പ്രശ്നങ്ങളും പരിഹരിച്ചിട്ടുണ്ട്. ഇപ്പോൾ സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന സൈദ്ധാന്തിക സമീപനത്തെക്കുറിച്ച് പഠിക്കാം.

പോസ്റ്റീരിയോറി : നിരീക്ഷണത്തിൽ നിന്നും അല്ലെങ്കിൽ അനുഭവത്തിൽ നിന്നും കിട്ടുന്ന അറിവ്

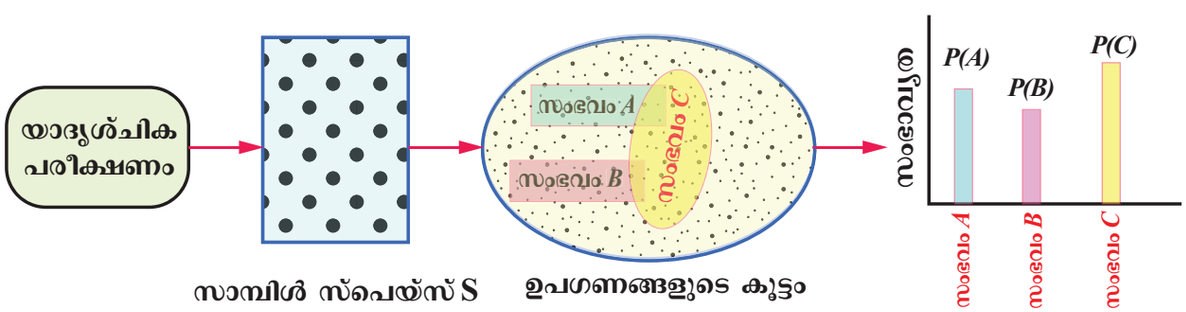
ശാസ്ത്രീയ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ അടിസ്ഥാന ധാരണ എന്നത് യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിലെ ഫലങ്ങൾ സമസന്ദർഭ രീതിയിൽ ലഭിക്കും. n സമ്പൂർണ്ണവും പരസ്പര വർജ്ജകവും സന്ദർഭ ഫലവും ലഭിക്കുന്ന ഒരു പരീക്ഷണവും കൂടാതെ സംഭവം A യിൽ m അനുകൂലവുമെങ്കിൽ A യുടെ ഗണിത സംഭാവ്യതയെ $\frac{m}{n}$ എന്ന അനുപാതത്തിൽ നിർവ്വചിക്കാം. ഇതിനെ, $P(A) = \frac{m}{n}$. എന്നെഴുതാം.

നിർവ്വചനം 12.13

ഒരു യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണത്തിൽ S എന്ന സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് എന്നും A എന്നത് സംഭവമെന്നിരിക്കട്ടെ. $n(S)$ ഉം $n(A)$ യും യഥാക്രമം S ലേയും A ലേയും അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം എന്നിരിക്കട്ടെ, എങ്കിൽ S എന്ന സംഭവത്തിന്റെ സംഭാവ്യതയെ

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{സംഭവിക്കുന്നതിനുള്ള അനുകൂലമായ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം } A}{S \text{ ൽ സമ്പൂർണ്ണ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം}}$$

ഓരോ സംഭാവ്യതയുടെ മോഡലിലും ഒരടിസ്ഥാന പ്രക്രിയ ഉൾപ്പെടുന്നതിനെ താഴെ കാണുന്ന ചിത്രത്തിൽ കാണിക്കുന്നു.



സംഭാവ്യതയുടെ ശാസ്ത്രീയമായ നിർവ്വചനം അതിന്റെ പ്രയോഗത്തിൽ പരിമിതപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്നത് പരിമിതമായ എണ്ണം ഫലങ്ങളുള്ള സാഹചര്യങ്ങളിൽ മാത്രമാണ്. ഇത് പ്രധാനമായും വ്യതിരിക്തമായ സംഭവങ്ങളായി കണക്കാക്കുകയും അതിന്റെ രീതികൾ പ്രധാനമായും കോമ്പിനേറ്റോറിയൽ ആയിരുന്നു. ഒരു നാണയം ടോസ്സിടുക പോലുള്ള ചില യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണങ്ങൾക്ക് ഇത് ബാധകമല്ല, ഒരു തല പ്രത്യക്ഷപ്പെടുന്നതുവരെ അത് അനന്തമായ ഫലങ്ങളുടെ സാധ്യതയ്ക്ക് കാരണമാകുന്നു. ശാസ്ത്രീയ നിർവ്വചനത്തിന്റെ മറ്റൊരു പരിമിതി സാധ്യമായ ഒരോ ഫലവും തുല്യമായിരിക്കണമെന്ന വ്യവസ്ഥയായിരുന്നു.

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 237 3/16/2023 4:41:32 PM

സംഭാവ്യതയുടെ ശാസ്ത്രീയ നിർവ്വനത്തിലെ ഇത്തരം പരിമിതികൾ ഗണങ്ങളുടെ ആശയത്തെ അടിസ്ഥാനമാക്കിയുള്ള സംഭാവ്യതയുടെ ആധുനിക നിർവ്വചനത്തിന്റെ പരിണാമത്തിലേയ്ക്ക് നയിച്ചു. ഇത് ഒരു സൈദ്ധാന്തിക സമീപനം എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

എ എൻ കോൾമോഗോറോവ്

ആധുനിക സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ അടിത്തറ സ്ഥാപിച്ചത് റഷ്യൻ ശാസ്ത്രജ്ഞനായ ആൻഡ്രി നിക്കോളയേവിച്ച് കോൾമോഗോറോവാണ്. റിച്ചാർഡ് വോൺ മിസസ് അവതരിപ്പിച്ച സാമ്പിൾ സ്പെയിസും, മെഷർ സിദ്ധാന്തവും സംഭാവ്യതയുടെ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ സൈദ്ധാന്തിക സമ്പ്രദായത്തിന് 1933 ൽ അടിത്തറ നൽകി. (ചിത്രം) എ എൻ കോൾമോഗോറോവ് നിർദ്ദേശിച്ച സൈദ്ധാന്തിക സമീപനം നമ്മൾ ഇവിടെ അവതരിപ്പിക്കുന്നു. ഇതിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ പ്രോബബിലിറ്റി സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ ആധുനിക സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ യുക്തിപരമായി തികഞ്ഞ ഘടന നിർമ്മിക്കാൻ കഴിയും. സൈദ്ധാന്തിക സംഭാവ്യതയുടെ ഒരു പ്രത്യേക രീതിയാണ് ശാസ്ത്രീയ സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തം. സംഭാവ്യതയുടെ സിദ്ധാന്തം തെളിയിക്കുവാനായി ഒരുകൂട്ടം നിയമങ്ങളാണ് നമ്മൾ ഉപയോഗിക്കുന്നത്.

12.4.2 സംഭാവ്യതയുടെ സൈദ്ധാന്തിക സമീപനം

സംഭാവ്യതയുടെ സിദ്ധ തത്വങ്ങൾ

S എന്നത് പരിമിത സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് എന്നിരിക്കട്ടെ, $\mathscr{P}(S)$ എന്നത് സംഭവങ്ങളുടെ തരങ്ങളും P എന്നത് ഒരു വാസ്തവിക മൂല്യഫലനവും എങ്കിൽ $P(A)$ എന്നത് A യുടെ സംഭാവ്യത ഫലനമാണ്. ഇവിടെ താഴെയുള്ള സിദ്ധ തത്വങ്ങൾ ശരിയാണ്:

$[P_1]$ ഏത് സംഭവം A, യ്ക്കും $P(A) \geq 0$ (നെഗറ്റീവ് അല്ലാത്ത സിദ്ധ തത്വം)

$[P_2]$ ഏത് രണ്ട് പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങൾക്കും

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (സങ്കലന സിദ്ധ തത്വം)

$[P_3]$ സുനിശ്ചിത സംഭവം എങ്കിൽ $P(S) = 1$ (നോർമലൈസേഷൻ സിദ്ധ തത്വം)

കുറിപ്പ് 12.1

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$

(ii) If $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് S, ലെ പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങളാണെങ്കിൽ

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n)$$

പരിമിത സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തങ്ങൾ (തെളിവ് ഇല്ല)

ഫലങ്ങൾ സമസന്ദർഭങ്ങളാണെങ്കിൽ സിദ്ധാന്തം 12.1 ഉപയോഗിക്കാം. അല്ലെങ്കിൽ സിദ്ധാന്തം 12.2 ആണ് ഉപയോഗിക്കേണ്ടത്.

സിദ്ധാന്തം 12.1

S എന്നത് സാമ്പിൾ സ്പെയ്സും S ലെ ഏതെങ്കിലും ഒരു ഉപഗണം A യും എങ്കിൽ, $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$. അതിനാൽ $P(A)$ സംഭാവ്യതയുടെ സിദ്ധതത്വമായ $[P_1], [P_2], [P_3]$ നെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.

സിദ്ധാന്തം12.2

S എന്നത് പരിമിത സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് $S = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_n\}$. എന്നിരിക്കട്ടെ. ഒരു പരിമിത സംഭാവ്യതയെ നമുക്ക് S ലെ ഓരോ അംഗം a_i നെ ഒരു വാസ്തവിക സംഖ്യ p_i, യുമായി യോജിപ്പിക്കുമ്പോൾ കിട്ടുന്നതാണ് a_i യുടെ സംഭാവ്യത. താഴെ കാണുന്ന സവിശേഷതകളാൽ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.

(i) ഓരോ $p_i \geq 0$. (ii) p_i യുടെ തുക 1 ആണ്, അതായത്, $\sum p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_1 = 1$.

സംഭാവ്യത $P(A)$, യെ A യിലുള്ള പോയിന്റുകളുടെ സംഭാവ്യതകളുടെ തുകയായി നിർവ്വചിക്കുന്നു. എങ്കിൽ $P(A)$ സംഭാവ്യതകളുടെ സിദ്ധതത്വങ്ങളായ $[P_1], [P_2], [P_3]$ നെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.

കുറിപ്പ്: ചില സമയങ്ങളിൽ പരിമിത സാമ്പിൾ സ്പെയ്സിലെ പോയിന്റുകളുടെ സംഭാവ്യതകളെ ഒരു പട്ടികയായി ചേർക്കാം.

ഫലം	a_1	a_2	a_3	...	a_n
സംഭാവ്യത	p_1	p_2	p_3	...	p_n

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 238 3/16/2023 4:41:36 PM

ഇവിടെ സംഭാവ്യതയെ അനുമാനങ്ങളിൽ നിന്ന് നിർമ്മിക്കാമെന്നതിന്റെ വിശദീകരണം കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

വിശദികരണം 12.6

(1) $S=\{1,2,3\}$. എന്നിരിക്കട്ടെ $\mathscr{P}(S)$ എന്നത് S, ന്റെ ഘാത ഗണവും $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$.

എങ്കിൽ $P(\{1\})=\dfrac{1}{3}$, $P(\{2\})=\dfrac{1}{3}$, $P(\{3\})=\dfrac{1}{3}$,

$[P_1],[P_2]$, $[P_3]$ എന്ന സംഭാവ്യതയുടെ സിദ്ധതത്വങ്ങളെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു. ഇവിടെ ഫലങ്ങൾ സമസന്ദർഭങ്ങളാണ്.

(2) $S=\{1,2,3\}$. എന്നിരിക്കട്ടെ $\mathscr{P}(S)$ എന്നത് S ന്റെ ഘാതഗണവും S ലെ സംഭവമായ A യുടെ സംഭാവ്യത $P(A)$, നെ A എന്ന പോയിന്റിലെ സംഭാവ്യതകളുടെ തുകയായി നിർവ്വചിക്കുമ്പോൾ,

$$P(\{1\})=\frac{1}{2},\ P(\{2\})=\frac{1}{4},P(\{3\})=\frac{1}{4},$$

സംഭാവ്യതയുടെ സിദ്ധതത്വങ്ങളായ $[P_1],[P_2]$, $[P_3]$ എന്നിവയെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.

(3) $S=\{1,2,3\}$ എന്നിരിക്കട്ടെ, $\mathscr{P}(S)$ എന്നത് S ന്റെ ഘാതഗണവും S ലെ സംഭവമായ A യുടെ സംഭാവ്യത $P(A)$ നെ, A എന്ന പോയിന്റിലെ സംഭാവ്യതകളുടെ തുകയായി നിർവ്വചിക്കുമ്പോൾ

$$P(\{1\})=0,\ P(\{2\})=\frac{1}{\sqrt{2}},\ \text{കൂടാതെ}\quad P(\{3\})=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

സംഭാവ്യതയുടെ സിദ്ധതത്വങ്ങളായ $[P_1],[P_2]$, $[P_3]$ എന്നിവയെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.

(2) ഉം (3), ൽ നിന്നും ഫലങ്ങൾ സമസന്ദർഭങ്ങളല്ല.

കുറിപ്പ് 12.2

അപരിമേയ സംഖ്യകളും സംഭാവ്യതകളായി പ്രവർത്തിക്കാനാകും.

ക്ലാസ്മുറി പ്രവർത്തനം: ഓരോ കുട്ടികളും ഒരു നാണയം 10 തവണ ടോസ്സ് ചെയ്യുമ്പോൾ,

കണക്കാക്കുക: $p=\dfrac{\text{തല കിട്ടിയതിന്റെ എണ്ണം}}{10}$

ടോസ്സിടുമ്പോൾ തലകളുടെ സഞ്ചിത അനുപാതം കാണുക. ടോസ്സുകളുടെ എണ്ണം ഉയരുമ്പോൾ $p\to\dfrac{1}{2}$

ഉദാഹരണം 12.1

ഒരു പരീക്ഷണത്തിന് A, B, C, എന്നീ പരസ്പര വർജ്ജനമായ മൂന്ന് ഫലങ്ങൾ ഉണ്ടെങ്കിൽ സംഭാവ്യത അനുവദനീയമാണോ എന്ന് ഓരോ കേസ്സിലും പരിശോധിക്കുക.

(i) $P(A)=\dfrac{4}{7}$, $P(B)=\dfrac{1}{7}$, $P(C)=\dfrac{2}{7}$.

(ii) $P(A)=\dfrac{2}{5}$, $P(B)=\dfrac{1}{5}$, $P(C)=\dfrac{3}{5}$.

(iii) $P(A)=0.3$, $P(B)=0.9$, $P(C)=-0.2$.

(iv) $P(A)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $P(B)=1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $P(C)=0$.

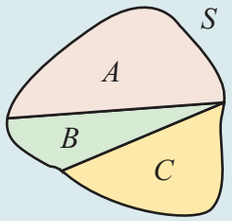
(v) $P(A)=0.421$, $P(B)=0.527$ $P(C)=0.042$.

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 239 3/16/2023 4:41:40 PM

നിർദ്ധാരണം

പരീക്ഷണത്തിൽ A, B, C, എന്നീ പരസ്പര വർജ്ജകമായ മൂന്ന് ഫലങ്ങളുള്ളതിനാൽ, അവ സമ്പൂർണ്ണ സംഭവങ്ങളാകുന്നു.

$$\Rightarrow S = A \cup B \cup C$$



അതുകൊണ്ട്, സംഭാവ്യതയുടെ സിദ്ധതത്വമനുസരിച്ച്

$P(A) \geq 0, \quad P(B) \geq 0, \quad P(C) \geq 0$

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) = P(S) = 1$

(i) $P(A) = \frac{4}{7} \geq 0, \quad P(B) = \frac{1}{7} \geq 0, \quad P(C) = \frac{2}{7} \geq 0$ എന്നതിൽ നിന്നും

Also $P(S) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{4}{7} + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = 1$

അതുകൊണ്ട്, സംഭാവ്യതയുടെ നിയോഗഭ്യാസം അനുവദനീയമാണ്.

(ii) തന്നിട്ടുള്ള $P(A) = \frac{2}{5} \geq 0, \quad P(B) = \frac{1}{5} \geq 0$, ഉം $P(C) = \frac{3}{5} \geq 0$ യിൽ നിന്നും

$P(S) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6}{5} > 1$ ആണ്

അതുകൊണ്ട്, സംഭാവ്യതയുടെ നിയോഗഭ്യാസം അനുവദനീയമല്ല.

(iii) $P(C) = -0.2$ ഒരു നെഗറ്റീവ് ആയതിനാൽ, നിയോഗഭ്യാസം അനുവദനീയമല്ല.

(iv) നിയോഗഭ്യാസം അനുവദനീയമാണ്, കാരണം

$P(A) = \frac{1}{\sqrt{3}} \geq 0, \quad P(B) = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \geq 0, \quad P(C) = 0 \geq 0$

$P(S) = P(A) + P(B) + P(C) = \frac{1}{\sqrt{3}} + 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + 0 = 1.$

(v) $P(A) = 0.421 \geq 0, \quad P(B) = 0.527 \geq 0, \quad P(C) = 0.042 \geq 0,$
എന്നിരുന്നാലും സംഭാവ്യതയുടെ തുക

$P(S) = P(A) + P(B) + P(C) = 0.421 + 0.527 + 0.042 = 0.990 < 1.$

അതുകൊണ്ട്, നിയോഗഭ്യാസം അനുവദനീയമല്ല.

ഉദാഹരണം 12.2

ആദ്യ പത്ത് പോസിറ്റീവ് പൂർണ്ണാങ്കത്തിൽ നിന്നും ഒരു പൂർണ്ണാങ്കത്തെ യാദൃശ്ചികമായി തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. അത് (i) ഇരട്ട സംഖ്യ (ii) മൂന്നിന്റെ ഗുണനം കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ്

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}, \quad n(S) = 10$

A എന്നത് ഒരു ഇരട്ടസംഖ്യ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്ന സംഭവവും

B എന്നത് ഒരു മൂന്നിന്റെ പൂർണ്ണാങ്ക ഗുണനം തിരഞ്ഞെടുക്കുന്ന സംഭവം എന്നിരിക്കട്ടെ

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, \quad n(A) = 5,$

$B = \{3, 6, 9\}, \quad n(B) = 3$

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 240 3/16/2023 4:41:46 PM

P (ഒരു ഇരട്ട പൂർണ്ണാങ്കം തിരഞ്ഞെടുക്കുമ്പോൾ) = $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$

P (മൂന്നിന്റെ ഗുണിതമായ പൂർണ്ണാങ്കം തിരഞ്ഞെടുക്കുമ്പോൾ)= $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{3}{10}.$

ഉദാഹരണം 12.3

മൂന്ന് നാണയങ്ങൾ ഒരേ സമയം ടോസ്സിടുന്നു. (i) കൃത്യം ഒരു തല (ii) കുറഞ്ഞത് ഒരു തല (iii) അധികപക്ഷം ഒരു തല കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവ്യത കാണുക?

നിർദ്ധാരണം:

ശ്രദ്ധിക്കുക, മൂന്ന് നാണയങ്ങൾ ഒരേ സമയം ടോസ്സിടുന്നു. = ഒരു നാണയം മൂന്ന് തവണ ടോസ്സിടുന്നു.

സിമ്പിൾ സ്പെയ്സ് $S=\{H,T\}\times\{H,T\}\times\{H,T\}$

$S=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\},\ n(S)=8$

A എന്നത് കൃത്യം ഒരു തല കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം, B എന്നത് കുറഞ്ഞത് ഒരു തല കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം, C എന്നത് അധികപക്ഷം ഒരു തല കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം എന്നിരിക്കട്ടെ.

$A=\{HTT,THT,TTH\};\ n(A)=3$

$B=\{HTT,THT,TTH,HHT,HTH,THH,HHH\};\ n(B)=7$

$C=\{TTT,HTT,THT,TTH\};\ n(C)=4.$

അതുകൊണ്ട്, ആവശ്യമായിട്ടുള്ള സംഭാവ്യതകളാണ്

(i) $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{8}$

(ii) $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{7}{8}$

(iii) $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$

കുറിപ്പ് 12.3

സാമ്പിൾ സ്പെയ്സിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം വളരെ ചെറുതായിരുന്നാൽ സംഭവത്തിലെ അംഗങ്ങളെ വിരലിൽ എണ്ണമെടുത്ത് പരിഹരിക്കാനാകും.(ചിത്രം)പക്ഷേസാമ്പിൾസ്പെയ്സിലെഅംഗങ്ങളുടെഎണ്ണംവളരെ അധികമായിരുന്നാൽ കോമ്പിനറ്റോറിക്സ് ഉപയോഗിച്ച് പരിഹരിക്കാം.

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പ്രശ്നത്തിൽ കോമ്പിനറ്റോറിക്സ് ഉപയോഗിച്ച് സാമ്പിൾ സ്പെയ്സിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണവും സംഭവങ്ങളും കണ്ടു പിടിക്കാം.

ഉദാഹരണം 12.4

പത്ത് നാണയങ്ങൾ ടോസ്സിടുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ. (i) കൃത്യം രണ്ട് തലകൾ (ii) അധികപക്ഷം രണ്ട് തലകൾ (iii) കുറഞ്ഞത് രണ്ട് തലകൾ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

പത്ത് നാണയങ്ങൾ ഒരേ സമയം ടോസ്സിടുന്നു = ഒരു നാണയം പത്ത് തവണ ടോസ്സിടുന്നു.

S എന്നത് സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് എന്നിരിക്കട്ടെ. അതായത്, പത്ത് പ്രാവശ്യം

അതായത് $\underbrace{\{\ ,\ \}\times\{\ ,\ \}\times\{\ ,\ \}\times\cdots\times\{\ ,\ \}}$

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 241 3/16/2023 4:41:56 PM

A എന്നത് കൃത്യം രണ്ട് തലകൾ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം,

B എന്നത് അധികപക്ഷമായി രണ്ട് തലകൾ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം,

C എന്നത് കുറഞ്ഞത് രണ്ട് തലകൾ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം എന്നിരിക്കട്ടെ.

പത്ത് നാണയങ്ങൾ ടോസ്സിടുമ്പോൾ സാമ്പിൾ സ്പെയ്സിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം ആണ് $2^n = 2^{10} = 1024$

$$n(S) = 1024$$

$$n(A) = {}^{10}C_2 = 45$$

$$n(B) = {}^{10}C_0 + {}^{10}C_1 + {}^{10}C_2 = 1 + 10 + 45 = 56$$

$$n(C) = {}^{10}C_2 + {}^{10}C_3 + {}^{10}C_4 + \cdots + {}^{10}C_{10}$$

$$= n(S) - ({}^{10}C_0 + {}^{10}C_1) = 1024 - 11 = 1013$$

ആവശ്യമായിട്ടുള്ള സംഭാവ്യതകൾ

(i) $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{45}{1024}$

(ii) $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{56}{1024} = \dfrac{7}{128}$

(iii) $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{1013}{1024}.$

ഉദാഹരണം 12.5

ഒരു പകിട ഉരുട്ടുന്നുവെന്ന് കരുതുക.

(i) ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യ (ii) മൂന്നിന്റെ ഗുണനം കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

S എന്നത് സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് എന്നിരിക്കട്ടെ.

A എന്നത് ഇരട്ട സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം

B എന്നത് മൂന്നിന്റെ ഗുണനം കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം.

അതുകൊണ്ട്,

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$ $\Rightarrow n(S) = 6$

$A = \{2, 4, 6\}$ $\Rightarrow n(A) = 3$

$B = \{3, 6\}$ $\Rightarrow n(B) = 2$

ആവശ്യമായിട്ടുള്ള സംഭവ്യതകൾ

(i) P (ഒരു ഇരട്ട സംഖ്യ ലഭിക്കുന്നതിന്) $= P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

(ii) P (മൂന്നിന്റെ ഗുണിതം ലഭിക്കുന്നതിന്) $= P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}.$

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 242 3/16/2023 4:41:57 PM

ഉദാഹരണം 12.6

ഒരു ജോഡി പകിടകൾ ഉരുട്ടുമ്പോൾ, തുക

(i) 7 (ii) 7 അല്ലെങ്കിൽ 9 (iii) 7 അല്ലെങ്കിൽ 12?

നിർദ്ധാരണം

സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6),$
$(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6),$
$(3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6),$
$(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6),$
$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6),$
$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

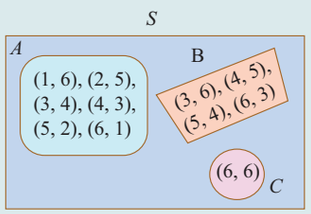
മൊത്ത ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം $= 6^2 = 36 = n(S)$

തുക *7* കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം A യും തുക *9* കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം B യും തുക *12* കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം C യും എന്നിരിക്കട്ടെ.

$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} \Rightarrow n(A) = 6$

$B = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\} \Rightarrow n(B) = 4$

$C = \{(6,6)\} \Rightarrow n(C) = 1$



(i) P (തുക 7 കിട്ടുന്നതിന്) $= P(A)$

$$= \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(ii) P (തുക 7 അല്ലെങ്കിൽ 9 കിട്ടുന്നതിന്) $=$ $P(A$ അല്ലെങ്കിൽ $B) = P(A \cup B)$

$$= P(A) + P(B)$$

(A യും B യും പരസ്പര വർജ്ജ്യങ്ങളായതുകൊണ്ട് , $A \cap B = \varnothing$)

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{18}$$

(iii) P (തുക 7 അല്ലെങ്കിൽ 12 കിട്ടുന്നതിന്) $= P(A$ അല്ലെങ്കിൽ $C) = P(A \cup C)$

$= P(A) + P(C)$ (A, C പരസ്പരം വർജ്ജകങ്ങളായതു കൊണ്ട്)

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{6}{36} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36}.$$

ഉദാഹരണം 12.7

മൂന്ന് മത്സരാർത്ഥികൾ X, Y, Z ഈ വർഷത്തിലെ ചെസ്സ് മത്സരത്തിൽ കളിച്ച് FIDE (ലോക ചെസ്സ് ഫെഡറേഷൻ) കപ്പ് നേടാൻ പോകുന്നു. X ന് Y നെ സംബന്ധിച്ച് മൂന്ന് മടങ്ങും Y ന് Z നെ സംബന്ധിച്ച് രണ്ട് മടങ്ങും സാധ്യതയുണ്ടെങ്കിൽ (ചിത്രം) X, Y, Z കപ്പ് ജയിക്കുന്നതിനുള്ള സാധ്യത കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

A, B, C എന്നത് ഈ വർഷത്തിലെ FIDE കപ്പ് യഥാക്രമം X, Y, Z ജയിക്കുന്നതിനുള്ള സംഭവങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ. X ന് Y നെ സംബന്ധിച്ച് മൂന്ന് മടങ്ങ് ജയിക്കാനുള്ള സാധ്യതയുണ്ടെങ്കിൽ

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 243 3/16/2023 4:41:59 PM

$$A : B :: 3 : 1. \qquad (1)$$

Y ന് Z നെ സംബന്ധിച്ച് രണ്ട് മടങ്ങ് സാധ്യതയുണ്ടെങ്കിൽ

$$B : C :: 2 : 1 \qquad (2)$$

(1) ഉം (2) ൽ നിന്നും

$$A : B : C :: 6 : 2 : 1$$

$A = 6k,\ \ B = 2k,\ \ C = k$, ഇവിടെ k ഒരു ആനുപാതിക സ്ഥിരാങ്കമാണ്.

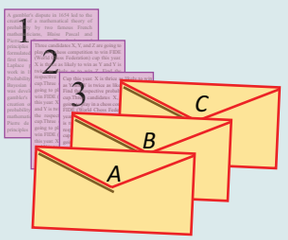
X ന് കപ്പ് കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $\quad P(A) = \frac{6k}{9k} = \frac{2}{3}$

Y ന് കപ്പ് കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $\quad P(B) = \frac{2k}{9k} = \frac{2}{9}$

Z ന് കപ്പ് കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത $\quad P(C) = \frac{k}{9k} = \frac{1}{9}.$

ഉദാഹരണം 12.8

മൂന്ന് എഴുത്തുകൾ എഴുതി മൂന്ന് വ്യത്യസ്ത വ്യക്തികൾക്കായി മൂന്ന് കവറിൽ മേൽവിലാസം എഴുതി വയ്ക്കുന്നു. മേൽവിലാസം നോക്കാതെ (i) കൃത്യം ഒരു എഴുത്ത് ശരിയായ കവറിൽ പോകുന്നു. (ii) ഒരു എഴുത്തുകളും ശരിയായ കവറിൽ പോകുന്നില്ല എന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക?



നിർദ്ധാരണം

A, B, C യെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് കവറുകളും 1, 2, 3 യെ കുറിക്കുന്നത് അതിനനുസരിച്ചുള്ള എഴുത്തുകളും എന്നിരിക്കട്ടെ.

എഴുത്തുകൾ കവറിൽ ഇടുന്നതിന്റെ വ്യത്യസ്ത രീതികൾ പട്ടികയിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു.

c_i നെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് സംഭവങ്ങളുടെ ഫലങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ

X എന്നത് എഴുത്തുകളെ കൃത്യം ഒരു ശരിയായ കവറിലിടുന്ന സംഭവം എന്നിരിക്കട്ടെ.

Y എന്നത് ഒരു എഴുത്തുകളും ശരിയായ കവറിലിടുന്നില്ല എന്ന സംഭവം എന്നിരിക്കട്ടെ.

ഫലങ്ങൾ

കവർ	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
A	1	1	2	2	3	3
B	2	3	1	3	1	2
C	3	2	3	1	2	1

$S = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6\},\ n(S) = 6$

$$X = \{c_2, c_3, c_6\}, \qquad n(X) = 3$$
$$Y = \{c_4, c_5\} \qquad n(Y) = 2$$
$$P(X) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad P(Y) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

ഉദാഹരണം 12.9

മാട്രിക്സ് $M = \begin{bmatrix} x & y \\ z & 1 \end{bmatrix}$ എന്നിരിക്കട്ടെ. ഗണം $\{1, 2, 3\}$, ൽ നിന്നും യാദൃശ്ചികമായി x, y and z തിരഞ്ഞെടുത്താൽ കൂടാതെ $(i.e., x = y = z)$, എങ്കിൽ M എന്ന മാട്രിക്സ് സിംഗുലർ മാട്രിക്സ് ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 244 3/16/2023 4:42:02 PM

നിർദ്ധാരണം

തന്നിട്ടുള്ള മാട്രിക്സ് M സിംഗുലറാണെങ്കിൽ,

$$\begin{vmatrix} x & y \\ z & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

അതായത്, $x - yz = 0.$

അതിനാൽ, (x, y, z) തെരഞ്ഞെടുക്കുന്ന വഴികളാണ്

$\{(1,1,1),(2,1,2),(2,2,1),(3,1,3),(3,3,1)\} = A$ (എന്നിരിക്കട്ടെ)

അനുകൂലമായ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം $n(A) = 5$

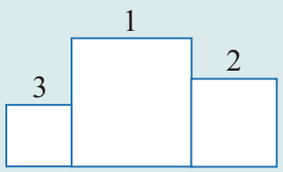
സാധ്യതയുള്ള ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം $n(S) = 3^3 = 27$

തന്നിട്ടുള്ള മാട്രിക്സ് സിംഗുലർ മാട്രിക്സ് ആകുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത

$$p = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{27}.$$

ഉദാഹരണം 12.10

ഒരു കായിക മത്സരത്തിലെ ജയിച്ചവരുടെ സ്റ്റാന്റിൽ മൂന്ന് മരകഷ്ണങ്ങൾ ചിത്രത്തിൽ കാണിച്ചതുപോലെ ഉണ്ട്. ഇവിടെ ആറ് വ്യത്യസ്ത നിറങ്ങൾ ലഭ്യമാണെങ്കിലും മൂന്ന് മരകഷ്ണങ്ങളെ പെയിന്റ് ചെയ്യുമ്പോൾ രണ്ട് കഷ്ണങ്ങളിൽ ഒരേ നിറം വരാൻ പാടില്ല. ആറ് നിറങ്ങളിലൊന്ന് ചുവപ്പ് നിറവും (ചിത്രം) അത് ഏറ്റവും ചെറിയ കഷ്ണതത്തിൽ പെയിന്റ് ചെയ്യുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.



നിർദ്ധാരണം

S എന്നത് സാമ്പിൾ സ്പെയ്സും A എന്നത് ഏറ്റവും ചെറിയ ഭാഗത്തെ ചുവപ്പ് നിറം കൊണ്ട് പെയിന്റ് നൽകുന്നതിനുള്ള സംഭവം എന്നിരിക്കട്ടെ.

$$n(S) = 6P_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

$$n(A) = 5 \times 4 = 20$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

	6	6	3
$n(S)$	6	5	4
$n(A)$	5	4	ചുവപ്പ്

12.4.3 ഓഡ്സ്

ഓഡ്സ് എന്ന വാക്ക് പൊതുവായി സംഭാവ്യതയിലും സ്റ്റാറ്റിസ്റ്റിക്സിലും ഉപയോഗിക്കുന്നു. ഓഡ്സ് എന്ന വാക്ക് A എന്ന സംഭവത്തിന് അനുകൂലമായ സാധ്യതയാണ്. 'a' യെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് ഒരു സംഭവം നടത്തുന്നതിനുള്ള വഴികളുടെ എണ്ണവും 'b' നെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് ഒരു സംഭവം നടക്കാതിരിക്കാനുള്ള വഴികളുടെ എണ്ണവുമാണ്.

എങ്കിൽ സംഭവം A യുടെ ഓഡ്സ് $a : b$ യും

$$P(A) = \frac{a}{a+b}.$$

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 245 3/16/2023 4:42:04 PM

കൂടാതെ, ഓഡ്സിന്റെ അനുകൂലമായ സംഭവം $a : b$ യും ഓഡ്സിന്റെ എതിരായുള്ള സംഭവം $b : a$ യും തുല്യമാണ്.

ഒരു സംഭവത്തിന്റെ സംഭാവ്യത p എങ്കിൽ, ഓഡ്സിന്റെ അനുകൂലമായ സംഭവം p to $(1-p)$ യും ഓഡ്സിന്റെ എതിരായുള്ള സംഭവം $(1-p)$ മുതൽ p യും ആണ്.

വിശദീകരണം 12.7

(i) ഒരു പകിട ഉരുട്ടുന്നുവെന്ന് കരുതുക.

S എന്നത് സാമ്പിൾ സ്പെയ്സും A എന്നത് 5 കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം എന്നിരിക്കട്ടെ.

$n(S) = 6, \quad n(A) = 1 \ , n(\bar{A}) = 5$.

ഇതിനെ, ഇങ്ങനെയും ആവിഷ്ക്കരിക്കാം.

ഓഡ്സിൽ അനുകൂലമായ A $1:5$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{1}{5}$, ആണ്, ഓഡ്സിന്റെ എതിരായ A $5:1$ അല്ലെങ്കിൽ $\frac{5}{1}$ ആണ്,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(A)+n(\bar{A})} = \frac{1}{5+1} = \frac{1}{6} = \frac{n(A)}{n(S)}.$$

(ii) B എന്നത് ഒരു സംഭവവും ഓഡ്സിൽ **അനുകൂലമായ** B 3:5, ആണ്, എങ്കിൽ $P(B) = \frac{3}{8}$

(iii) C എന്നത് ഒരു സംഭവവും ഓഡ്സിൽ **എതിരായുള്ള** C 4:11, ആണ്, എങ്കിൽ $P(C) = \frac{11}{15}$.

ഉദാഹരണം 12.11

ഒരു മനുഷ്യന്റെ പേക്കറ്റിൽ 2 പത്തുരൂപ നോട്ടുകളും, 4 നൂറ് രൂപ നോട്ടുകളും 6 500 രൂപ നോട്ടുകളും ഉണ്ട്. രണ്ട് നോട്ടുകൾ യാദൃശ്ചികമായി തിരഞ്ഞെടുത്താൽ, രണ്ടും 100 രൂപ നോട്ടുകളായി വരുന്നതിന്റെ ഓഡ്സും സംഭാവ്യതയും കാണുക?

നിർദ്ധാരണം

S എന്നത് സാമ്പിൾ സ്പെയ്സും A എന്നത് 2 നൂറ് രൂപ നോട്ടുകൾ കിട്ടുന്നതിന്റെ സംഭവവും എന്നിരിക്കട്ടെ.

അതുകൊണ്ട്, $n(S) = 12c_2 = 66, \quad n(A) = 4c_2 = 6, \ n(\bar{A}) = 66 - 6 = 60$

അതുകൊണ്ട് Aയുടെ അനുകൂലമായ ഓഡ്സ് 6: 60 ആണ്.

അതായത്, A യുടെ അനുകൂലമായ ഓഡ്സ് 1: 10, ആണ്, $P(A) = \frac{1}{11}$.

അഭ്യാസം 12.1

(1) ഒരു പരീക്ഷണത്തിന്റെ നാല് തരം പരസ്പരം വർജ്ജകവും സമ്പൂർണ്ണവുമായ ഫലങ്ങളാണ് A, B, C, D താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഓരോ കേസ്സിലും സംഭാവ്യത അനുവദനീയമാണോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക.

(i) $P(A) = 0.15$, $P(B) = 0.30$, $P(C) = 0.43$, $P(D) = 0.12$

(ii) $P(A) = 0.22$, $P(B) = 0.38$, $P(C) = 0.16$, $P(D) = 0.34$

(iii) $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B) = \frac{3}{5}$, $P(C) = -\frac{1}{5}$, $P(D) = \frac{1}{5}$

(2) രണ്ട് നാണയങ്ങൾ ഒരേ സമയം ടോസ്സിട്ടാൽ
(i) ഒരു തലയും ഒരു പൂവും (ii) അധികപക്ഷം രണ്ട് പൂവുകൾ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവ്യത കാണുക.

(3) ഒരു പെട്ടിയിൽ 5 മാമ്പഴവും 4 ആപ്പിളും ഉണ്ട്. രണ്ട് പഴങ്ങൾ യാദൃശ്ചികമായി എടുക്കുമ്പോൾ (i) ഒരു മാമ്പഴവും മറ്റേത് ആപ്പിളും (ii) രണ്ടും ഒരേതരം പഴവർഗ്ഗം കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവ്യത കാണുക.

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 246 3/16/2023 4:42:06 PM

(4) 53 ഞായറാഴ്ചകൾ

(i) അധി വർഷമല്ലാത്ത (ii) അധി വർഷത്തിൽ വരുന്നതിനുള്ള സാധ്യത കാണുക.

(5) എട്ട് നാണയങ്ങൾ ടോസ്സിട്ടാൽ

(i) കൃത്യം രണ്ട് പൂവുകൾ (ii) കുറഞ്ഞത് രണ്ട് പൂവുകൾ (iii) പരമാവധി രണ്ട് പൂവുകൾ

(6) ആദ്യത്തെ നൂറ് പോസിറ്റീവ് പൂർണ്ണാങ്കത്തിൽ നിന്നും ഒരു പൂർണ്ണാങ്കം തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. തെരഞ്ഞെടുത്ത പൂർണ്ണാങ്കം അഭാജ്യസംഖ്യ അല്ലെങ്കിൽ 8 ന്റെ ഗുണിതം കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക?

(7) ഒരു ബാഗിൽ 7 ചുവപ്പും 4 കറുപ്പും പന്തുകൾ ഉണ്ട്. 3 പന്തുകൾ യാദൃശ്ചികമായി എടുത്താൽ

(i) എല്ലാം ചുവപ്പ് (ii) ഒരു ചുവപ്പും 2 കറുപ്പും കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

(8) ഒരു ക്രിക്കറ്റ് ക്ലബ്ബിൽ 16 അംഗങ്ങളുണ്ട്, അതിൽ 5 പേർക്ക് മാത്രം ബൗൾ ചെയ്യാനാകും. കുറഞ്ഞത് 3 ബൗളർമാരുള്ള 11 അംഗ ടീമിനെ തെരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.?

(9) (i) സംഭവം A നടക്കുന്നതിനുള്ള ഓഡ്സ് 5 മുതൽ 7 ആണെങ്കിൽ $P(A)$ നെ കാണുക.

(ii) $P(B) = \frac{2}{5}$ എങ്കിൽ, സംഭവം B നടക്കുന്നതിനുള്ള ഓഡ്സിനെ വിശദീകരിക്കുക.

12.5 സംഭാവ്യതയുടെ ചില അടിസ്ഥാന സിദ്ധാന്തങ്ങൾ

അവസാന ഭാഗത്തിൽ പരിഹരിച്ച് പ്രശ്നത്തെ ബന്ധിപ്പിക്കുന്നത് പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങളാണ്. അതുകൊണ്ട്, നമ്മൾ $P(A \text{ or } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. എന്ന സൂത്രവാക്യം ഉപയോഗിച്ചു. പക്ഷേ, സംഭവങ്ങൾ പരസ്പരം ഉൾക്കൊള്ളുന്നതാണെങ്കിൽ സങ്കലന സിദ്ധാന്തത്തിൽ $(A \cap B)$ നെ രണ്ട് എണ്ണമായി എണ്ണുന്നു. സംഭവം പരസ്പരം ഉൾക്കൊള്ളുന്നതാണെങ്കിൽ നമുക്ക് തനിയെ ഒരു സൂത്രവാക്യം ഉണ്ട്.

സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ വികസനത്തിൽ, എല്ലാ ഫലങ്ങളും നേരിട്ടോ അല്ലാതയോ ഇവിടെ സംഭാവ്യതയുടെ സിദ്ധതത്വം ഉപയോഗിച്ച് വികസിപ്പിക്കുന്നതാണ്.

സിദ്ധാന്തം 12.3

അസാധ്യ സംഭവത്തിന്റെ സംഭാവ്യത പൂജ്യം ആണ്. അതായത്,

$$\boxed{P(\varnothing) = 0}$$

തെളിവ്

അസാധ്യ സംഭവത്തിൽ സാമ്പിൾപോയിന്റുകൾ ഇല്ല.

അതായത്, $S \cup \varnothing = S$

$$P(S \cup \varnothing) = P(S)$$

$$P(S) + P(\varnothing) = P(S) \quad (S \text{ ഉം } \varnothing \text{ ഉം പരസ്പരം വർജ്ജകങ്ങൾ})$$

$$P(\varnothing) = 0$$

ഉദാഹരണം 12.12

ഒരു പകിട ഉരുട്ടുമ്പോൾ, സംഖ്യ 7 കിട്ടുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക.

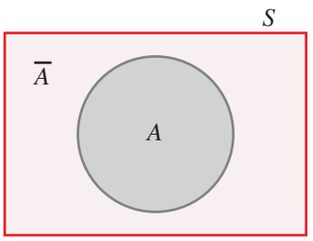
നിർദ്ധാരണം

സംഖ്യ 7 കിട്ടുന്ന സംഭവം ഒരു അസാദ്ധ്യ സംഭവമാണ്. അതുകൊണ്ട് $P(7 = 0)$ കിട്ടുന്നു

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 247 3/16/2023 4:42:12 PM

സിദ്ധാന്തം12.4

A യുടെ പൂരക സംഭവം $\overline{A}$ എങ്കിൽ,



$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

തെളിവ്

S എന്നാൽ സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് എന്നിരിക്കട്ടെ

$$A \cup \overline{A} = S$$

$$P(A \cup \overline{A}) = P(S)$$

$$P(A) + P(\overline{A}) = P(S) \quad (A \text{ യും } \overline{A} \text{ ഉം പരസ്പര വർജ്ജകങ്ങളായതുകൊണ്ട്})$$

$$= 1$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) \text{ അല്ലെങ്കിൽ } P(A) = 1 - P(\overline{A})$$

ഉദാഹരണം 12.13

ഒൻപത് നാണയങ്ങൾ ടോസ്സിടുമ്പോൾ, കുറഞ്ഞത് രണ്ട് തലകൾ കിട്ടുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

S എന്നത് സാമ്പിൾ സ്പെയ്സും A എന്നത് കുറഞ്ഞത് രണ്ട് തലകൾ കിട്ടുന്നതിന്റെ സംഭവം എന്നിരിക്കട്ടെ.

അതിനാൽ, $\overline{A}$ നെ സൂചിപ്പിക്കുന്നത് അധികപക്ഷം ഒരു തല കിട്ടുന്ന സംഭവം.

$$n(S) = 2^9 = 512, \quad n(\overline{A}) = 9C_0 + 9C_1 = 1 + 9 = 10$$

$$P(\overline{A}) = \frac{10}{512} = \frac{5}{256}$$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{5}{256} = \frac{251}{256}$$

$\sum_{r=0}^{1} 9C_r$ നെക്കാളും

$\sum_{r=2}^{9} 9C_r$ നെ എളുപ്പത്തിൽ കണക്കാക്കാം

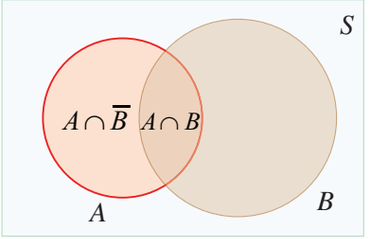
സിദ്ധാന്തം 12.5

A, B എന്നീ രണ്ട് സംഭവങ്ങളിൽ B എന്ന സംഭവത്തിന്റെ പൂരകം $\overline{B}$, എങ്കിൽ

$$\boxed{P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)}$$

തെളിവ്

ചിത്രത്തിൽ നിന്നും,



$$(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = A$$

$$P\left[(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B)\right] = P(A)$$

$$P(A \cap \overline{B}) + P(A \cap B) = P(A)$$

$((A \cap \overline{B})$ഉം $(A \cap B)$ യും പരസ്പര വർജ്ജകങ്ങളായതു കൊണ്ട്)

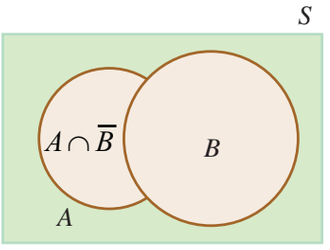
$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 248 3/16/2023 4:42:15 PM

സിദ്ധാന്തം 12.6 (സംഭാവ്യതയുടെ സങ്കലന സിദ്ധാന്തം)

A യും B യും ഏതെങ്കിലും രണ്ട് സംഭവമാണെങ്കിൽ

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$



തെളിവ്

തെളിവ് ചിത്രത്തിൽനിന്നും,

$$A\cup B = (A\cap \overline{B})\cup B$$

$$P(A\cup B) = P\left[(A\cap \overline{B})\cup B\right]$$

$$= P(A\cap \overline{B})+P(B) \qquad ((A\cap \overline{B}) \text{ ഉം } B \text{ യും പരസ്പര വർജ്ജകങ്ങൾ})$$

$$= [P(A)-P(A\cap B)]+P(B)$$

അതുകൊണ്ട് $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ □

കുറിപ്പ് 12.4

മുകളിലുള്ള സിദ്ധാന്തത്തെ ഏതെങ്കിലും 3 സംഭവങ്ങളുമായി വിപുലികരിക്കുന്നു.

(i) $P(A\cup B\cup C) = \{P(A)+P(B)+P(C)\}$
$- \{P(A\cap B)+P(B\cap C)+P(C\cap A)\}+P(A\cap B\cap C)\}$

(ii) $P(A\cup B\cup C) = 1-P(\overline{A\cup B\cup C}) = 1-P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})$

ഉദാഹരണം 12.14

$P(A)=0.52$, $P(B)=0.43$, ഉം $P(A\cap B)=0.24$, ഉം തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ

(i) $P(A\cap \overline{B})$ (ii) $P(A\cup B)$ (iii) $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ (iv) $P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

നിർദ്ധാരണം

(i) $P(A\cap \overline{B}) = P(A)-P(A\cap B)$

$= 0.52-0.24 = 0.28$

$P(A\cap \overline{B}) = 0.28.$

(ii) $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$= 0.52+0.43-0.24$

$P(A\cup B) = 0.71.$

(iii) $P(\overline{A}\cap\overline{B}) = P(\overline{A\cup B})$ (ഡിമോർഗൻ നിയമം അനുസരിച്ച്)

$= 1-P(A\cup B)$

$= 1-0.71 = 0.29.$

(iv) $P(\overline{A}\cup\overline{B}) = P(\overline{A\cap B})$ (ഡിമോർഗൻ നിയമം അനുസരിച്ച്)

$= 1-P(A\cap B) = 1-0.24$

$= 0.76.$

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 249 3/16/2023 4:42:20 PM

ഉദാഹരണം 12.15

മത്സര പരിക്ഷകളിൽ ജോലിക്ക് തയ്യാറാകുന്ന ഒരു പെണ്ണ സംസ്ഥാന ഗവൺമെന്റ് ജോലി കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത 0.12 ഉം കേന്ദ്ര ഗവണമെന്റ് ജോലി കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത 0.25 ഉം രണ്ടും കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത 0.07 ആണ്. (*i*) അവൾക്ക് കുറഞ്ഞത് രണ്ട് ജോലിയിൽ ഒന്ന് (*ii*) അവൾക്ക് കൃത്യം രണ്ട് ജോലിയിൽ ഒന്ന് കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത ക.ണുക.

നിർദ്ധാരണം

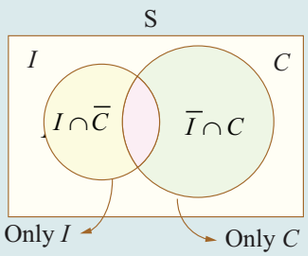
I എന്നത് സംസ്ഥാന ഗവൺമെന്റ് ജോലി കിട്ടുന്നതിനും Cഎന്നത് കേന്ദ്ര ഗവണമെന്റ് ജോലി കിട്ടുന്നതിനുമുള്ള സംഭവങ്ങൾ എന്നിരിക്കട്ടെ.

$P(I) = 0.12,\ \ P(C) = 0.25,\ P(I \cap C) = 0.07$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

(*i*) P (കുറഞ്ഞത് രണ്ട് ജോലിയിൽ ഒന്ന്) $= P(I \text{ or } C) = P(I \cup C)$

$= P(I) + P(C) - P(I \cap C)$

$= 0.12 + 0.25 - 0.07 = 0.30$



(*ii*) P(രണ്ട് ജോലിയിൽ ഒന്ന് മാത്രം) $= P[I$ മാത്രം അല്ലെങ്കിൽ C മാത്രം$]$.

$= P(I \cap \overline{C}) + P(\overline{I} \cap C)$

$= \{P(I) - P(I \cap C)\} + \{P(C) - P(I \cap C)\}$

$= \{0.12 - 0.07\} + \{0.25 - 0.07\}$

$= 0.23.$

അഭ്യാസം 12.2

(1) A യും B യും പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങളും $P(A) = \frac{3}{8}$ ഉം, $P(B) = \frac{1}{8}$ എങ്കിൽ

(i) $P(\overline{A})$ (ii) $P(A \cup B)$ (iii) $P(\overline{A} \cap B)$ (iv) $P(\overline{A} \cup \overline{B})$

(2) A യും B യും രണ്ട് സംഭവങ്ങൾ ഒരു യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണവുമായി ബന്ധമുണ്ടെന്നും

$P(A) = 0.35,\ P(A$ അല്ലെങ്കിൽ $B) = 0.85,\ P(A, B) = 0.15.$

(i) P(മാത്രം B) (ii) $P(\overline{B})$ (iii) P(മാത്രം A)

(3) ഒരു പകിട രണ്ടു തവണ എറിയുന്നു. A എന്ന സംഭവം ആദ്യത്തെ പകിടയിൽ 5 കാണിക്കുന്നു എന്നും B എന്ന സംഭവം രണ്ടാമത്തെ പകിടയിൽ 5 കാണിക്കുന്നുവെങ്കിൽ $P(A \cup B)$ കാണുക.

(4) A എന്ന സംഭവം നടക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത 0.5 ഉം B നടക്കുന്നതിന് 0.3 ഉം ആണ്. A യും B യും പരസ്പരം വർജ്ജക സംഭവങ്ങളെങ്കിൽ

(i) $P(A \cup B)$ (ii) $P\left(A \cap \overline{B}\right)$ (iii) $P\left(\overline{A} \cap B\right)$. എന്ന സംഭവ്യതകളെ കാണുക

(5) ഒരു നഗരത്തിൽ 2 പയർ ഇഞ്ചിനുകൾ സ്വതന്ത്ര്യമായി പ്രവർത്തിക്കുന്നു. ആവശ്യമുള്ളപ്പോൾ, ഒരു ഫയർ ഇഞ്ചിൻ നിലവിലുള്ളതിനുള്ള സംഭാവ്യത 0.96 ആണ്.

(i) ആവശ്യമുള്ളപ്പോൾ ഒരു ഫയർ ഇഞ്ചിൻ നിലവിലുള്ളതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക?

(ii) ആവശ്യമുള്ളപ്പോൾ ഒരു ഫയർ ഇഞ്ചിനും നിലവില്ലാത്തതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക?

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 250 3/16/2023 4:42:25 PM

(6) ഒരു പുതിയ റിയൽവേ പാലത്തിന്റെ ഡിസൈനിന് അവാർഡ് കിട്ടുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത 0.48 ഉം ശരിയായിട്ടുള്ള മെറ്റീരിയലുകൾ ഉപയോഗിച്ചതിന് അവാർഡ് കിട്ടുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത 0.36 ഉം രണ്ടിനും അവാർഡ് കിട്ടുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത 0.2 ഉം ആണ്. (i) കുറഞ്ഞത് രണ്ടിൽ ഒരു അവാർഡ് കിട്ടുന്നതിന് (ii)കൃത്യം ഒരു അവാർഡ് കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

12.6 നിബന്ധന പ്രകാരമുള്ള സംഭാവ്യത

വിശദീകരണം 12.8

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള ഉദാഹരണത്തിൽ നിന്നും നിബന്ധനകൾക്കുള്ള സംഭാവ്യതയുടെ ആശയം മനസ്സിലാക്കാം.

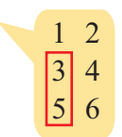
ഒരു പകിട ഉരുട്ടുന്നുവെന്ന് കരുതുക., എങ്കിൽ സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ആണ്. ഇപ്പോൾ, നമുക്ക് രണ്ട് ചോദ്യങ്ങളുണ്ട്.

Q_1: 2 ൽ കൂടുതൽ ഒറ്റ സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യതയെ കാണുക.?

Q_2: പകിട ഒറ്റസംഖയയെ കാണിക്കുന്നുവെങ്കിൽ, 2 ൽ കൂടുതൽ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യതയെ കാണുക?

രീതി 1

2 ൽ കൂടുതൽ ഒറ്റ സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം $\{3, 5\}$ ആണ്.

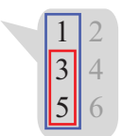


P_1 എന്നത് 2 ൽ കൂടുതൽ ഒറ്റ സംഖ്യ കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യത എന്നിരിക്കട്ടെ

$$P_1 = \frac{n(\{3,5\})}{n(\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

രീതി 2

പകിടയിൽ ഒറ്റ സംഖ്യ കാണിക്കുന്നുവെങ്കിൽ അതായത് നമ്മൾ സാമ്പിൾ സ്പെയ്സിനെ ഒറ്റ സംഖ്യ മാത്രമുള്ള ഒരു ഉപഗണമായി ചുരുക്കുന്നു.



അതായത്, $S_1 = \{1, 3, 5\}$. അടുത്തതായി 2 ൽ കൂടുതൽ ഒറ്റ സംഖ്യ കിട്ടുന്ന സംഭവത്തിന്റെ സംഭാവ്യതയെ കാണാം. അത് P_2 എന്നിരിക്കട്ടെ

$$P_2 = \frac{n(\{3,5\})}{n(\{\ 1,\ 3,\ 5\})} = \frac{2}{3}$$

മുകളിലുള്ള രണ്ട് രീതിയിലും അനുകൂലമായ സംഭവങ്ങൾ ഒന്നാണ്, പക്ഷേ സമ്പൂർണ്ണ ഫലങ്ങളുടെ എണ്ണം വ്യത്യസ്തമാണ്. രീതി 2 ൽ നമ്മൾ ഒരു നിബന്ധനയെ സാമ്പിൾ സ്പെയ്സിൽ വെയ്ക്കുന്നു, പിന്നീട് സംഭാവ്യതയെ കാണുന്നു. ഈ രിതിയാണ് നിബന്ധനയ്ക്കുള്ള സംഭാവ്യത എന്ന് പറയുന്നത്.

ഇതിനെ, സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് ഉപയോഗിച്ച് ഇങ്ങനെ എഴുതാം

$$P_2 = \frac{\dfrac{n(\{3,5\})}{n(\{1,2,3,4,5,6\})}}{\dfrac{n(\{1,3,5\})}{n(\{1,2,3,4,5,6\})}} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$$

പ്രധാനപ്പെട്ട കുറിപ്പ്: സംഭാവ്യതയിലും നിബന്ധനയ്ക്കുള്ള സംഭാവ്യതയിലും സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് ഒന്നാണ്.

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 251 3/16/2023 4:42:33 PM

നിർവ്വചനം 12.14

B എന്ന സംഭവത്തിൽ **നിബന്ധനയ്ക്കുള്ള സംഭാവ്യതയിൽ**, സംഭവം A നേരത്തെ നടന്നു എന്നതിനെ $P(B/A)$ കൊണ്ട് സൂചിപ്പിച്ച് നമുക്ക് ഇങ്ങനെ നിർവ്വചിക്കാം

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},\ P(A)\neq 0 \text{ ആകുന്ന പക്ഷം}$$

അതുപോലെ,

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\ P(B)\neq 0 \text{ ആകുന്ന പക്ഷം}$$

ഉദാഹരണം 12.16

$P(A)=0.6,\quad P(B)=0.5,$ ഉം $P(A\cap B)=0.2$ എങ്കിൽ

(i) $P(A/B)$ (ii) $P(\overline{A}/B)$ (iii) $P(A/\overline{B})$. കാണുക

നിർദ്ധാരണം

$P(A)=0.6,\quad P(B)=0.5,$ കൂടാതെ $P(A\cap B)=0.2$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

(i) $$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.2}{0.5}=\frac{2}{5}$$

(ii) $$P(\overline{A}/B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{0.5-0.2}{0.5}=\frac{0.3}{0.5}=\frac{3}{5}.$$

(iii) $$P(A/\overline{B})=\frac{P(A\cap \overline{B})}{P(\overline{B})}$$

$$=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}$$

$$=\frac{0.6-0.2}{1-0.5}=\frac{0.4}{0.5}=\frac{4}{5}.$$

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 252 3/16/2023 4:42:37 PM

കുറിപ്പ് 12.5

$$P(A/B)+P(\overline{A}/B)=1$$

ഉദാഹരണം 12.17

ഒരു പകിട ഉരുട്ടുന്നു. അത് ഒറ്റസംഖ്യയെ കാണിക്കുന്നുവെങ്കിൽ 5 കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യതയെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

A എന്നത് പട്ടികയിൽ ഒറ്റസംഖ്യ കാണുന്ന സംഭവം എന്നിരിക്കട്ടെ

B എന്നത് 5 കിട്ടുന്നതിനുള്ള സംഭവം. എങ്കിൽ,

അതുകൊണ്ട്, $A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{5\}$, $A\cap B = \{5\}$.

അതുകൊണ്ട്, $P(A)=\frac{3}{6}$ ഉം $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

P (5 കിട്ടുന്നു/പകിടയിൽ ഒറ്റ സംഖ്യ) $= P(B/A)$

$$= \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \quad = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}$$

$$P(B/A)=\frac{1}{3}.$$

നിബന്ധനയ്ക്കുള്ള സംഭാവ്യതയെ മാറ്റി നിർവ്വചിക്കുമ്പോൾ സംഭാവ്യതയുടെ ഗുണന സിദ്ധാന്തം ലഭിക്കും.

സിദ്ധാന്തം 12.7

(സംഭാവ്യതയുടെ ഗുണന സിദ്ധാന്തം)

ഒരേ സമയം രണ്ട് സംഭവങ്ങൾ A യും B യും നടക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യതയാണ്.

$$P(A\cap B) = P(A/B)P(B)$$
അല്ലെങ്കിൽ
$$P(A\cap B) = P(B/A)P(A)$$

12.6.1 സ്വതന്ത്ര സംഭവങ്ങൾ

സംഭവങ്ങൾ സ്വതന്ത്രമാണെങ്കിൽ ഒരു സംഭവം മറ്റേ സംഭാവ്യതയിലെ സംഭവം നടക്കുന്നതിനും ഇല്ലാത്തതിനും ഇത് ഒരു തടസ്സമാകുകയില്ല.

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 253 3/16/2023 4:42:40 PM

നിർവ്വചനം 12.15

രണ്ട് സംഭവങ്ങൾ A യും B യും സ്വതന്ത്രമാണ് എങ്കിൽ, എങ്കിൽ മാത്രം

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

കുറിപ്പ് 12.6

ഈ നിർവ്വചനത്തിന് സമതുല്യമാണ്

$$P(A / B) = P(A) \text{ എങ്കിൽ } P(B) > 0$$

$$P(B / A) = P(B) \text{ എങ്കിൽ } P(A) > 0$$

(1) $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ പരസ്പര സ്വതന്ത്ര്യങ്ങളാണെങ്കിൽ

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \cdots \cdot P(A_n).$$

സിദ്ധാന്തം 12.8

A യും B യും സ്വതന്ത്രങ്ങളാണെങ്കിൽ

(i) $\overline{A}$ ഉം $\overline{B}$ ഉം സ്വതന്ത്രങ്ങൾ

(ii) A ഉം $\overline{B}$ ഉം സ്വതന്ത്രങ്ങൾ

(iii) $\overline{A}$ ഉം B ഉം സ്വതന്ത്രങ്ങൾ

തെളിവ്

(i) $\overline{A}$ ഉം $\overline{B}$ ഉം സ്വതന്ത്രങ്ങൾ എന്ന് തെളിയിക്കാൻ

A യും B യും സ്വതന്ത്രങ്ങളായതുകൊണ്ട്

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot (PB)$$

$\overline{A}$ ഉം $\overline{B}$ ഉം സ്വതന്ത്രങ്ങളാണെന്നു തെളിയിക്കാൻ, നമുക്ക്

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$ എന്ന് തെളിയിക്കണം.

ഡിമോർഗൻസ് നിയമമനുസരിച്ച്

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P\left(\overline{A \cup B}\right) \\ &= 1 - P\left(A \cup B\right) \\ &= 1 - \left\{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right\} \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P\left(B\right) \end{aligned}$$

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 254 3/16/2023 4:42:42 PM

$$= \big(1 - P(A)\big)\big(1 - P(B)\big)$$

$$= P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B})$$

അങ്ങനെ $\overline{A}$ ഉം $\overline{B}$ ഉം സ്വതന്ത്രങ്ങൾ.

അതുപോലെ, ഏതൊരാൾക്കും (ii) ഉം (iii)തെളിയിക്കാം. ■

ഉദാഹരണം 12.18

ഒരു നാണയം രണ്ട് തവണ ടോസ്സിടുന്നു. സംഭവങ്ങൾ E നെയും F നെയും ഇങ്ങനെ നിർവ്വചിക്കാം. E= ആദ്യത്തെ ടോസ്സിൽ തല കിട്ടുന്നു, F = രണ്ടാമത്തെ ടോസ്സിൽ തല കിട്ടുന്നു.

(i) $P(E \cup F)$ (ii) $P(E / F)$

(iii) $P(\overline{E} / F)$. (iv) സംഭവങ്ങൾ E യും F ഉം സ്വതന്ത്രങ്ങളാണോ? എന്ന് കാണുക

നിർദ്ധാരണം

സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് $S = \{H, T\} \times \{H, T\}$

$$S = \{(H, H),(H, T), (T, H), (T, T)\}$$

$$E = \{(H, H), (H,T)\}$$

$$F = \{(H, H), (T, H)\}$$

$$E \cup F = \{(H, H),(H, T), (T, H)\}$$

$$E \cap F = \{(H, H)\}$$

(i) $P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$ അല്ലെങ്കിൽ $\left(= \dfrac{n(E \cup F)}{n(S)}\right)$

$$= \frac{2}{4} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} .$$

(ii) $$P(E / F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{(1/4)}{(2/4)} = \frac{1}{2}$$

(iii) $$P(\overline{E} / F) = \frac{P(\overline{E} \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{P\big(F\big) - P\big(E \cap F\big)}{P(F)}$$

$$= \frac{(2/4) - (1/4)}{(2/4)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

(iv) സംഭവങ്ങൾ E യും F യും സ്വതന്ത്ര്യങ്ങളാണോ?

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 255 3/16/2023 4:42:46 PM

ഇവിടെ $P(E \cap F) = \frac{1}{4}$

$$P(E) = \frac{2}{4}, \quad P(F) = \frac{2}{4}$$

$$P(E)\,P(F) = \frac{2}{4}.\frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(E \cap F) = P(E)\,.\,P(F)$$

അതുകൊണ്ട് E ഉം F ഉം സ്വതന്ത്ര്യ സംഭവങ്ങളാണ്.

കുറിപ്പ് 12.7

സ്വതന്ത്ര്യ സംഭവങ്ങൾ സംഭാവ്യതയുടെ സവിശേഷതയാണ്. പക്ഷേ പരസ്പര വർജ്ജകങ്ങൾ ഗണ സിദ്ധാന്തത്തിന്റെ സവിശേഷതയാണ്. അതുകൊണ്ട് സ്വതന്ത്ര സംഭവങ്ങൾ അവയുടെ സംഭാവ്യത കൊണ്ടും പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങൾ അവയുടെ സംഭവങ്ങൾ കൊണ്ടും പ്രതിനിധീകരിക്കുന്നു.

സിദ്ധാന്തം 12.9

A യും B യും രണ്ട് സംഭവങ്ങൾ എന്ന് കരുതിയാൽ $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$.

(1) A യും B യും പരസ്പര വർജ്ജകങ്ങൾ എങ്കിൽ, അവ സ്വതന്ത്ര്യങ്ങളല്ല.

(2) A യും B യും സ്വതന്ത്ര്യങ്ങളാണെങ്കിൽ, അവ പരസ്പര വർജ്ജകങ്ങളല്ല.

ഉദാഹരണം 12.19

A യും B യും രണ്ട് സ്വതന്ത്ര്യ സംഭവങ്ങളും

$P(A) = 0.4$ ഉം $P(A \cup B) = 0.9$ എങ്കിൽ $P(B)$ നെ കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B) \quad (A \text{ യും } B \text{ യും സ്വതന്ത്രങ്ങളായതു കൊണ്ട്})$$

അതായത്, $0.9 = 0.4 + P(B) - (0.4)\,P(B)$

$$0.9 - 0.4 = (1 - 0.4)\,P(B)$$

അതുകൊണ്ട് $P(B) = \frac{5}{6}$.

ഉദാഹരണം 12.20

ഒരു ആന്റി - എയർക്രാഫ്റ്റ് തോക്കിന് ഒരു ശത്രുവിമാനത്തിൽ നിന്ന് പരമാവധി 4 ഷോട്ടുകൾ എടുക്കാൻ കഴിയും. ആദ്യത്തെ, രണ്ടാമത്തെ, മൂന്നാമത്തെ, നാലാമത്തെ ഷോട്ടിൽ വിമാനം തട്ടാനുള്ള സംഭാവ്യത (ചിത്രം) യഥാക്രമം 0.2, 0.4, 0.2, 0.1 എന്നിവയാണ്. തോക്ക് വിമാനത്തിൽ തട്ടുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക.

നിർദ്ധാരണം

H_1, H_2, H_3 and H_4 എന്നത് ആന്റിക്രാഫ്റ്റ് തോക്ക് ഒന്ന്, രണ്ട്, മൂന്ന്, നാല് ഷോട്ടിൽ തട്ടുന്നതിന്റെ സംഭവം എന്നിരിക്കട്ടെ.

H എന്നത് ആന്റി-എയർക്രാഫറ്റ് വിമാനത്തിൽ തട്ടുന്നതിന്റെ സംഭവം എന്നിരിക്കട്ടെ. അതുകൊണ്ട്, $\bar{H}$ എന്നത് വിമാനത്തെ ഷോട്ട് ചെയ്യുന്നില്ല എന്നിരിക്കട്ടെ, എങ്കിൽ

$$P(H_1) = 0.2 \quad \Rightarrow P(\bar{H}_1) = 1 - P(H_1) = 0.8$$

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 256 3/16/2023 4:42:51 PM

$$P(H_2) = 0.4 \quad \Rightarrow P(\bar{H}_2) = 1 - P(H_2) = 0.6$$

$$P(H_3) = 0.2 \quad \Rightarrow P(\bar{H}_3) = 1 - P(H_3) = 0.8$$

$$P(H_4) = 0.1 \quad \Rightarrow P(\bar{H}_4) = 1 - P(H_4) = 0.9$$

തോക്ക് വിമാനത്തിൽ തട്ടുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യതയാണ്

$$P(H) = 1 - P(\bar{H}) = 1 - P(\overline{H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4})$$

$$= 1 - P\left(\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \bar{H}_3 \cap \bar{H}_4\right)$$

$$= 1 - P(\bar{H}_1)P(\bar{H}_2)P(\bar{H}_3)P(\bar{H}_4)$$

$$= 1 - (0.8)(0.6)(0.8)(0.9) = 1 - 0.3456$$

$$P(H) = 0.6544$$

ഉദാഹരണം 12.21

X എന്ന വ്യക്തി 70% കേസ്സുകളിലും സത്യം പറയുകയും അതേസമയം Y എന്ന വ്യക്തി 90% കേസ്സുമാണ്. ഒരേ തത്വത്തിൽ രണ്ടുപേരും വൈരുദ്ധ്യം പറയുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക.?

നിർദ്ധാരണം

A എന്നത് X സത്യം പറയുന്നതിന്റെ സംഭവവും B എന്നത് Y സത്യം പറയുന്നതിന്റെ സംഭവവും എന്നിരിക്കട്ടെ.

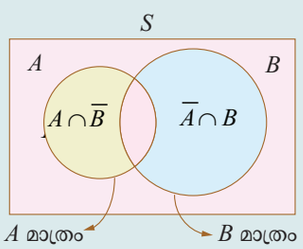
$\therefore \bar{A}$ എന്നത് X അസത്യം പറയുന്നതിന്റെ സംഭവവും $\bar{B}$ എന്നത് Y അസത്യം പറയുന്നതിന്റെ സംഭവവും

C എന്ന സംഭവത്തെ രണ്ടുപേരും വൈരുദ്ധ്യം പറയുന്നു എന്നിരിക്കട്ടെ.

തന്നിട്ടുള്ളതിൽ

$$P(A) = 0.70 \quad \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0.30$$

$$P(B) = 0.90 \quad \Rightarrow P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0.10$$



$C = (A$ സത്യം പറയും B അസത്യം പറയും അല്ലെങ്കിൽ B സത്യം പറയും A അസത്യം പറയും)

$$C = [(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)] \quad \text{(ചിത്രം നോക്കുക)}$$

$(A \cap \bar{B})$ ഉം $(\bar{A} \cap B)$ പരസ്പര വർജ്ജകങ്ങളായതു കൊണ്ട്,

$$P(C) = P(A \cap \bar{B}) + P(\bar{A} \cap B)$$

$$= P(A)\,P(\bar{B}) + P(\bar{A})\,P(B)$$

(A, B യും സ്വതന്ത്ര സംഭവമായതിനാൽ $A, \bar{B}$ ഉം സ്വതന്ത്ര്യ സംഭവങ്ങളാണ്)

$$= (0.70)\ (0.10) + (0.30)\ (0.90)$$

$$= 0.070 + 0.270 = 0.34$$

$$P(C) = 0.34.$$

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 257 3/16/2023 4:42:53 PM

ഉദാഹരണം 12.22

ഒരു നഗരത്തിലെ മെയിൻ റോഡിൽ 4 ക്രോസ് റോഡിൽ ട്രാഫിക് ലൈറ്റുകൾ ഉണ്ട്. ഓരോ ട്രാഫിക് ലൈറ്റും ട്രാഫിക്കിനായി തുറക്കുന്നതും അടയ്ക്കുന്നതിനുമുള്ള സംഭാവ്യത യഥാക്രമം 0.4 ഉം 0.6 ഉം ആണ്.

(i) ഒരു കാർ ആദ്യക്രോസ് റോഡിനെ നിർത്താതെ കടക്കുന്നു.
(ii) ഒരു കാർ ആദ്യ രണ്ട് ക്രോസ് റോഡുകളെ നിർത്താതെ കടക്കുന്നു.
(iii) ഒരു കാർ എല്ലാ ക്രോസ് റോഡുകളും കടക്കുന്നു, മൂന്നിൽ മാത്രം നിർത്തി.
(iv) ഒരു കാർ എല്ലാ ക്രോസ് റോഡുകളെയും കടക്കുന്നു. കൃത്യം ഒരു ക്രോസ് റോഡിൽ മാത്രം നിർത്തി.

നിർദ്ധാരണം:

A_i എന്നത് ട്രാഫിക് ലൈറ്റ് i ക്രോസിൽ തുറക്കുന്നതിന്റെ സംഭവമെങ്കിൽ, i= 1, 2, 3, 4.

B_i എന്നത് ട്രാഫിക് ലൈറ്റ് i ക്രോസിൽ അടയ്ക്കുന്നതിന്റെ സംഭവമെങ്കിൽ, i= 1, 2, 3, 4.

ട്രാഫിക് ലൈറ്റുകൾ എല്ലാം സ്വതന്ത്രമാണ്.

അതുകൊണ്ട് A_i യും B_i യും സ്വതന്ത്ര സംഭവങ്ങളാണ്. i= 1, 2, 3, 4.

എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ട്.

$$P(A_i) = 0.4,\ i = 1, 2, 3, 4$$

$$P(B_i) = 0.6,\ i = 1, 2, 3, 4$$

(i) കാർ ആദ്യത്തെ ക്രോസ് റോഡിൽ നിർത്താതെ കടക്കുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത

$$P(A_1) = 0.4.$$

(ii) കാർ ആദ്യ രണ്ട് ക്രോസ് റോഡുകളെ നിർത്താതെ കടക്കുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1A_2) = (0.4)(0.4) = 0.16$$

(iii) കാർ എല്ലാ ക്രോസ് റോഡുകളെയും കടക്കുന്നു. മൂന്നില്ല മാത്രം നിർത്തി.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap B_3 \cap A_4) = P(A_1A_2B_3A_4) = (0.4)(0.4)(0.6)(0.4) = 0.0384$$

(iv) കാർ എല്ലാ ക്രോസ് റോഡുകളെയും കടക്കുന്നു. കൃത്യം ഒരു ക്രോസ്റോഡിൽ മാത്രം നിർത്തി.

$$P(B_1A_2A_3A_4 \cup A_1B_2A_3A_4 \cup A_1A_2B_3A_4 \cup A_1A_2A_3B_4)$$
$$= P(B_1A_2A_3A_4) + P(A_1B_2A_3A_4) + P(A_1A_2B_3A_4) + P(A_1A_2A_3B_4)$$
$$= 4(0.4)(0.4)(0.6)(0.4) = 4(0.0384) = 0.1536$$

അഭ്യാസം 12.3

(1) ഒരേ സമയം രണ്ട് സംഭവങ്ങൾ പരസ്പരം വർജ്ജകങ്ങളും സ്വതന്ത്ര്യവും ആകുമോ?

(2) A, B എന്നത് രണ്ട് സംഭവങ്ങളും $P(A \cup B) = 0.7,\ P(A \cap B) = 0.2,$ $P(B) = 0.5$, ഉം എങ്കിൽ A യും B യും സ്വതന്ത്ര്യമാണെന്ന് കാണിക്കുക.

(3) A യും B യും രണ്ട് സ്വതന്ത്ര്യ സംഭവങ്ങളും $P(A \cup B) = 0.6, P(A) = 0.2$, എങ്കിൽ $P(B)$നെ കാണുക.

(4) $P(A)$ =0.5, $P(B)$ =0.8, $P(B/A) = 0.8$, എങ്കിൽ $P(A / B)$യും $P(A \cup B)$ ഉം കാണുക.

(5) രണ്ട് സംഭവങ്ങൾ A, B, $P(A) = \frac{3}{4}$, $P(B) = \frac{2}{5}$, $A \cup B = S$ (സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ്) എങ്കിൽ, $P(A / B)$ എന്ന നിബന്ധനയ്ക്കുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക.

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 258 3/16/2023 4:42:58 PM

(6) ഗണിതത്തിലെ ഒരു പ്രശ്നം മൂന്ന് വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് കൊടുക്കുമ്പോൾ അവർ അതിനെ പരിഹരിക്കുന്നതിന്റെ സാധ്യത $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ ഉം ആണ്. (i) പ്രശ്നം പരിഹരിക്കുന്നതിന്റെ സാധ്യത എന്ത്?
(ii) കൃത്യം ഒരു വിദ്യാർത്ഥി പരിഹരിക്കുന്നതിന്റെ സാധ്യത എന്ത്?

(7) പെട്രോൾ നിറച്ച കാറിന് ഓയിൽ മാറ്റം ആവശ്യമായി വരാനുള്ള സംഭാവ്യത 0.30 ആണ്. ഇതിന് പുതിയ ഓയിൽ ഫിൽറ്റർ ആവശ്യമുള്ളതിന്റെ സംഭാവ്യത 0.40 ആണ്. ഓയിലിനും ഫിൽറ്ററിനും മാറ്റം വരുത്താനുള്ള സംഭാവ്യത 0.15 ആണ്.
(i) ഓയിൽ മാറ്റിയെങ്കിൽ, ഓയിൽ മാറ്റണമെന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക.
(ii) ഓയിൽ ഫിൽറ്റർ പുതിയത് വേണമെങ്കിൽ, ഓയിൽ മാറ്റണമെന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക?

(8) ഒരു ബാഗിൽ 5 വെള്ളയും 3 കറുപ്പും പന്തുകൾ ഉണ്ട്. വേറൊരു ബാഗിൽ നാല് വെള്ളയും ആറ് കറുപ്പും പന്തുകളുണ്ട്. ഓരോ ബാഗിൽ നിന്നും ഒരു പന്തെടുക്കുമ്പോൾ, (i) രണ്ടും വെള്ള (ii) രണ്ടും കറുപ്പ് (iii) ഒരു വെള്ളയും ഒരു കറുപ്പും വരുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക.

(9) ഒരു ക്ലാസിൽ മൂന്നിൽ രണ്ട് ഭാഗം വിദ്യാർത്ഥികൾ ആണുങ്ങളും ബാക്കി പെണ്ണുങ്ങളുമാണ്. ആദ്യ ഗ്രേഡ് ഒരു പെൺകുട്ടിക്ക് കിട്ടുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത 0.85 ഉം അതേസമയം ആൺകുട്ടികൾക്ക് 0.70 വുമാണ്. ഒരു വിദ്യാർത്ഥിയെ യാദൃശ്ചികമായി തിരഞ്ഞെടുക്കുമ്പോൾ മാർക്ക് ആദ്യ ഗ്രേഡ് കിട്ടുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക.

(10) $P(A) = 0.4$ ഉം $P(A \cup B) = 0.7$. തന്നിട്ടുണ്ട്. $P(B)$
(i) A യും B യും പരസ്പരം വർജ്ജകങ്ങൾ (ii) A യും B യും സ്വതന്ത്ര്യ സംഭവങ്ങൾ.
(iii) $P(A \,/\, B) = 0.4$ (iv) $P(B \,/\, A) = 0.5$

(11) ഒരു വർഷം യാദൃശ്ചികമായി തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു.
(i) അതിൽ 53 ഞായറാഴ്ചകൾ (ii) അത് ഒരു അധിക വർഷവും 53 ഞായറാഴ്ചകളും വരുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക

(12) ഒരു ടാർഗെറ്റിൽ ഹിറ്റ് ചെയ്യുന്നതിന്റെ സാധ്യത X എന്ന വ്യക്തിക്ക് 4 ഷോട്ടിൽ 3 തവണയും, Y ന് 5 ഷോട്ടിൽ 4 തവണയും Z ന് 3 ഷോട്ടിൽ 2 തവണയുമാണ്. എല്ലാവരും ഒരെ സമയം ഫയർ ചെയ്യുന്നു. ടാർഗെറ്റ് 2 ഹിറ്റിൽ കേടാകുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക?

12.7 ഒരു സംഭവത്തിന്റെ ആകെ സംഭാവ്യത

സിദ്ധാന്തം 12.10 (സംഭവത്തിന്റെ മൊത്തം സംഭാവ്യത)

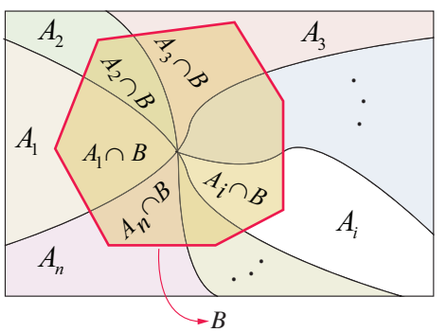
$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ പരസ്പര വർജ്ജകങ്ങളും സമ്പൂർണ്ണ ഫലങ്ങളും B എന്നത് S ലെ ഒരു സംഭവവുമാണെങ്കിൽ, $P(B)$നെ സംഭവം B യുടെ മൊത്തം സംഭാവ്യത എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \cdots + P(A_n).P(B/A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)$$

തെളിവ്

B എന്നത് S ലെ ഒരു സംഭവമായതിനാൽ, ഇവിടെയുള്ള ചിത്രത്തിൽ നിന്ന്

$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \cdots (A_n \cap B).$$



$A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ പരസ്പരം വർജ്ജകങ്ങളായതുകൊണ്ട്,

$(A_1 \cap B), (A_2 \cap B), (A_3 \cap B), \cdots, (A_n \cap B)$ യും പരസ്പര വർജ്ജകങ്ങളാണ്.

അതുകൊണ്ട്

$$P(B) = P\left[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)\right]$$

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \cdots + P(A_n).P(B/A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i).$$ □

താഴെ തന്നിട്ടുള്ള പ്രശ്നങ്ങൾ പരിഹരിക്കാനായി സംഭവത്തിന്റെ മൊത്തം സംഭാവ്യത നിയമം ഉപയോഗിക്കുക.

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 259 3/16/2023 4:43:02 PM

ഉദാഹരണം 12.23

കുടം 1 ൽ 8 ചുവപ്പും 4 നീല പന്തുകളും കുടം 2 ൽ 5 ചുവപ്പും 10 നീല പന്തുകളുമുണ്ട്. ഒരു കുടം യാദൃശ്ചികമായി തിരഞ്ഞെടുത്ത് അതിൽ നിന്നും രണ്ട് പന്തുകൾ എടുക്കുന്നു. 2 പന്തുകളും ചുവപ്പ് നിറത്തിൽ ലഭിക്കുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക.

	ചുവപ്പ് പന്തുകൾ	നീല പന്തുകൾ	മൊത്തം
കുടം -I	8	4	12
കുടം -II	5	10	15
മൊത്തം	13	14	27

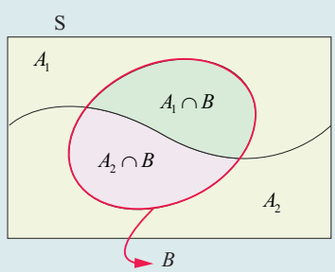
നിർദ്ധാരണം

A_1 എന്നത് കുടം I തിരഞ്ഞെടുക്കുന്ന സംഭവവും A_2 എന്നത് കുടം II തിരഞ്ഞെടുക്കുന്ന സംഭവവും എന്നിരിക്കട്ടെ.

B എന്നത് II ചുവപ്പ് നിറ പന്തുകൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിന്റെ സംഭവം എന്നാൽ

നമുക്ക്, ഇവിടെ B. എന്ന സംഭവത്തിന്റെ മൊത്തം സംഭാവ്യത കാണാം. അതായത്, $P(B)$.

വ്യക്തമായിട്ട്, A_1 and A_2 ഉം പരസ്പര വർജ്ജകങ്ങളും സമ്പൂർണ്ണ സംഭവങ്ങളുമാണ്. ഇവിടെ,



$$P(A_1) = \frac{1}{2}, \quad P(B/A_1) = \frac{8c_2}{12c_2} = \frac{14}{33}$$

$$P(A_2) = \frac{1}{2}, \quad P(B/A_2) = \frac{5c_2}{15c_2} = \frac{2}{21}$$

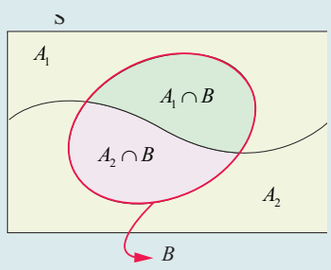
നമുക്കറിയാം

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)$$

$$P(B) = \frac{1}{2}.\frac{14}{33} + \frac{1}{2}.\frac{2}{21} = \frac{20}{77}.$$

ഉദാഹരണം 12.24

ഒരു ഫാക്ടറിയിൽ യന്ത്രം I ഉം യന്ത്രം II എന്നും രണ്ട് യന്ത്രങ്ങളുണ്ട്. യന്ത്രം I ൽ ഉൽപ്പാദിപ്പിക്കുന്നതിന്റെ 40% ഇനങ്ങളും യന്ത്രം II ൽ 60% ഇനങ്ങളും തയ്യാറാക്കുന്നു. കൂടാതെ യന്ത്രം I ൽ 4% ഇനങ്ങളും യന്ത്രം II ൽ 5% ഇനങ്ങളും വിഫലമായി കിട്ടുന്നു. ഒരു ഇനം യാദൃശ്ചികമായി തിരഞ്ഞെടുത്താൽ,അത് ഒരു വിഫലമായ ഫലം കിട്ടുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക.



നിർദ്ധാരണം

എന്നത് യന്ത്രം I ഉൽപ്പാദിപ്പിച്ച ഇനങ്ങളുടെ സംഭവവും A_2 എന്നത് യന്ത്രം II ഉൽപ്പാദിപ്പിച്ച ഇനങ്ങളുടെ സംഭവവും എന്നിരിക്കട്ടെ B എന്നത് ഒരു വിഫലമായ ഇനം തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നതിനുള്ള സംഭവം എങ്കിൽ,

നമുക്ക് B എന്ന സംഭവത്തിന്റെ മൊത്തം സംഭാവ്യതയെ കാണാം. അതായത്, $P(B)$.

വ്യക്തമായും, A_1 കൂടാതെ A_2 ഉം പരസ്പര വർജ്ജകങ്ങളായ സമ്പൂർണ്ണ സംഭവങ്ങളുമാണ്.

അതുകൊണ്ട്, $P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)$

നമുക്ക് $P(A_1) = 0.40, \quad P(B/A_1) = 0.04$

$P(A_2) = 0.60, \quad P(B/A_2) = 0.05$

$$P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2)$$

$$= (0.40)(0.04) + (0.60)(0.05)$$

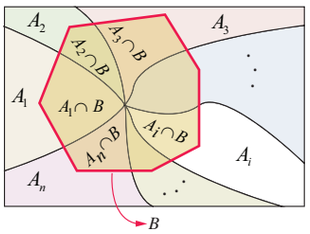
$$= 0.046.$$

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 260 3/16/2023 4:43:07 PM

12.8 ബെയ്സ് സിദ്ധാന്തം

1702-1761

ഒരു ഇംഗ്ലീഷ് സ്റ്റാറ്റിഷ്യൻ, തത്വ ചിന്തകൻ, പ്രസ്ബൈറ്റീരിയൻ മിനിസ്റ്റർ എന്നിവരായിരുന്നു തോമസ് ബെയ്സ്. മുമ്പത്തെ (പരീക്ഷണം നടത്തുന്നതിന് മുമ്പ്) സംഭാവ്യതയും പരീക്ഷണം നടത്തിയതിനു ശേഷം സംഭാവ്യതയെ ബെയ്സ് രീതി വഴി ബന്ധിപ്പിക്കുന്ന തത്വത്തിൽ നിന്നാണ് ബയേഷ്യൻ രീതികൾ ഉണ്ടാകുന്നത്. ബയേഷ്യൻ സംഭാവ്യതയെ അനേകം രീതിയിൽ സംഭാവ്യതയെ ആവിഷ്ക്കരിക്കുന്ന ശക്തിയുടെ വിശ്വാസത്തിൽ നിർവ്വചിച്ചിരിക്കുന്നു.



സിദ്ധാന്തം 12.11 (ബെയ്സ് സിദ്ധാന്തം)

$A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ പരസ്പരം വർജ്ജകങ്ങളും സമ്പൂർണ്ണ സംഭവങ്ങളുമാണെങ്കിൽ

$P(A_i) > 0,\ i = 1,2,3,.n$ ഉം B എന്ന ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഭവത്തിൽ $P(B) > 0$, ഉം ആണെങ്കിൽ

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)\,P(B/A_i)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2) + \cdots + P(A_n)\,P(B/A_n)}$$

തെളിവ്

B യുടെ മൊത്തം സംഭാവ്യത നിയമമനുസരിച്ച്

$$P(B) = P(A_1)\cdot P(B/A_1) + P(A_2)\cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n)\cdot P(B/A_n)$$

ഉം ഗുണന സിദ്ധാന്തം ഉപയോഗിച്ച് $P(A_i \cap B) = P(B/A_i)P(A_i)$

നിബന്ധനയ്ക്കുള്ള സംഭാവ്യതയുടെ നിർവ്വചനമനുസരിച്ച്,

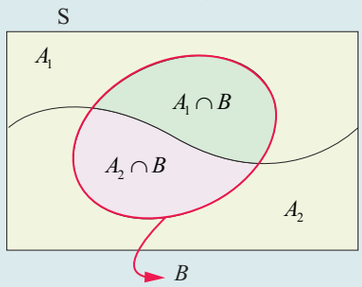
$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

$$P(A_i / B) = \frac{P(B/A_i)P(A_i)}{P(A_1)\cdot P(B/A_1) + P(A_2)\cdot P(B/A_2) + \cdots + P(A_n)\cdot P(B/A_n)}$$ (സൂത്രവാക്യങ്ങൾ ഉപയോഗിച്ച്)

മുകളിലുള്ള സൂത്രവാക്യം $P(A_i / B)$ യ്ക്കും $P(B/A)$ യ്ക്കും തമ്മിലുള്ള ബന്ധത്തെ സൂചിപ്പിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 12.25

ഒരു ഫാക്ടറിയിൽ യന്ത്രം I ഉം യന്ത്രം II എന്നും II യന്ത്രങ്ങളുണ്ട്. യന്ത്രം I ൽ ഉല്പാദിപ്പിക്കുന്നതിന്റെ 40% ഇനങ്ങളും യന്ത്രം II ൽ 60 ഇനങ്ങളും തയ്യാറാക്കുന്നു. കൂടാതെ യന്ത്രം I ൽ 4% ഇനങ്ങളും യന്ത്രം II ൽ 5% ഇനങ്ങളും വിഫലമായി കിട്ടുന്നു. ഒരു ഇനം യാദൃശ്ചികമായി തിരഞ്ഞെടുത്താൽ, അത് വിഫലമായതാണെങ്കിൽ അത് യന്ത്രം II ൽ തയ്യാറായതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക. (മുമ്പുള്ള ഉദാഹരണം നോക്കുക, താരതമ്യം ചെയ്യുക)



നിർദ്ധാരണം

A_1 എന്നത് യന്ത്രം I ൽ ഇനങ്ങൾ തയ്യാറാക്കുന്ന സംഭവവും A_2 എന്നത് യന്ത്രം II ൽ ഇനങ്ങൾ തയ്യാറാക്കുന്ന സംഭവവും എന്നിരിക്കട്ടെ. B എന്നത് വിഫലമായ ഇനത്തെ എടുക്കുന്നതിന്റെ സംഭവം എങ്കിൽ എവിടെ, നമ്മൾ നിബന്ധനയ്ക്കുള്ള സംഭാവ്യത $P(A_2/B)$. നെ കാണണം. A_1, A_2 പരസ്പരം വർജ്ജകങ്ങളും സമ്പൂർണ്ണ സംഭവങ്ങളുമായതുകൊണ്ട്, ബെയ്സ് സിദ്ധാന്ത പ്രകാരം

$$P(A_2 / B) = \frac{P(A_2)\,P(B/A_2)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2)}$$

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 261 3/16/2023 4:43:14 PM

ഇവിടെ,

$$P(A_1) = 0.40, \quad P(B/A_1) = 0.04$$

$$P(A_2) = 0.60, \quad P(B/A_2) = 0.05$$

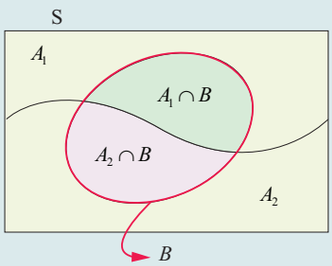
$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)\,P(B/A_2)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2)}$$

$$P(A_2/B) = \frac{(0.60)(0.05)}{(0.40)(0.04)+(0.60)(0.05)} = \frac{15}{23}.$$

ഉദാഹരണം 12.26

ഒരു കൺസ്ട്രക്ഷൻ കമ്പനിയിൽ 2 എക്സിക്യൂട്ടീവ് ഇഞ്ചിനിയേഴ്സ് ജോലി നോക്കുന്നു. ഇഞ്ചിനിയർ -1 60% ജോലി ചെയ്യുന്നു. ഇഞ്ചിനീയർ -2 കമ്പനിയ്ക്ക് വേണ്ടി 40% ജോലി ചെയ്യുന്നു. പഴയ അനുഭവത്തിൽ നിന്നും ഇഞ്ചിനീയർ -1 ജോലി ചെയ്യുമ്പോൾ തെറ്റ് വരുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത 0.03 ഉം അതേ സമയം ഇഞ്ചിനീയർ -2 ജോലി ചെയ്യുമ്പോൾ തെറ്റ് സംഭവിക്കുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത 0.04 ഉം ആണ്. ഒരു പക്ഷേ, ഒരു വലിയ തെറ്റ് സംഭവിക്കുന്നുവെങ്കിൽ, ഏത് ഇഞ്ചിനീയറാണ് ആ തെറ്റ് ചെയ്തിരിക്കുന്നതെന്ന് കണ്ടു പിടിക്കുക.

നിർദ്ധാരണം



A_1 ഉം A_2 ഉം ഇഞ്ചിനീയർ 1 ഉം ഇഞ്ചിനീയർ 2 ഉം ജോലി ചെയ്യുന്നതിന്റെ സംഭവം എന്നിരിക്കട്ടെ. B എന്ന സംഭവം ജോലിയിൽ തെറ്റ് വരുന്നതിനുള്ള സംഭവം എന്നിരിക്കട്ടെ.

നമുക്ക് നിബന്ധനയുള്ള സംഭാവ്യത കണ്ടുപിടിക്കാം $P(A_1/B)$ കൂടാതെ $P(A_2/B)$ യുടെ ജോലികളെ താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ തന്നിട്ടുള്ളതിൽ നിന്നും നമുക്ക്

$$P(A_1) = 0.60, \quad P(B/A_1) = 0.03$$
$$P(A_2) = 0.40, \quad P(B/A_2) = 0.04$$

A_1 കൂടാതെ A_2 ഉം പരസപര വർജ്ജകങ്ങളും സമ്പൂർണ്ണ സംഭവങ്ങളുമാണെങ്കിൽ ബേയ്സ് സിദ്ധാന്തമനുസരിച്ച്

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)\,P(B/A_1)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2)}$$

$$= \frac{(0.60)(0.03)}{(0.60)(0.03)+(0.40)(0.04)}$$

$$P(A_1/B) = \frac{9}{17}.$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)\,P(B/A_2)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2)}$$

$$P(A_2/B) = \frac{(0.40)(0.04)}{(0.60)(0.03)+(0.40)(0.04)}$$

$$P(A/B) = \frac{8}{17}.$$

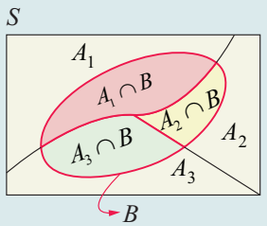
$P(A_1/B) > P(A_2/B)$, ആയതുകൊണ്ട് തെറ്റ് ചെയ്തതിന്റെ ചാൻസ് ഇഞ്ചിനീയർ 2 നെ ക്കാളും ഇഞ്ചിനീയർ 1 നാണ് അതുകൊണ്ട് ഒരാൾക്ക് ഈ വലിയ തെറ്റ് ചെയ്തത് ഇഞ്ചിനീയർ 1 ആണെന്ന് മനസ്സിലാക്കാം.

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 262 3/16/2023 4:43:17 PM

നിർദ്ധാരണം 12.27

X, Y, Z എന്നിവർ ഒരു കമ്പനിയുടെ മാനേജരാവേണ്ട സാധ്യത 4 : 2 : 3 ആണ്. X, Y, Z എന്നിവരിൽ ഒരാൾ മാനേജരാകുകയാണെങ്കിൽ ബോണസ് സ്കീം കൊണ്ടുവരുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത 0.3, 0.5, 0.4 ആണ്. ഭോണസ് സ്കീം കൊണ്ടുവരുന്നുവെങ്കിൽ, Z നെ മാനേജരായി ചെയ്തതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക.?

നിർദ്ധാരണം



A_1, A_2, A_3 എന്നത് X, Y, Z എന്നിവർ കമ്പനിയുടെ മാനേജർ ആകുന്നതിന്റെ സംഭവം എന്നിരിക്കട്ടെ. B എന്നത് ബോണസ് സ്കീം കൊണ്ടുവന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത എന്നാൽ,

നമുക്ക് $P(A_3 / B)$. എന്ന നിബന്ധനയ്ക്കുള്ള സംഭാവ്യത കാണാം.

A_1, A_2, A_3 എന്നത് പരസ്പരം വർജ്ജകങ്ങളും സമ്പൂർണ്ണ സംഭവങ്ങളായതുകൊണ്ട് ബെയ്സ് സിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച്,

$$P(A_3 / B) = \frac{P(A_3)\,P(B / A_3)}{P(A_1)\,P(B / A_1) + P(A_2)\,P(B / A_2) + P(A_3)\,P(B / A_3)}$$

ഇവിടെ

$$P(A_1) = \frac{4}{9}, \quad P(B / A_1) = 0.3$$

$$P(A_2) = \frac{2}{9}, \quad P(B / A_2) = 0.5$$

$$P(A_3) = \frac{3}{9}, \quad P(B / A_3) = 0.4$$

$$P(A_3 / B) = \frac{P(A_3)\,P(B / A_3)}{P(A_1)\,P(B / A_1) + P(A_2)\,P(B / A_2) + P(A_3)\,P(B / A_3)}$$

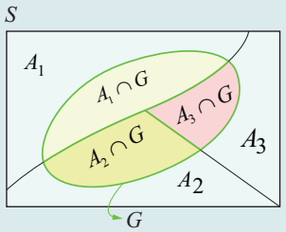
$$P(A_3 / B) = \frac{\left(\frac{3}{9}\right)(0.4)}{\left(\frac{4}{9}\right)(0.3) + \left(\frac{2}{9}\right)(0.5) + \left(\frac{3}{9}\right)(0.4)}$$

$$= \frac{12}{34} = \frac{6}{17}.$$

ഉദാഹരണം 12.28

ഒരു കൺസൾട്ടിംഗ് സ്ഥാപനം വാടക കാറുകളെ 3 ഏജൻസികളിൽ നിന്നും അതായത് 50% ഏജൻസി L ഉം, 30% ഏജൻസി ഉം, 20% ഏജൻസി N ൽ നിന്നും കൊടുക്കുന്നു. അതേ സമയം, L ൽ നിന്നും കിട്ടുന്ന 90% കാറുകളും, M ൽ നിന്നും കിട്ടുന്ന 70% കാറുകളും N ൽ നിന്നും കിട്ടുന്ന 60% കാറുകളും നല്ല അവസ്ഥയിലാണ് എങ്കിൽ (i) ഒരു നല്ല അവസ്ഥയിലുള്ള കാർ സ്ഥാപനത്തിന് കിട്ടുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക. (ii) ഒരു കാർ നല്ല അവസ്ഥയിലാണെങ്കിൽ, അത് ഏജൻസി N ൽ നിന്നും കിട്ടിയതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക?

നിർദ്ധാരണം



A_1, A_2 കൂടാതെ A_3 എന്നത് കാറുകൾ L, M, N എന്ന ഏജൻസികളിൽ നിന്നും വാടകയ്ക്ക് കിട്ടുന്ന സംഭവം എന്നിരിക്കട്ടെ.

G എന്നത് ഒരു കാർ നല്ല അവസ്ഥയിൽ കിട്ടുന്നതിന്റെ സംഭവം എന്നിരിക്കട്ടെ.

നമുക്ക് ഇപ്പോൾ

(i) G എന്ന സംഭവത്തിന്റെ മൊത്തം സംഭാവ്യത, അതായത് $P(G)$

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 263 3/16/2023 4:43:22 PM

(ii) നിബന്ധനയ്ക്കുള്ള സംഭാവ്യത A_3 യിൽ തന്നിട്ടുള്ള G അതായത് $P(A_3 / G)$ നെ കണ്ടുപിടിക്കുക. നമുക്ക്,

$$P(A_1) = 0.50, \quad P(G / A_1) = 0.90$$

$$P(A_2) = 0.30, \quad P(G / A_2) = 0.70$$

$$P(A_3) = 0.20, \quad P(G / A_3) = 0.60.$$

(i) A_1, A_2, A_3 പരസ്പരം വർജ്ജകങ്ങളും സമ്പൂർണ്ണ സംഭവങ്ങളുമായതുകൊണ്ട് കൂടാതെ G എന്നത് S ലെ ഒരു സംഭവം എങ്കിൽ, G എന്ന സംഭവത്തിലെ മൊത്തം സംഭാവ്യതയാണ് $P(G)$.

$$P(G) = P(A_1)\,P(G / A_1) + P(A_2)\,P(G / A_2) + P(A_3)\,P(G / A_3)$$

$$P(G) = (0.50)(0.90) + (0.30)(0.70) + (0.20)\ (0.60)$$

$$P(G) = 0.78.$$

(ii) നിബന്ധനയ്ക്കുള്ള സംഭാവ്യത A_3 യിൽ തന്നിട്ടുള്ള G ആണ് $P(A_3 / G)$

ബെയ്സ് സിദ്ധാന്തം അനുസരിച്ച്,

$$P(A_3 / G) = \frac{P(A_3)\,P(G / A_3)}{P(A_1)\,P(G / A_1) + P(A_2)\,P(G / A_2) + P(A_3)\,P(G / A_3)}$$

$$P(A_3 / G) = \frac{(0.20)(0.60)}{(0.50)(0.90) + (0.30)(0.70) + (0.20)\ (0.60)}$$

$$= \frac{2}{13}.$$

അഭ്യാസം 12.4

(1) ഒരു ഫാക്ടറിയിൽ യന്ത്രം I ഉം യന്ത്രം II എന്നും II യന്ത്രങ്ങളുണ്ട്. യന്ത്രം I ൽ ഉല്പാദിപ്പിക്കുന്നതിന്റെ 60% ഇനങ്ങളും യന്ത്രം II ൽ 40% ഇനങ്ങളും തയ്യാറാക്കുന്നു. കൂടാതെ യന്ത്രം I ൽ 2% ഇനങ്ങളും യന്ത്രം II ൽ 4% ഇനങ്ങളും വിഫലമായി കിട്ടുന്നു. ഒരു ഇനം യാദൃശ്ചികമായി തിരഞ്ഞെടുത്താൽ, അത്വിഫലമായ ഫലം കിട്ടുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക.?

(2) ഒരുപോലെയുള്ള 2 കുടത്തിൽ 6 കറുപ്പ്, 4 ചുവപ്പ് പന്തുകളും 2 കറുപ്പ്, 2 ചുവപ്പ് പന്തുകളും യഥാക്രമം ഉണ്ട്. യാദൃശ്ചികമായി ഒരു കുടം തിരഞ്ഞെടുത്ത് ഒരു പന്ത് അതിൽ നിന്നും എടുക്കുന്നു. (i) ആ പന്ത് കറുപ്പ് നിറം ആകുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക. (ii) പന്ത് കറുപ്പ് നിറം ആണെങ്കിൽ, അത് ആദ്യകുടത്തിൽ നിന്നും വന്നതിന്റെ സംഭാവ്യതയെ കാണുക.?

(3) ഒരു സ്ഥാപനം X, Y, Z പൈപ്പുകളെ X, Y, Z എന്ന 3 പ്ലാന്റുകളിൽ നിർമ്മിക്കുന്നു. X, Y, Z എന്നീ 3 സ്ഥാപനങ്ങളിൽ നിന്നുള്ള പ്രതിദിന ഉൽപ്പാദന അളവ് യഥാക്രമം 2000 യൂണിറ്റ്, 3000 യൂണിറ്റ്, 5000 യൂണിറ്റ് എന്നിവയാണ്. മുൻ അനുഭവത്തിൽ നിന്നും 3% ഉപകരണങ്ങൾ പ്ലാന്റ് X ഉം, 4% പ്ലാന്റ് Y ഉം, 2% പ്ലാന്റ് Z ലെ ഉപകരണങ്ങൾ വിഫലമാണ്. ഒരു പൈപ്പിനെ യാദൃശ്ചികമായി മൊത്തം ദിവസത്തെ ഉൽപ്പാദനത്തിൽ നിന്നും തിരഞ്ഞെടുക്കുമ്പോൾ,

(i) തിരഞ്ഞെടുത്ത പൈപ്പ് വിഫലമായി വരുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക.

(ii) തിരഞ്ഞെടുത്ത പൈപ്പ് വിഫലമാണെങ്കിൽ, അതിനെ തയ്യാറാക്കിയത് പ്ലാന്റ് Y എന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക?

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 264 3/16/2023 4:43:25 PM

(4) A, B, C എന്നിവർ ഒരു കമ്പനിയുടെ മാനേജർ ആകേണ്ട സാധ്യത 5:3:2 ആണ്. A, B, C എന്നിവരും ഒരാൾ മാനേജരാകുമ്പോൾ ഓഫീസിൽ ക്യാന്റീൻ രൂപമാറ്റം കൊണ്ടുവരുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത യഥാക്രമം 0.4, 0.5 ഉം 0.3 ഉം ആണ്. ഓഫീസിന്റെ ക്യാന്റീൻ രൂപമാറ്റം സംഭവിച്ചുവെങ്കിൽ, B എന്ന വ്യക്തി മാനേജരായി മാറിയതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക.?

(5) ഒരു പരസ്യ എക്സിക്യൂട്ടീവ് വിവാഹിതരായ പുരുഷന്മാരുടെയും സ്ത്രീകളുടെയും പ്രൈം സമയങ്ങളിൽ ടെലിവിഷൻ കാണുന്ന ശീലങ്ങളെക്കുറിച്ച് പഠിക്കുന്നു. മുൻകാല കാഴ്ച രേഖകളെ അടിസ്ഥാനമാക്കി, പ്രൈം ടൈമിൽ ഭാര്യമാർ 60% സമയം ടെലിവിഷൻ കാണുന്നുണ്ടെന്ന് അദ്ദേഹം നിർണ്ണയിച്ചു. ഭാര്യ ടെലിവിഷൻ കാണുമ്പോൾ 40% സമയവും ഭർത്താവും കാണുന്നുണ്ടെന്നും നിർണ്ണയിക്കപ്പെട്ടിട്ടുണ്ട്. ഭാര്യ ടെലിവിഷൻ കാണാത്തപ്പോൾ, 30% സമയവും ഭർത്താവ് ടെലിവിഷൻ കാണുന്നു. (i) ഭർത്താവ് പ്രൈം സമയത്ത് ടെലിവിഷൻ കാണുന്നുണ്ടെന്നുള്ള സംഭാവ്യത കാണുക. (ii) ഭർത്താവ് ടെലിവിഷൻ കാണുന്നുണ്ടെങ്കിൽ, ഭാര്യയും ടെലിവിഷൻ കാണുന്നുവെന്നതിന്റെ സംഭാവ്യത കാണുക.

അഭ്യാസം 12.5

ശരിയായ ഉത്തരം തിരഞ്ഞെടുത്ത് എഴുതുക.

(1) 3 ആണുങ്ങളും, 2 പെണ്ണുങ്ങളും, 4 കുട്ടികളുമുള്ള ഒരു കൂട്ടത്തിൽ നിന്നും 4 പേരെ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. കൃത്യം 2 കുട്ടികൾ കിട്ടുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യതയാണ്

(1) $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{10}{23}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{10}{21}$

(2) $\{1,2,3,...,20\}$ എന്ന ഗണത്തിൽ നിന്നും ഒരു സംഖ്യയെ തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. ആ സംഖ്യ 3 ആണെങ്കിൽ 4 കൊണ്ട് ഹരിക്കാവുന്ന സംഭാവ്യതയാണ്

(1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{1}{8}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{2}{3}$

(3) A, B, C എന്നിവർ ഒരേ സമയം ടാർജറ്റിൽ ലക്ഷ്യം വയ്ക്കുന്നത് സ്വതന്ത്ര്യമായിട്ടാണ്. അവരുടെ യഥാർത്ഥ സംഭാവ്യതകളാണ് $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}$. ടാർജറ്റ് ലക്ഷ്യം വയ്ക്കുന്നത് A അല്ലെങ്കിൽ B പക്ഷേ C അല്ല എന്നതിന്റെ സംഭാവ്യതയാണ്

(1) $\frac{21}{64}$ (2) $\frac{7}{32}$ (3) $\frac{9}{64}$ (4) $\frac{7}{8}$

(4) A യും B യും രണ്ട് സംഭവങ്ങളാണെങ്കിൽ, കൃത്യം ഒന്ന് നടക്കുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യതയാണ്

(1) $P(A \cup \overline{B}) + P(\overline{A} \cup B)$ (2) $P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$

(3) $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ (4) $P(A) + P(B) + 2P(A \cap B)$

(5) A യും B യും രണ്ട് സംഭവങ്ങളെങ്കിൽ $P\left(\overline{A \cup B}\right) = \frac{1}{6}$, $P\left(A \cap B\right) = \frac{1}{4}$ ഉം $P\left(\overline{A}\right) = \frac{1}{4}$. എങ്കിൽ സംഭവങ്ങൾ A യും B യും.

(1) സമസന്ദർഭം പക്ഷേ സ്വതന്ത്രമല്ല (2) സ്വതന്ത്രം പക്ഷേ സമസന്ദർഭമല്ല

(3) സ്വതന്ത്രവും സമസന്ദർഭവും (4) പരസ്പരം ഉൾക്കൊള്ളുന്നതും അസ്വതന്ത്ര്യവും

(6) 12 ഇനങ്ങൾ ഉള്ളതിൽ നിന്നും 2 ഇനങ്ങൾ തിരഞ്ഞെടുക്കുകയും അതിൽ 4 എണ്ണം വിഫലമാണെങ്കിൽ, കുറഞ്ഞത് ഒരെണ്ണം വിഫലമായി ലഭിക്കുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യതയാണ്

(1) $\frac{19}{33}$ (2) $\frac{17}{33}$ (3) $\frac{23}{33}$ (4) $\frac{13}{33}$

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 265 3/16/2023 4:43:28 PM

(7) ഒരു വ്യക്തിയുടെ പോക്കറ്റിൽ മൂന്ന് 50 രൂപ നോട്ടുകളും, നാല് 100 രൂപ നോട്ടുകളും ആറ് 500 രൂപ നോട്ടുകളും ഉണ്ട്. യാദൃശ്ചികമായി രണ്ട് നോട്ടുകൾ എടുക്കുമ്പോൾ രണ്ട് നോട്ടുകളും 100 രൂപ നോട്ടുകളായി ലഭിക്കുന്ന അനുകൂലമായ ഓഡ്സ് എന്താണ്?

(1) 1:12 (2) 12:1 (3) 13:1 (4) 1:13

(8) 'ASSISTANT' എന്ന വാക്കിൽ നിന്നും ഒരു അക്ഷരം യാദൃശ്ചികമായി എടുക്കുകയും 'STATISTICS' എന്ന വാക്കിൽ നിന്നും ഒരു അക്ഷരം എടുക്കുകയും ചെയ്യുമ്പോൾ, അവ ഒരേ പോലെ വരുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യതയാണ്

(1) $\frac{7}{45}$ (2) $\frac{17}{90}$ (3) $\frac{29}{90}$ (4) $\frac{19}{90}$

(9) അംഗങ്ങൾ 0 വും 1 ഉം മാത്രമുള്ള ക്രമം 2 ഉള്ള മാട്രിക്സുകളിൽ നിന്നും ഒരു മാട്രിക്സ് യാദൃശ്ചികമായി എടുത്താൽ ഡിറ്റർമിനൻസ് ഒരു പൂജ്യമല്ലാതായി ലഭിക്കുന്ന മാട്രിക്സിന്റെ സംഭാവ്യതയാണ്

(1) $\frac{3}{16}$ (2) $\frac{3}{8}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{5}{8}$

(10) ഒരു ബാഗിൽ 5 വെള്ളയും 3 കറുപ്പും പന്തുകളുണ്ട്. 5 പന്തുകൾ തുടർച്ചയായി മാറ്റിവയ്ക്കാതെ എടുക്കുന്നു. അവ മാറി മാറി വ്യത്യസ്ത നിറങ്ങൾ ലഭിക്കുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യതയാണ്

(1) $\frac{3}{14}$ (2) $\frac{5}{14}$ (3) $\frac{1}{14}$ (4) $\frac{9}{14}$

(11) A യും B യും രണ്ട് സംഭവങ്ങളും $A \subset B$ ഉം $P(B) \neq 0$, യും എങ്കിൽ, ഇവയിൽ ഏതാണ് ശരി?

(1) $P(A/B) = \frac{P(A)}{P(B)}$ (2) $P(A/B) < P(A)$

(3) $P(A/B) \geq P(A)$ (4) $P(A/B) > P(B)$

(12) ഒരു ബാഗിൽ 6 പച്ച, 2 വെള്ളയും 7 കറുപ്പ് പന്തുകളുമുണ്ട്. 2 പന്തുകൾ ഒരേ സമയം എടുക്കുമ്പോൾ, അവ രണ്ടും വ്യത്യസ്ത നിറത്തിൽ ലഭിക്കുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യതയാണ്

(1) $\frac{68}{105}$ (2) $\frac{71}{105}$ (3) $\frac{64}{105}$ (4) $\frac{73}{105}$

(13) X യും Y യും രണ്ട് സംഭവങ്ങളും $P(X/Y) = \frac{1}{2}$, $P(Y/X) = \frac{1}{3}$, ഉം $P(X \cap Y) = \frac{1}{6}$ എങ്കിൽ $P(X \cup Y)$ ആണ്

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{2}{3}$

(14) ഒരു ബോക്സിൽ 5 ചുവപ്പും 5 കറുപ്പും പന്തുകൾ ഉണ്ട്. ഒരു പന്ത് യാദൃശ്ചികമായി എടുത്തു, അതിന്റെ നിറം സൂചിപ്പിച്ചിട്ട് ബോക്സിനുള്ളിൽ തിരിച്ച് വയ്ക്കുന്നു. കൂടാതെ, രണ്ട് പന്തുകൾ അതേ നിറത്തിൽ ഉള്ളതിനെ എടുത്ത് ഒരു ബോക്സിൽ ഇട്ടതിനുശേഷം ഒരു പന്ത് തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. രണ്ടാമത്തെ പന്ത് ചുവപ്പ് നിറം വരുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യതയാണ്

(1) $\frac{5}{12}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{7}{12}$ (4) $\frac{1}{4}$

(15) ആദ്യത്തെ 100 നിസ്സർഗ്ഗ സംഖ്യകളിൽ നിന്നും ഒരു സംഖ്യ x നെ യാദൃശ്ചികമായി തിരഞ്ഞെടുക്കുന്നു. A എന്നത് $\frac{(x-10)(x-50)}{x-30} \geq 0$, നെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്ന സംഖ്യകളുടെ സംഭവമാണെങ്കിൽ $P(A)$ ആണ്.

(1) 0.20 (2) 0.51 (3) 0.71 (4) 0.70

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 266 3/16/2023 4:43:44 PM

(16) രണ്ട് സംഭവങ്ങൾ A യും B യും സ്വതന്ത്രങ്ങളും $P(A)=0.35$ ഉം $P(A\cup B)=0.6$, ഉം എങ്കിൽ $P(B)$ ആണ്

(1) $\frac{5}{13}$ (2) $\frac{1}{13}$ (3) $\frac{4}{13}$ (4) $\frac{7}{13}$

(17) A യും B യും രണ്ട് സംഭവങ്ങളും $P(\overline{A})=\frac{3}{10}$ ഉം $P(A\cap\overline{B})=\frac{1}{2}$, ഉം എങ്കിൽ $P(A\cap B)$ ആണ്.

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{5}$

(18) A യും B യും രണ്ട് സംഭവങ്ങളും $P(A)=0.4, P(B)=0.8$ ഉം $P(B/A)=0.6$, ഉം എങ്കിൽ $P(\overline{A}\cap B)$ ആണ്.

(1) 0.96 (2) 0.24 (3) 0.56 (4) 0.66

(19) മൂന്ന് സംഭവങ്ങൾ A, B, C യിൽ ഒന്നു മാത്രം തന്നെ നടക്കുന്നു. ഓഡ്സിൽ A യ്ക്കു എതിരായി 7 മുതൽ 4 ഉം യ്ക്കും എതിരായി 5 മുതൽ 3 വരെയുമാണെങ്കിൽ, ഓഡ്സിൽ C യ്ക്കു എതിരാണ്.

(1) 23: 65 (2) 65: 23 (3) 23: 88 (4) 88: 23

(20) ഗണം $\{1,2,3,4\}$ യിൽ നിന്നും മാറ്റിവച്ച് a യും b യും തിരഞ്ഞെടുക്കുമ്പോൾ, $x^2+ax+b=0$ എന്ന സമവാക്യത്തിൽ വാസ്തവിക മൂല്യങ്ങൾ കിട്ടുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യതയാണ്

(1) $\frac{3}{16}$ (2) $\frac{5}{16}$ (3) $\frac{7}{16}$ (4) $\frac{11}{16}$

(21) A യും B. യും സംഭവങ്ങളും $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(A/B)=\frac{1}{2}$ ഉം $P(B/A)=\frac{2}{3}$ എന്ന് തന്നിട്ടുണ്ടെങ്കിൽ $P(B)$ ആണ്

(1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{1}{2}$

(22) ഒരു കോളേജിൽ 4% ആണും 1% പെണ്ണും 1.8 മീറ്ററിനെക്കാളും പൊക്കമുള്ളവരാണ്. കൂടാതെ, വിദ്യാർത്ഥികളിൽ 60% വും പെണ്ണുങ്ങളാണ്. 1.8 മീറ്ററിനു മുകളിലുള്ള ഒരു വിദ്യാർത്ഥിയെ തിരഞ്ഞെടുക്കുമ്പോൾ, അതൊരു പെൺകുട്ടിയായിരിക്കാനുള്ള സംഭാവ്യതയാണ്

(1) $\frac{2}{11}$ (2) $\frac{3}{11}$ (3) $\frac{5}{11}$ (4) $\frac{7}{11}$

(23) 10 നാണയങ്ങൾ ടോസ്സിടുന്നു. കുറഞ്ഞത് 8 തലകൾ കിട്ടുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യതയാണ്

(1) $\frac{7}{64}$ (2) $\frac{7}{32}$ (3) $\frac{7}{16}$ (4) $\frac{7}{128}$

(24) രണ്ട് സംഭവങ്ങൾ A യും B യുടെയും സംഭാവ്യത 0.3 ഉം 0.6 ഉം ആണ്. അവ രണ്ടും ഒരേ സമയം സംഭവിക്കാനുള്ളതിന്റെ സംഭാവ്യത 0.18 ആണ്. A യും B യും സംഭവിക്കുന്നില്ല എന്നതിന്റെ സംഭാവ്യതയാണ്

(1) 0.1 (2) 0.72 (3) 0.42 (4) 0.28

(25) m എന്ന ഒരു സംഖ്യയും $m\le 5$ ഉം ആണെങ്കിൽ, ദ്വിഘാത സമീകരണം $2x^2+2mx+m+1=0$ ക്ക് വാസ്തവിക മൂല്യങ്ങളായി വരുന്നതിന്റെ സംഭാവ്യതയാണ്

(1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{3}{5}$ (4) $\frac{4}{5}$

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 267 3/16/2023 4:43:54 PM

സംഗ്രഹം

S എന്ന സാമ്പിൾ സ്പെയ്സിനെ ഒരു യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണംകൊണ്ട് ബന്ധിക്കുകയും A ഒരു സംഭവവുമാണെങ്കിൽ

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{Number of cases favourable to } A}{\text{Exhaustive Number of cases in } S}$$

സംഭാവ്യതയുടെ സിദ്ധതത്വങ്ങൾ

തന്നിട്ടുള്ള പരിമിത സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ് S ൽ A എന്ന സംഭവം S ൽ ആണെങ്കിൽ $P(A)$ നെ A യുടെ സംഭാവ്യതയെന്ന് നിർവ്വചിക്കുമ്പോൾ മൂന്ന് സിദ്ധതത്വങ്ങളെ തൃപ്തിപ്പെടുത്തുന്നു.

(1) $P(A) \geq 0$

(2) A യും B യും പരസ്പരം വർജ്ജക സംഭവങ്ങളെങ്കിൽ, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(3) $P(S) = 1$

അസ്യാധ്യ സംഭവത്തിന്റെ സംഭാവ്യത പൂജ്യം ആണ്. അതായത് $\boxed{P(\varnothing) = 0}$

A യും B യും രണ്ട് സംഭവങ്ങളും $\overline{B}$ എന്നത് സംഭവം B യുടെ പൂരക സംഭവങ്ങളുമെങ്കിൽ

$$\boxed{P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)}$$

A യും B യും രണ്ട് സംഭവങ്ങളെങ്കിൽ

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

സംഭവം B യുടെ നിബന്ധനയ്ക്കുള്ള സംഭാവ്യതയിൽ സംഭവം A നേരത്തേ നടന്നു കഴിഞ്ഞു എന്നും അതിനെ $P(B/A)$ എന്നും സൂചിപ്പിച്ച് നമുക്ക് ഇങ്ങനെ നിർവ്വചിക്കാം.

$$\boxed{P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \; P(A) \neq 0 \text{ ആകുന്ന പക്ഷം}}$$

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \; P(B) \neq 0 \text{ ആകുന്ന പക്ഷം}}$$

A യും B യും ഒരേ സമയം നടക്കുന്നതിനുള്ള സംഭാവ്യതയാണ്

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A/B)\,P(B) \text{ അല്ലെങ്കിൽ } P(A \cap B) = P(B/A)\,P(A)}$$

രണ്ട് സംഭവങ്ങൾ A, B യും സ്വതന്ത്ര്യങ്ങളാണ് എങ്കിൽ മാത്രം

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)}$$

മൊത്തം സംഭവ്യത

$A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ പരസ്പര വർജ്ജകങ്ങളും സമ്പൂർണ്ണ സംഭവങ്ങളും B എന്നത് S ലെ ഒരു സംഭവവും എങ്കിൽ $P(B)$ നെ B എന്ന സംഭവത്തിന്റെ മൊത്തം സംഭാവ്യത എന്ന് വിളിക്കുന്നു.

$$\boxed{P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \cdots + P(A_n).P(B/A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)}$$

ബെയ്സ് സിദ്ധാന്തം

$A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ പരസ്പരം വർജ്ജകവും സമ്പൂർണ്ണ സംഭവങ്ങളും $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots . n$ ഉം B എന്നത് ഏതെങ്കിലും ഒരു സംഭവത്തിൽ $P(B) > 0$ യും ആയാൽ

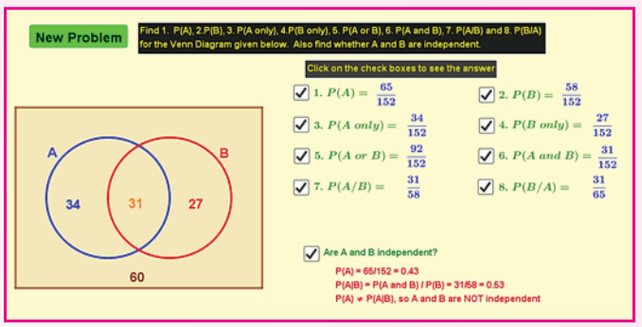
$$\boxed{P(A_i/B) = \frac{P(A_i)\,P(B/A_i)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2) + \ldots + P(A_n)\,P(B/A_n)}}$$

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 268 3/16/2023 4:43:57 PM

ഐ സി റ്റി കോർണർ 12(a)

സംഭാവ്യത

നിർണ്ണയ ഫലം

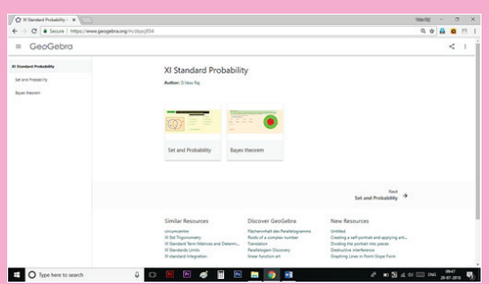


ഘട്ടം 1

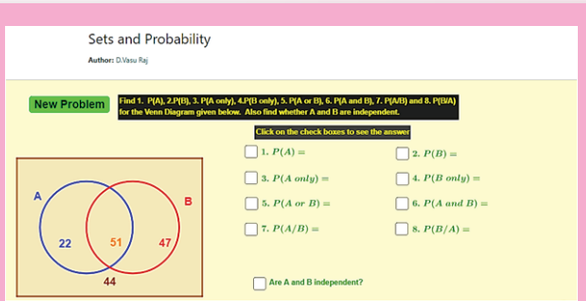
ബ്രൗസർ ഓപ്പൺ ചെയ്ത് താഴെ തന്നിട്ടുള്ള URL ടൈപ്പ് ചെയ്യുക (അല്ലെങ്കിൽ) QR Code സ്കാൻ ചെയ്യുക. ജിയോജീബ്ര വർക്ക് ബുക്ക് എന്നXI സ്റ്റാൻഡേർഡ് സംഭാവ്യത അതിൽ കാണും. അതിൽ അനേകം വർക്ക് ഷീറ്റുകൾ പാഠഭാത്തെ സംബന്ധിച്ച് കിട്ടുന്നതാണ്.

ഘട്ടം 2

വർക്ക് ഷീറ്റ് ഗണങ്ങളും സംഭാവ്യതയും എന്ന വർക്ക് ഷീറ്റ് സെലക്റ്റ് ചെയ്യുക. നമുക്ക് "New Problem" എന്നതിൽ click ചെയ്ത് ചോദ്യങ്ങൾ മാറ്റാൻ സാധിക്കും. സംഭാവ്യതകൾ ചെയ്തു നോക്കി നിങ്ങളുടെ ഉത്തരവും ചെക്ക്ബോക്സിലെ ഉത്തരവും താരതമ്യം ചെയ്യാവുന്നതാണ്



ഘട്ടം 1



ഘട്ടം 2

ഈ ലിങ്കിൽ ബ്രൗസ് ചെയ്യുക:

XI standard Probability: https://ggbm.at/zbpcj934

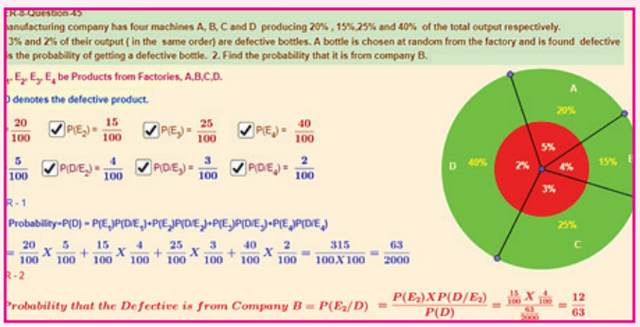
3FRMH

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 269 3/16/2023 4:43:58 PM

ഐ സി റ്റി കോർണർ 12(b)

സംഭാവ്യതയുടെ സിദ്ധാന്തത്തിന് ഒരു ആമുഖം

നിർണ്ണയ ഫലം



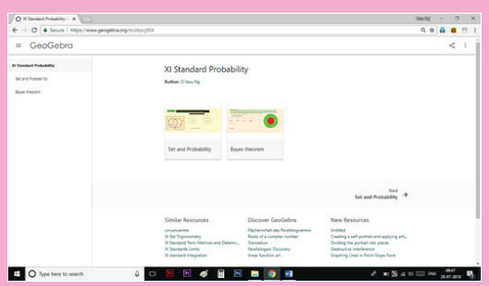
ഘട്ടം 1

ബ്രൗസർ ഓപ്പൺ ചെയ്ത് URL ടൈപ്പ് ചെയ്യുക (അല്ലെങ്കിൽ) QR Code സ്കാൻ ചെയ്യുക. ജിയോജീബ്ര വർക്ക് ബുക്ക് എന്ന XI സ്റ്റാൻഡേർഡ് സംഭാവ്യത അതിൽ കാണും. അതിൽ അനേകം വർക്ക് ഷീറ്റുകൾ പാഠഭാത്തെ സംബന്ധിച്ച് കിട്ടുന്നതാണ്.

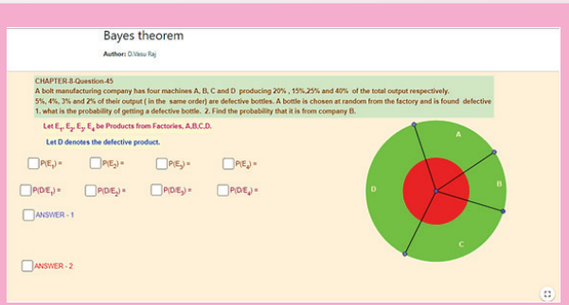
ഘട്ടം 2

വർക്ക് ഷീറ്റ് ബെയ്സ് സിദ്ധാന്തം സെലക്റ്റ് ചെയ്യുക. ഒരു ഉദാഹരണത്തെ തന്നിട്ടുണ്ട്. step by step സംഭാവ്യത വർക്ക് ചെയ്യുക.

നിങ്ങളുടെ ഉത്തരവും ചെക്ക്ബോക്സിലെ ഉത്തരവും താരതമ്യം ചെയ്യാവുന്നതാണ്.



ഘട്ടം 1



ഘട്ടം 2

ഈ ലിങ്കിൽ ബ്രൗസ് ചെയ്യുക:

XI standard Probability: https://ggbm.at/zbpcj934

AYF8G

MAL 12_11th-Maths-Vol2-Unit12.indd 270 3/16/2023 4:44:00 PM

ഉത്തരങ്ങൾ

അഭ്യാസം 7.1

(1) (i) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 9 & 25\\ 0 & 4 & 16\end{bmatrix}$ (ii) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 5 & 9 & 13\\ 2 & 2 & 6 & 10\\ 5 & 1 & 3 & 7\end{bmatrix}$ (2) $\pm\sqrt{2}, -3, \frac{1}{2}, 1-\pi$

(3) 5 (4) $A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-15 & 10 & -8\\ 10 & -5 & 5\end{bmatrix}$, $B=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-12 & 2 & -16\\ 8 & -4 & 13\end{bmatrix}$

(5) $A^4=\begin{bmatrix}1 & 4a\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (6) (ii) $\alpha=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}, n\in\mathbb{Z}$ (7) $x=1$

(9) $k=2$ (12) $-I$ (14) $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ (16) 3×4

(18) $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 12\\ -5 & 0\end{bmatrix}$ (19) $x=-2,\ y=-1$ (20) (i) $x=3^{\frac{1}{3}}$ (ii) $p=-2, q=0, r=-3$

(21) $A=\begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$, സ്ക്രൂ - സിമെട്രിക് (24)പാക് I - ₹ 180, പാക് II - ₹ 340, പാക് III - ₹ 480

അഭ്യാസം 7.2

(10) 0 (13) 0 (15) (i) 0 (ii) 0 (16) 4

(17) –81 (18) (19) –1, 2 (21) 7

അഭ്യാസം 7.3

(3) $x=0$ (ഗുണിതം 2), $x=-(a+b+c)$ (5) $x=0$ (ഗുണിതം 2), $x=-12$

അഭ്യാസം 7.4

(1) 2.5 ച. മാത്രകൾ (2) $k=-1, 7$ (3) (i) സിങ്കുലാർ (ii) നോൺ - സിങ്കുലാർ (iii) സിങ്കുലാർ

(4) (i) $a=-\frac{6}{7}$ (ii) $b=\frac{49}{8}$ (5) $\frac{1}{2}$ (6) 6

അഭ്യാസം 7.5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
2	1	1	2	2	2	4	4	2	4	2	4	3	2	4
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
3	3	4	1	3	2	3	3	1	2					

അഭ്യാസം 8.1

(7) മറ്റുവശങ്ങൾ $\vec{b}-\vec{a}, -\vec{a}, \vec{a}-\vec{b}$ കൂടാതെ മറ്റു കർണ്ണം $\vec{b}-2\vec{a}$

MAL_11th-Maths-Vol2-Answers.indd 271 14-02-2023 17:36:08

അഭ്യാസം 8.2

(1) (i) സദിശ കോ സൈൻ അല്ല (ii) സദിശ കോ സൈൻസ് (iii) സദിശ കോ സൈനസ്

(2) (i) $\left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ (ii) $\left(\frac{3}{\sqrt{19}}, \frac{-1}{\sqrt{19}}, \frac{3}{\sqrt{19}}\right)$ (iii) (0, 0, 1)

(3) (i) $\left(\frac{3}{\sqrt{89}}, \frac{-4}{\sqrt{89}}, \frac{8}{\sqrt{89}}\right)$, $(3,-4,8)$ (ii) $\left(\frac{3}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{11}}\right)$, $(3,1,1)$

(iii) (0, 1, 0), (0, 1, 0) (iv) $\left(\frac{5}{\sqrt{2338}}, \frac{-3}{\sqrt{2338}}, \frac{-48}{\sqrt{2338}}\right)$ and $(5,-3,-48)$

(v) $\left(\frac{3}{\sqrt{34}}, \frac{4}{\sqrt{34}}, \frac{-3}{\sqrt{34}}\right)$ and $(3,4,-3)$ (vi) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, $(1,0,-1)$

(4) $\left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ കൂടാതെ $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$

(5) $a = \pm\frac{1}{2}$ (6) $a=-1, b=2, c=-1$, അല്ലെങ്കിൽ $a=1, b=-2, c=1$ (8) $\lambda = \frac{2}{3}$

(11) (i) $\sqrt{41}$, $\left(\frac{2}{\sqrt{41}}, \frac{1}{\sqrt{41}}, \frac{-6}{\sqrt{41}}\right)$ (ii) $\sqrt{1123}$, $\left(\frac{-15}{\sqrt{1123}}, \frac{27}{\sqrt{1123}}, \frac{13}{\sqrt{1123}}\right)$

(12) $\sqrt{44}+\sqrt{218}+\sqrt{110}$ (13) $\frac{1}{\sqrt{398}}(17\hat{i}-3\hat{j}-10\hat{k})$

(14) അതേ (16) $m = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

അഭ്യാസം 8.3

(1) (i) 9 (ii) 4 (2) (i) $\lambda = \frac{5}{2}$ (ii) $\lambda = -2$ (3) $\theta = \frac{\pi}{4}$

(4) (i) $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{-9}{49}\right)$ (ii) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (5) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ (8) -55

(11) $5\sqrt{2}$ (12) $\frac{41}{7}$ (13) 5 (14) -42

അഭ്യാസം 8.4

(1) $\sqrt{507}$ (3) $\frac{\pm 10\sqrt{3}}{\sqrt{35}}(5\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})$ (4) $\pm\frac{(-\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k})}{\sqrt{6}}$

(5) $8\sqrt{3}$ ച. മാത്രകൾ (6) $\frac{1}{2}\sqrt{165}$ ച. മാത്രകൾ (10) $\frac{\pi}{3}$

അഭ്യാസം 8.5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
3	3	4	2	2	3	4	4	2	3	2	1	1	1	3
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
4	1	4	4	1	3	2	4	3	2					

MAL_11th-Maths-Vol2-Answers.indd 272 14-02-2023 17:36:09

അഭ്യാസം 9.1

(1) $\simeq 0.\overline{3}$ (2) 0.25 (3) $\frac{1}{2\sqrt{3}} \simeq 0.288$ (4) $\simeq 0.25$

(5) 1 (6) 0 (7) 1 (8) 3

(9) 2 (10) 3 (11) നിലവിലില്ല (12) നിലവിലില്ല

(13) 0 (14) 1 (15) നിലവിലില്ല

(16) $x_0 = 4$ ഒഴികെ (17) $x_0 = \pi$ ഒഴികെ (19) $f(8^-) = f(8^+) = 25$

(20) ഇല്ല (21) $f(2)$ നിഗമനം ചെയ്യാൻ കഴിയില്ല (22) 6, 6 (23) നിലവിലില്ല

അഭ്യാസം 9.2

(1) 32 (2) $\frac{m}{n}$ (3) 108 (4) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

(5) $\frac{1}{6}$ (6) $-\frac{1}{4}$ (7) 3 (8) 4

(9) $\frac{1}{2}$ (10) $-\frac{1}{4}$ (11) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{4}$ (12) 0

(13) $f(x) \to -\infty$ as $x \to 0$ (പരിധി നിലവിലില്ല) (14) $\frac{1}{4}$ (15) $\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$

അഭ്യാസം 9.3

(1) (i) $f(-2) \to \infty$ as $x \to -2^-$, $f(-2) \to -\infty$ as $x \to -2^+$

(ii) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \to \infty$ as $x \to \frac{\pi}{2}^-$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \to -\infty$ as $x \to \frac{\pi}{2}^+$

(2) $f(3) \to -\infty$ as $x \to 3^-$, $f(3) \to \infty$ as $x \to 3^+$ (3) $f(x) \to \infty$ as $x \to \infty$

(4) 0 (5) $f(x) \to \infty$ as $x \to \infty$ (6) -1 (7) $\frac{1}{4}$

(9) $\frac{1}{\alpha}$ (10) 30

അഭ്യാസം 9.4

(1) e^7 (2) $e^{\frac{1}{3}}$ (3) 1 (4) $\frac{1}{e^8}$ (5) e^3

(6) $\frac{1}{8}$ (7) $\frac{\alpha}{\beta}$ (8) $\frac{2}{5}$ (9) $\begin{cases} 1 \text{ if } m = n \\ 0 \text{ if } m > n \\ f(\alpha) \to \infty \text{ as } \alpha \to 0 \text{ if } m < n \end{cases}$

(10) $2\cos a$ (11) $\frac{b}{a}$ (12) $\frac{2}{3}$ (13) $\frac{1}{2}$ (14) 2

(15) $\log\frac{2}{3}$ (16) $\log 9$ (17) $\frac{1}{2}$ (18) $\log 3 - 1$ (19) a

(20) $-\frac{3}{2}$ (21) e^2 (22) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ (23) 1 (24) e^2

(25) 2 (26) $a - b$ (27) $\frac{1}{2}$ (28) $\frac{1}{2}$

MAL_11th-Maths-Vol2-Answers.indd 273 14-02-2023 17:36:17

അഭ്യാസം 9.5

(2) (i) തുടർച്ചയായ മൂല്യങ്ങൾ ആണ് എല്ലാ $x \in \mathbb{R}$ നും(ii) $\mathbb{R}$ ൽ തുടർച്ചയായതുകൊണ്ട്

(iii) എല്ലാ $x \in \mathbb{R} - (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in z$ നും തുടർച്ചയായത് (iv) എല്ലാ $x \in \mathbb{R}$ തുടർച്ചയായത്

(v) $(0, \infty)$ നു തുടർച്ചയായത് (vi) എല്ലാ $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ നും തുടർച്ചയായത്

(vii) എല്ലാ $x \in \mathbb{R} - \{-4\}$ നും തുടർച്ചയായത് (viii) എല്ലാ $x \in \mathbb{R}$ നും തുടർച്ചയായത്

(ix) എല്ലാ $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$ നും തുടർച്ചയായത് (x) $x \in \mathbb{R} - \frac{n\pi}{2}, n \in z$ നും തുടർച്ചയായത്

(3) (i) $x = 3$ ആകുമ്പോൾ തുടർച്ചയായത് അല്ല (ii) എല്ലാ $x \in \mathbb{R}$ നും തുടർച്ചയായത

(iii) എല്ലാ $x \in \mathbb{R}$ നും തുടർച്ചയായത് (iv) എല്ലാ $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ നും തുടർച്ചയായത്

(4) (i) $x_0 = 1$ ആകുമ്പോൾ തുടർച്ചയായത് (ii) $x_0 = 3$ ന് തുടർച്ചയായത് അല്ല

(6) $\alpha = 4$ (8) 6

(9) (i) $x = 1$ ആകുമ്പോൾ തുടർച്ചയായത് അല്ല (ii) $x = 0$ ആകുമ്പോൾ തുടർച്ചയായത് അല്ല

(10) $x = 0, 1, 3$ എന്നീ മൂല്യങ്ങൾക്ക് തുടർച്ചയായത്

(11) (i) $x = -2$, $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2x - 8}{x+2} & \text{if } x \neq -2 \\ -6 & \text{if } x = -2 \end{cases}$ ആകുമ്പോൾ മാറാത്ത ഡിസ്കണ്ടിന്യൂറ്റി

(ii) $x = -4$, $g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 64}{x+4} & \text{if } x \neq -4 \\ 48 & \text{if } x = -4 \end{cases}$ ആകുമ്പോൾ മാറാത്ത ഡിസ്കണ്ടിന്യൂറ്റി

(iii) $ü = 9$, $(\ ) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x} & ü \quad x \neq \\ \frac{1}{6} & \text{if } x = 9 \end{cases}$ ആകുമ്പോൾ മാറാത്ത ഡിസ്കണ്ടിന്യൂറ്റി

(12) -2 (13) $f(0) = 0$ (14) $f(1) = \frac{2}{3}$

അഭ്യാസം 9.6

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
2	3	4	1	1	4	2	2	2	3	4	3	4	3	1
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
1	1	1	4	2	2	2	2	2	4					

അഭ്യാസം 10.1

(1) (i) 0 (ii) -4 (iii) $-2x$

(2) (i) $f'(1^-) = -1$, $f'(1^+) = 1$ ഡിഫറൻഷ്യബിൾ അല്ല (ii) $f'(x) \to -\infty$, $x \to 1^-$ ഡിഫറൻഷ്യബിൾ അല്ല

(iii) $f'(1^-) = 1$, $f'(1^+) = 2$, ഡിഫറൻഷ്യബിൾ അല്ല

(3) (i) ഡിഫറൻഷ്യബിൾ (ii) ഡിഫറൻഷ്യബിൾ അല്ല

(iii) ഡിഫറൻഷ്യബിൾ അല്ല (iv) ഡിഫറൻഷ്യബിൾ അല്ല

(5) $x = -1$, $x = 8$ എന്നിവ കസ്പ്സ്

MAL_11th-Maths-Vol2-Answers.indd 274 14-02-2023 17:36:20

$x = 4$ ആകുമ്പോൾ ഇത് തുടർച്ചയായുള്ളതല്ല, $x = 11$, ആകുമ്പോൾ സ്പർശരേഖ ലംബമാണ്.

(6) അങ്ങനെ ഒരു മൂല്യം ഇല്ല

(7) (i) $x = n\pi, n \in z$ ആകുമ്പോൾ ഡിഫറൻഷ്യബിൾ അല്ല

(ii) $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in z$ ആകുമ്പോൾ ഡിഫറൻഷ്യബിൾ അല്ല

അഭ്യാസം 10.2

(1) $1 - 3\cos x$

(2) $\cos x - \sin x$

(3) $x\cos x + \sin x$

(4) $-\sin x - 2\sec^2 x$

(5) $3t^2\cos t - t^3\sin t$

(6) $4\sec t\tan t + \sec^2 t$

(7) $e^x(\cos x + \sin x)$

(8) $\frac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2}$

(9) $\frac{1}{1+\cos x}$

(10) $\frac{(1-x)\cos x + (1+x)\sin x}{(\sin x + \cos x)^2}$

(11) $\cos x + \sin x$

(12) $\frac{x\cos x - 2\sin x}{x^3}$

(13) $\tan\theta\sec\theta + \cos\theta + \sin\theta$

(14) $-\frac{(1+\cos^2 x)}{\sin^3 x}$

(15) $x\cos 2x + \sin x\cos x$

(16) $e^{-x}\left[\frac{1}{x} - \log x\right]$

(17) $e^{-3x}\left[-3(x^2+5)\log(1+x) + \frac{x^2+5}{1+x} + 2x\log(1+x)\right]$

(18) $\frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{180}x$

(19) $\frac{\log_{10} e}{x}$

അഭ്യാസം 10.3

(1) $5(2x+4)(x^2+4x+6)^4$

(2) $3\sec^2 3x$

(3) $-\sec^2 x\sin(\tan x)$

(4) $x^2(1+x^3)^{-\frac{2}{3}}$

(5) $\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$

(6) $e^x\cos(e^x)$

(7) $7(3x^2+4)(x^3+4x)^6$

(8) $\frac{3}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)$

(9) $\frac{1}{3}\sec^2 t(1+\tan t)^{-\frac{2}{3}}$

(10) $-3x^2\sin(a^3 + x^3)$

(11) $-my$

(12) $20\sec 5x\tan 5x$

(13) $\frac{8(2x-5)^3}{(8x^2-5)^4}[-4x^2 + 30x - 5]$

(14) $\frac{8x^3 + 14x}{3(x^2+2)^{\frac{2}{3}}}$

(15) $e^{-x^2}[1 - 2x^2]$

(16) $-\frac{3t^2}{2(t^3+1)^{\frac{3}{4}}(t^3-1)^{\frac{5}{4}}}$

(17) $\frac{14 - 3x}{2(7-3x)\sqrt{7-3x}}$

(18) $-\sin x\sec^2(\cos x)$

(19) $\sin x(1 + \sec^2 x)$

(20) $\frac{5^{-\frac{1}{x}}(\log 5)}{x^2}$

(21) $\frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+2\tan x}}$

(22) $3\sin x\cos x(\sin x - \cos x)$

(23) $-k\sin kx\sin(2\cos kx)$

(24) $-6\sin 2x(1+\cos^2 x)^5$

(25) $\frac{3e^{3x} + 2e^{4x}}{(1+e^x)^2}$

(26) $\frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

(27) $e^{x\cos x}[\cos x - x\sin x]$

(28) $\dfrac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ (29) $\dfrac{\cos\left(\tan\sqrt{\sin x}\right)\sec^2\left(\sqrt{\sin x}\right)\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ (30) $\dfrac{-2}{1+x^2}$

അഭ്യാസം 10.4

(1) $x^{\cos x}\left(\dfrac{\cos x}{x}-\sin x\log x\right)$ (2) $x^{\log x}\left(\dfrac{2\log x}{x}\right)+(\log x)^x\left[\dfrac{1}{\log x}+\log(\log x)\right]$

(3) $\dfrac{y(2x-1)}{x(1+2y)}$ (4) $\dfrac{y(x\log y-y)}{x(y\log x-x)}$ (5) $(\cos x)^{\log x}\left[\dfrac{\log(\cos x)}{x}-\tan x\log x\right]$

(6) $-\dfrac{b^2x}{a^2y}$ (7) $\dfrac{x\sqrt{x^2+y^2}+y}{x-y\sqrt{x^2+y^2}}$ (8) $\dfrac{1-\sec^2(x+y)-\sec^2(x-y)}{\sec^2(x+y)-\sec^2(x-y)}$

(10) $\dfrac{1}{2}$ (11) $\dfrac{6}{1+9x^2}$ (12) 1 (13) $-\tan t$

(14) $\tan t$ (15) $\dfrac{t^2-1}{2t}$ (16) $\dfrac{2}{1+x^2}$ (17) $\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}$

(18) 1 (19) $\cos x^2$ (20) 2 (21) $\dfrac{1}{2}$

(22) -1 (23) $\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

അഭ്യാസം 10.5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
2	4	3	3	1	4	3	2	1	4	3	3	2	2	4
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
2	3	1	4	2	4	1	1	3	2					

അഭ്യാസം 11.1

(1) (i) $\dfrac{x^{12}}{12}+c$ (ii) $-\dfrac{1}{6x^6}+c$ (iii) $\dfrac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+c$ (iv) $\dfrac{8}{13}x^{\frac{13}{8}}\quad c$

(2) (i) $-\cot x+c$ (ii) $\sec x+c$ (iii) $-\text{cosec}x+c$ (iv) $\tan x+c$

(3) (i) 12^3x+c (ii) $\log|x|+c$ (iii) e^x+c

(4) (i) $\tan^{-1}x+c$ (ii) $\sin^{-1}x+c$

അഭ്യാസം 11.2

(1) (i) $\dfrac{(x+5)^7}{7}+c$ (ii) $\dfrac{1}{9(2-3x)^3}+c$ (iii) $\dfrac{2}{9}(3x+2)^{\frac{3}{2}}+c$

(2) (i) $\dfrac{-\cos 3x}{3}+c$ (ii) $-\dfrac{\sin(5-11x)+c}{11}$ (iii) $-\dfrac{\cot(5x-7)}{5}+c$

(3) (i) $\dfrac{1}{3}e^{3x-6}+c$ (ii) $-\dfrac{e^{8-7x}}{7}+c$ (iii) $-\dfrac{1}{4}\log|6-4x|+c$

MAL_11th-Maths-Vol2-Answers.indd 276 14-02-2023 17:36:27

(4) (i) $5\tan\frac{x}{5}+c$ (ii) $-\frac{1}{5}\operatorname{cosec}(5x+3)+c$ (iii) $-\frac{1}{15}\sec(2-15x)+c$

(5) (i) $\frac{1}{4}\sin^{-1}(4x)+c$ (ii) $\frac{1}{9}\sin^{-1}(9x)+c$ (iii) $\frac{1}{6}\tan^{-1}(6x)+c$

അഭ്യാസം 11.3

(1) $\frac{(x+4)}{6}+\frac{1}{3(2-5x)}+\frac{\cot(3x-1)}{3}+c$ (2) $-2\sin(5-2x)+3e^{3x-6}-6\log|6-4x|+c$

(3) $5\tan\frac{x}{5}+9\sin 2x+2\sec(5x+3)+c$ (4) $2\sin^{-1}(4x)+9\sin^{-1}(3x)-3\tan^{-1}(5x)+c$

(5) $2\tan^{-1}(3x+2)+3\sin^{-1}(3-4x)+c$ (6) $\sin\left(\frac{x}{3}-4\right)+\log|7x+9|+5e^{\frac{x}{5}+3}+c$

അഭ്യാസം 11.4

(1) $2x^2-5x+3$ (2) $3(x^3-x^2-1)$ (3) $2x^3-3x^2+5x+26$

(4) (i) 8 seconds (ii) 39.2 m/sec (iii) 78.4 m/sec

(5) (i) 2.4 sq.cm (ii) 0.4 sq.cm

അഭ്യാസം 11.5

(1) $\frac{x^2}{2}+4x-3\log|x|-\frac{2}{x}+c$ (2) $\frac{x^2}{2}+\log|x|+2x+c$ (3) $\frac{8x^3}{3}+26x^2-180x+c$

(4) $\tan x-\cot x-2x+c$ (5) $2[\sin x+x\cos\alpha]+c$ (6) $-2\operatorname{cosec}2x+c$

(7) $-3\cot x-4\operatorname{cosec}x+c$ (8) $x-\sin x+c$ (9) $2\left[\frac{\sin 3x}{3}+\sin x\right]+c$

(10) $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 5x}{5}+\sin x\right]+c$ (11) $\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 10x}{10}\right]+c$ (12) $-\frac{1}{8}\cos 4x+c$

(13) $\frac{(ae)^x}{\log(ae)}+c$ (14) $\frac{2}{15}(3x+7)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(3x+7)^{\frac{3}{2}}+c$

(15) $\frac{2^{2x+2}}{\log 2}-\frac{2^{2-3x}}{3\log 2}+c$ (16) $\frac{2}{21}[(x+3)^{\frac{3}{2}}+(x-4)^{\frac{3}{2}}]+c$

(17) $2\log|x+3|-\log|x+2|+c$ (18) $\frac{1}{9}\log|x-1|-\frac{1}{9}\log|x+2|+\frac{1}{3(x+2)}+c$

(19) $\log\left|\frac{x+2}{x-1}\right|+3\tan^{-1}x+c$ (20) $\frac{x^2}{2}+3x-\log|x-1|+8\log|x-2|+c$

അഭ്യാസം 11.6

(1) $\sqrt{1+x^2}+c$ (2) $\frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3)+c$ (3) $\log|e^x+e^{-x}|+c$

(4) $\log|10^x+x^{10}|+c$ (5) $-2\cos\sqrt{x}+c$ (6) $\log|\log(\sin x)|+c$

MAL_11th-Maths-Vol2-Answers.indd 277 14-02-2023 17:36:28

(7) $\log\left|\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right|+c$ (8) $\frac{1}{b^2}\log|a^2+b^2\sin^2 x|+c$ (9) $\frac{(\sin^{-1}x)^2}{2}+c$

(10) $(1+\sqrt{x})^2-4(1+\sqrt{x})+2\log\left|1+\sqrt{x}\right|+c$ (11) $\log|\log(\log x)|+c$

(12) $-e^{-\beta x^{\alpha}}+c$ (13) $2\sqrt{\sec x}\quad c$ (14) $\frac{(1-x)^{19}}{19}-\frac{(1-x)^{18}}{18}+c$

(15) $\frac{\sin^6 x}{6}-\frac{\sin^8 x}{8}+c$ (16) $(x-a)\cos a-\sin a\log|\sec(x-a)|+c$

അഭ്യാസം 11.7

(1) (i) $e^{3x}[3x-1]+c$ (ii) $-\frac{x\cos 3x}{3}+\frac{\sin 3x}{9}+c$

(iii) $-e^{-5x}[5x+1]+c$ (iv) $x\sec x-\log|\sec x+\tan x|+c$

(2) (i) $\frac{x^2\log|x|}{2}-\frac{x^2}{4}+c$ (ii) $e^{3x}[9x^2-6x+2]+c$

(iii) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+c$ (iv) $-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x+c$

(3) (i) $-\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}+x+c$ (ii) $\frac{1}{2}e^{x^2}[x^4-2x^2+2]+c$

(iii) $\frac{1}{2}\left[4x\tan^{-1}4x-\log\left|\sqrt{1+16x^2}\right|\right]+c$ (iv) $2\left[x\tan^{-1}x-\log\left|\sqrt{1+x^2}\right|\right]+c$

അഭ്യാസം 11.8

(1) (i) $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx+b\sin bx]+c$ (ii) $\frac{e^{2x}}{5}[2\sin x-\cos x]+c$

(iii) $\frac{e^{-x}}{5}[2\sin 2ü-\cos 2\ ]+$

(2) (i) $-\frac{e^{-\ x}}{13}[3\sin 2x+2\cos 2x]+c$ (ii) $-\frac{e^{-4x}}{10}[2\sin 2x+\cos 2x]+c$

(iii) $\frac{e^{-3x}}{10}[\sin x-3\cos x]+c$

അഭ്യാസം 11.9

(1) $e^x\log|\sec x|+c$ (2) $\frac{e^x}{2x}+c$ (3) $ü^x$ ü +

(4) $e^x\tan x+c$ (5) $xe^{\tan^{-1}x}+c$ (6) $\frac{x}{1+\log|x|}+c$

MAL_11th-Maths-Vol2-Answers.indd 278 14-02-2023 17:36:29

അഭ്യാസം 11.10

(1) (i) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+c$ (ii) $\frac{1}{20}\log\left|\frac{5+2x}{5-2x}\right|+c$ (iii) $\frac{1}{12}\log\left|\frac{3x-2}{3x+2}\right|+c$

(2) (i) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}-3+x}{\sqrt{2}+3-x}\right|+c$ (ii) $\frac{1}{10}\log\left|\frac{x-4}{x+6}\right|+c$ (iii) $\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+2}\right|+c$

(3) (i) $\log\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2-1}\right|+c$ (ii) $\log\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+c$ (iii) $\sin^{-1}\left(\frac{x-4}{5}\right)+c$

അഭ്യാസം 11.11

(1) (i) $\log\ |x^2+4x-12|-\frac{7}{8}\log\left|\frac{x-2}{x+6}\right|+c$ (ii) $\frac{5}{2}\log|x^2+2x+2|-7\tan^{-1}(x+1)+c$

(iii) $\frac{3}{4}\log|2x^2-2x+3|+\frac{\sqrt{5}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+c$

(2) (i) $5\sin^{-1}\frac{x-2}{\sqrt{13}}-2\sqrt{9+4x-x^2}+c$ (ii) $\sqrt{x^2-1}+2\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

(iii) $2\sqrt{x^2+4x+1}-\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right|+c$

അഭ്യാസം 11.12

(1) (i) $\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+10}+\frac{9}{2}\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+10}\right|+c$

(ii) $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x-3}-2\log\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-3}\right|+c$

(iii) $\frac{x-5}{2}\sqrt{10x-x^2-24}+\frac{1}{2}\sin^{-1}(x-5)+c$

(2) (i) $\frac{1}{4}\left[(2x+5)\sqrt{9-(2x+5)^2}+9\sin^{-1}\left(\frac{2x+5}{3}\right)\right]+c$

(ii) $\frac{1}{4}\left[(2x+1)\sqrt{81+(2x+1)^2}+81\log\left|2x+1+\sqrt{81+(2x+1)^2}\right|\right]+c$

(iii) $\frac{x+1}{2}\sqrt{(x+1)^2-4}+2\log\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2-4}\right|+c$

അഭ്യാസം 11.13

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
1	3	4	1	3	1	3	2	4	3	4	2	4	4	1
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
1	3	2	4	1	3	4	3	1	4					

MAL_11th-Maths-Vol2-Answers.indd 279 14-02-2023 17:36:31

അഭ്യാസം 12.1

(1) (i) അനുവദനീയമാണ് (ii) അനുവദനീയമല്ല (iii) അനുവദനീയമല്ല

(2) (i) $\frac{1}{2}$ (ii) 1 (3) (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{4}{9}$ (4) (i) $\frac{1}{7}$ (ii) $\frac{2}{7}$ (5)(i) $\frac{7}{64}$ (ii) $\frac{247}{256}$ (iii) $\frac{37}{256}$

(6) $\frac{37}{100}$ (7) (i) $\frac{7}{33}$ (ii) $\frac{14}{55}$ (8) $\frac{627}{728}$ (9)(i) $\frac{5}{12}$ (ii) 2 to 3

അഭ്യാസം 12.2

(1) (i) $\frac{5}{8}$ (ii)$\frac{1}{2}$ (iii)) $\frac{1}{8}$ (iv) 1 (2) (i) 0.50 (ii) 0.35 (iii) 0.20

(3) $\frac{11}{36}$ (4) (i) 0.8 (ii) 0.5 (iii) 0.3

(5) (i) 0.9984 (ii) 0.0016 (6) (i) 0.64 (ii) 0.44

അഭ്യാസം 12.3

(1) No (3) 0.5 (4) (i) 0.5 (ii) 0.9

(5) $\frac{3}{8}$ (6) (i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{13}{30}$ (7) (i) 0.5 (ii) 0.375

(8) (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{9}{40}$ (iii) $\frac{21}{40}$ (9) 0.75

(10) (i) 0.3 (ii) 0.5 (iii) 0.5 (iv) 0.5 (11) (i) $\frac{5}{28}$ (ii) $\frac{1}{14}$ (12) $\frac{13}{30}$

അഭ്യാസം 12.4

(1) 0.028(2) (i) $\frac{11}{20}$ (ii) $\frac{6}{11}$ (3) (i) $\frac{7}{250}$ (ii) $\frac{3}{7}$

(4) $\frac{15}{41}$ (5) (i) $\frac{9}{25}$ (ii) $\frac{2}{3}$

അഭ്യാസം 12.5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
4	3	1	2	2	1	1	4	2	3	3	1	4	2	3
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
1	4	3	2	3	2	2	4	4	3					

MAL_11th-Maths-Vol2-Answers.indd 280 14-02-2023 17:36:32

അദ്ധ്യായം 7
മാട്രിക്സുകളും ഡിറ്റർമിനന്റുകളും

matrix	മാട്രിക്സ്
order	ക്രമം
row matrix	വരി മാട്രിക്സ്
column matrix	നിര മാട്രിക്സ്
zero matrix	പൂജ്യ മാട്രിക്സ്
null matrix	ശൂന്യ മാട്രിക്സ്
square matrix	സമചതുര മാട്രിക്സ്
diagonal matrix	വികർണ്ണ മാട്രിക്സ്
unit matrix	ഏകമാത്ര മാട്രിക്സ്
triangular matrix	ത്രികോണ മാട്രിക്സ്
upper triangular matrix	മുകൾ ത്രികോണ മാട്രിക്സ്
lower triangular matrix	താഴ്ന്ന ത്രികോണ മാട്രിക്സ്
principal diagonal	പ്രധാന വികർണ്ണ മാട്രിക്സ്
scalar matrix	അദിശ മാട്രിക്സ്
conformable	ഉചിതമായ
commutative property	ക്രമ വിനിമേയ ഗുണം
associative property	സംയോജന ഗുണം
identity property	അനന്യാ ഗുണം
inverse property	വിപരീത ഗുണം
distributive property	വിതരണ ഗുണം
symmetric	പ്രതിസാമ്യത
skew-symmetric	വിപരീത പ്രതിസാമ്യത
determinant	ഡിറ്റർമിനന്റ്
singular matrix	പൂജ്യ മാട്രിക്സ്
non-singular matrix	പൂജ്യമല്ലാത്ത മാട്രിക്സ്

അദ്ധ്യായം 8
സദിശ ബീജഗണിതം

vector	സദിശം
initial point	ആരംഭബിന്ദു
terminal point	അവസാന ബിന്ദു
support of the vector	സദിശത്തിന്റെ പിന്തുണ
free vector	സ്വതന്ത്ര സദിശം
localised vector	കേന്ദ്രീകൃത സദിശം
co-initial vectors	ഒരേ ആരംഭബിന്ദു സദിശകൾ
co-terminal vectors	ഒരേ അഗ്രബിന്ദു സദിശങ്ങൾ
collinear vectors	സമരേഖീയ സദിശകൾ
parallel vectors	സമാന്തര സദിശകൾ
coplanar vectors	ഏകതല സദിശകൾ
equal vectors	സമ സദിശകൾ
zero vector	പൂജ്യ സദിശം
unit vector	യൂണിറ്റ് സദിശം
like vectors	സജാതീയ സദിശകൾ
unlike vectors	വിജാതീയ സദിശകൾ
scalar multiplication	അദിശ ഗുണനം
position vector	സ്ഥാനസദിശം
section formula	വിഭജന സൂത്രം
resolution of vector	സദിശകളുടെ വിഘടനം
direction cosines	കോസൈനുകളുടെ ദിശ
direction ratios	അംശബന്ധങ്ങളുടെ ദിശ
scalar product	അദിശ ഗുണനം
vector product	സദിശ ഗുണനം

അദ്ധ്യായം 9
അവകലന കലനം - പരിധികളും തുടർച്ചാപ്രതിഭാസവും

calculus	കലനം
limit	പരിധി
one sided limit	ഏക പാർശ്വ പരിധി
left hand limit	ഇടതുഭാഗ പരിധി
right hand limit	വലതുഭാഗ പരിധി
infinite limit	അനന്തമായ പരിധി
limit at infinity	അനന്തതയിലെ പരിധി
vertical asymptote	ലംബ അസംപാത രേഖ
horizontal asymptote	സമാന്തര അസംപാത രേഖ

14_Mal_11th-Maths-Vol2-Glossary.indd 281 3/16/2023 5:08:38 PM

Sandwich theorem	സാന്റ്വിച്ച് സിദ്ധാന്തം
continuity	തുടർച്ച
discontinuity	തുടർച്ചയില്ലാത്ത
removable discontinuity	നീക്കേണ്ട തുടർച്ചയില്ലാത്ത
jump discontinuity	ചാട്ടം തുടർച്ചയില്ലാത്ത

അദ്ധ്യായം 10
അവകലന കലനം - അവകലനവും അവകലന രീതികളും

analytic equation	വിശ്ലേഷക സമവാക്യം
derivative	അവകലജം
velocity	പ്രവേഗം
acceleration	ത്വരണം
jerk	ജെർക്
tangency	തൊടു രേഖാത്മകം
difference quotient	ഹരണ ഫലത്തിന്റെ വ്യത്യാസം
secant line	സീക്കന്റ് രേഖ
tangent line	തൊടുവര
slope of the curve	വക്രത്തിന്റെ ചരിവ്
rectilinear motion	ഋണരേഖാത്മക ചലനം
position function	സ്ഥാന ഫലനം
differentiable	ഡിഫറൻഷ്യബിൾ
differentiation	അവകലനം
left hand derivative	ഇടതുവശ അവകലജം
right hand derivative	വലതുവശ അവകലജം
non-differentiability	നോൺ ഡിഫറൻഷ്യബിലിറ്റി
quotient rule	ഹരണ ഫല നിയമം
chain rule	ശൃംഖല നിയമം
composite functions rule	കോമ്പോസിറ്റ് ഫലന നിയമം
function of a function rule	ഫലനത്തിന്റെ ഫലന നിയമം
intermediate argument	ഇന്റർമീഡിയേറ്റ് ആർഗുമെന്റ്
implicit differentiation	ഇംപ്ലിസിറ്റ് അവകലനം
explicit differentiation	എക്സ്പ്ലിസിറ്റ് അവകലനം
parametric differentiation	പരാമെട്രിക് അവകലനം
higher order derivative	ഉയരന്ന ക്രമ അവകലജം

അദ്ധ്യായം 11
സമാകലകലനം

integrand	സമാകല്യം
integrator	സമാകലം
anti-derivative	എതിർ അവകലജം
indefinite integral	അതിർവചനീയ സമാകലം

അദ്ധ്യായം 12
സംഭാവ്യത സിദ്ധാന്തത്തിന് ഒരു ആമുഖം

experiment	പരീക്ഷണം
deterministic experiment	നിർണ്ണായക പരിക്ഷണം
random experiment	യാദൃശ്ചിക പരീക്ഷണം
event	സംഭവം
sure event or certain event	നിശ്ചയ സംഭവം
impossible event	അസാധ്യ സംഭവം
exhaustive event	സമ്പൂർണ്ണ സംഭവം
sample space	സാമ്പിൾ സ്പെയ്സ്
mutually exclusive events	പരസ്പര വർജ്ജക സംഭവങ്ങൾ
equally likely events	സമസന്ദർഭ സംഭവങ്ങൾ
conditional probability	നിബന്ധനയ്ക്കുള്ള സംഭാവ്യത
independent events	സ്വതന്ത്ര്യ സംഭവങ്ങൾ

14_Mal_11th-Maths-Vol2-Glossary.indd 282 3/16/2023 5:08:38 PM

പരിശോധനാ പുസ്തകങ്ങൾ

(1) Elements of Linear Algebra– P.M.Cohn , Springer

(2) Theory and Problems of Matrices – Frank Ayres, Schaum's Outline series

(3) Topics in Algebra, I.N. Herstein, Vikas Publishing Company.

(4) Vector Algebra, Schaum's Outline series.

(5) Differential and Integral Calculus, N. Piskunov, Mir Publsihers, Moscow.

(6) Elementary Treatise on the Calculus, George A. Gibson, Macmillan & Co. New York.

(7) Elementary Calculus, Vol. I, V.I. Smirnov, Addison – Wesley Publish Company, Inc.

(8) Calculus (Volume 1 and II), Tom. M. Apostol, John Wiley Publications.

(9) Calculus and Analytical Geometry,

George B.Thomas and Ross L. Finney (Ninth edition) Addison-Wesley.

(10) Calculus Early Transcendentals – George B.Thomas JR., Joel Hass, Christopher Heil, Maurice D.Weir, Pearson

(11) Advanced Engineering Mathematics- Erwin Kreyszig – Wiley India(P) Ltd.

(12) Calculus, Robert T.Smith, Roland B.Minton, McGraw Hill Education(India) Private Limited.

(13) Mathematical Analysis, S.C. Malik, Wiley Eastern Ltd.

(14) Methods of Real Analysis, Richard R. Goldberg, Oxford and IBH Publishing Company, New Delhi.

(15) Theory and Problems of Probability, Random Variables and Random Processes, Hwei P. Hsu, Schaum's Outline series

(16) Mathematical Statistics, John E. Freund and Ronald D. Walpole, Prentice Hall of India.

(17) Mathematical Statistics, Saxena and Kapoor

14_Mal_11th-Maths-Vol2-Glossary.indd 283 3/16/2023 5:08:38 PM

CLASS 11 - MATHEMATICS VOL. 2
MALAYALAM MEDIUM

Academic Coordinator

K. Chandrasekaran,
Lecturer, DIET, Chennai.

Reviewers

Sreelatha. S
P.G Teacher,
TCK HSS, Padanthalumoodu.

Vijayakumari. K
P.G Teacher,
St. Mary's HSS, Kaliyal.

List of Translators

R. Rajakumar
P.G Assistant,
GHSS, Ezhudesapattu.

S. R. Sheeba Rani
B.T. Assistant,
St. Mary's HSS, Melpalai.

Anitha. K.K.
B.T. Assistant,
GHS, Puliyoorsalai.

L. Deepa Gopal
P.G. Assistant,
PPM HSS, Anducode.

Sherly Y. S
B.T. Assistant,
RTM LMS HSS, Venkanji.

M. Abilash
P.G. Assistant,
Arunachalam HSS, Thiruvattar.

Priya. V. P
B.T. Assistant,
PPM HSS, Anducode.

EMIS Technology Team

R.M. Satheesh
State Coordinator Technical,
TN EMIS, Samagra Shiksha.

K.P. Sathya Narayana
IT Consultant,
TN EMIS, Samagra Shiksha

R. Arun Maruthi Selvan
Technical Project Consultant,
TN EMIS, Samagra Shiksha

Layout & Illustrations

Ranjith, Pixels Print Media,
Parassala, Kerala.

Wrapper Design
Kathir Arumugam

In-House QC

Coordination
Ramesh Munisamy

This book has been printed on 80 G.S.M. Elegant Maplitho paper.

Printed by offset at:

14_Mal_11th-Maths-Vol2-Glossary.indd 284 3/16/2023 5:08:38 PM