GOVERNMENT OF TAMIL NADU

పదకొండవ తరగతి

HIGHER SECONDARY FIRST YEAR

గణితశాస్త్రము

MATHEMATICS

భాగము - I

VOLUME - I

TELUGU MEDIUM

Department of School Education

Untouchability is Inhuman and a Crime

00_11th-Std-Maths-Vol 1-FM.indd 1 10-03-2023 12:13:11

Government of Tamil Nadu

First Edition - 2022

Revised Edition - 2023

Reprint - 2024

(Published under New Syllabus)

Content Creation

State Council of Educational
Research and Training
© SCERT 2022
Printing & Publishing

Tamil NaduTextbook and Educational
Services Corporation

www.textbooksonline.tn.nic.in

00_11th-Std-Maths-Vol 1-FM.indd 2 10-03-2023 12:13:11

విషయసూచిక

గణితశాస్త్రము భాగము -II

అధ్యాయము 1 – సమితులు, సంబంధాలు మరియు ప్రమేయములు జూన్

1.1		1
1.2	సమితులు	2
1.3	కార్టీషియన్ లబ్దము	5
1.4	స్థిరసంఖ్యలు మరియు చరరాశులు, అంతరములు మరియు సామీప్యము	10
1.5	సంబంధములు	12
1.6	ప్రమేయములు	24
1.7	రూపాంతరములనుపయోగించి ప్రమేయముల రేఖాచిత్రములు	50

అధ్యాయము 2 – ప్రాథమిక బీజగణితము జూన్/జూలై

2.1	పరిచయం	65
2.2	వాస్తవ సంఖ్య వ్యవస్థ	66
2.3	పరమమూల్య విలువ	69
2.4	రేఖీయ అసమీకరణాలు	72
2.5	వర్గ ప్రమేయాలు	74
2.6	బహుపద ప్రమేయాలు	79
2.7	అకరణీయ ప్రమేయాలు	85
2.8	ఘాతాంకాలు మరియు కరణులు	90
2.9	సంవర్గమానము	96
2.10	నిత్యజీవితంలో బీజగణితం అనువర్తనాలు	101

అధ్యాయము 3 – త్రికోణమితి జూలై

3.1	పరిచయము	106
3.2	ప్రాథమిక ఫలితాల పునశ్చరణ	107
3.3	రేడియన్ కొలత	113
3.4	త్రికొణమితీయ ప్రమేయాలు మరియు వాటి ధర్మములు	117
3.5	త్రికోణమితీయ సర్వసమానతలు	127
3.6	త్రికోణమితీయ సమీకరణములు	149
3.7	త్రిభుజము యొక్క ధర్మములు	159
3.8	త్రిభుజ అనువర్తనం	169
3.9	విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయములు	175

00_11th-Std-Maths-Vol 1-FM.indd 3 10-03-2023 12:13:11

అధ్యాయము 4 – సంయోగత మరియు గణిత ప్రేరణ **జూలై/ఆగస్టు**

4.1	పరిచయం	183
4.2	లెక్కింపు యొక్క ప్రాథమిక సూత్రాలు	184
4.3	క్రమగుణితములు (కారకాలు)	192
4.4	ప్రస్తారణములు	197
4.5	సంయోగాలు	210
4.6	గణితాను గమనము	220

అధ్యాయము 5 – ద్విపద సిద్ధాంతము, వరుసలు మరియు శ్రేణులు **ఆగస్టు**

5.1	పరిచయము	235
5.2	ద్విపద సిద్ధాంతము	236
5.3	ప్రత్యేక సందర్భాలలో ద్విపద సిద్ధాంతము (ద్విపద సిద్ధాంతం యొక్క ప్రత్యేక విధానాలు)	239
5.4	పరిమిత వరుసలు	243
5.5	పరిమిత శ్రేణులు	253
5.6	అనంత వరుస మరియు శ్రేణులు	256

అధ్యాయము 6 – ద్విపరిమాణ నిరూపక రేఖాగణితం **ఆగస్టు/సెప్టెంబరు**

6.1	పరిచయము	273
6.2	ఒక బిందువు యొక్క బిందుపథం	275
6.3	సరళరేఖలు	281
6.4	రెండు సరళరేఖల మధ్య కోణం	299
6.5	సరళరేఖాయుగ్మాలు	311

జవాబులు 327

పదకోశము 336

సంప్రదింపు గ్రంథాలు 339

E-book ET8XD

Assessment B7Z8Y

00_11th-Std-Maths-Vol 1-FM.indd 4 10-03-2023 12:13:11

అధ్యాయము **1**

సమితులు, సంబంధాలు మరియు ప్రమేయములు

"ఏకత్వము అను భావనను సమితి అనునది స్వయంగా అనేకముతో అనుమతించును."

– కాంటర్

FZJ4H

1.1 పరిచయం (Introduction)

సమితులు, సంబంధాలు మరియు ప్రమేయముల భావనల ముఖ్యత్వము అనునది గణిత ఆలోచనలో ప్రధాన స్థానమును వహించుచున్నవి. ప్రమేయముల భావన అకస్మాత్తుగా ఉత్పన్నముకాలేదని రష్య గణితశాస్త్రవేత్త (Luzin) పేర్కొనెను. ఇది కాలముతో పాటు అనేక మార్పులకు లోనయ్యెను. (Galileo) (1564-1642) ఒక పరిమాణము ఇంకొక దానిమీద ఆధారపడుటను గ్రహకదలికలలో స్పష్టముగా ఉపయోగించెను. రెండు చలరాశులను కలిగిన సమీకరణమును, చలరాశుల మధ్య ఆధారత్వమును రేఖాగణితములో వక్రత ద్వారా చూపగలమని (Descartes) (1596-1650) స్పష్టముగా తెలిపెను. ఏదైన ఒక పరిమాణము, వక్రత నందు ఒక బిందువు నుండి ఇంకొక బిందువునకు చెందు మార్పును (Leibnitz) (1646–1716) "ప్రమేయము" అను పదముగా 1673 న ఉపయోగించెను. ప్రమేయము యొక్క "అధికారిక" నిర్వచనమును $y = f(x)$ గా పేర్కొను ఘనత (Gauss) యొక్క విద్యార్థియైన Dirichlet(1805-1859 కి దక్కినది. 20వ శతాబ్దమున, ఏకత్వ నిబంధనను తృప్తిపరచు అన్ని ఏకపక్ష సుదూర విలువలు కలిగిన సమితులు మరియు సంఖ్యావిలువలు లేక సంఖ్యావిలువలు కాని విలువలకు ఈ భావన విస్తరించబడినది.

సమితుల సిద్ధాంతము యొక్క అభివృద్ధి వలన ప్రమేయము అను భావన రూపొంది కొనసాగుచున్నదని (Cantor) (1845-1918) ప్రతిపాధించెను. సుదూరత్వ భావన నుండి సంబంధముల భావనకు గణితశాస్త్రజ్ఞులు తరలిరి. గణన సిద్ధాంతము నందు, ప్రమేయమును సంబంధంగా చూడలేదు కాని ప్రమేయమును గణన నియమముగా తీసుకొందురు. ప్రమేయము యొక్క నూతన నిర్వచనము సంబంధం రూపమున తెలుపబడినది. కృత్రిమ మేధస్సుని అభివృద్ధిపరచుటకు సహకరించును.

కాంటర్
1845-1918

ముందు తరగతులలో, వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు వాటి యొక్క అంకగణిత ప్రక్రియలను నేర్చుకొంటిమి. వాస్తవ సంఖ్యల సమితిని, వెన్ చిత్రములను, సమితుల కార్టీషియన్ గుణకారమును, ప్రమేయములు, సంబంధముల ప్రాథమిక నిర్వచనములను కూడా నేర్చుకొంటిమి. మరింత అవగాహన కొరకు సమితులు మరియు వాటి కార్టీషియన్ గుణకార లబ్దమును గుర్తుచేసుకొందుము. ఈ అధ్యాయము నందు సంబంధములు మరియు ప్రమేయముల గణిత భావనలను క్రొత్తధోరణిలో చూడగలము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 1 24-01-2023 16:18:37

శిక్షణా లక్ష్యాలు (Learning objectives)

ఈ అధ్యాయము పూర్తయిన తర్వాత విద్యార్థులు చేయగలుగుట

- సమితులు మరియు కార్టీషియన్ లబ్దం ద్వారా వాటి ధర్మములను పట్టిక చేయుట మరియు గణనము చేయుట
- స్థిరసంఖ్యలు, చలరాశులు, తరగతులు మరియు ఇరువైపుల ఉన్న వాటిని తెలుసుకొనుట.
- అనేక రకముల సంబంధములను అవగాహన చేసుకొనుట, ఏ రకమైన సంబంధమునైనను సృష్టించ గలుగుట.
- ప్రమేయములను అనేక రూపములలో చూపించుట.
- ప్రాథమిక ప్రమేయాలు, ప్రమేయ రకాలు, ద్విగుణ ప్రమేయం యొక్క విలోమ ప్రమేయంతో సహా వాటి పైగల ప్రక్రియలను తెలుసుకొనుట.
- కొన్ని ప్రత్యేక ప్రమేయముల రేఖాచిత్రములను గుర్తించుట
- కొన్ని క్లిష్టతర ప్రమేయములకు రేఖాచిత్రములను గీయుట మరియు చూడగలుగుట

1.2 సమితులు (Sets)

ఒక సమితి అనునది బాగుగా నిర్దేశించబడిన మూలకముల సమూహామని, క్రింది తరగతులలో చూసితిమి. సమితుల సిద్ధాంతము ప్రకారము నవీన గణితశాస్త్రమును ఇటుకలతో నిర్మించిన భవనము వంటిదిగాను, సమితుల భావనను జాగ్రత్తగా మరియు దీర్ఘంగాను నేర్చుకొనవలెను. "బాగుగా – నిర్దేశించబడిన"అను పదమును మరింత లోతుగా చూడవలెను. రెండు ప్రవచనములను తీసుకొనుము :

(i) ఊటి రోజా తోటనందు అన్ని అందమైన పుష్పముల సమూహాము

(ii) తమిళనాడులో మొత్తము వృద్ధుల సమూహాము.

అందమైన పుష్పములు మరియు వృద్ధులు అనుపదములను బాగుగా నిర్దేశించలేదు. 'అందమైన పుష్పము' అను పదమును మనము ఖచ్చితముగా నిర్వచించలేము ఎట్లనగా ఖచ్చితమైన నిర్వచనము అందమునకు లేదు మరియు అందమనునది ఒక్కొక్క వ్యక్తికి, ఒక్కొక్క విషయమునకు, ఒక్కొక్క వస్తువునకు మారుచుండును. ఊటి రోజ తోటలోని అందమైన పుష్పముల సమూహాము అను ప్రవచనమును సమితిగా మనము తీసుకొనలేము. ఊటి రోజా తోటలోని అన్ని ఎర్రని పుష్పముల సమూహామును సమితిగా చెప్పగలమా? సమాధానము "అవును."

ఒక వృద్ధిని యొక్క వయస్సు 60గా తీసుకొనినప్పుడు మిగిలినవారు అంగీకరించలేకపోవచ్చు. వృద్ధులకు నిర్ణీత మరియు సరైన నిర్వచనము లేదు, తమిళనాడులో వయస్సు 70కి పైబడిన పురుషుల సమూహామనినప్పుడు రెండవ ప్రవచనము మరింత ఖచ్చితముగా ఉన్నది. ఇప్పుడు వయస్సు నందు ఖచ్చితము వలన పై ప్రవచనము సమితియైనది. కావున ఇవ్వబడిన ప్రత్యేక వస్తువు (మూలకము) సమూహాములో ఉన్నదా లేదా అని తెలుసుకొనుటకు సమితి నిర్వచనము తోడ్పడుచున్నది. కావున సమితి అనునది వ్యత్యాసము గల వస్తువుల సమూహాము.

$\in, \subset, \subseteq, \cup$ అను గుర్తులను ఉపయోగించుటను మనము చూసితిమి మరియు నేర్చుకొంటిమి.

ఈ ప్రశ్నతో మనము ప్రారంబించెదము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 2 24-01-2023 16:18:37

"A మరియు B లు రెండు సమితులు, $A \in B$ అని వ్రాయుట అర్థవంతమైనదా"?

"$\in$ అను గుర్తును మూలకమునకు, సమితికి మధ్య ఉపయోగించుట మరియు రెండు సమితుల మధ్య ఉపయోగించకూడదు అనునది ఎల్లప్పుడు అర్థరహితమైనదని మొదటి పరిశీలనలో ఎవరైన చెప్పగలరు. ప్రవచనములలో మొదటి భాగము సరియైనది కాని రెండవది సరికానిది. ఉదాహరణకు $A = \{1, 2\}$ అనునది,, $B = \{1,\{1,2\},3,4\}$ మరియు $A \in B$ ఈ అధ్యాయము నందు ఈ గుర్తుల అర్థమును మరింత దీర్ఘముగా చర్చించగలము.

క్రింది తరగతులలో నేర్చుకొనిన విధముగా, ఒక్క మూలకము కూడా లేని సమితిని శూన్యసమితి లేక మూలకములు లేని సమితి అని పిలువబడును. దీనిని ϕ లేక $\{\ \}$ గా సూచించబడును. $A \subseteq B$ నుండి A లో గల ప్రతిమూలకము, B లో గలదని మనము గ్రహించగలము. A ను B యొక్క ఉపసమితిగాను మరియు A ని A యొక్క ఉపరి సమితిగా ఉండును. A, B ఏదైన 2 సమితిలైన $A \subseteq B$ మరియు $B \subseteq A$ అయినప్పుడు రెండు సమితులు సమానము. ఏదైన సమితి A కి, శూన్యసమితి ϕ మరియు A అనునది A కి ఎల్లప్పుడు ఉపసమితులు. ఈ రెండు ఉపసమితులను అల్పమైన ఉపసమితులు అందురు. మరియు A అనునది B యొక్క శుద్ధ ఉపసమితి, A అనునది B యొక్క ఉపసమితి మరియు $A \neq B$ గా ఉన్నప్పుడు అనగా A యొక్క అన్ని మూలకములను B కలిగియుండును మరియు ఒక్క మూలకమైనను A లో లేకుండ ఉండవలెను. A లో గల ప్రతిమూలకము A యొక్క మూలకమైన $A \subseteq A$ అందువలన ఏ సమితియైనను అదేసమితికి ఉపసమితి అగును. ఈ ఉపసమితి సరికాని ఉపసమితిగా పిలువబడును. మారుమాటలో ఏదైన సమితి A నకు A యొక్క సరికాని ఉపసమితి అగును. ఇందుమూలముగా $\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ అని తెలుసుకొనగలము. $\mathbb{N}$ సహజ సంఖ్యల సమితిని, లేక ధన పూర్ణసంఖ్యలు సమితిగాను, $\mathbb{W}$ ఋణవిలువలు కాని పూర్ణసంఖ్యల సమితిని, $\mathbb{Z}$ పూర్ణసంఖ్యల సమితిని సూచించును, $\mathbb{Q}$ అకరణీయ సంఖ్యల సమితిని మరియు $\mathbb{R}$ వాస్తవ సంఖ్యల సమితిని సూచించును. కరణీయ సంఖ్యల సమితి $\mathbb{R}$ యొక్క ఉపసమితి, కాని పైన సూచించిన ఏ సమితికి కాని ఉపసమితి కాదు.

A, మరియు B సమితుల సమ్మేళణమును $A \cup B$ గా సూచించెదము. $A \cup B$ నిర్వచనమును

$A \cup B = \{x : x \in A$ లేక $x \in B\}$ గాను మరియు ఖండనమును

$A \cap B = \{x : x \in A$ మరియు $x \in B\}$ గాను సూచించబడెను. A మరియు B రెండు సమితులు వియుక్తమైన వాటికి ఉమ్మడి మూలకాలు ఉండవు. అనగా $A \cap B = \phi$ అయిన A మరియు B లు వియుక్తము.

మరికొన్ని సంకేతాలను చూసెదము. $\sum_{i=1}^{n} a_i$ వంటి సంకేతాలు మనకు తెలుసును. అంటే $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ ఇది సూచించును. అదేవిధముగా $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$ ని $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ గాను $A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n$ ని $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ గాను సూచించెదము. కావున $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_i$ యొక్క ఏ విలువైనను$\}$ మరియు $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \{x : x \in A_i$ ప్రతి యొక్క విలువకు$\}$ ఈ సంకేతాలు చాలా సమితులను చర్చించునప్పుడు ఉపయోగపడును.

A అనునది ఒక సమితియైన, A యొక్క ఉపసమితులను కలిగిన దానిని A యొక్క ఘాతసమితి అందురు. మరియు దీనిని $\mathcal{P}(A)$ గా గుర్తించెదరు. అనగా $\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$ $\mathcal{P}(A)$ లో గల మూలకముల సంఖ్య $2^n, n$ అనునది A సమితిలోని మూలకముల సంఖ్య.

పూరకసమితిని నిర్వచించుటకు విశ్వసమితి యొక్క భావనను తెలుసుకొనుట అత్యవసరము. సాదారణముగా గణిత ప్రక్రియల పరిశీలనలో అన్ని సమితులను, నిర్ణీత సమితియొక్క ఉపసమితిగా ఊహించబడుచున్నది. ఈ ప్రాథమిక సమితిని విశ్వసమితి అందురు. ఉదాహరణకు, కొన్ని సందర్భములలో ప్రధాన సంఖ్యల సమితికి, ప్రధాన సంఖ్యలను కలిగిన ఏ సమితియైనను విశ్వసమితిగా ఉండును. కావున

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 3 24-01-2023 16:18:39

అవసరముల కనుగుణముగా $\mathbb{N}, \mathbb{W}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ లలో ఏదైన ఒక సమితి ప్రధాన సమితి యొక్క విశ్వసమితిగా ఉండును. విశ్వసమితిని సాధారణముగా U గా సూచించెదము. పూరక సమితిని నిర్వచించుటకు, విశ్వసమితిని మనము పరిష్కరించవలెను. A అనునది విశ్వసమితి U యొక్క ఉపసమితి. A యొక్క పూరకసమితిని U కి చెందినదిగా తీసుకొనిన దీనిని A' లేక A^c గా సూచించగలము. $A' = \{x : x \in A$ మరియు $x \notin A\}$ సమితి A నుండి సమితి B కి సమితుల వ్యత్యాసమును $A-B$ గాను లేక $A \backslash B$ గాను నిర్వచించబడెను.

సూచన:

$$A - B = \{a : a \in A \text{ మరియు } a \notin B\}$$

(i) $U - A = A'$ (ii) $A - A = \phi$ (iii) $\phi - A = \phi$ (iv) $A - \phi = A$ (v) $A - U = \phi$.

A మరియు B అను రెండు సమితుల సౌష్ఠవభేదమును $A \Delta B$ గా సూచించబడెను మరియు $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$ గా నిర్వచించబడెను.

ఒక సమితి X నందు k మూలకములు ఉన్నట్లయిన X ని పరిమిత సమితి అని పిలువబడును, $k \in \mathbb{N}$ ఇందు X సమితి యొక్క ప్రధానాంకము k మరియు $n(X)$ గా సూచించబడును. పరిమితము కాని సమితిని అపరిమిత సమితి అందురు. అపరిమిత సమితి యొక్క ప్రధానాంకము అపరిమితము. $n(A) = 1$ అయిన దానిని ఏకమూలక సమితి అందురు. సూచన, $n(\phi) = 0$, $n(\{\phi\}) = 1$

1.2.1 సమితి ప్రక్రియల ధర్మములు (Properties of Set Operations)

కొన్ని ధర్మములను పట్టికలో చూపించగలము.

వినిమయ ధర్మము (Commutative)

(i) $A \cup B = B \cup A$ (ii) $A \cap B = B \cap A$

సహచర్య ధర్మము (Associative)

(i) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

విభాగ ధర్మము (Distributive)

(i) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (ii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

తత్సమము (Identity)

(i) $A \cup \phi = A$ (ii) $A \cap U = A$

అపరివర్తిత ధర్మము (Idempotent)

(i) $A \cup A = A$ (ii) $A \cap A = A$

శోషణము (Absorption)

(i) $A \cup (A \cap B) = A$ (ii) $A \cap (A \cup B) = A$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 4 24-01-2023 16:18:41

డీమార్గన్ నియమములు (De Morgan Laws)

(i) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (ii) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(iii) $A-(B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$ (iv) $A-(B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$

సౌష్ఠవ భేదము (Symmetric difference)

(i) $A \Delta B = B \Delta A$ (ii) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$

(iii) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$

శూన్యసమితి మరియు విశ్వసమితి (Empty and universal sets)

(i) $\phi' = U$ (ii) $U' = \phi$

(iii) $A \cup A' = U$ (iv) $A \cap A' = \phi$

(v) $A \cup U = U$ (vi) $A \cap U = A$

ప్రధానాంకమునందు (Cardinality)

(i) A, B రెండు పరిమిత సమితులకు, $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

(ii) A, B అనునవి రెండు పరిమిత వియుక్త సంఖ్యలైన, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

(iii) A, B,C అనునవి పరిమిత సమితులైన
$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

1.3 కార్టీషియన్ లబ్ధము (Cartesian product)

సమితుల కార్టీషియన్ లబ్ధమనునది క్రమయుగ్మమూలకముల జత అని మనకు తెలుసు. ప్రత్యేకముగా రెండు సమితుల కార్టీషియన్ లబ్ధమనునది క్రమయుగ్మముల జత, మూడు సమితుల కార్టీషియన్ లబ్ధమనునది త్రికలబ్ధమగును. ఖచ్చితముగా A, B, C అను మూడు సమితులను తీసుకొనినప్పుడు, A, B యొక్క కార్టీషియన్ లబ్ధమును $A \times B$ గా సూచించగలము. దీని నిర్వచనము $A \times B = \{(a,b): a \in A, b \in B\}$

అదేవిధముగా, కార్టీషియన్ లబ్ధము $A \times B \times C = \{(a,b,c): a \in A, b \in B, c \in C\}$

గా నిర్వచించబడెను. కావున $A \times A = \{(a,b): a, b \in A\}$.

$A \times A = \{(a,a): a \in A\}$ అని తెలుపుట సరియా?

కార్టీషియన్ లబ్ధము యొక్క మూలకములు క్రమపరుచబడినవి అందువలన శూన్యము కాని సమితులకు $A \times B \neq B \times A$ $A = B$ గా అయితే అయినప్పుడు మాత్రమే.

అనగా, శూన్యముకాని సమితులకు $A \times B = B \times A$ ఉన్నప్పుడు మాత్రమే $\mathbb{R}$ అనునది వాస్తవ సంఖ్యల సమితి అని మనకు తెలుసు. మరియు

$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y): x, y \in \mathbb{R}\}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x,y,z): x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 5 24-01-2023 16:18:43

చిహ్నరూపములో $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ని $\mathbb{R}^2$ గాను మరియు $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ $\mathbb{R}^3$ గాను సూచించబడును. $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ అనునది క్రమయుగ్మల జతగాను, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ని త్రికలబ్ధము గాను గుర్తించవలెను.

$A=\{1,2,3\}$ మరియు $B=\{2,4,6\}$ అయిన

$A\times B=\{(1,2),(1,4),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,2),(3,4),(3,6)\}$.

ఇక్కడ $A\times B$ అనునది $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ యొక్క ఉపసమితి. $A\times B$ నందు మూలకముల సంఖ్య, A లోని మూలకముల సంఖ్య మరియు B లోని మూలకముల సంఖ్య యొక్క లబ్ధముగా ఉండును. అనగా $n(A\times B)=n(A)n(B)$ A మరియు B లు పరిమిత సమితులుగా ఉన్నప్పుడు, తదుపరిగా $n(A\times B\times C)=n(A)n(B)n(C)$ A, B, C పరిమితమైనప్పుడు.

క్రింద ఇవ్వబడినవి $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ యొక్క ఉపసమితులని సులభముగా చూడగలము.

(i) $\{(x,2x):x\in\mathbb{R}\}$

(ii) $\{(x,x^2):x\in\mathbb{R}\}$

(iii) $\{(x,\sqrt{x}):x$ అనునది ఋణము కాని వాస్తవ సంఖ్య$\}$

(iv) $\{(x^2,x):x\in\mathbb{R}\}$.

(v) $\{(x,-\sqrt{x}):x$ అనునది ఋణముకాని వాస్తవ సంఖ్య$\}$

ఉదాహరణము 1.1 A యొక్క ఉపసమితుల సంఖ్యను కనుగొనుము,
$A=\{x:x=4n+1, 2\le n\le 5, n\in\mathbb{N}\}$

సాధన

స్పష్టముగా $A=\{x:x=4n+1, n=2,3,4,5\}=\{9,13,17,21\}$

అందువలన $n(A)=4$. అనగా $n(\mathcal{P}(A))=2^4=16$

ఉదాహరణము 1.2 జనాభా 5000 కలిగిన ఒక నగర సర్వే నందు, 45% ప్రజలకు A అను భాష తెలియును 25% మంది B అను భాష తెలియును, 10% ప్రజలకు C భాష తెలియును, 5% మందికి A మరియు B భాషలు తెలియును, 4% మందికి B మరియు C తెలియును, 4% మందికి A మరియు C తెలియును, 3% మందికి మూడు భాషలు తెలియును. A భాష మాత్రము ఎంతమందికి తెలియును.

సాధన

ఈ సమస్యను ప్రధానాంక ధర్మము లేక వెన్‌చిత్రము ద్వారా సాధించగలము.

(i) **ప్రధానాంకపద్ధతి :** ఇవ్వబడినది, $n(A)=5000$ నందు $45\%=2250$ అదేవిధముగా

$n(B)=1250, n(C)=500, n(A\cap B)=250, n(B\cap C)=200, n(C\cap A)=200$
మరియు $n(A\cap B\cap C)=150$.

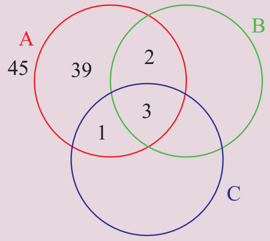
A భాషను మాత్రము తెలుసుకొన్న ప్రజల సంఖ్య

$$\begin{aligned} n(A\cap B'\cap C') &= n\{A\cap(B\cup C)'\}=n(A)-n\{A\cap(B\cup C)\} \\ &= n(A)-n(A\cap B)-n(A\cap C)+n(A\cap B\cap C). \\ &= 2250-250-200+150=1950. \end{aligned}$$

కావున కావలసిన ప్రజల సంఖ్య 1950

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 6 24-01-2023 16:18:45

(ii) **వెన్ చిత్రము** శాతమునుపయోగించి వెన్‌చిత్రమును గీయగలము:



పటము 1.1

పటము 1.1 నుండి, A భాషను మాత్రము మాట్లాడు ప్రజలశాతము 39, అందువలన కావలసిన ప్రజల సంఖ్య $5000\times\frac{39}{100}=1950$.

ఉదాహరణము 1.3 నిరూపించుము
$((A\cup B'\cup C)\cap(A\cap B'\cap C'))\cup((A\cup B\cup C')\cap(B'\cap C'))=B'\cap C'$

సాధన

$A\cap B'\cap C'\subseteq A\subseteq A\cup B'\cup C$ మరియు

$(A\cup B'\cup C)\cap(A\cap B'\cap C')=A\cap B'\cap C'$.

మరియు $B'\cap C'\subseteq C'\subseteq A\cup B\cup C'$.

మరియు $(A\cup B\cup C')\cap(B'\cap C')=B'\cap C'$, $A\cap B'\cap C'\subseteq B'\cap C'$ కావున

$((A\cup B'\cup C)\cap(A\cap B'\cap C'))\cup((A\cup B\cup C')\cap(B'\cap C'))=B'\cap C'$

పై విస్తరణను వెన్‌చిత్రము ద్వారా సూక్ష్మీకరించుటకు ప్రయత్నించుము.

ఉదాహరణము 1.4 $X=\{1,2,3,\ldots,10\}$ మరియు $A=\{1,2,3,4,5\}$ $B\subseteq X$ నందు గల సమితుల సంఖ్యను కనుగొనుము $A-B=\{4\}$.

సాధన

$\{6,7,8,9,10\}$ యొక్క ప్రతిఉపసమితి C గాను $B=C\cup\{1,2,3,5\}$ కావున $A-B=\{4\}$ మరొకవిధముగా $\{6,7,8,9,10\}$ యొక్క ప్రతిఉపసమితికి B అను ఏకైక సమితి $A-B=\{4\}$ $B\subseteq X$ మరియు $A-B=\{4\}$ అయిన B సమితుల సంఖ్య మరియు $\{6,7,8,9,10\}$ యొక్క ఉపసమితులు సమము కావున సమితుల సంఖ్య $B\subseteq X$ నకు $A-B=\{4\}$ అనగా. $2^5=32$.

ఉదాహరణము 1.5 A మరియు B అనునవి రెండు సమితులు $n(B-A)=2\,n(A-B)=4\,n(A\cap B)$ మరియు $n(A\cup B)=14$ అయిన $n(\mathcal{P}(A))$ ని కనుగొనుము.

సాధన

$n(\mathcal{P}(A))$ ని కనుగొనుటకు $n(A)$ కావలెను

$n(A\cap B)\;=\;k$ అని తీసుకొనిన

$n(A-B)\;=\;2k$ మరియు $n(B-A)=4k$

$n(A\cup B)\;=\;n(A-B)+n(B-A)+n(A\cap B)=7k$.

$n(A\cup B)\;=\;14$ అని ఇవ్వబడినది. అందువలన $7k=14$, మరియు $k=2$ కావున

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 7 24-01-2023 16:18:47

$$n(A-B) = 4 \text{ మరియు } n(B-A) = 8\,.$$

అందువలన $\quad n(A) = n(A-B) + n(A\cap B) \quad n(A) = 6.$

మరియు $\quad n(\mathcal{P}(A)) = 2^6 = 64.$

ఉదాహరణము 1.6 రెండు సమితులలో మూలకములు m మరియు k మొదటి సమితి యొక్క ఉపసమితుల మొత్తము 112 అనునది రెండవ సమితి కన్నా ఎక్కువ m మరియు k విలువలను కనుగొనుము.

సాధన

ఏవైన రెండు సమితులు A, B నకు $n(A) = m$ మరియు $n(B) = k$ A సమితి మూలకములు B కన్నా ఎక్కువైనందున $m > k$ ఇచ్చిన నియమముల ప్రకారము $2^m - 2^k = 112$ కావున $2^k(2^{m-k} - 1) = 2^4 \times 7$ కావున సాధ్యమైనది $k = 4$ మరియు $2^{m-k} - 1 = 7$ కావున $m - k = 3$ మరియు $m = 7.$

ఉదాహరణము 1.7 $n(A) = 10$ మరియు $n(A\cap B) = 3$ అయిన $n((A\cap B)'\cap A)$ ని కనుగొనుము.

సాధన

$$(A\cap B)'\cap A = (A'\cup B')\cap A = (A'\cap A)\cup(B'\cap A) = \phi\cup(B'\cap A)$$
$$= (B'\cap A) = A - B.$$

కావున $\quad n((A\cap B)'\cap A) = n(A-B) = n(A) - n(A\cap B) = 7\,.$

ఉదాహరణము 1.8 $A = \{1,2,3,4\}$ మరియు $B = \{3,4,5,6\}$ అయిన $n((A\cup B)\times(A\cap B)\times(A\Delta B))$ ని కనుగొనుము

సాధన

$n(A\cup B) = 6, n(A\cap B) = 2$ మరియు $n(A\Delta B) = 4\,.$

అయిన $\quad n((A\cup B)\times(A\cap B)\times(A\Delta B)) = n(A\cup B)\times n(A\cap B)\times n(A\Delta B)$

$$= 6\times 2\times 4 = 48\,.$$

ఉదాహరణము 1.9 $\mathcal{P}(A)$ అనునది A యొక్క విశ్వసమితియైన $n(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi))))$ ని కనుగొనుము

సాధన

$\mathcal{P}(\phi)$ ఒక మూలకమును కలిగినందున $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi))$ 2^1 మూలకములను కలిగియుండును. కావున $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\phi)))$ 2^2 మూలకములను కలిగియుండును. అనగా 4 మూలకములు.

అభ్యాసము 1.1

1. క్రింది వాటిని రోస్టర్ పద్ధతిలో వ్రాయుము.

   (i) $\{x\in\mathbb{N} : x^2 < 121$ మరియు x ప్రధాన సంఖ్య$\}$.

   (ii) సమీకరణము యొక్క ధనమూలముల సమితి $(x-1)(x+1)(x^2-1) = 0$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 8 24-01-2023 16:18:50

(iii) $\{x \in \mathbb{N}: 4x + 9 < 52\}$.

(iv) $\{x: \frac{x-4}{x+2} = 3, x \in \mathbb{R} - \{-2\}\}$.

2. $\{-1, 1\}$ సమితిని సమితి నిర్మాణ పద్ధతిలో వ్రాయుము.

3. క్రింది సమితులు పరిమిత లేక అపరిమిత సమితులా అని తెలుపుము.

(i) $\{x \in \mathbb{N}: x$ అనునది సరి ప్రధాన సంఖ్య$\}$.

(ii) $\{x \in \mathbb{N}: x$ అనునది బేసి ప్రధాన సంఖ్య$\}$.

(iii) $\{x \in \mathbb{Z}: x$ అనునది సరి మరియు 10 కి లోపుగల అంకె$\}$.

(iv) $\{x \in \mathbb{R}: x$ అనునది అకరణీయ సంఖ్య$\}$.

(v) $\{x \in \mathbb{N}: x$ అనునది అకరణీచ సంఖ్య$\}$.

4. A, B, C కి అనువైన సమితులను తీసుకొని, క్రింది ఫలితములను సరిచూడుము.

(i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

(ii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$.

(iii) $(A \times B) \cap (B \times A) = (A \cap B) \times (B \cap A)$.

(iv) $C - (B - A) = (C \cap A) \cup (C \cap B')$.

(v) $(B - A) \cap C = (B \cap C) - A = B \cap (C - A)$.

(vi) $(B - A) \cup C = (B \cup C) - (A - C)$.

5. ప్రవచనము యొక్క నిజత్వమును పరిశిలించుము. "ఒక సమితి యొక్క మూలకము దానికదే ఉపసమితిగా ఉండుటకు వీలులేదు"

6. $n(\mathcal{P}(A)) = 1024, n(A \cup B) = 15$ మరియు $n(\mathcal{P}(B)) = 32$ అయిన $n(A \cap B)$ ని కనుగొనుము.

7. $n(A \cap B) = 3$ మరియు $n(A \cup B) = 10$ అయిన $n(\mathcal{P}(A \Delta B))$ ని కనుగొనుము.

8. A సమితికి $A \times A$ 16 మూలకములను కలిగియుండును మరియు రెండు మూలకములు $(1, 3)$ $(0, 2)$ అయిన A యొక్క మూలకములను కనుగొనుము.

9. A మరియు B అనునవి రెండు సమితులు $n(A) = 3$ మరియు $n(B) = 2$ $(x, 1), (y, 2), (z, 1)$ అనునవి $A \times B$ లో ఉండిన A మరియు B లను కనుగొనుము x, y, z అనునవి మూలకములు.

10. $A \times A$ 16 మూలకములను కలిగి మరియు $S = \{(a, b) \in A \times A: a < b\}$ $(-1, 2)$ $(0, 1)$ S యొక్క మూలకములైన S యొక్క మిగిలిన మూలకములను కనుగొనుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 9 24-01-2023 16:18:52

1.4 స్థిరసంఖ్యలు మరియు చరరాశులు, అంతరములు మరియు సామీప్యము (Constants, Variables, Intervals and Neighbourhoods)

చర్చకొనసాగుటకు కొన్ని అవసరయగుచున్నవి, స్థిరసంఖ్య, చరరాశులు, పరస్పర ఆధారత్వము లేని చరరాశలు పరస్పర ఆధారత్వముగల చరరాశులు అంతరములు మరియు సామీప్యము

1.4.1 స్థిరసంఖ్యలు మరియు చరరాశులు (Constants and variables)

ఒక పరిమాణం, గణితప్రక్రియనందు ఎక్కడ మార్పుచెందని యెడల దానిని స్థిరరాశి అందురు. ఒక పరిమాణం గణితప్రక్రియ నందు మార్పుచెందిన దానిని చరరాశి అందురు. ఒక చలరాశి ఏదైన స్వతంత్ర విలువను తీసుకొనినప్పుడు అది పరస్పరఆదారత్వము లేని చరరాశియగును. అయితే దాని విలువ ఇంకొక చలరాశి మీద ఆధారపడినప్పుడు, అది పరస్పర ఆధారిత చరరాశి అగును.

త్రిభుజ వైశాల్యము $A = \frac{1}{2}bh$ అని మనకు తెలుసును. ఇక్కడ $\frac{1}{2}$ అనునది స్థిర సంఖ్య మరియు A, b, h అనునవి చరరాశులు. మరియు b, h అనునవి పరస్పర ఆధారత్వము లేని చరారశులు A పరస్పర ఆధారత్వము గల చలరాశి. పరస్పర ఆధారత్వము గల మరియు పరాస్పర ఆధారత్వము లేనివి ఒకదానికొకటి సాపేక్ష నిబంధనలని మనము తెలుసుకోవాలి. ఉదాహరణకు $x + y = 1$ సమీకరణము నందు x, y చలరాశులు మరియు 1 స్థిరసంఖ్య x మరియు y లలో ఏది ఆధారత్వము కలదు ఏది లేనిది? x ని ఆధారత్వము లేని చలరాశిగా తీసుకొనిన, y ఆధారత్వము కల చలరాశి మరియు y ని ఆధారత్వము లేని చలరాశిగా తీసుకొనిన x ఆధారత్వము కల చరరాశి అగును.

ఈ క్రింది ఉధాహరణములను తీసుకొనుము

(i) దీర్ఘచతురస్రము యొక్క వైశాల్యము; $A = lb$

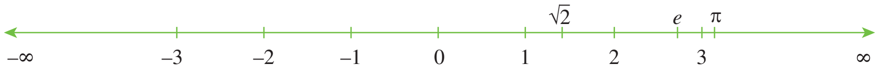
(ii) వృత్తము యొక్క వైశాల్యము; $A = \pi r^2$

(iii) దీర్ఘఘనము యొక్క ఘనపరిమాణము; $V = lbh$

పైన పేర్కొనిన ఉధాహరణముల ద్వారా b, h, l, r లు ఆధారత్వము లేని చలరాశులు A మరియు V లు ఆధారత్వము గల చలరరాశులు మరియు π స్థిరసంఖ్య

1.4.2 అంతరములు మరియు సామీమాప్యము (Intervals and Neighbourhoods)

వాస్తవ సంఖ్యల ప్రక్రియ $\mathbb{R}-$ ను రేఖనందు బిందురూపములో గుర్తించగలము. పటము 1.2 లో చూపిన విధముగా రేఖమీద బిందువును ఒకే ఒక వాస్తవ సంఖ్యకు సంబందపరచబడినది. దీని ద్వారా ఏ వాస్తవ సంఖ్యనైనను రేఖమీద బిందువుగా గుర్తించగలము. ఈ గుర్తింపుతో రేఖను, వాస్తవ రేఖగా పిలిచెదము



పటము 1.2

కుడివైపునకు వెళ్ళిన విలువ పెరుగును మరియు ఎడమవైపునకు వెళ్ళిన విలువ తగ్గును. వాస్తవరేఖమీద y కి ఎడమవైపు x ఉన్నప్పుడు $x < y$ రేఖ మీద స్థలములేదనుటను, రెండు వాస్తవసంఖ్య మధ్య అసంఖ్యకమైన అనేక వాస్తవబిందువులుండుట.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 10 24-01-2023 16:18:52

నిర్వచనము 1.1

$\mathbb{R}-$ యొక్క ఉపసమితి I అంతరముగా క్రింది నియమములకు చెప్పగలము.

(i) I -కనీసము రెండు మూలకములను కలిగియుండవలెను.

(ii) $a,b \in I$ మరియు $a < c < b$ అయిన, $c \in I$ రేఖాగణిత అంతరములు వాస్తవ రేఖపై కిరణాలు మరియు రేఖా విభాగాంకు అనుగుణంగా ఉంటాయి.

సహజసంఖ్యల సమితి, ఋణముకాని పూర్ణసంఖ్యల సమితి, బేసిపూర్ణసంఖ్యలసమితి, సరిపూర్ణసంఖ్యల

సమితి, ప్రధానసంఖ్యల సమితులన్ని తరగతులు కావు అని గుర్తించవలెయను. రెండు వాస్తవ సంఖ్యల మధ్య అసంఖ్యాకమైన అనేకవాస్తవ సంఖ్యలు ఉండును. పైగా పైన తెలిపిన సమితులు అంతరములుకావని గమనించవలెను. క్రింది సమితులను తీసుకొనుము.

(i) 0 కన్నా ఎక్కువ విలువ గల అన్నివాస్తవసంఖ్యలు

(ii) 5− కన్నా ఎక్కువ 7 కన్నా తక్కువగా గల వాస్తవ సంఖ్యల సమితి.

(iii) వాస్తవ సంఖ్యల సమితి x నకు $1 \le x \le 3$

(iv) వాస్తవ సంఖ్యల సమితి x నకు $1 < x \le 2$

తరగతులు కాదు అంతరములు. పై నాలుగు ప్రత్యేకముగా (i) అపరిమిత అంతరము మరియు (ii), (iii) & (iv) పరిమిత తరగతులు, “పరిమితి” అంతరమ అనుపదమును, అనేక పరిమితి వాస్తవసంఖ్యలను మాత్రము కలిగిన అంతరముగా తీసుకొనవలేము.కాని రెండు చివరలు పరిమిత సంఖ్యలు. పరిమిత, అపరిమిత అంతరములు రెండు అపరిమిత సమితులు. రేఖావిభాగములకు అనుగునంగా ఉన్న అంతరములు పరిమిత అంతరములు మరియు అంతరములు కిరణములకు అనుగుణంగాను, సంఖ్యారేఖ అనంతమైన తరగతులను కలిగియుండును.

ఒక పరిమిత అంతరము రెండు చివరిబిందువులను కలిగియున్నప్పుడు సంవృతాంతరము అని చెప్పగలము. రెండు చివరిబిందువులను కలిగియుండనిదానిని వివృతాంతరము అని చెప్పగలము. సంజ్ఞారూపములో పై నాలుగు తరగతులను $(0,\infty),(5,7),[1,3],(1,2]$ గా సూచించగలము. తరగతులను చిహ్న రూపములో సూచించులకు బ్రాకెట్ల, చతుంస్రబ్రాకెట్లను ఉపయోగించెదము. వివృత్త తరగతులను ‘( )’ బ్రాకెట్లగాను సంవృత్త తరగతులను ‘[ ]’ బ్రాకెట్లగాను సూచించెదము. మొదటి రెండు సమితులు వివృత తరగతులు, మూడవది సంవృతాంతరము నాలవది వివృత్త, సంవృత్తములుకాదు, అనగా ఒక చివర వివృత్త ఇంకొక చివర నంవృతాతరము.

ప్రత్యేకముగా $[1, 3]$ అనునది 1 మరియు 3 రెండింటిని మరియు వాటిమధ్యగల వాస్తవసంఖ్యలను కలిగియుండును $(1, 2]$ తరగతి 1 ని కలిగియుండదు కాని 2 ని వాటి మధ్యగల సంఖ్యలను కలిగియుండును. గమనించదగినది ∞ అనునది సంఖ్యకాదు $-\infty$, ∞ ని సంఖ్యరేఖయొక్క చివరలను సూచించుటకు ఉపయోగపడును (a,b) మరియు $[a,b]$ అనునవి $\mathbb{R}-$ యొక్క ఉపసమితులు.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 11 24-01-2023 16:18:53

అంతరముల రకములు (Types of intervals)

అంతరములలో అనేకరకములున్నవి. $a, b \in \mathbb{R}$ మరియు $a < b$ క్రింది పట్టిక అనేకరకముల అంతరములను సూచించును. ఒక బిందువును తొలగించినప్పుడు రేఖను గీయలేము. ఖాళీ వృతమును "o" బిందువును సూచించుటకు, నింపిన వృత్తమును '•' బిందువును చేర్చుటకు ఉపయోగించెదము.

తరగతి	సంజ్ఞామానం	సమితి	రేఖాచిత్రరూపము
పరిమితము	(a, b)	$\{x : a < x < b\}$	
	$[a, b]$	$\{x : a \le x \le b\}$	
	$(a, b]$	$\{x : a < x \le b\}$	
	$[a, b)$	$\{x : a \le x < b\}$	
అనిర్వచితము	(a, ∞)	$\{x : a < x < \infty\}$	
	$[a, \infty)$	$\{x : a \le x < \infty\}$	
	$(-\infty, b)$	$\{x : -\infty < x < b\}$	
	$(-\infty, b]$	$\{x : -\infty < x \le b\}$	
	$(-\infty, \infty)$ లేక $\mathbb{R}$	$\{x : -\infty < x < \infty\}$ లేక వాస్తవ సంఖ్యల సమితి.	

క్రింది అంతరములను సంజారూపములో వ్రాయుము.

(i) $\{x : x \in \mathbb{R}, -2 \le x \le 0\}$ (ii) $\{x : x \in \mathbb{R}, 0 < x < 8\}$

(iii) $\{x : x \in \mathbb{R}, -8 < x \le -2\}$ (iv) $\{x : x \in \mathbb{R}, -5 \le x \le 9\}$

సామీప్యము (Neighbourhood)

a యొక్క సామీప్యము అనునది 'a' ని కలిగిన ఏదైన వివృత్త అంతరము ప్రత్యేకముగా 'ϵ' అనునది ధనసంఖ్య సాధారణముగా చాలచిన్నది అయినందున, వివృత్త అంతరము $(a-\epsilon, a+\epsilon)$ నందు 'a' యొక్క సామీప్యము ϵ సమితి $(a-\epsilon, a+\epsilon)-\{a\}$ అనునది 'a' యొక్క తొలగించబడిన సామీప్యము మరియు దీనిని $0 < |x-a| < \epsilon$ గా సూచించబడును. పటము 1.3 ని చూడుము.

పటము 1.3

1.5 సంబంధములు (Relations)

భిన్నమైన అంశాలనందు సంబంధముల భావనను సమితుల కార్టీషియన్ లబ్దము ద్వారా నిజజీవిత భావనకు, లిపి శాస్త్రంనకు, జ్యామితికి ఉపయోగించెదము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 12 24-01-2023 16:18:55

నిత్యజీవితములో అతను ఎట్లు మీకు సంబంధింపబడిరి? అను ప్రశ్నలను మనము చూస్తున్నాము. కొన్ని సంభావ్య సమాధానాలు

(i) అతను నా తండ్రి.

(ii) అతను నా ఉపాధ్యాయుడు.

(iii) ఆయనతో నాకు సంబంధంలేదు.

దీని మూలముగా సంబంధము అను పదము ఒక వ్యక్తిని ఇంకొక వ్యక్తికి సంబంధపరచును. ఈ ఆలోచననుపయోగించి గణితము నందు సంబంధములను గణిత వస్తువులతో సంబంధపరచబడినవి.

ఉదాహరణము:

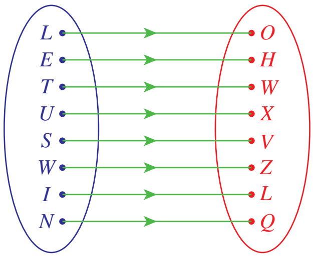
(i) $\mathbb{N}$ నుండి m అనునది n ని భాగించునప్పుడు m n తో సంబంధపరచబడును.

(ii) $x \le y$ గా ఉన్నప్పుడు వాస్తవ సంఖ్య x వాస్తవసంఖ్య y తో సంబంధపరచబడును.

(iii) p బిందువు L మీద ఉన్నప్పుడు p అనుబిందువు L కి సంబంధపరచబడును.

(iv) X, S యొక్క విధ్యార్థియైనప్పుడు, X అను విద్యార్థి, పాఠశాల $'S'$ నకు సంబంధపరచబఢెను.

వివరణ 1.1 (రహస్యసమాచారలిపి) శతాబ్దాలకాలముగా, ప్రజలు రహస్యసమాచార భద్రతకొరకు సాంకేతిక లిపులు లేక సంకేతాలను ఉపయోగించిరి. సమర్ధవంతమైన సాంకేతికలపులు, సైన్యమునకు, ఆర్థికసంస్థలకు మరియు సంగణకప్రోగ్రామర్లకు అత్యవసరమగుచున్నవి. కోడ్ని సృష్టించుటకు మరియు డీకోడింగ్లను సాంకేతిక లిపులనుపయోగించి పరిశీలించుటను లిపిశాస్త్రమందురు.



పటము 1.4

నవీన పద్ధతిలో సమాచారాన్ని సంకేతాలద్వారా తెలుపులకు సులభమైన పద్ధతి ప్రతిక్షేపణ.ఉధాహరణను సవమాచారము నందు ప్రతిఅక్షరమును దానికి తర్వాత ఆంగ్లభాషనందు వచ్చు మూడు స్థానముల తర్వాతి అక్షరముగా మార్చుట.

ఈ సంకేతాలనుపయోగించి “LET US WIN” అను పదము “OHW XV Z LQ” గా మార్పుచెందును. ఈ పద్ధతిని Julius Caesar ఉపయోగించెను మరియు సీసర్పు సాంకేతికలిపులుగా పేర్కొనెను, డీకోడ్ చెయ్యడానికి ఒకోక్క అక్షరమును దానికిముందు ముడుఅక్షరాల స్థానములో ఉన్న అక్షరముగా మార్చివ్రాయబడెను. Mental Ability Test నందు ఈ పద్ధతి ఏక్కువగా ఉపయోగించడును. పైదానిని బాణపుగుర్తులు ద్వారా పటము 1.4 లో ఇచ్చినట్లు సూచించగలము.

దీనిని క్రమయుగ్మముల జతగా చూపగలము $\{(L,O),(E,H),(T,W),(U,X),(S,V),(W,Z),(I,L),(N,Q)\}$ ఇది $C \times D$ కార్టీటటషియన్ లబ్ధము యొక్క ఉపసమితి అగును. $C = \{L,E,T,U,S,W,I,N\}$, మరియు $D = \{O,H,W,X,V,Z,L,Q\}$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 13 24-01-2023 16:18:55

మీకు తెలుసా?

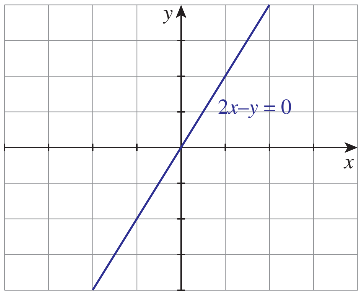
"KDUGZRUN" యొక్క భావము "HARDWORK" అయిన "DFKLHYHPHQW" అనునది "ACHIEVEMENT" అగును. $f(x) = x - 3$? అని ఉండునా?

వివరణ 1.2 (రేఖాగణితము) క్రింద ఇవ్వబడిన మూడు సమీకరణములను తీసుకొనుము.

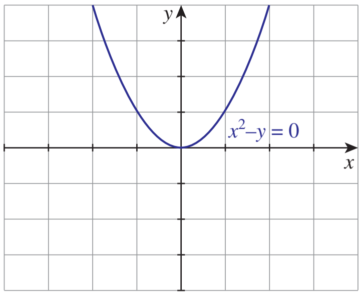
(i) $2x - y = 0$ (ii) $x^2 - y = 0$ (iii) $x - y^2 = 0$

(i) $2x - y = 0$

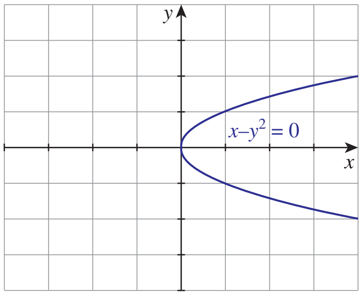
$2x - y = 0$ అను సమీకరణము సరళరేఖను సూచించును. $(1, 2), (3, 6)$ అను బిందువులు రేఖ మీద కలవని స్పష్టముగా తెలియుచున్నది. కాని $(1, 1), (3, 5), (4, 5)$ బిందువులు సరళరేఖ మీద లేవు. x, y మధ్యగల సంబంధమును $y = 2x$ తెలుపుచున్నది. సరళరేఖ మీద గల అన్ని బిందువుల సమితిని $\{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$ గా ఇవ్వబడినది ఇది $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ఉపసమితి అని స్పష్టముగా తెలియుచున్నది. (పటము 1.5ని గమనించుము)



పటము 1.5



పటము 1.6



పటము 1.7

(ii) $x^2 - y = 0$

ఇంతకుముందు చర్చించిన విధముగా x మరియు y ల మధ్య సంబంధమును $y = x^2$ గా ఇవ్వబడినది. రేఖ మీద గల బిందువుల సమితి $\{(x, x^2) : x \in \mathbb{R}\}$ పటము 1.6 లో చూపిన విధముగా కలదు. ఇది కూడా $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ నకు ఉపసమితి.

(iii) $x - y^2 = 0$

పైన తెలిపిన విధముగా x మరియు y ల మధ్య సంబంధము $y^2 = x$ లేక $y = \pm\sqrt{x}$, $x \geq 0$ సమీకరణమును $y = +\sqrt{x}$ మరియు $y = -\sqrt{x}$ గా వ్రాయగలము. రేఖ మీద గల బిందువుల సమితి $\{(x, \sqrt{x})\}$ మరియు $\{(x, -\sqrt{x})\}$, x లను ఋణము కాని వాస్తవసంఖ్య మరియు కార్టీషియన్ లబ్దము $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ యొక్క ఉపసమితులు అగును. (పటము 1.7) నందు చూపబడెను.

పై ఉదాహరణములందు సంబంధములను స్పష్టముగా గ్రహించగలము. గణితము నందు మనము ఉపయోగించు ప్రతి సాంకేతిక పదమునకు నిర్వచనము ఇవ్వవలెను, "సంబంధము" అను పదమును గణిత రూపములో నిర్వచించెదము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 14 24-01-2023 16:18:57

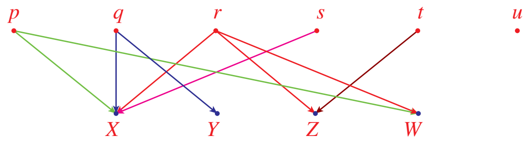
సంబంధము యొక్క నిర్వచనము (Definition of Relation)

$A = \{p, q, r, s, t, u\}$ విద్యార్థుల సమితిగాను $B = \{X, Y, Z, W\}$ పాఠశాలల సమితిగాను తీసుకొందుము. క్రింది "సంబంధమును" తీసుకొందుము. $a \in A$ అను విద్యార్థి $S \in B$ అను పాఠశాలకు సంబంధించిబడెను. "a" చదువుచున్న విద్యార్థి లేక S బడిలో చదివిన విద్యార్థి అని తీసుకొందుము. p విద్యార్థి X లో చదివెను మరియు W లో చదువుచున్నారు. q విద్యార్థి X లో చదివెను Y లో చదువుచున్నారు. r విద్యార్థి X,W లో చదివెను, Z లోచదువుచున్నారు. ప్రారంభము నుండి S విద్యార్థి X లో చదువుచున్నారు, t విద్యార్థి Z లో చదివెను. ప్రస్తుతము ఏ పాఠశాలలోను చదువలేదు, u ఈ నాలుగు పాఠశాలలో దేనిలోను చదువలేదు.

ఈ సంబంధములు స్పష్టముగా ఉన్నను, ఎల్లప్పుడు సంబంధమును ఈ విధముగా ఇవ్వలేము, కావున ప్రత్యామ్నాయ రూపములో క్రింది వివరణను చూపెదము.

(i) $p \quad p \quad q \quad q \quad r \quad r \quad r \quad s \quad t$

$X \quad W \quad X \quad Y \quad X \quad Z \quad W \quad X \quad Z$

(ii)


(iii) $\{(p, X), (p,W), (q,X),(q,Y),(r,X),(r, Z), (r, W), (s, X), (t, Z)\}$

(iv) $pRX, pRW, qRX, qRY, rRX, rRZ, rRW, sRX, tRZ$

పైన చూపిన సంబంధము యొక్క నాలుగు రూపములలో మూడవది సమితుల రూపములో తెలుపుటకు మరింత సౌకర్యముగాను, అనుగుణముగాను ఉన్నది.

మూడవ విధానములో ఇవ్వబడిన సమితి కార్టీషియన్ లబ్ధము $A \times B$ యొక్క ఉపసమితి అగును. వివరణ 1.1 మరియు 1.2 నందు కార్టీషియన్ లబ్ధము యొక్క ఉపసమితులుగా మనము పొందగలిగితిమి.

నిర్వచనము 1.2

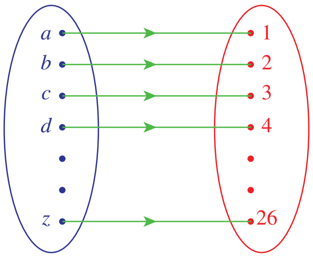
A, B అనునవి శూన్యముకాని సమితులైన A నుండి B కి గల సంబంధము వాటి యొక్క కార్టీషియన్ లబ్ధముల ఉపసమితులుగా నిర్వచించగలము. చిహ్నరూపములో $R \subseteq A \times B$.

A నుండి B కి గల సంబంధము B నుండి A కి గల సంబంధమునకు భిన్నముగా ఉండును.

$\{a \in A : (a, b) \in R$ ఏదైన $b \in B\}$ నకు సమితిని సంబంధము యొక్క క్షేత్రముగాను $\{b \in B : (a, b) \in R$ ఏదైన $a \in A\}$ నకు సమితిని సంబంధము యొక్క వ్యాప్తి గాను పిలువబడును. కావున సంబంధము R యొక్క క్షేత్రమును క్రమయుగ్మముల జతలలో మొదటి నిరూపకముల సమితిగాను, వ్యాప్తిని రెండవ నిరూపకముల సమితిగాను ఉండును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 15 24-01-2023 16:18:58

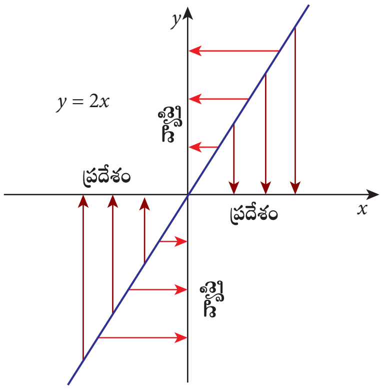
వివరణ 1.3 పటము 1.8 నందు గల రేఖాచిత్రమును తీసుకొనుము. ఇక్కడ ఆంగ్ల భాషలోని అక్షరాలు, సహజసంఖ్యలలో మార్పుచెందుచున్నవి, ఒక్కొక్క ఆంగ్ల అక్షరము, సాంకేతిక లిపుల ద్వారా సహజ సంఖ్యతో గుర్తించబడినది. a ని 1 గాను, b ని 2 గాను ..., z ని 26 గాను సూచించబడెను. దీని ద్వారా క్రమయుగ్మముల జత $\{(a, 1), (b, 2), \dots, (z, 26)\}$ గా వ్రాయగలము.



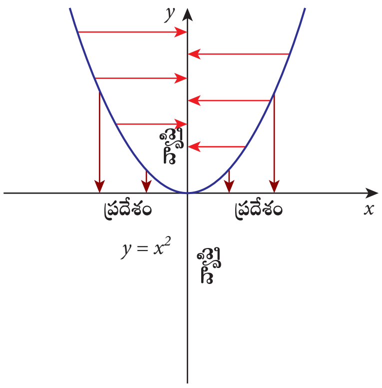
పటము 1.8

ఈ విధమైన క్రమయుగ్మముల జతను సంబంధము అందురు. ఈ సంబంధము యొక్క క్షేత్రము $\{a, b, \dots, z\}$ మరియు వ్యాప్తి $\{1, 2, \dots, 26\}$ అగును. మాదిరి ఉదాహరణము మరియు 1.2 నందు చర్చించబడిన సంబంధములను గుర్తించెదము. మరియు అవి రెండు సమితుల కార్టీషియన్ లబ్దము యొక్క ఉపసమితులగును. సంబంధము అను గణితపదము యొక్క నిర్వచనము 1.2 నందు ఇవ్వబడినది.

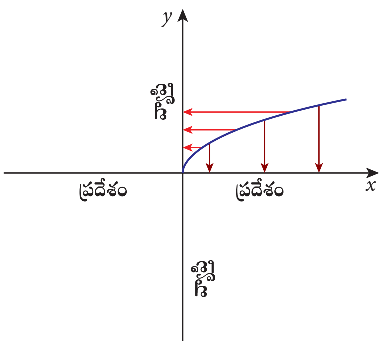
మాదిరి ఉదాహరణము 1.1 నందు సంబంధము యొక్క క్షేత్రము $\{L, E, T, U, S, W, I, N\}$ మరియు వ్యాప్తి $\{O, H, W, X, V, Z, L, Q\}$ గా ఇవ్వబడినది. $2x - y = 0$ సమీకరణము యొక్క క్షేత్రము మరియు వ్యాప్తి పటము 1.9 నందు చూపినట్లు $\mathbb{R}$ మరియు $\mathbb{R}$ అగును. $x^2 - y = 0$ సమీకరణమునకు క్షేత్రము $\mathbb{R}$ మరియు వ్యాప్తి $[0, \infty)$ అగును. పటము (1.10) నందు కలదు. మూడవ సమీకరణము $x - y^2 = 0$ నందు క్షేత్రము $[0, \infty)$ మరియు వ్యాప్తి $\mathbb{R}$ అగును. (పటము 1.11 మరియు 1.12) నందు చూపబడెను.



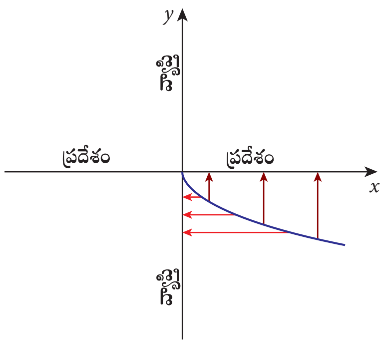
పటము 1.9



పటము 1.10



పటము 1.11



పటము 1.12

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 16 24-01-2023 16:18:59

సంబంధము యొక్క ప్రదేశం కార్టీషియన్ లబ్దము యొక్క మొదటి సమితికి ఉపసమితి అగును. వ్యాప్తి అనునది రెండవ సమితి యొక్క ఉపసమితి అగును. సాధారణముగా రెండవ సమితిని, సంబంధము యొక్క ప్రతిక్షేత్రముగా పిలిచెదము. కావున సంబంధము యొక్క వ్యాప్తి అనునది సహప్రదేశం నందు గల అన్ని మూలకములు క్షేత్రములో గల ఏదో ఒక మూలకముతో సంబంధింపబడును. సంబంధము యొక్క వ్యాప్తి సహప్రదేశం యొక్క ఉపసమితి అగును. ఏదైన సమితి A నకు మరియు ϕ అనునవి $A \times A$ యొక్క ఉపసమితులు అగును. ఈ రెండు సంబంధములను అంత్యసంబంధములందురు. మొదటిది శూన్యసంబంధము, రెండవది విశ్వసంబంధము, క్షేత్రము, ప్రతిక్షేత్రము మరియు వ్యాప్తిని గురించి తర్వాతి విభాగము 'ప్రమేయములు' లలో చర్చించెదము. A నుండి B కి R అనునది సంబంధము మరియు $(x, y) \in R$ అయినను ఒక్కొక్కసారి xRy అని మనము వ్రాసెదము. ("x,y" తో సంబందపరచబడినదని చదవగలము) మరియు $(x, y) \notin R$ నందు $x \not R y$ అని వ్రాసి (x,y తో సంబందపరచలేదని) చదవగలము.

సాధారణముగా సంబంధము యొక్క నిర్వచనమును ఒక సమితి నుండి ఇంకొక సమితికి నిర్వచించినను, గణిత భావనలో సంబంధము యొక్క నిర్వచనము ముఖ్యత్వము వహించుచున్నది. కావున సమితి యొక్క సంబంధమునకు ఎక్కువ ముఖ్యత్వము ఇవ్వబడెను.

1.5.1 సంబంధముల రకములు (Type of relations)

క్రింది ఉదాహరణములను తీసుకొనుము.

(i) $S = \{1, 2, 3, 4\}$ మరియు $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3)\}$ అని తీసుకొందుము

(ii) $S = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ మరియు m ని n చేత భాగించినప్పుడు m అనునది n తో సంబంధింపబడును.

(iii) ఒక తలమునందు గల అన్నివృత్తముల సమితిని $\mathbb{C}$ గా తీసుకొని మరియు $\mathbb{C}$ యొక్క వ్యాసార్థము C' యొక్క వ్యాసార్థమునకు సమమైన $\mathbb{C}$ వృత్తము C' వృత్తమునకు సంబంధపరచినట్లు నిర్వచించిన

(iv) S అను ప్రజల సమితి నందు a యొక్క సహోదరుడు b అయిన a ని b కి సంబంధపరచుట

(v) S అను ప్రజల సమితి నందు, "యొక్క తల్లి" అను సంబంధమునకు నియమము ప్రకారము నిర్వచించుట.

రెండవ ఉదాహరణములో ప్రతిసంఖ్య అదే సంఖ్యచే భాగించబడును, "ప్రతి $a \in S$ నకు a అనునది a కు సంబంధము" మూడవ సంబంధమునకు కూడా ఇది సరియగును. మొదటి ఉదాహరణలో ప్రతి $a \in S$ నకు a అనునది a తో సంబంధమనునది నిజముకాదు, 2 అనునది 2 కి సంబంధపరచలేదు.

a అనునది b కి సంబంధింపబడిన b అనునది a కి సంబంధింపబడును. అనునది మూడవదానిలో నిజమగును కాని రెండవదానికి వర్తించదు.

a అనునది b కి సంబంధము మరియు b కి c సంబంధమైన, a అనునది c కి సంబంధము అనునది రెండవ, మూడవ దానికి సరియగును కాని ఐదవదానికి సరికాదు.

ఈ ధర్మములతో పాటు మరికొన్ని ధర్మములను గణిత భావనలతో పరిశీలించెదము. వాటిని ఇప్పుడు నిర్వచించగలము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 17 24-01-2023 16:19:00

నిర్వచనము 1.3

S అనునది శూన్యముకాని సమితి. R అనునది S మీద గల సంబంధము.

- ప్రతి $a \in S$ నకు a అనునది a కి సంబంధమైన R అనునది పరావర్తనమగును.
- a అనునది b కి సంబంధించినప్పుడు b కి a సంబంధమైన R సౌష్ఠవమగును.
- a అనేది b తో సంబంధం అయిన మరియు b అనేది c తో సంబంధం అయిన a అనేది b తో సంబంధం అగునపుడు R ఒక సంక్రమణ సంబంధం అగునపుడు ఒక సంక్రమణ సంబంధం అగును.

ఈ మూడు సంబంధములను ప్రాథమిక సంబంధములు అందరు.

ఈ మూడు ప్రాథమిక నిర్వచనములను వేరు రూపములో నిర్వచించగలము.

S అనునది శూన్యము కాని సమితి, R అనునది S నందు గల సంబంధము R అనునది.

- "అన్ని $a \in S$ నకు $(a,a) \in R$ అయిన అది పరావర్తనము
- "$(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$" అయిన సౌష్ఠవము
- "$(a, b),(b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$" అయిన సంక్రమణమగును.

నిర్వచనము 1.4

S అనునది ఏదైన సమితియైన, S నందు గల సంబంధము పరావర్తనము, సౌష్ఠవము, సంక్రమణమయినప్పుడు అది తుల్యసంబంధమగును.

ఈ క్రింది రెండు సంబంధములను తీసుకొనుము.

(i) S_1 ప్రజల సమితి నందు సంబంధములను R_1 కు గల నియమము a యొక్క సహోదరుడు b అయిన a అనునది b యొక్క సంబంధమగును.

(ii) S_2 పురుషుల సమితి నందు సంబంధము R_2 గల నియమము a యొక్క సహోదరుడు b అయిన a అనునది b యొక్క సంబంధమగును.

S_1 మరియు S_2 సంబంధముల నందు గల నియమములు ఒకే విధముగా ఉన్నవి. కాని సమితులు సమానము కావు. R_1 అనునది S_1 నకు సౌష్ఠవ సంబంధముకాదు కాని R_2 అనునది S_2 నకు సౌష్ఠవ సంబంధమగును. సంబంధము యొక్క నియమము నిర్వచించుట ముఖ్యముకాదు. సంబంధము యొక్క సమితి కూడా ముఖ్యము. కావున సంబంధమును తీసుకొనినప్పడు సంబంధము మరియు దాని మీద నిర్వచించిన సమితిని కూడా ఇవ్వవలెను. $\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2)\}$ అను సంబంధమును $\{1,2,3\}$ అను సమితికి నిర్విచించినప్పుడు అది పరావర్తనమగును $\{1,2,3,4\}$ సమితి మీద నిర్వచించనప్పుడు అది పరావర్తనము కాదు.

మాదిరి ఉదాహరణము 1.4

1. $X = \{1, 2, 3, 4\}$ మరియు $R = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2),(3, 3), (1, 3), (4, 4), (1, 2),(3, 1)\}$. అని తీసుకొందుము. $(1, 1),(2, 2),(3, 3)$ మరియు $(4, 4)$ R నందు ఉన్నప్పుడు, అది పరావర్తనమగును. మరియు ప్రతి $(a, b) \in R$ జతకు (b, a) జత కూడా R నందు ఉండును. కావున R సౌష్ఠవమగును. $(2, 1), (1, 3) \in R$ మరియు $(2,3) \notin R$ అయినందున R సంక్రమణము కాదు. కావున R తుల్య సంబంధము కాదు.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 18 24-01-2023 16:19:02

2. ఒక తలములో సరళరేఖల సమితిని P గా తీసుకొందుము. సంబంధము R నందు P ని నిర్వచించినప్పుడు l, m నకు సమాంతరమైన lRm అగును. ఈ సంబంధము పరావర్తన సౌష్ఠము మరియు సంక్రమణమగును. కావున ఇది తుల్య సంబంధమగును.

3. A అనునది తల్లిదండ్రులు మరియు వారి పిల్లలు ఇద్దరు అమ్మాయిలు, ఒక అబ్బాయిగా గల సమితి అని తీసుకొనుము, b యొక్క సహోదరి a అని, R అను నంబంధము aRb అగును. ఈ సంబంధమును శ్రద్ధగా గమనించవలెను. ఒక స్త్రీ ఆమెకు ఆమే సహోదరి కాలేదు.కావున ఇది పరావర్తనము కాదు. ఇది సౌష్ఠవము కూడా కాదు. కావున ఇది సంక్రమణము కాదు. అందువలన అది తుల్య సంబంధము కాదు. ఇదే సంబంధము స్త్రీల యొక్క ఉపశమితులకు తీసుకున్నప్పుడు అది సౌష్ఠవమగును మరియు సంక్రమణము కాదు.

4. సహజ సంఖ్యలసమితికి R అను సంబంధము xRy $x+2y=21$ గా నిర్వచించబడెను. ఈ సంబంధమును బాహ్యముగా వ్రాయునప్పుడు మెరుగుగా ఉండును. R అను సంబంధమునకు $\{(1,10),(3,9),(5,8),(7,7),(9,6),(11,5),(13,4),(15,3),(17,2),(19,1)\}$ అనునది సమితి అగును. $(1,1)\notin R$ అనునది పరావర్తనము కాదు. $(1,10)\in R$ మరియు $(10,1)\notin R$ సౌష్ఠవము కాదు. $(3,9),(9,6)\in R$ కాని $(3,6)\notin R$ ఈ సంబంధము సంక్రమణము కాదు.

5. $X=\{1,2,3,4\}$ మరియు $R=\phi$ నందు, ϕ అనునది శూన్యసమితి. $(1,1)\notin R$ అయినందున అది పరావర్తనము కాదు. $(y,x)\notin R$ అయినందున R నందు (x,y) అను జతను కనుగొనలేము. సౌష్ఠవము కాదు అనునది సంబంధము కాదు; అందువలన అది సౌష్ఠవము. అదేవిధముగా అది సంక్రమమగును.

6. విశ్వసంబంధము ఎల్లప్పుడు తుల్యసంబంధమగును.

7. శూన్య సంబంధమును సౌష్ఠవము మరియు పరావర్తనముగా తీసుకొనగలము.

8. ఒక సంబంధమునందు ఒకే ఒక మూలకముండిన అది సంక్రమణమగును.

కొన్ని ప్రత్యేక సంబంధములను మనము ఇప్పుడు చర్చించెదము.

ఉదాహరణము 1.10 $S=\{1,2,3,\ldots,n\}$ సమితి నందు నిర్వచించబడిన సంబంధము $R=\{(1,1),(2,2),(3,3),\ldots,(n,n)\}$ నకు 3 ప్రాథమిక సంబంధములను సరిచూడుము.

సాధన

ప్రతి $a\in S$ నకు $(a,a)\in R$ పరావర్తనమగును. $(b,a)\notin R$ నకు సరిపడు $(b,a)\notin R$ అను జతలేదు మరో విధముగా ప్రతి $(a,b)\in R$, $(b,a)\in R$ కావున R సౌష్ఠవమగును.

(a,b) $(b,c)\notin R$ జతలకు $(a,c)\notin R$ ని కనిపెట్టలేము. కావున R సంక్రమణము కాదు, అనునది నిజము కాదు. కావున R అనునది పరావర్తనము అగును నిజమగును. కావున R సంక్రమణము, R అనునది పరావర్తనము,సౌష్ఠవము, సంక్రమణమయినందున, ఈ సంబంధము తుల్య సంబంధమగును.

ప్రారంభము నుండి అన్నిసంబంధములకు R అను అక్షరమును సూచించెదము. ఈ విధముగా గుర్తించడమనేది అవసరములేదు. గ్రీకు అక్షరము ρ ని సంబంధములను గుర్తించుటకు ఉపయోగించగలము. తుల్య సంబంధములను ఎక్కువగా "$\sim$" అను గుర్తుతో సూచించెదము. ఒక సంబంధము మనకు అవసరముకాని రకమైన,కొన్నిజతలను చేర్చుటకు,తొలగించుటకు వీలగును. క్రిందిఉదాహరణలో దీనిని మనము చెయ్యగలము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 19 24-01-2023 16:19:04

ఉదాహరణము 1.11

$S = \{1, 2, 3\}$ మరియు $\rho = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (3, 1)\}$

(i) ρ అనునది తుల్యమగునా? అట్లులేదనిన,కారణమును తెలుపుము. ρ పరావర్తనమగుటకు చేర్చవలసిన అత్యల్పక్రమయుగ్మముల జతను తెలుపుము.

(ii) ρ సౌష్ఠవమగునా? అట్లులేనియెడల కారణమును తెలుపుము. ρ సౌష్ఠవమగుటకు? అట్లులేనియెడల సౌష్ఠవమగుటకు చేర్చవలసిన కనీస యుగ్మముల జతను వ్రాయుము మరియు ρ - సౌష్ఠవమగుటకు తొలగించవలసిన కనీస యుగ్మముల జతను వ్రాయుము.

(iii) ρ సంక్రమణమగునా? అట్లులేని యొడల కారణమునుతెలుపుము. ρ సంక్రమణమగుటకు చేర్చవలసిన కనీసయుగ్మముల జతను వ్రాయుము మరియు ρ సంక్రమణమగుటకు తొలగించ వలసిన కనీసయుగ్మముల జతను వ్రాయము.

(iv) ρ తుల్యసంబంధమగునా? అట్లులేని యొడల ρ తుల్యసంబంధము అగుటకు చేర్చవలసిన కనీసయుగ్మజతను వ్రాయుము.

సాధన

(i) ρ పరావర్తనము కాదు. ఎందుకనగా $(3, 3)$ అనునది ρ నందు లేదు. $(1, 1)$ మరియు $(2, 2)$ నందుకలవు. ρ పరావర్తనమగు టకు $(3, 3)$ అను యుగ్మజతను మాత్రమే ρ తో చేర్చవలెను.

(ii) ρ సౌష్ఠవము కాదు. ఎందుకనగా $(1, 2)$ ρ నందుఉన్నది కాని $(2, 1)$ ρ నందు లేదు. ρ సౌష్ఠవమగుటకు $(2, 1)$ అను యుగ్మజతను ρ తో చేర్చవలేను.

(iii) ρ సంక్రమణము కాదు. ఎందుకనగా $(3, 1)$ మరియు $(1, 3)$ ρ లో ఉన్నవి. కాని $(3, 3)$ ρ లో లేదు. ρ సంక్రమణమగుటకు $(3, 3)$ ని చేర్చవలెను. $(3, 3)$ ని చేర్చిన తర్వాత కూడ సంబంధము సంక్రమణముకాదు. కారణము $(3, 1)$ మరియు $(1, 2)$ ρ లో ఉన్నవి. $(3, 2)$ ρ లో లేదు. ρ సంక్రమణమగుటకు. $(3, 2)$ ని ρ తో చేర్చవలెను ఇప్పుడు ఇది సంక్రమణమగును కావున $(3, 3)$, $(3, 2)$ అనునది సంక్రమణమగుటకు ρ తో చేర్చవలెను. కాని $(3, 1)$ ని ρ నుండి తొలగించునప్పుడు అది సంక్రమణమగును.

(iv) మనము చూసినవి,

- ρ - పరావర్తనమగుటకు $(3, 3)$ ను చేర్చవలెను.
- ρ - సౌష్ఠవమగుటకు $(2, 1)$ ను చేర్చవలెను.
- ρ సంక్రమణమగుటకు $(3, 3)$ మరియు $(3, 2)$ ని చేర్చవలెను. (ρ తుల్య సంబంధమగుటకు పైన తెలిపిన జతలను చేర్చవలెను).

జతలను చేర్చిన తర్వాత సంబంధము $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1)$ $(3, 2)$ గా ఉండును. కాని ఈ సంబంధము సౌష్ఠవముకాదు. ఎందుకనగా $(3, 2)$ సంబంధములో ఉన్నది మరియు $(2, 3)$ సంబంధములో లేదు. కావున $(2, 3)$ ని చేర్చవలెను. ఇప్పుడు క్రొత్త సంబంధము $\{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 2)\}$ గా ఉండును. ఈ సంబంధము పరావర్తనము, సౌష్ఠవము, సంక్రమణముగా ఉండును మరియు అది తుల్య సంబంధమగును. కావున ρ తుల్యసంబంధము అగుటకు $(3, 2)$ $(2, 1)$ $(3, 3)$ మరియు $(2, 3)$ ని చేర్చవలెను.

క్రింది ఉదాహరణముల ద్వారా కొన్ని లక్షణాలతో పాటు సంబంధములను ఎట్లు రూపొందించవలయునని నేర్చుకొందుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 20 24-01-2023 16:19:04

ఉదాహరణము 1.12 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ గా తీసుకొందుము. క్రింది రకములకు A మీద సంబంధములను నిర్మించుము.

(i) పరావర్తనము కాదు, సౌష్ఠవముకాదు మరియు సంక్రమణము కాదు

(ii) పరావర్తనము కాదు, సౌష్ఠవముకాదు, సంక్రమణము

(iii) పరావర్తనము కాదు, సౌష్ఠవము, సంక్రమణము కాదు.

(iv) పరావర్తనము కాదు, సౌష్ఠవము, సంక్రమణము

(v) పరావర్తనము, సౌష్ఠవము కాదు, సంక్రమణము కాదు

(vi) పరావర్తనము, సౌష్ఠవముకాదు, సంక్రమణము.

(vii) పరావర్తనము, సౌష్ఠవము, సంక్రమణము కాదు

(viii) పరావర్తనము, సౌష్ఠవము, సంక్రమణము

సాధన

(i) సంబంధము సౌష్ఠవము కాకుండుటకు $(1, 2)$ జతను చేర్చవలెను మరియు $\{(1, 2)\}$ అను సంబంధమును తీసుకొనుము. ఇది సంక్రమణమగును. $(2, 3)$ ని చేర్చి మరియు $(1, 3)$ చేర్చినప్పుడు సంబంధము సంక్రమణము కాదు. అందువలన $\{(1,2),(2,3)\}$ పరావర్తనము కాదు, సౌష్ఠవము కాదు మరియు సంక్రమణము కాదు. అదేవిధముగా మరికొన్ని ఉదాహరణములను నిర్మించగలము.

(ii) $\{(1, 2)\}$ మనము ఇంతకు ముందు చూసిన విధముగా $\{(1, 2)\}$ అను సంబంధము సంక్రమణము మరియు సౌష్ఠవము కాదు పరావర్తనము కాదు.

(iii) $(1, 2)$ అను జతలో ప్రారంభించెదము. సౌష్ఠవము అవసరమైనందున, $(2, 1)$ అను జతను చేర్చవలెను. ఈ ఘట్టములో $(1, 1), (2, 2)$ ఇక్కడ లేవు, సంబంధము సంక్రమణము కాదు. కావున $\{(1,2),(2,1)\}$ పరావర్తనము కాదు; ఇది సౌష్ఠవము మరియు సంక్రమణము కాదు..

(iv) $(1, 1), (2, 2)$ అను జతలను, సంబంధము (iii) లో చర్చించిన వాటికి చేర్చినప్పుడు అవి సంక్రమణమగును. కావున $\{(1, 2), (2, 1), (1, 1), (2, 2)\}$ పరావర్తనము కాదు; ఇది సౌష్ఠవము మరియు సంక్రమణమగును.

(v) $\{0, 1, 2, 3\}$ మీద సంబంధము పరావర్తనమగుటకు, దీనినందు ఖచ్చితముగా $(0, 0), (1, 1), (2,2), (3, 3)$ అను జతలుండవలెను. అనుకోనివిధముగా, ఇది సౌష్ఠవము మరియు సంక్రమణమగును. కావున (i) లో ఉన్న విధముగా $(1, 2)$ మరియు $(2, 3)$ ని చేర్చినప్పుడు మనకు కావలసినవి లభించును. కావున $\{(0, 0), (1, 1),(2, 2),(3, 3),(1, 2),(2, 3)\}$ పరావర్తనమగును; ఇది సౌష్ఠవము కాదు మరియు సంక్రమణము కాదు.

(vi) ఈ విధముగా మనము కొనసాగించిన $\{(0, 0),(1, 1), (2, 2),(3, 3),(1, 2)\}$ అను సంబంధము లభించును. కాని అది పరావర్తనము, సంక్రమణము మరియు సౌష్ఠవము కాదు.

(vii) పైనున్న విధముగా $\{(0, 0),(1, 1),(2, 2),(3, 3), (1, 2),(2, 3),(2, 1), (3, 2)\}$ అను సంబంధమును పొందగలము, అవి పరావర్తనము, సౌష్ఠవము మరియు సంక్రమణము కాదు.

(viii) $\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$ అను సంబంధము మనకు కలదు. అది పరావర్తనము, సౌష్ఠవము మరియు సంక్రమణమగును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 21 24-01-2023 16:19:05

ఉదాహరణము 1.13 పూర్ణసంఖ్యల సమితి $\mathbb{Z}$ నందు, $m - n$ అనునది 12 యొక్క గుణిజముఅయినప్పుడు mRn గా నిర్వచించబడెను R తుల్య సంబంధమని నిరూపించుము.

సాధన

$m - m = 0$ మరియు $0 = 0 \times 12$ అయినందున, mRm అనునది R పరావర్తనమని నిరూపించబడినది.

mRn అని తీసుకొనుము. ఏ దైన పూర్ణసంఖ్య k నకు; $n - m = 12(-k)$ మరియు nRm అగును. ఇది R సౌష్ఠవమని చూపుచున్నది. mRn మరియు nRp అని తీసుకొనుము; ఏదైన పూర్ణసంఖ్యలు k మరియు l నకు $m - n = 12k$ మరియు $n-p = 12l$ అయిన $m - p = 12(k+l)$ మరియు mRp అగును. ఇది R సంక్రమణము అని చూపుచున్నది. కావున R ఒక తుల్యసంబంధమగును.

సిద్ధాంతము 1.1: m మూలకములు కలిగిన సమితి నుండి n మూలకములు కలిగిన సమితి యొక్క సంబంధముల సంఖ్య 2^{mn} ప్రత్యేకముగా n మూలకములు కలిగిన సమితికి సంబంధముల సంఖ్య 2^{n^2}

నిరూపణ: A మరియు B సమితుల మూలకములు క్రమముగా m మరియు n $A \times B$ అనునది mn మూలకములను కలిగియుండును. మరియు $A \times B$ 2^{mn} ఉపసమితులను కలిగియుండును. $A \times B$ యొక్క ప్రతి ఉపసమితి A నుండి B కి సంబంధమైన, m మూలకములు కలిగిన సమితి నుండి n మూలకములు కలిగిన సమితికి 2^{mn} సంబంధములను కలిగియుండును.

$A = B$ గా తీసుకొనుము. n మూలకములుగా కలిగిన సమితి నందు సంబంధముల సంఖ్య 2^{n^2} ■

(i) n మూలకములు కలిగిన సమితి యొక్క పరావర్తన సంబంధములు $2^{n^2 - n}$ అగును.

(ii) n మూలకములు కలిగిన సమితి యొక్క సౌష్ఠవ సంబంధములు $2^{\frac{(n^2+n)}{2}}$ అగును.

నిర్వచనము 1.5

R అనునది A నుండి B కి గల సంబంధమైనప్పుడు R^{-1} B నుండి A కి నిర్వచించబడి $R^{-1} = \{(b,a) : (a,b) \in R\}$ అగుటను సంబంధము R యొక్క విలోమమని పేర్కొనబడును.

ఉదాహరణకు, $R = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, a)\}$ అయినప్పుడు,

$$R^{-1} = \{(a,1), (b, 2), (c, 2), (a, 3)\}$$ అగును,

R యొక్క క్షేత్రమనునది, R^{-1} యొక్క వ్యాప్తి అని మనము సులభముగా చూడగలము. మరియు R యొక్క వ్యాప్తి R^{-1} యొక్క క్షేత్రమగును.

మీకు తెలుసా?

సమితి యొక్క తుల్యసంబంధమనునది దాని ఉపసమితుల విచ్ఛిన్నసమ్మేళనములను విచ్ఛిన్నపరచుట అగును (సర్వసమానత్వ తరగతులు) ఈ విధమైన విచ్ఛిన్నమును భాగపరచుట అందుము. దీనిని క్రింది ఉధాహరములో వివరించబడెను. $a, b \in \mathbb{Z}$ నకు, $a - b = 3k,\ k \in \mathbb{Z}$ అయినప్పుడు aRb అనునది $\mathbb{Z}$ మీద తుల్యసంబంధమగును.

$$Z_0 = \{x \in \mathbb{Z} : xR0\} = \{\ldots,\ -3,\ 0,\ 3,\ 6, 9, \ldots\}$$

$$Z_1 = \{x \in \mathbb{Z} : xR1\} = \{\ldots, -2, 1, 4, 7, 10, \ldots\}$$

$$Z_2 = \{x \in \mathbb{Z} : xR2\} = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$$

కావున $\mathbb{Z} = Z_0 \cup Z_1 \cup Z_2$ అనునవి విచ్ఛిన్న ఉపసమితులు. S సమితి యొక్క భాగములు $S = S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_n$ నుండి విచ్ఛిన్న ఉపసమితులకు, S మీద R అను తుల్యసంబంధమును xRy $x, y \in S_i$ ఏదైననను ; నకు గా నిర్మించగలము. తుల్య సంబంధమనునది గణితశాస్త్రంపై తరగతులలో అన్ని విభాగములలో ఉపయోగపడును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 22 24-01-2023 16:19:07

అభ్యాసము 1.2

1. క్రింది సంబంధములకు పరావర్తనము, సౌష్ఠవము మరియు సంక్రమణము చర్చించుము;
   (i) ధనపూర్ణ సంఖ్యల సమితి నందు, సంబందము R ను "m అనునది n ని భాగించునప్పుడు mRn" గా నిర్వచించబడెను.
   (ii) P ను ఒక తలము నందు గల సరళరేఖల సమితిగా తీసుకొనుము. R అను సంబంధమును "l అనునది m కి లంబమైనప్పుడు, lRm" గా నిర్వచించబడెను.
   (iii) A అనునది ఒక కుటుంబములోని వ్యక్తులను సూచించు సమితిగా తీసుకొనుము. R అను సంబంధమును "b యొక్క సహోదరి a కానప్పుడు aRb" గా నిర్వచించబడెను.
   (iv) A అనునది ఒక కుటుంబములోని వ్యక్తులను సూచించు సమితిగా తీసుకొనుము. R అను సంబంధమును a యొక్క సహోదరి b కాదుగా ఉన్నప్పుడు R గా నిర్వచించబడెను aRb గా నిర్వచించబడెను.
   (v) సహజ సంఖ్యల సమితికి, "$x + 2y = 1$" గా ఉన్నప్పుడు R గా xRy నిర్వచించబడెను.

2. $X = \{a,b,c,d\}$ మరియు $R = \{(a,a),(b,b),(a,c)\}$ గా తీసుకొనుము. క్రింది వాటికనుగుణముగా R తో చేర్చవలసిన కనీస యుగ్మముల జతను వ్రాయుము.

   (i) పరావర్తనము (ii) సౌష్ఠవము (iii) సంక్రమణము (iv) తుల్యము

3. $A = \{a,b,c\}$ మరియు $R = \{(a, a),(b, b),(a, c)\}$ గా తీసుకొనుము. క్రింది వాటికనుగుణముగా R తో చేర్చవలసిన కనీస యుగ్మముల జతను వ్రాయుము.

   (i) పరావర్తనము (ii) సౌష్ఠవము (iii) సంక్రమణము (iv) తుల్యము

4. ఒక తలములోని త్రిభుజముల సమితిని P ను మరియు a అనునది b కి సర్వసమమైన aRb గా R అను సంబంధమును P కి నిర్వచించబడెను. R ని తుల్యసంబంధముగా నిరూపించుము.

5. సహజసంఖ్యల సమితి నందు R అను సంబంధమును, $2a + 3b = 30$ గా ఉన్నప్పుడు aRb గా నిర్వచించబడెను. అన్నిజతలను వరుసపరచునట్లు సంబంధమును వ్రాయుము,

   (i) పరావర్తనము (ii) సౌష్ఠవము (iii) సంక్రమణము (iv) తుల్యము

6. చెన్నై నందు గల ప్రజల సమితికి స్నేహితము అను సంబంధము తుల్యసంబంధము కాదని నిరూపించుము.

7. సహజసంఖ్యల సమితి నందు R అను సంబంధమును, $a + b \le 6$ గా ఉన్నప్పుడు aRb గా నిర్వచించబడును. అన్ని జతలను వరుసపరచునట్లు సంబంధమును వ్రాయుము.

   (i) పరావర్తనము (ii) సౌష్ఠవము (iii) సంక్రమణము (iv) తుల్యమునకు సరిచూడుము.

8. $A = \{a, b, c\}$ గా తీసుకొనుము. A మీద కనీస కార్డినాలిటీ యొక్క తుల్యసంబంధము ఏమి? A మీద గరిష్ఠ కార్డినాలిటీ యొక్క తుల్యసంబంధము ఏమి ?

9. పూర్ణసంఖ్యా సమితి $\mathbb{Z}$ నకు, $m-n$ అనునది 7 తో భాగించినప్పుడు mRn గా నిర్వచించబడెను. R అనునది తుల్యసంబంధమని నిరూపించుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 23 24-01-2023 16:19:08

1.6 ప్రమేయములు (Functions)

అంతరిక్షములో ఒక కణము తిరుగుచున్నదని తీసుకొందుము. భౌతికకణమును మనము బిందువుగా తీసుకొందుము. కాలముతో పాటు కణము స్థలమార్పుచెందును. గణితపరంగా, ఒక బిందువు త్రిపరిమాణతలములో $\mathbb{R}^3$ నందు ఏ సమయమునందైనను,తనస్థానమును ఆక్రమించుకొనును. కాలము 0 నుండి 1 కి మార్పుచెందునని ఊహించుకొందుము. కావున కణము యొక్క చలనమనునది దాని యొక్క స్థలమార్పును 0 కాలము నుండి 1 వరకు గల కదలికలను నిర్ణయించును. మరోవిధముగా కణము యొక్క పని తీరు $\mathbb{R}$ నందు ప్రతి $t \in [0,1]$ నకు ఒక బిందువు ఇచ్చును. t కాలములో కణముయొక్క స్థలమార్పును $f(t)$ గా సూచించెదము.

మరొక సాధారణ ఉధాహరణమును చూదెదము $2x - y = 0$ అను సమీకరణము సరళరేఖను ఏర్పరచునవి మనకు తెలియును. ఇక్కడ x ఒక విలువను తీసుకొన్నప్పుడు, y ఏదైన ఒక విలువను తీసుకొనును. y యొక్క కదలిక లేక పనిచేయువిధానము x చేత నిర్ణయింబడును. y ని $f(x)$ గా సూచించెదము. ఇలాంటి అనేక సందర్భములను ప్రకృతిలో మనము చూపెదము ప్రకృతి అధ్యయనము నందు ఒక పరిమాణమార్పు ఇంకొక పరిమాణమార్పు మీద ఆధారపడు అవసరమును తెలియజేయును.

కాలము అను సంబంధము మరియు కణము యొక్క స్థానము x అక్షము నందు గల బిందువునుండి y అక్షము నందుగల బిందువునకు గల సంబంధము మరియు ఇలాంటి అనేక ఎక్కువ సంబంధములను ప్రమోయము అను పేరుతో చాల కాలము వరకు అభ్యసించబడెను. కాంటర్‌కు మునుపు వరకు ప్రమేయము అనుపదము నియమముగా నర్వచించబడెను. అది ఒక చలరాశిగాను, ఇంకొక చలరాశితోను అనుసంధానింపడెను. సమితుల భావన ఉద్భవించిన తర్వాత, A సమితిలోని ప్రతిమూలకము, B సమితిలోని ఒకే ఒక మూలకములో అనుసంధానించు నియమయును ప్రమేయముగా నిర్వచించబడెను. కాని గణితపరముగా నియమము మరియు సంబంధపరచుటను బాగుగా నిర్వచించబడలేదు. నవీన గణితములో ప్రతిపదమును సరియైన విధముగా నిర్వచించలేదు. కావున ప్రమేయ నిర్వచనము సంబంధములను ఉపయోగించి ఇవ్వబడినది.

కొందరు విధ్యార్థులు వ్రాసిన పరీక్షను మనము చర్చించవలెనని తీసుకొందుము. దీనిని మనము సంబంధముగా చూసెదము. A అను సమితి పరీక్షకు హాజరయిన విద్యార్థుల సమితి $B = \{0, 1, 2, 3, ..., 100\}$ అనునది సాధ్యమైన మార్కుల సమితి. B అను సంబంధమును క్రింది విధముగా నిర్వచించెదము.

a అను విద్యార్థి b మారుక్కలను పొందునప్పుడు a అనునది b తో సంబంధపడినది. ఈ ఉదాహరణము నుండి క్రింది వాటిని గమనించగలము.

- ప్రతి విద్యార్థి మార్కులను పొందెను. మరుమాటలలో ప్రతి $a \in A$, నకు, $b \in B$ అను మూలకముండును మరియు $(a, b) \in R$
- ఒక విద్యార్థి ఏదైనా ఒక పరీక్షలో రెండు మార్కులను పొందుటకు వీలులేదు. మారుమాటలలో ప్రతి $a \in A$, నకు , ఖచ్చితముగా $(a, b) \in R$ గా ఉండునట్లు ఒకే ఒక $b \in B$ ఉండును. దీనిని మరోవిధముగా చెప్పగలము. $(a, b), (a, c) \in R$ అయినప్పుడు $b = c$ అగును.

తరగతుల నుండి రెండు ముఖ్యమైన ధర్మములను కలిగియున్న సంబంధములు ప్రమేయములగును. సంబంధముల ద్వారా ప్రమేయము యొక్క నిర్వచనమును తీసుకొందుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 24 24-01-2023 16:19:09

నిర్వచనము 1.6

A మరియు B అను రెండు సమితులను తీసుకొందుము. A నుండి B కి గల సంబంధమనునది $A\times B$ యొక్క ఉపసమితి మరియు క్రింది ఇవ్వబడినవాటిని తృప్తిపరచునప్పుడు A నుండి B కి ప్రమేయమగును.

(i) అన్ని $a \in A$ నకు $(a, b) \in f$ అయినప్పుడు, $b \in B$ అను మూలకముండును.

(ii) $(a, b) \in f$ మరియు $(a, c) \in f$ అయిన $b = c$ అగును.

అనగా క్షేత్రములోని ప్రతి మూలకము, వ్యాప్తిలోని ఒకే ఒక మూలకమునకు వ్యాపించినప్పుడు ప్రమేయము సంబంధమగును.

A అనునది f యొక్క క్షేత్రము మరియు B అనునది f యొక్క ప్రతిక్షేత్రమగును. $(a, b) \in f$ అయిన $f(a)= b$ అని వ్రాయగలము. b అను మూలకము a యొక్క వ్యాప్తి అగును మరియు a అను మూలకము b యొక్క పూర్వ ప్రతిబింబమగును మరియు $f(a)$ అనునది a వద్ద f యొక్క విలువగును. సమితి $\{b : (a, b) \in b$ ఏదైన $a \in A$ నకు$\}$ ని ప్రమేయము యొక్క వ్యాప్తి అని పిలువబడును. B అనునది $\mathbb{R}$ యొక్క ఉపసమితియైన, ఆ ప్రమేయమును వాస్తవ విలువల ప్రమేయమని చెప్పగలము.

f, g అను రెండు ప్రమేయముల క్షేత్రములు సమానమైన అవి సమాన ప్రమేయములని చెప్పబడును. మరియు క్షేత్రములోని అన్ని బిందువులకు $f(a) = g(a)$ గా ఉండును.

f ప్రమేయము యొక్క క్షేత్రము A గాను, ప్రతిక్షేత్రము B గాను ఉన్నప్పుడు $f\colon A \to B$ (f అనునది A నుండి B కి లేక f అను ప్రమేయము A నుండి B కి అని చదువవలెను). వ్రాయగలము. f అను ప్రమేయము A నుండి B కి వ్యాపించునని కూడా చెప్పగలము. $f(a) = b$ అయినప్పుడు f అనునది a నుండి b కి వ్యాపించినది లేక f వలన a కి b ద్విగుణమని చెప్పగలము.

ఒక ప్రమేయము యొక్క వ్యాప్తి అనునది, పూర్వ బింబములను కలిగిన ప్రతిక్షేత్ర మూలకముల సమూహమగును. స్పష్టముగా ప్రమేయము యొక్క వ్యాప్తి అనునది ప్రతిక్షేత్రము యొక్క ఉపసమితి అగును. మరియు క్షేత్రములోని ప్రతిమూలకమునకు ఖచ్చితముగా ప్రతిబింబముండునని మొదటి నియమము తెలుపుచున్నది. A లోని అన్ని మూలకముల సమితికి, A లో కాని విధముగా బింబములుండు కారణము చేత, సంబంధము R నకు, A సమితి నుండి B సమితి యొక్క క్షేత్రము నిర్వచించబడెను. క్షేత్రములో గల మూలకము రెండు లేక అంతకంటె ఎక్కువ బింబములను కలిగి ఉండుటకు వీలులేదని రెండవ నియమము తెలుపుచున్నది.

సహజముగా ఎవరికైన క్రింది సందేహములు ఉండగలవు.

- నిర్వచనము నందు, a యొక్క బింబమునకు నిర్దిష్టోప పదం “ది” ని మరియు b యొక్క పూర్వబింబమునకు ‘ఎ’ ని మనము ఎందుకు ఉపయోగించుచున్నాము?
- క్షేత్రములోని ప్రతిమూలకమునకు ఖచ్చితముగా బింబముండవలెనను నియమము వక్కాణించుచున్నాము. ప్రతిక్షేత్రములోని ప్రతి మూలకమునకు పూర్వబింబముండునా? అట్లులేని యెడల ఎందుకని? అను నియమము కలదా?
- క్షేత్రములోని ప్రతిమూలకము రెండు లేక అతకంటె ఎక్కువ బింబములను కలిగియుండదు అను నియమమును తెలుపుతూ ప్రతిక్షేత్రములోని మూలకమునకు రెండు లేక అంతకంటె ఎక్కువ పూర్వబింబములు ఉండుటకు వీలులేదను నియమము కలదా? అట్లు లేని యెడల ఎందుకు?

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 25 24-01-2023 16:19:10

క్షేత్రము నందు గల మూలకమునకు ఖచ్చితముగా ఒకే ఒక బింబముండును మరియు ప్రతిక్షేత్రము నందు ఒకటి కంటె ఎక్కువ పూర్వబింబములుండును. నిర్వచనమునకు అనుగుణముగా a యొక్క బింబములకు నిర్దిష్టోపపదం 'ది' ని మరియు b యొక్క పూర్వబింబములకు "a" ని ఉపయోగించెదము. మిగిలిన రెండు ప్రశ్నలలో అడిగిన విధముగా నియమములు లేవు; దానికి కారణమేమనగా పైన తెలిపిన విధముగా విద్యార్థుల మార్కుల సమస్యను తీసుకొనుట ద్వారా వారికి సులభముగా అర్థమగును.

ప్రతి ప్రమేయము సంబధమగును, కాని సంబంధము ప్రమేయమగుటకు వీలులేదు.

$f = \{ (a, 1),(b , 2),(c, 2), (d, 4)\}$ అని తీసుకొనుము.

f అనునది ప్రమేయమగునా? ఇది $\{a, b, c, d\}$ సమితి నుండి $\{1, 2, 4\}$ కి గల ప్రమేయమగును. ఇది $\{a, b, c, d, e\}$ నుండి $\{1, 2, 3, 4\}$ నకు ప్రమేయము కాదు. ఎందువలననగా e కి బింబము లేదు. {a, b, c, d} నుండి {1, 2, 3, 5} నకు ప్రమేయము కాదు. ఎందువలననగా d యొక్క బింబము ప్రతిక్షేత్రములో లేదు. f అనునది $\{a, b, c, d\} \times \{1, 2, 3, 5\}$ యొక్క ఉపసమితి కాదు. కావున ప్రమేయమును తీసుకొన్నప్పుడు క్షేత్రము మరియు ప్రతిక్షేత్రమును బాహ్యముగా వివరించవలెను.

సంబంధము మాదిరి ఉదాహరణ 1.1 లో తెలిపిన విధముగా క్షేత్రము $\{ L, E, T ,U, S, W, I, N \}$ మరియు ప్రతిక్షేత్రము $\{ O, H, W, X , V , Z, L, Q \}$ ను కలిగిన ప్రమేయమగును. మాదిరి ఉదాహరణము 1.3లో తెలిపిన సంబంధము $\{a, b, ..., z\}$ అను క్షేత్రము మరియు $\{1, 2, 3, ..., 26\}$ ప్రతిక్షేత్రముగా గల ప్రమేయమగును.

మాదిరి ఉదాహరణము 1.2 నందు

(i) $y = 2x$ (ii) $y = x^2$ (iii) $y^2 = x$

అను మూడు సంబంధములను మనము చర్చించితిమి. (i) మరియు (ii) ప్రమేయములు మరియు (iii) ప్రమేయము కాదని స్పష్టముగా తెలియుచున్నది ($\mathbb{R}$ నందు క్షేత్రము, ప్రతిక్షేత్రము ఉన్నప్పుడు) (iii) నందు x యొక్క ఒక విలువకు y నందు రెండు విలువలు, ప్రమేయము యొక్క నిర్వచనమునకు విరుద్ధమగును. కాని రెండు సంబంధములుగా విభజించినప్పుడు అనగా $y = \sqrt{x}$ మరియు $y = -\sqrt{x}$ లకు ధనవాస్తవ సంఖ్యలు కలిగిన ఒకేవిధమైన క్షేత్రము $[0, \infty)$ ప్రతిక్షేత్రము $(-\infty, 0]$ లలో రెండు ప్రమేయములగును.

1.6.1 వేర్వేరు పద్ధతులలో ప్రమేయములను సూచించుట (ways of representing functions)

(a) ప్రమేయమును పట్టిక పద్ధతిలో సూచించుట (Tabular form)

క్షేత్రము నందు గల మూలకములను $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ గా వర్గీకరించినప్పుడు, పట్టిక పద్ధతిని మనము ఉపయోగించెదము. $x_1, x_2, ..., x_n$ అను ఆర్గ్యుమెంట్ల యొక్క విలువలు మరియు వాటికి అనుగుణమైన ప్రమేయ విలువలు $y_1, y_2, ..., y_n$ లను నియమితక్రమములో వ్రాయబడెను.

x	x_1	x_2	...	x_n
y	y_1	y_2	...	y_n

(b) ప్రమేయమును రేఖాచిత్రము ద్వారా సూచించుట (Graphical representation)

క్షేత్రము మరియు ప్రతిక్షేత్రము $\mathbb{R}$ యొక్క ఉపసమితులైనప్పుడు, (x,y) తలము నందు x అక్షము క్షేత్రమును, y అక్షము ప్రతిక్షేత్రమును సూచించు విధముగా చాలా ప్రమేయములను రేఖాచిత్రమునుపయోగించి

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 26 24-01-2023 16:19:12

సూచించగలము. మాదిరి ఉదాహరణము 1.2 నందు గల మొదటి పటము $f(x) = 2x,$ మరియు రెండవ పటము $f(x) = x^2$ అను ప్రమేయములను సూచించుచున్నవని మనము గమనించెదము. సాధారణముగా చరరాశి x ను స్వతంత్ర చరరాశిగాను, y ని ఆధార చరరాశిగాను పరిగణించబడును. చరరాశి x ని కోణాంకము (ఆర్గ్యుమెంట్) అని పిలువబడును. దీనిని $f(x)$ గా సూచించెదము.

(c) వైశ్లేషికముగా ప్రమేయమును సూచించుట (Analytical representation)

f వైశ్లేషిక సమాసమును సూచించునప్పుడు, సంబంధ ప్రమేయము $y = f(x)$ ని x యొక్క ప్రమేయము y గా సూచించగలము లేక వైశ్లేషికముగా నిర్వచించగలము. వైశ్లేషిక సమాసములకు ఉదాహరణములు.

$$x^3 + 5, \frac{sinx + cosx}{x^2+1}, \; logx + 5\sqrt{x}$$

గణిత పరిక్రియలను సూచించు శ్రేణి చిహ్నములు, సంఖ్యలశ్రేణి యొక్క ఖచ్చితత్వమును, అక్షరాలలో స్థిర మరియు చర అక్షరాలను నిర్ణయించును.

వైశ్లేషికముగా నిర్వచించబడిన ప్రమేయముల ఉదాహరణములు

(i) $y = \frac{x-1}{x+1}$ (ii) $y = \sqrt{9 - x^2}$ (iii) $y = sinx + cosx$ (iv) $A = \pi r^2$

ప్రమేయములను వైశ్లేషికముగా వ్రాయుట వలన ప్రయోజనామేమనగా, సహజముగా క్షేత్రమును కనుగొనుట. అనగా వైశ్లేషిక సమాసములో కుడివైపుఉన్న ఖచ్చితమైన విలువలు x యొక్క విలువలు గాను, ప్రమేయ నిర్వచనము నకు వైశ్లేషికముగా నిర్వచించబడిన ప్రమేయము యొక్క సహజ క్షేత్రమగును. కావున ప్రమేయము యొక్క సహజక్షేత్రమగును కావున ప్రమేయము యొక్క సహజక్షేత్రము

(i) $y = x^3 + 3, \; (-\infty, \infty)$ నందు (ii) $y = x^4 - 2, \; (-\infty, \infty)$ నందు

(iii) $y = \frac{x-1}{x+1}, \; \mathbb{R} - \{-1\}$ నందు (iv) $y = \sqrt{4 - x^2}, -2 \le x \le 2$ నందు

ప్రమేయముల క్షేత్రమును జ్ఞప్తి తెచ్చుకొనెదము

(i) $y=2x$ (ii) $y = x^2$

(iii) $y = +\sqrt{x}$ (iv) $y = -\sqrt{x}$

అనునవి ఇదివరకు నిర్వచించిన విధముగా సహజవైశ్లేషికత కలిగినవి.

కొన్ని సందర్భములలో ప్రమేయ నిర్వచనము అనేక విభాగములుగా తెలుపబడును. ఉదాహరణకు క్రింది ప్రమేయమును తీసుకొనుము. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ను

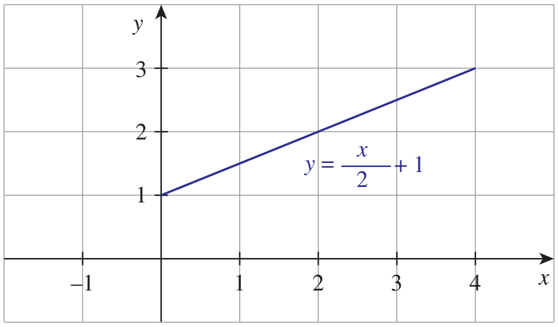
$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad -\infty < x \le -2 \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \\ 2x & ; \quad -2 < x \le 3 \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \\ x^2 & ; \quad 3 < x < \infty \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \end{cases}$$

అని నిర్వచించబడెను. x యొక్క విలువకు అనుగునంగా మనము f యొక్క విలువను కనుగొనుటకు సూత్రమును ఎంపిక చేసుకొనవలెను. వాస్తవ సంఖ్యయొక్క f విలువను కనుగొనుటకు మొదటగా మనము x యొక్క తరగతిని ఎంపిక చేసుకొని తర్వాత సూత్రమునుపయోగించి f యొక్క విలువను x బిందువునకు కనుగొనగలము . $f(6)$ యొక్క విలువను కనుగొనుటకు $3 \le 6 < \infty$ (లేక $6 \in [3, \infty)$) కావున $f(x) = x^2$

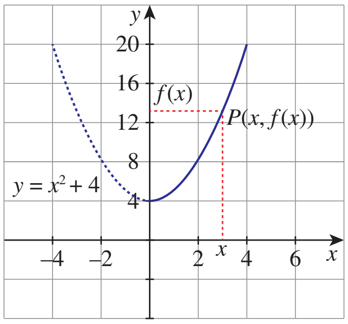
11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 27 24-01-2023 16:19:15

అను సూత్రమును ఉపయోగించెదము. $f(6)=36$ అని కనిపెట్టగలము. అదేవిధముగా $f(-1)=-2$, $f(-5) = 0$ దీని ప్రకారము ఏ విలువకైనా f ని కనుకొనగలము.

ఒక ప్రమేయమును $\mathbb{R}$ నుండి లేక $\mathbb{R}$ యొక్క ఉపసమితిగా నిర్వచించినప్పుడు ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రమును మనము గీయగలము. ఉదాహరణకు $f\colon [0, 4] \to \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{x}{2}+1$అయిన $\left(x, \frac{x}{2}+1\right)$ బిందువులను మనము గుర్తించగలము, $x \in [0,4]$ $(0,1)$ మరియు $(4,3)$ బిందువులను కలుపు సరళరేఖాఖండము లభించును. (పటము 1.13)



పటము 1.13



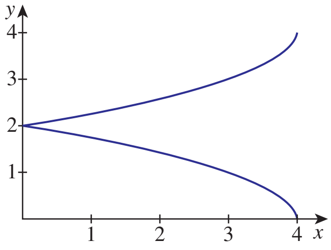
పటము 1.14

మరొక ప్రమేయము $f(x) = x^2 + 4, x \geq 0$ ని తీసుకొందుము. ప్రమేయము రేఖాచిత్రరూపములో ఇవ్వబడినది. (పటము 1.14 ని చూడుము) క్షేత్రములోని ఒక బిందువును x గా తీసుకొనుము. x ద్వారా నిలువు రేఖను గీయుము. అది వక్రరేఖ నందు P వద్ద కలియును. P గుండా గీయు క్షితిజసమాంతర రేఖ y అక్షమును కలియు బిందువు $f(x)$ అగును. అదేవిధముగా ప్రతిక్షేత్రము నందు గల బిందువు y గుండా గీయు క్షితిజ సమాంతరరేఖలకు y యొక్క పూర్వబింబములను కనుగొనగలము.

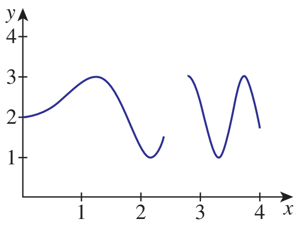
తలము నందు గీయబడు ఏదైన వక్రరేఖను $\mathbb{R}$ యొక్క ఉపసమితి నుండి $\mathbb{R}$ నకు ప్రమేయముగా తీసుకొనగలమా? దీనిని కనిపెట్టుటకు ఒక చిన్న పరీక్ష.

నిలువు రేఖ పరీక్ష (Vertical line test)

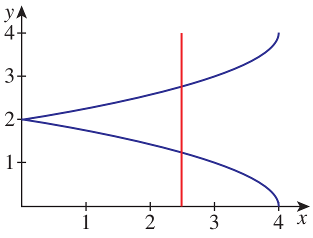
మనము ఇదివరకు గమనించిన విధముగా, క్షేత్రమునందు గల ఏదైన బిందువు x గుండా గీయు నిలువురేఖ, వక్రరేఖను ఏదైన బిందువు వద్ద కలియునప్పుడు బిందువు యొక్క y నిరూపకము $f(x)$ అగును. క్షేత్రము నందు గల ఏదైన బిందువు గుండా గీయు నిలువురేఖ, వక్రరేఖను ఒకటి కంటె ఎక్కువ చోట్లలో కలియును, x యొక్క ఒక విలువకు ఒకటికంటె ఎక్కువ విలువ $f(x)$ నకు లభించును. ఒక ప్రమేయములో ఇది జరుగదు. మరియు క్షేత్రము నందు గల ఒక బిందువు x గుండా గీయు నిలువురేఖ వక్రరేఖను కలవదు, అప్పుడు x కి బింబము ఉండును. ఇది ప్రమేయముతో సాధ్యము కాదు. అందువలన క్షేత్రము నందు గల ఏదైన బిందువు x గుండా గీయు నిలువు రేఖ, వక్రరేఖను ఒకటి కంటె ఎక్కువ బిందువులు వద్ద కలియును లేక వక్రరేఖను కలవదు, అప్పుడు వక్రరేఖ ప్రమేయమును చూపదు.



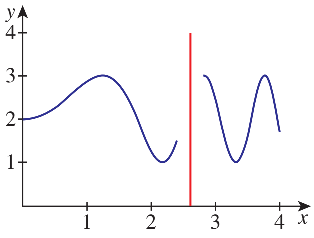
పటము 1.15



పటము 1.16



పటము 1.17



పటము 1.18

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 28

24-01-2023 16:19:17

పటము 1.15 లో చూపిన విధముగా వక్రరేఖ [0, 4] నుండి ℝ నకు ప్రమేయమును చూపదు ఎందుకనగా నిలువురేఖ ఒకటికంటె ఎక్కువ బిందువుల వద్ద కలియును. (పటము 1.17ను చూడుము) పటము 1.16 లో చూపిన విధముగా వక్రరేఖ [0, 4] నుండి ℝ నకు ప్రమేయమును చూపదు ఎందుకనగా [0, 4] నందు గల $x = 2.5$ గుండా గీయు నిలువురేఖ, వక్రరేఖను కలవదు. (పటము 1.18 ని చూడుము)

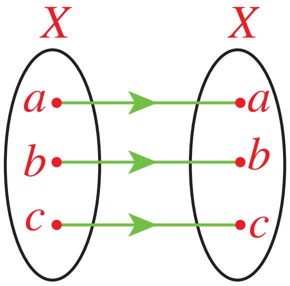
ఇవ్వబడిన వక్రరేఖ, ప్రమేయమును చూపునా లేదా అని నిలువురేఖలను గీయుటను నిలువురేఖపరీక్ష లేదా నిలువు పరీక్ష అని సులభముగా చెప్పగలము.

మాదిరి ఉదాహరణ 1.2 నందు గల వక్రరేఖ $y^2 = x$ అనునది నిలువురేఖ పరీక్షను తృప్తిపరచలేదు మరియు ఇది ℝ నుండి ℝ నకు ప్రమేయము కాదు.

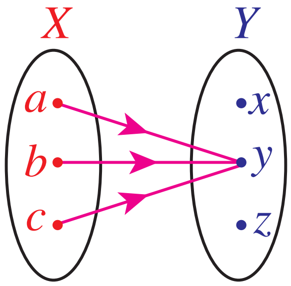
1.6.2 కొన్ని ప్రాథమిక ప్రమేయములు (Some elementary functions)

ఎక్కువగా ఉపయోగించు కొన్ని ప్రమేయములను వాటి పేర్ల ద్వారా తెలుసుకొనగలము. కొన్నింటిని వర్గీకరించెదము.

(i) X అనునది ఏదైన శూన్యేతర సమితి అని తీసుకొందుము. $f: X \to X$ అను ప్రమేయము $f(x) = x$ ప్రతి $x \in X$ కు నిర్వచించిన అది X మీద తత్సమ ప్రమేయమగును. (పటము 1.19ని చూడుము) దీనిని I_X లేక I గా సూచించెదము)



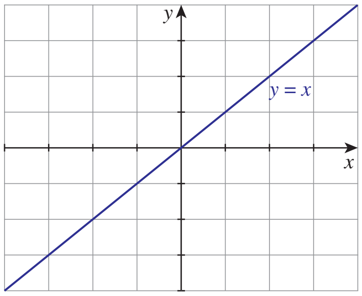
పటము 1.19



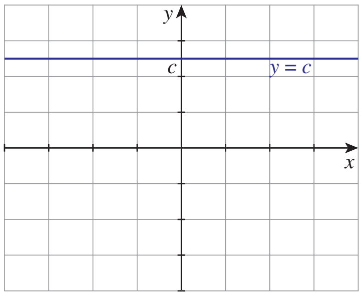
పటము 1.20

(ii) X మరియు Y అనునవి రెండు సమితులు. c అనునది Y మీద గల స్థిర మూలకము ప్రతి $x \in X$ నకు $f(x) = c$ అయిన $f: X \to Y$ అను ప్రమేయము స్థిరప్రమేయమగును. (పటము 1.20 ని చూడుము)

క్షేత్రము నందు గల అన్ని విలువలకు స్థిరప్రమేయ విలువ సమానము. X మరియు Y అనునవి R నందు ఉన్నప్పుడు తత్సమ ప్రమేయము మరియు స్థిర ప్రమేయముల రేఖాచిత్రములు పటము 1.21 మరియు పటము 1.22 లో ఉన్న విధముగా ఉండును. X అనునది ఏదైన సమితి, x యొక్క అన్ని విలువలకు $f(x) = 0$ అయిన అది శూన్యప్రమేయమగును. అందువలన శూన్య ప్రమేయము అనునది స్థిరప్రమేయము యొక్క ప్రత్యేక రకము.



పటము 1.21



పటము 1.22

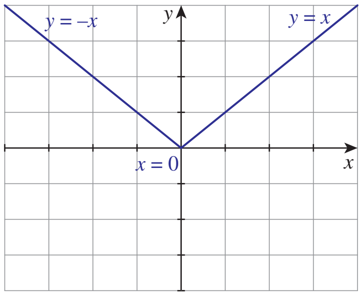
11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 29 24-01-2023 16:19:18

(iii) ప్రమేయము $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ని $f(x) = |x|$,$|x|$ అనునది మాప లేక x యొక్క నిరపేక్ష విలువ గా నిర్వచించినప్పుడు f అనునది మాప ప్రమేయము లేక నిరపేక్ష విలువనకు ప్రమేయమగును. (పటము 1.23 ని చూడుము)

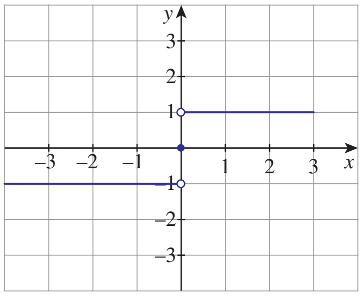
$|x|$ ని నిర్వచంచి మనన చేసుకొందుము.

$$|x| = \begin{cases} -x & ; \; x < 0 \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \\ 0 & ; \; x = 0 \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \\ x & ; \; x > 0 \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \end{cases}$$

లేక $|x| = \begin{cases} -x & ; \; x \le 0 \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \\ x & ; \; x > 0 \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \end{cases}$ లేక $|x| = \begin{cases} -x & ; \; x < 0 \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \\ x & ; \; x \ge 0 \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \end{cases}$



పటము 1.23



పటము 1.24

(iv) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ నకు

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|} & ; \; x \neq 0 \\ 0 & ; \; x = 0 \end{cases}$$ గా ఉండునట్లు $f(x)$,నిర్వచించబడిన అది సిగ్నమ్ ప్రమేయమగును.

ఈ ప్రమేయమును *sgn* గా సూచించబడును. (పటము 1.24 చూడుము)

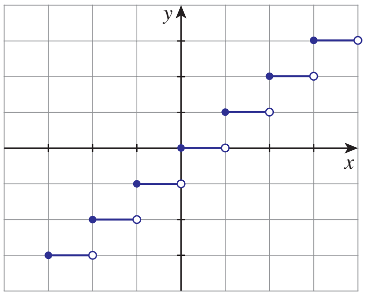
(v) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ నకు $f(x)$ ని x కి సమానమైన లేక కనిష్ఠపూర్ణసంఖ్యగా నిర్వచించినప్పుడు x అనునది వ్యవకలన భాగ ప్రమేయము లేక గరిష్ఠ పూర్ణసంఖ్య ప్రమేయము లేక అంతస్తు ప్రమేయమగును. ఈ ప్రమేయమును $\lfloor x \rfloor$ గా సూచించెదము. (పటము 1.25 ని చూడుము)

(vi) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ నకు $f(x)$ కి సమానమైన లేక కనిష్ఠపూర్ణసంఖ్యగా నిర్వచించినప్పుడు అది కనిష్ఠ పూర్ణసంఖ్య ప్రమేయమగును లేక సీల్ ప్రమేయము అగును. (పటము 1.26 ని చూడుము) ఈ ప్రమేయమును $\lceil . \rceil$ గా సూచించెదము. అనగా $f(x)$ ని $\lfloor x \rfloor$గా సూచించెదము (v) మరియు (vi) ప్రమేయములను ఘట్ట ప్రమేయములందురు.

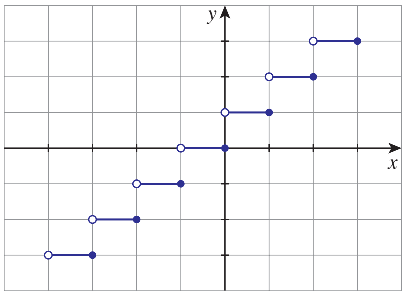
$\left\lfloor 1\frac{1}{5} \right\rfloor = 1$, $\lfloor 7.23 \rfloor = 7$, $\left\lfloor -2\frac{1}{2} \right\rfloor = -3$ (–2 కాదు), $\lfloor 6 \rfloor = 6$ మరియు $\lfloor -4 \rfloor = -4$ అని గమనించగలము.

$\left\lceil 1\frac{1}{5} \right\rceil = 2$, $\lceil 7.23 \rceil = 8$, $\left\lceil -2\frac{1}{2} \right\rceil = -2$ (–3 కాదు), $\lceil 6 \rceil = 6$ మరియు $\lceil -4 \rceil = -4$ అని గమనించగలము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 30 24-01-2023 16:19:21



పటము 1.25

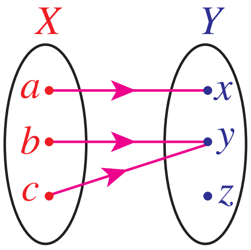


పటము 1.26

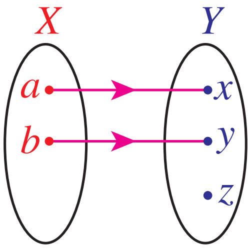
ప్రమేయముల పేర్లమధ్య సంబంధమును గమనించినప్పుడు ప్రమేయములను సూచించు చిహ్నములను సాధారణముగా పైకప్పు మరియు భూభాగమును పదములతో సూచించెదము. వాటి రేఖాచిత్రములు 1.25 మరియు 1.26 లో ఇవ్వబడినవి.

1.6.3 ప్రమేయముల రకములు (Types of functions)

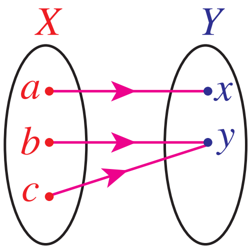
అవసరాలకనుగుణంగా ప్రమేయములను అనేక తరగతులుగా వర్గీకరించినను మనము రెండు ప్రాథమిక రకములకు మాత్రము ప్రాధాన్యతనిచ్చెదము. ఏక-ఏక ప్రమేయము మరియు ద్విగుణ ప్రమేయము.



పటము 1.27



పటము 1.28



పటము 1.29

పటము 1.27 మరియు పటము 1.28లలో ఇవ్వబడిన రెండు సాధారణ ప్రమేయములను గమనించుము. మొదటి ప్రమేయములో క్షేత్రము యొక్క మూలకములైన b,c అనునవి y అను ఒకే మూలకమునకు సంబంధపరచబడెను. కాని పటము 1.28 లో అట్లులేదు. రెండవదానిలో ఉన్నవిధముగా ప్రమేయము ఏక-ఏక ప్రమేయమునకు ఉదాహరణములు. పటము 1.28 మరియు 1.29 లో ఇవ్వబడిన రెండు ప్రమేయములను గమనించుము.

పటము 1.28లో ప్రతిక్షేత్రము నందు గల z అను మూలకమునకు పూర్వబింబములేదు కాని పటము 1.29 విషయములో ఇలా లేదు. పటము 1.29లో ఉన్నవి ద్విగుణ ప్రమేయములకు ఉదాహరణములు. ఇప్పుడు మనము ఏక-ఏక ప్రమేయము మరియు ద్విగుణప్రమేయములను నిర్వచించెదము.

నిర్వచనము 1.7

$f: A \to B$ నందు $x,y \in A, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ లేక $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$] అయినప్పుడు f అనునది ఏక-ఏక ప్రమేయమగును. ప్రతి $b \in B$ నకు కనీసము ఒక మూలకము $a \in A$ నకు $f(a) = b$ అయిన అది ద్విగుణమగును. అనగా f యొక్క వ్యాప్తిది B అగును.

ఏక-ఏక ప్రమేయమునకు మరొకపేరు అన్వేక ప్రమేయము ద్విగుణ ప్రమేయమునకు మరొకపేరు ఏక-ఏక మరియు సంగ్రస్త ప్రమేయము అగును. $f: A \to B$ అను ప్రమేయము ఏక-ఏక మరియు

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 31 24-01-2023 16:19:22

ద్విగుణమైనప్పుడు అది అగును. $f: A \rightarrow B$ అను ప్రమేయము ఏక-ఏక ప్రమేయమని చూపుటకు క్రిందివాటిలో ఏదైన ఒకదానిని నిరూపించిన చాలును. $x \neq y$ అయినప్పుడు, $f(x) \neq f(y)$ లేక $x = y$ అయినప్పుడు $f(x) = f(y)$

ప్రతి తత్సమ ప్రమేయము ఏక-ఏక ప్రమేయము మరియు ద్విగుణమని మనము సులభముగా గ్రహించగలము. ఒక స్థిరప్రమేయము ద్విగుణ ప్రమేయము కాదు, ప్రతిక్షేత్రము ఒకే ఒక మూలకమును కలిగియుండుటను మినహాయించి క్రింది ప్రవచనాలు కొన్ని ముఖ్యమైన సాధారణ ఫలితములను కలిగియుండును.

క్రింది ప్రవచనాలు కొన్ని ముఖ్యమైన సాధారణ ఫలితములను కలిగి యుండును.

A మరియు B అనునవి m మరియు n మూలకములు కలిగిన రెండు సమితులు అయిన

(i) $m > n$ అయినప్పుడు A నుండి B కి ఏక-ఏక ప్రమేయము లేదు.

(ii) A నుండి B కి ఏక-ఏక ప్రమేయమున్నప్పుడు $m \leq n$ అగును.

(iii) $m < n$ అయినప్పుడు A నుండి B కి ద్విగుణ ప్రమేయము లేదు.

(iv) A నుండి B కి ద్విగుణప్రమేయమున్నప్పుడు $m \geq n$ అగును.

(v) A నుండి B కి ద్విగుణము $m = n$ అయితే అయినప్పుడు మాత్రమే

(vi) A నుండి B కి ద్విగుణము కాదు $m \neq n$ అయితే అయినప్పుడు మాత్రమే.

ద్విగుణము కాని ఒక ప్రమేయము

అనగా ఒక ప్రమేయము యొక్క వ్యాప్తి ప్రతిక్షేత్రము యొక్క శుద్ధ ఉపసమితి అగును. కొన్ని మాదిరి ఉదాహరణములను చూసెదము.

(i) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c, d, e\}$ మరియు $f = \{(1, a), (2, c), (3, e), (4, b)\}$.

ఈ ప్రమేయము ఏక-ఏక ప్రమేయము కాని ద్విగుణము కాదు.

(ii) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b\}$ మరియు $f = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)\}$.

ఇది ఏక-ఏక ప్రమేయము కాదు. ద్విగుణ ప్రమేయము కాదు.

(iii) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a\}$ మరియు $f = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)\}$.

ఇది ఏక-ఏక ప్రమేయము కాదు కాని ఇది ద్విగుణ ప్రమేయమగును. దీనిని చూసినప్పుడు ఇంతకు ముందు ఇవ్వబడిన ప్రమేయము మాదిరిగా ఉన్నది. ఒక ప్రమేయము ద్విగుణము అవునా? కాదా? అని నిర్ణయించుటకు దాని ప్రతిక్షేత్రము చాలా ముఖ్యము.

(iv) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c, d, e\}$ మరియు $f = \{(1, a), (2, c), (3, b), (4, b)\}$.

ఈ ప్రమేయము ఏక - ఏక ప్రమేయము కాదు మరియు ద్విగుణ ప్రమేయము కాదు.

(v) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ మరియు $f = \{(1, a), (2, c), (3, d), (4, b)\}$

ఈ ప్రమేయము ఏక - ఏక మరియు ద్విగుణ ప్రమేయమగును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 32 24-01-2023 16:19:24

(vi) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c, d, e\}$ మరియు $f = \{(1, a), (2, c), (3, e)\}$

ఇది ప్రమేయమే కాదు, సంబంధము మాత్రమే.

(vii) X అనునది k మూలకములతో కూడిన పరిమిత సమితి అగును. తర్వాత X నుండి $\{1,2,3,...,k\}$ నకు ద్విగుణము సంక్రమించును.

కొన్ని పరిచయమైన సమితులకు నియమము ద్వారా ప్రమేయములను నిర్వచించుటను తీసుకొందుము.

ఉదాహరణ 1.14 క్రింది ప్రమేయములు ఏక–ఏక మరియు ద్విగుణ ప్రమేయములగునా? అని సరిచూడుము.

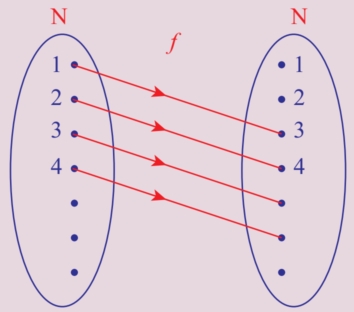
(i) $f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ని $f(n) = n + 2$ గా నిర్వచించబడెను.

(ii) $f:\mathbb{N} \cup \{-1, 0\} \to \mathbb{N}$ ని $f(n) = n + 2$ గా నిర్వచించబడెను.

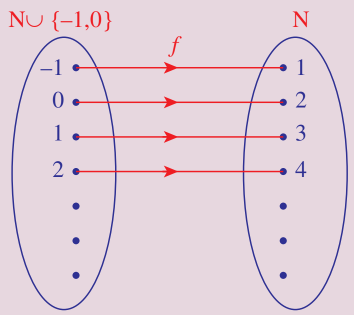
సాధన

(i) $f(n) = f(m)$ అయినప్పుడు $n + 2 = m + 2$ మరియు $m = n$ కావున f ఒక ఏక–ఏక ప్రమేయమగును. 1కి పూర్వబింబము లేనందున, ఇది ద్విగుణ ప్రమేయము కాదు. (పటము 1.30 ని చూడుము)

(ii) పైన ఉన్నవిధముగా ఇది ఏక–ఏక ప్రమేయము. m ప్రతిక్షేత్రములో ఉన్నందున $m-2$ క్షేత్రములో ఉన్నది మరియు $f(m-2) = (m-2) + 2 = m$ కావున m పూర్వబింబము కలదు మరియు ఇది ద్విగుణ ప్రమేయమగును. (పటము 1.31 ని చూడుము)



పటము 1.30



పటము 1.31

రెండవ ప్రమేయము (ii) అనునది ఒకటవ ప్రమేయము (i) మాదిరిగా కనిపించుచున్నది. కాని వాటి క్షేత్రములు వేర్వేరుగా ఉన్నవి. ఒక ప్రమేయము ద్విగుణము అవునా? కాదా? అని నిర్ణయించుటలో క్షేత్రము ముఖ్యత్వమును వహించుచున్నది. ఒక ప్రమేయము ఏక–ఏక ప్రమేయము అవునా?కాదా? అని తెలుపుటకు ప్రతిక్షేత్రము యొక్క పాత్ర అవసరము లేదు. కాని ఒక ప్రమేయము ద్విగుణము అవునా కాదా అని నిర్ణయించుటకు ఇది అవసరము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 33 24-01-2023 16:19:26

ఉదాహరణ 1.15 క్రింది ప్రమేయములు ఏక-ఏకత్వము మరియు ద్విగుణత్వము అవునా?కాదా? అని నిర్ణయించుము.

(i) $f:\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $f(n) = n^2$ గా నిర్ణయించబడెను

(ii) $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(n) = n^2$ గా నిర్ణయించబడెను

సాధన

(i) $m, n \in \mathbb{N}$ అయినందున $f(m) = f(n) \Rightarrow m^2 = n^2 \Rightarrow m = n$ కావున f అనునది ఏక-ఏక ప్రమేయమగును. ప్రతిక్షేత్రము నందు మూలకములు వర్గసంఖ్యలు కానందున వాటికి పూర్వబింబములు లేవు మరియు అవి ద్విగుణ ప్రమేయములు కావు.

(ii) క్షేత్రము నందు గల వేర్వేరు మూలకములకు ఒకే విధమైన ప్రతిబింబములు కలవు కావున f అనునది ఏక-ఏక ప్రమేయము కాదు. స్పష్టముగా f యొక్క వ్యాప్తి R యొక్క శుద్ధ ఉపసమితి అగును. కావున ఇది ద్విగుణప్రమేయము కాదు.

మాదిరి ఉదాహరణము 1.1 ని మనము గుర్తుతెచ్చుకొందుము. ఈ మాదిరి ఉదాహరణలో ప్రమేయము $f:C \to D$ ని $f(L) = O, f(E) = H, f(T) = W, f(U) = X, f(S) = V, f(W) = Z, f(I) = L, f(N) = Q$ గా నిర్వచించబడెను. ఇక్కడ $C = \{L, E, T, U, S, W, I, N\}$ మరియు $D = \{O, H, W, X, V, Z, L, Q\}$ అనునది ఏక-ఏక మరియు ద్విగుణప్రమేయమగును.

మాదిరి ఉదాహరణము 1.3 నందు ప్రమేయము $f:A \to \mathbb{N}$ ని $f(a) = 1, f(b) = 2, f(c) = 3, \ldots f(z) = 26$ గా నిర్వచించబడెను. ఇక్కడ $A = \{a, b, \ldots . z\}$ ఈ ప్రమేయము ఏక-ఏక ప్రమేయమగును. $\mathbb{N}$ ని ప్రతిక్షేత్రముగా తీసుకొనిన ఈ ప్రమేయము ద్విగుణ ప్రమేయము కాదు. $\mathbb{N}$ కు బదులు $\{1, 2, 3, \ldots, 26\}$ ని ప్రతిక్షేత్రముగా తీసుకొనిన అది ద్విగుణమగును.

ఉదాహరణ 1.16 క్రింద ఇవ్వబడినవి ఏక-ఏకత్వము మరియు ద్విగుణత్వమగునా? అని సరిచూడుము.

(i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ని, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ గా నిర్వచించబడెను.

(ii) $f:\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ ని $f(x) = \dfrac{1}{x}$ గా నిర్వచించబడెను.

సాధన

(i) ఇది ప్రమేయము కాదు, ఎందుకనగా $x = 0$ నకు $f(x)$ నిర్వచించబడలేదు.

(ii) ఇది ఏక-ఏక ప్రమేయమగును (సరిచూడుము) కాని ద్విగుణము కాదు ఎందుకనగా $x = 0$ కు పూర్వప్రతిబింబము లేదు.

రెండవ దానికి $\mathbb{R}-\{0\}$ ని ప్రతిక్షేత్రముగా తీసుకొనిన, f అనునది

ఉదాహరణ 1.17 $f: \mathrm{R} - \{-1, 1\} \to \mathrm{R}$ $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ గా నిర్వచించబడినప్పుడు f అనునది ఏక-ఏక ప్రమేయమగునా? కాదా? అని సరిచూడుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 34 24-01-2023 16:19:28

సాధన

$f(x) = f(y)$ అని తీసుకొని ప్రారంభించెదము.

$$\frac{x}{x^2-1} = \frac{y}{y^2-1}$$

$$\Rightarrow \quad x(y^2-1) = y(x^2-1)$$

$$\Rightarrow \quad xy^2 - x - yx^2 + y = 0$$

$$\Rightarrow \quad (y-x)(xy+1) = 0$$

$x = y$ లేక $xy = -1$ అని చూపుచున్నది. $xy = -1$ గా ఉండునట్లు x, y ని ఎంపిక చేసినప్పుడు $f(x) = f(y)$ $\left(2, -\frac{1}{2}\right), \left(7, -\frac{1}{7}\right), \left(-2, \frac{1}{2}\right)$ అనునవి అపరిమిత అనేక సాధ్యమయిన జతలు, కావున $f(2) = f\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{2}{3}$ అనగా $f(x) = f(y)$ అనునది $x = y$ అని చూపదు. కావున ఇది ఏక-ఏక ప్రమేయము కాదు.

ఉదాహరణ 1.18 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ని $f(x) = 2x^2 - 1$ గా నిర్వచించబడిన $17, 4, -2$ యొక్క పూర్వబింబమును కనుగొనుము.

సాధన

17 యొక్క పూర్వబింబమును కనుగొనుటకు $2x^2 - 1 = 17$ అను సమీకరణమును సాధించవలెను. ఈ సమీకరణము యొక్క రెండు సాధనలు 3 మరియు −3 అనునవి f నందు 17 యొక్క పూర్వబింబములగును. $2x^2 - 1 = 4$ అనునది $\sqrt{\frac{5}{2}}$ మరియు $-\sqrt{\frac{5}{2}}$ అను సాధనలతో 4 యొక్క పూర్వబింబములగును . -2 పూర్వబింబములను కనుగొనుటకు $2x^2 - 1 = -2$ ని సాధించవలెను. $x^2 = -\frac{1}{2}$ అని చూపించుచున్నది. $\mathbb{R}$ నందు దీనికి సాధనలేదు. ఎందుకనగా వర్గసంఖ్య ఋణాత్మకముగా ఉండుటకు వీలులేదు మరియు -2 నకు f నందు పూర్వబింబము లేదు.

ఉదాహరణ 1.19 $f: [-2, 2] \to B$ నకు $f(x) = 2x^3$ గా ఇవ్వబడిన, B ని f ద్విగుణమైనప్పుడు కనుగొనుము.

సాధన

కనిష్ట విలువ $f(-2)$ మరియు గరిష్ఠ విలువ $f(2)$ అవి క్రమముగా −16 మరియు 16 అగును. కావున B అనునది $B = [-16, 16]$ అగును.

$f(x) = 2x^3$ అనునది $[-2, 2]$ నందు ఆరోహణ ప్రమేయమైన కనిష్ఠ విలువను ఎడమవైపు మరియు గరిష్ఠ విలువను కుడివైపున పొందగలము. (ఆరోహణ/ అవరోహణ ప్రమేయములను గురించి ఎక్కువ తెలుసుకొనుటకు తర్వాతి అధ్యాయములను పరిశీలించవలెను)

ఉదాహరణ 1.20 $[-2, 2]$ నందు $f(x) = x|x|$ గా నిర్వచించబడిన ప్రమేయము ఏక-ఏక ప్రమేయము అగునా? కాదా? తెలుపుము. ఒకవేళ ఇది ఏక-ఏక ప్రమేయమైన, ప్రమేయము ద్విగుణము అగుటకు అనువైన ప్రతిక్షేత్రమును కనుగొనుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 35 24-01-2023 16:19:33

సాధన

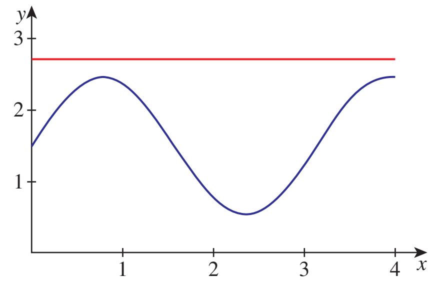
$x, y \in [-2, 2]$ గా ఉండునట్లు $f(x) = f(y)$ ని తీసుకొనుము. $y = 0$ అయిన $x = 0$ అగును. కావున $y \neq 0$ అని తీసుకొనుము. $x \neq 0$ అగును. ఇప్పుడు $x|x| = y|y|$ ఎందుకనగా $f(x) = f(y)$ దీని నుండి $\frac{x}{y} = \frac{|y|}{|x|}$ కావున $\frac{|y|}{|x|} > 0$ $\frac{x}{y} > 0$కావున x మరియు y లు రెండును ధనాత్మకము లేక రెండును ఋణాత్మకమగును. కావున $x^2 = y^2$

కావున $f(x) = f(y)$ అయిన ఖచ్చితముగా $x^2 = y^2$ అగును x మరియు y లు రెండును ఋణాత్మకము లేక రెండును ధనాత్మకము అగును. ఇది $x = y$ గా ఉన్నప్పుడు మాత్రమే సాధ్యమగును. కావున f అనునది ఏక-ఏక ప్రమేయము. $x < 0$ గా ఉన్నప్పుడు, $f(x) = -x^2$ మరియు $x \geq 0$ గా ఉన్నప్పుడు $f(x) = x^2$ కావున వ్యాప్తి $[-4, 4]$ అగును. కావున f అనునది $[-2, 2]$ నుండి $[-4, 4]$ నకు ద్విగుణమగును.

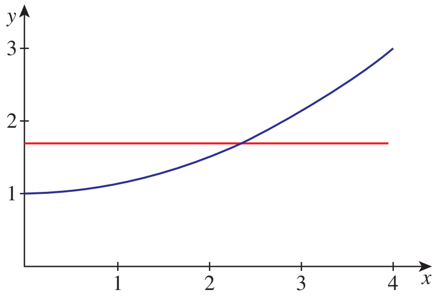
$f(x) = x|x|$ అనునది ఆరోహణ ప్రమేయము

క్షితిజరేఖ పరీక్ష (Horizontal test)

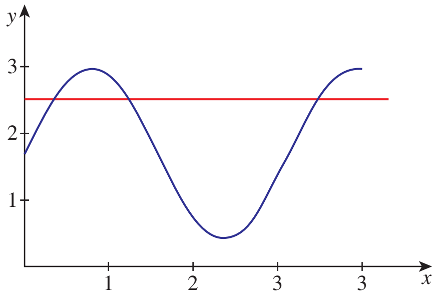
నిలువురేఖ పరీక్ష మాదిరిగా ఒక ప్రమేయము ఏక- ఏక ప్రమేయము, ద్విగుణము అవునా కాదా అని తెలుసుకొనుటకు క్షితిజరేఖ పరీక్ష అను పరీక్ష కలదు. ఒక ప్రమేయమును తలములోని వక్రరేఖ రూపములో ఇవ్వబడెను. ప్రతిక్షేత్రములోని y అను బిందువుగుండా క్షితిజరేఖను గీసినప్పుడు అది వక్రరేఖను కొన్ని బిందువుల వద్ద ఖండిచును, అప్పుడు x అక్షము మీద అన్ని బిందువులు y యొక్క పూర్వబింబములను ఇచ్చును.



పటము 1.32



పటము 1.33



పటము 1.34

(i) ప్రతిక్షేత్రము నందు గల బిందువు y గుండా వెళ్ళు క్షితిజరేఖ, వక్రరేఖను కలవదు, మరియు y కి పూర్వబింబము లేదు అందువలన ప్రమేయము ద్విగుణము కాదు.

(ii) ప్రతిక్షేత్రము నందు గల కనీసము ఒక బిందువు గుండా వెళ్ళు క్షితిజరేఖ ఒకటి కంటె ఎక్కువ స్థానములలో వక్రరేఖను కలిసిన ఆ ప్రమేయము ఏక-ఏక ప్రమేయము కాదు.

(iii) వ్యాప్తి నందు గల అన్ని y బిందువులకు y గుండా వెళ్ళు క్షితిజరేఖ ఒకే ఒక బిందువు వద్ద కలియును, అప్పుడు అది ఏక ఏక ప్రమేయమగును.

ప్రమేయమును గుర్తించే వక్రరేఖ ఏక- ఏక ప్రమేయమని చెప్పగలము. అయితే అయినప్పుడు మాత్రమే వ్యాప్తి యొక్క అన్ని y విలువలకు y గుండా వెళ్ళు క్షితిజరేఖ వక్రరేఖను ఖచ్చితముగా ఒకే ఒక బిందువు వద్ద కలియును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 36 24-01-2023 16:19:36

ప్రమేయమును గుర్తించే వక్రరేఖ ద్విగుణమగును. ప్రతిక్షేత్రము యొక్క అన్ని y విలువలకు y గుండా వెళ్ళు క్షితిజరేఖ వక్రరేఖను ఖచ్చితముగా ఒకే ఒక బిందువు వద్ద కలియును.

పటము 1.32 లో ఇవ్వబడిన వక్రరేఖ $[0, 4]$ నుండి ప్రమేయమును గుర్తించుచున్నది మరియు ప్రతిక్షేత్రము $[1, 3]$ ను కలిగియున్నప్పుడు అది ద్విగుణముకాదు. పటము 1.33 లో ఇవ్వబడిన వక్రరేఖ $[0, 4]$ నుండి $\mathbb{R}$ నకు ఏక–ఏక ప్రమేయమును గుర్తించుచున్నది మరియు పటము 1.34 లో ఇవ్వబడిన వక్రరేఖ $[0, 4]$ నుండి $\mathbb{R}$ నకు గల ప్రమేయము ఏక–ఏక ప్రమేయము కాదు. ఇవ్వబడిన వక్రరేఖ ఏక–ఏక ప్రమేయము, ద్విగుణప్రమేయము అవునా? కాదా అని పరీక్షించుటకు గీయబడు క్షితిజరేఖను క్షితిజరేఖాపరీక్ష లేక క్షితిజపరీక్ష అందురు.

మాదిరి ఉదాహరణ 1.2 మరియు పటము 1.5 నుండి పటము 1.7 వరకు గల రేఖాచిత్రములను చూసినప్పుడు

(i) $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ నకు $f(x) = 2x$ గా నిర్వచించబడిన ప్రమేయము ఏక–ఏక మరియు ద్విగుణ ప్రమేయమగును.

(ii) $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ నకు $f(x) = x^2$ గా నిర్వచించబడిన ప్రమేయము ఏక–ఏక ప్రమేయము కాదు మరియు ద్విగుణ ప్రమేయము కాదు.

(iii) $f:[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ నకు $f(x) = +\sqrt{x}$ గా నిర్వచించబడిన ప్రమేయము ఏక–ఏకము, కాని ద్విగుణ ప్రమేయముకాదు.

(iv) $f:[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ నకు $f(x) = +\sqrt{x}$ గా నిర్వచించబడిన ప్రమేయము ఏక–ఏకము మరియు ద్విగుణ ప్రమేయమగును.

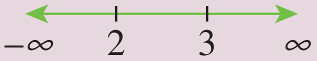
(v) $f:[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ నకు $f(x) = -\sqrt{x}$ గా నిర్వచించబడిన ప్రమేయము ఏక–ఏకము కాని ద్విగుణము కాదు.

(vi) $f:[0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0]$ నకు $f(x) = -\sqrt{x}$ గా నిర్వచించబడిన ప్రమేయము ఏక–ఏక ప్రమేయము మరియు ద్విగుణ ప్రమేయము అగును.

ఉదాహరణ 1.21 వాస్తవ విలువల ప్రమేయము f ని $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ గా నిర్వచించినప్పుడు, సాధ్యమైన గరిష్ఠక్షేత్రమును కనుగొనుము.

సాధన

$x^2 - 5x + 6$ నకు వర్గమూలమును కనుగొనిన విధముగా క్షేత్రములోని అన్ని x విలువలకు $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ అనునది ఖచ్చితముగా ఉండును. ఇందుకు ఇవ్వబడిన పద్ధతిని పాటించెదము. $x^2 - 5x + 6 = 0$ ని సాధించినప్పుడు మనకు $x = 2$ మరియు 3 లభించును. పటము 1.35 లో ఉన్నవిధముగా సంఖ్యారేఖను గీయుము.



పటము 1.35

మనకు $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$ మరియు $(3, \infty)$ అను మూడు తరగతులు కలవు.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 37 24-01-2023 16:19:40

(i) $(-\infty, 2)$ నందు ఏదైన బిందువును తీసుకొనుము, ఉదా $x = 1$ స్పష్టముగా $x^2 - 5x + 6$ అనునది ధనాత్మకము

(ii) $(2, 3)$ మధ్య ఏదైన బిందువును తీసుకొనుము, ఉదా $x = 2.5$ స్పష్టముగా $x^2 - 5x + 6$ అనునది ఋణాత్మకము.

(iii) $(3, \infty)$ మధ్య ఏదైన బిందువును తీసుకొనుము, ఉదా $x = 4$ స్పష్టముగా $x^2 - 5x + 6$ అనునది ధనాత్మకము.

$(-\infty, 2)$ మరియు $(3, \infty)$ తరగతుల మధ్య ఉన్న అన్ని x విలువలకు, $x^2 - 5x + 6$ ధనాత్మకమగును $x^2 - 5x + 6$ యొక్క విలువ $x = 2, 3$ వద్ద 0 అగును. కావున $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$ మధ్య x యొక్క అన్ని విలువలకు $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$ నిర్వచించబడెను. కావున $\sqrt{x^2 - 5x + 6}$ యొక్క క్షేత్రము $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$ అగును.

ఉదాహరణ 1.22 $f(x) = \dfrac{1}{1 - 2\cos x}$ యొక్క క్షేత్రమును కనుగొనుము.

సాధన

ఈ ప్రమేయమును $1 - 2\cos x$ వినహా $x \in \mathbb{R}$ యొక్క అన్ని విలువలకు నిర్వచించబడెను. అనగా $\cos x = \frac{1}{2}$ మినహా. అనగా $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$ మినహా. అందువలన క్షేత్రము $\mathbb{R} - \left\{2n\pi \pm \frac{\pi}{3}\right\}$, $n \in \mathbb{Z}$

ఉదాహరణ 1.23 $f(x) = \dfrac{1}{1 - 3\cos x}$ యొక్క వ్యాప్తిని కనుగొనుము.

సాధన

స్పష్టముగా, $-1 \le \cos x \le 1$

$\Rightarrow 3 \ge -3\cos x \ge -3$

$\Rightarrow -3 \le -3\cos x \le 3$

$\Rightarrow 1-3 \le 1-3\cos x \le 1+3$ కావున

$\Rightarrow -2 \le 1-3\cos x$ మరియు $1-3\cos x \le 4$ మనకు లభించును.

పై వాటికి విలోమము చేయగా, $\dfrac{1}{1-3\cos x} \le -\dfrac{1}{2}$ మరియు $\dfrac{1}{1-3\cos x} \ge \dfrac{1}{4}$ అని మనకు లభించును, కావున f యొక్క వ్యాప్తి $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{4}, \infty\right)$ అగును.

ఉదాహరణ 1.24 వాస్తవ విలువల ప్రమేయము $f(x) = \dfrac{\sqrt{9 - x^2}}{\sqrt{x^2 - 1}}$ కి సాధ్యమైన గరిష్ఠ క్షేత్రమును కనుగొనుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 38 24-01-2023 16:19:47

సాధన

$x < -3$ (లేక) $x > 3$ అయినప్పుడు x^2 విలువ 9 కంటె గరిష్టము కావున $9-x^2$ ఋణాత్మకమగును దీనికి $\mathbb{R}$ నందు వర్గమూలము లేదు. కావున x అనునది ఖచ్చితముగా $[-3, 3]$ మధ్య ఉండును.

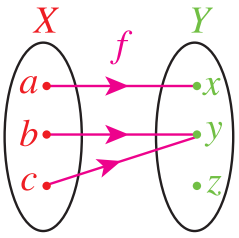
మరియు $x \geq -1$ $x \leq 1$ అయినప్పుడు x^2-1 ఋణాత్మకము లేక సున్న అగును. ఇది ఋణాత్మకమైన x^2-1 కి $\mathbb{R}$ నందు వర్గమూలము లేదు ఇది సున్న అయినప్పుడు, f నిర్వచించబడలేదు. కావున $[-1, 1]$ కి వెలుపల x ఉండును. అనగా $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ నందు x ఉండును. ఈ రెండు నియమములను చేర్చినప్పుడు f యొక్క గరిష్ఠ క్షేత్రము $[-3, 3] \cap ((-\infty, -1) \cup (1, \infty))$ అనగా $[-3, -1) \cup (1, 3]$

సంఖ్యారేఖను గీచి మరియు తరగతులను గుర్తించి కావలసిన క్షేత్రతరగతిని పొందుము.

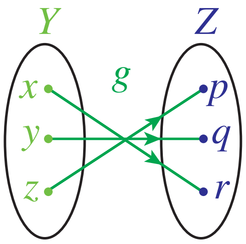
1.6.4 ప్రమేయముల మీద పరిక్రియలు (Operations on functions)

సంయుక్తము (Composition)

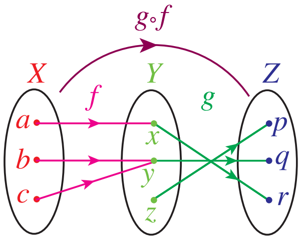
పటము 1.36 మరియు పటము 1.37లో ఇచ్చిన విధముగా f మరియు g అను రెండు ప్రమేయములను తీసుకొనుము. f యొక్క ప్రతిక్షేత్రము మరియు g యొక్క క్షేత్రము ఒకే విధముగా ఉండుటను గమనించుము. పటము 1.37 నందు g ని ఖండించి పటము 1.36 నందు f కి అందించిన g యొక్క క్షేత్రము Y ని f యొక్క ప్రతిక్షేత్రము Y నకు అంటించినట్లగును. (పటము 1.38 ని చూడుము)



పటము 1.36



పటము 1.37

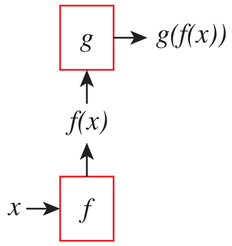


పటము 1.38

సహజ పద్ధతిలో $h: X \longrightarrow Z$ అను ప్రమేయమును మనము నిర్వచించెదము. h క్రింది a యొక్క బింబమును కనుగొనుటకు f క్రింద a యొక్క బింబమును మొదట చూడవలెను. అది x అగును. తర్వాత g క్రింద x యొక్క బింబమును చూడవలెను. అది r అగును. అనగా $h(a) = r$ అదేవిధముగా $h(b) = q$ మరియు $h(c) = q$. అని మనము ప్రకటించగలము. ఈ విధానముగా క్రొత్త ప్రమేయము h ని నిర్వచించగలము. ఈ h అనునది g తో సంయుక్తము f అగును.

నిర్వచనము 1.8

$f: X \rightarrow Y$ మరియు $g: Y \rightarrow Z$ అనునవి రెండు ప్రమేయములు. అయిన ప్రమేయము $h: X \rightarrow Z$ నకు $h(x) = g(f(x))$ ప్రతి $x \in X$ ని g తో f యొక్క సంయుక్తమని పిలిచెదము. దీనిని $g \circ f$ గా సూచించెదము. (f సంయుక్తము g తో అని చదివెదము) (పటము 1.38 మరియు 1.39 ని చూడుము)



పటము 1.39

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 39 24-01-2023 16:19:49

f యొక్క వ్యాప్తి Y గా ఉండనవసరము లేదని గమనించగలము. $f: X \to Y_1$, $g: Y_2 \to Z$ మరియు $Y_1 \subseteq Y_2$ గా ఉన్నప్పుడు $g \circ f$ ని నిర్వచించగలము, Y_2 ని f యొక్క ప్రతిక్షేత్రముగా తీసుకొందుము మరియు అదే నిర్వచనమును ఉపయోగించెదము, కావున $g \circ f$ ని నిర్వచించగలము f యొక్క వ్యాప్తి g యొక్క క్షేత్రమునందు ఇమిడి యుండినప్పుడు అయితే అయినప్పుడు మాత్రమే.

ఉదాహరణము 1.25 $f = \{(1,2),(3,4)(2,2)\}$ మరియు $g = \{(2,1),(3,1),(4,2)\}$ గా తీసుకొనుము., $g \circ f$ ని మరియు $f \circ g$ ని కనుగొనుము.

సాధన

సంయుక్తముల నిర్వచనను సరిచూచుటకు, ఈ ప్రమేయముల క్షేత్రము మరియు వ్యాప్తిలను కనుగొనవలెను. f యొక్క క్షేత్రము $= \{1, 2, 3\}$, f యొక్క వ్యాప్తి $= \{2, 4\}$, g యొక్క క్షేత్రము $= \{2, 3, 4\}$ మరియు g యొక్క వ్యాప్తి $= \{1, 2\}$, f యొక్క వ్యాప్తి g యొక్క క్షేత్రము నందు ఇమిడి ఉన్నందున $g \circ f$ ని నిర్వచించగలము. $g \circ f$ క్రింద 1 యొక్క బింబమును కనుగొనుటకు మొదట f క్రింద 1 యొక్క బింబమును మరియు దాని బింబము g క్రింద కనుగొనవలెను. f క్రింద 1 యొక్క బింబము 2 అగును మరియు g క్రింద దాని బింబము 1 అగును. కావున $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 1$.

అదే విధముగా $(g \circ f)(2) = 1$ ని మరియు $(g \circ f)(3) = 2$ ని కనుగొనగలము. కావున $g \circ f = \{(1,1),(2,1),(3,2)\}$ అదేవిధముగా $f \circ g = \{(2,2),(3,2),(4,2)\}$

ఉదాహరణము 1.26 $f = \{(1,4),(2,5),(3,5)\}$ మరియు $g = \{(4,1),(5,2),(6,4)\}$ అని తీసుకొనుము. $g \circ f$ ని కనుగొనుము. $f \circ g$ ని కనుగొనగలమా?

సాధన

స్పష్టముగా, $g \circ f = \{(1,1),(2,2),(3,2)\}$. కాని $f \circ g$ ని నిర్వచించలేము. ఎందుకనగా g యొక్క వ్యాప్తి $= \{1, 2, 4\}$, f యొక్క క్షేత్రము $= \{1, 2, 3\}$ నందు ఇమడలేదు.

ఉదాహరణము 1.27 $\mathbb{R}$ నుండి $\mathbb{R}$ నకు f మరియు g అను రెండు ప్రమేయములను $f(x) = 3x - 4$ మరియు $g(x) = x^2 + 3$ గా నిర్వచించిన, $g \circ f$ మరియు $f \circ g$ ని కనుగొనుము.

సాధన

మనకు $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x-4) = (3x-4)^2 + 3 = 9x^2 - 24x + 19$.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2+3) = 3(x^2+3) - 4 = 3x^2 + 5$. అని తెలియును.

ఇక్కడ $g \circ f \neq f \circ g$ కావున "ప్రమేయముల సంయుక్తము" అనునది వినిమయము కాదు.

సిద్ధాంతము 1.2 $f: A \to B$ మరియు $g: B \to C$ అనునవి రెండు ప్రమేయములు. f మరియు g అనునవి ఏక-ఏక ప్రమేయములైన $g \circ f$ కూడా ఏక-ఏక ప్రమేయమగును.

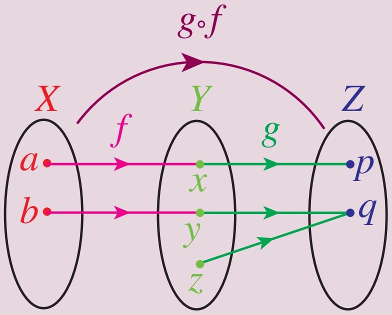
11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 40 24-01-2023 16:19:51

నిరూపణ : A నందు $x \neq y$ అని తీసుకొనుము. f అనునది ఏక-ఏక ప్రమేయము కావున $f(x) \neq f(y)$. g అనునది ఏక-ఏక ప్రమేయమైనందున, $g(f(x)) \neq g(f(y))$ $x \neq y \Rightarrow (g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(y)$ కావున $g \circ f$ అనునది ఏక ఏక ప్రమేయము. ■

ఉదాహరణము 1.28 "f మరియు $g \circ f$ అనునవి ఏక-ఏక ప్రమేయములైన f ఒక ఏక-ఏక ప్రమేయము" అనునది నిజముకాదు

సాధన

ఒక ప్రవచనము నిజముకాదని పేర్కొనుటకు ఒక మాదిరి ఉదాహరణము ద్వారా నిరూపించవలెను. పటము 1.40 ఇవ్వబడిన రేఖాచిత్రమును గమనించుము.



పటము 1.40

స్పష్టముగా f మరియు $g \circ f$ అనునవి ఏక-ఏక ప్రమేయములు. కాని g ఏక-ఏక ప్రమేయము కాదు. కావున పై పటము నుండి ఈ ప్రవచనము నిజముకాదని తెలియుచున్నది.

ఉదాహరణము 1.29 $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ నకు $f(x) = 2x - |x|$ మరియు $g(x) = 2x + |x|$ నిర్వహించబడెను. $f \circ g$ ని కనుగొనుము.

సాధన

మనకు తెలియును $|x| = \begin{cases} -x & ; x \leq 0 \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \\ x & ; x > 0 \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \end{cases}$

కావున $f(x) = \begin{cases} 2x-(-x) & ; x \leq 0 \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \\ 2x - x & ; x > 0 \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \end{cases}$

అందువలన $f(x) = \begin{cases} 3x & ; x \leq 0 \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \\ x & ; x > 0 \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \end{cases}$

మరియు $g(x) = \begin{cases} 2x+(-x) & ; x \leq 0 \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \\ 2x + x & ; x > 0 \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \end{cases}$

అందువలన $g(x) = \begin{cases} x & ; x \leq 0 \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \\ 3x & ; x > 0 \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \end{cases}$

$x \leq 0$ గా తీసుకొనుము. తర్వాత, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x) = 3x$.

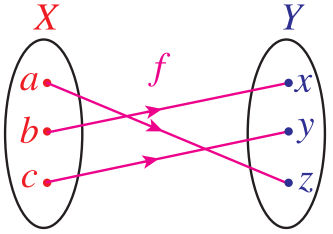
$x > 0$ అయిన, $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x) = 3x$.

కావున అన్ని x -లకు $(f \circ g)(x) = 3x$.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 41 24-01-2023 16:19:53

1.6.5 ప్రమేయము యొక్క విలోమము (Inverse of a function)

పటము 1.14లో చూపిన విధముగా $f : X \to Y$ కి ద్విగుణము



పటము 1.41

ఈ ప్రమేయమును మనము అద్దములో చూసినట్టయితే, మనకు Y నుండి X కి ప్రమేయము లభించును. ఆ ప్రమేయమేను g అని పిలిచెదము. తర్వాత g అను ప్రమేయము Y నుండి X కి $g(x) = b, g(y) = c, g(z) = a$ గా నిర్వచించబడును.

ఈ g అను ప్రమేయము f యొక్క విలోమ ప్రమేయమునకు ఉదాహరణ. ఇప్పుడు విలోమ ప్రమేయమును నిర్వచించెదము.

నిర్వచనము 1.9

$f : X \to Y$ అనునది ద్విగుణము $g : Y \to X$ ని $g(y) = x$, $f(x) = y$ గా ఉన్నప్పుడు అని నిర్వచించబడినప్పుడు f యొక్క విలోమ ప్రమేయము g అగును. దీనిని f గా సూచించెదము.

f ప్రమేయమునకు విలోమము ఉన్నప్పుడు, f ని విలోమతీయత అని పిలువగలము. ప్రమేయముల యొక్క సంయుక్తము మరియు విలోమములకు చక్కని సంబంధము కలదు.

$f : X \to Y$ అనునది ద్విగుణము మరియు $g : Y \to X$ అనునది దాని విలోమమగును. అప్పుడు $g \circ f = I_X$ మరియు $f \circ g = I_Y$ ఇందు I_X మరియు I_Y అనునవి క్రమముగా X మరియు Y లకు తత్సమ ప్రమేయములగును. మరియు $f : X \to Y, g : Y \to X$ నకు $g \circ f = I_X$ మరియు $f \circ g = I_Y$ అయినప్పుడు f మరియు g అను రెండు ప్రమేయములు ద్విగుణ ప్రమేయములు మరియు అవి రెండు ఒక దానికొకటి విలోమములగును. అనగా $f^{-1} = g$ మరియు $g^{-1} = f$ పైన చర్చించిన దానినుపయోగించి, విలోమతీయత మరియు విలోమములను వేరే విధముగా నిర్వచించగలము. అవి క్రింది విధముగా ఉన్నవి.

నిర్వచనము 1.10

ఒక ప్రమేయము $g : Y \to X$ సంక్రమించి $g \circ f = I_X$ మరియు $f \circ g = I_Y$ నందు I_X మరియు I_Y క్రమముగా X మరియు Y ల యొక్క తత్సమ ప్రమేయములయినప్పుడు $f : X \to Y$ అనునది విలోమతీయత అగును ఇందు f యొక్క విలోమము g అగును మరియు g ని f^{-1} గా సూచించగలము.

కొన్ని ప్రమేయములు ద్విగుణము అగుటకు ఈ అంశమును మనము ఉపయోగించగలము.

f అనునది ద్విగుణము అయినప్పుడు, $f^{-1}(y)$ అనునది f క్రింద y యొక్క పూర్వబింబమగును. విలోమములను ద్విగుణములకు మాత్రమే నిర్వచించబడినవని గమనించగలము. f అనునది ఏక-ఏక ప్రమేయము కానప్పుడు, $a \neq b$ మరియు $f(a) = f(b)$ గా ఉండునట్లు a, b లు వర్తిల్లును, ఈ విలువను y గా తీసుకొనుము. $f^{-1}(y)$ ని నిర్వచించలేము ఎందుకనగా a మరియు b అను రెండును, f క్రింద y యొక్క పూర్వబింబములగును, y కి రెండు వేర్వేరు విలువలను f^{-1} తీసుకోలేదు. f ద్విగుణము కానప్పుడు Y నందు పూర్వబింబము లేకుండ y అనునది ఉండును. ఈ విషయములో $f^{-1}(y)$ కి ఏ విలువనైనను మనము ఇవ్వలేము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 42 24-01-2023 16:19:56

ఉదాహరణకు, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ మరియు $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 1), (4, 3)\}$ అయిన f యొక్క వ్యాప్తి $\{1, 2, 3, 4\}$ యొక్క విలోమము $\{(1, 3), (2, 1), (3, 4), (4, 2)\}$

$\mathbb{R}$ నుండి $\mathbb{R}$ వరకు గల ప్రమేయముల విలోమమును గణించుటకు నియమములు
(Working Rule to Find the Inverse of a Function)

$f; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ అనునది ఇవ్వబడిన ప్రమేయము.

(i) $y = f(x)$ అని వ్రాసుకొందుము

(ii) x ని y రూపములో వ్రాసెదము

(iii) $f^{-1}(y) = y$ యొక్క విస్తరణగా వ్రాసెదము

(iv) y ని x కు బదులుగా వ్రాసెదము

ఉదాహరణము 1.30 $f: R \to R$ నకు $f(x) = 2x - 3$ గా నిర్వచించబడినప్పుడు f ని ద్విగుణము అని నిరూపించుము మరియు దాని విలోమమును కనుగొనుము.

సాధన

పద్ధతి 1

ఏక-ఏకము : $f(x) = f(y)$ అని తీసుకొనుము. అప్పుడు $2x - 3 = 2y - 3$; దీని నుండి $x = y$ అని తెలియుచున్నది. అనగా $f(x) = f(y)$ నుండి $x = y$ అని తెలియుచున్నది. కావున f ఏక-ఏక ప్రమేయమగును.

ద్విగుణము : $y \in \mathbb{R}$ అని తీసుకొనుము. $x = \frac{y+3}{2}$ అని తీసుకొనుము. అప్పుడు $f(x) = 2\left(\frac{y+3}{2}\right) - 3 = y$ అగును. కావున f ద్విగుణమగును. దీనిని క్రింది తెలిపిన ప్రవచనము మూలముగా నిరూపించగలము. f యొక్క వ్యాప్తి $\mathbb{R}$ ఎట్లు? అది ప్రతిక్షేత్రమునకు సమానమగును అందుచేత f అనునది ద్విగుణమగును.

విలోమము : $y = 2x - 3$ అని తీసుకొనుము. అప్పుడు $y + 3 = 2x$ అగును. మరియు $x = \frac{y+3}{2}$ కావున $f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2}$ y ని x కు బదులుగా వ్రాసినప్పుడు $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ లభించును.

పద్ధతి 2

$y = 2x - 3$ అని తీసుకొనుము. అప్పుడు $x = \frac{y+3}{2}$, $g(y) = \frac{y+3}{2}$ అని తీసుకొనుము.

ఇప్పుడు, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x-3) = \frac{(2x-3)+3}{2} = x$

. $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f\left(\frac{y+3}{2}\right) = 2\left(\frac{y+3}{2}\right) - 3 = y$

కావున, $g \circ f = I_X$ మరియు $f \circ g = I_Y$.

దీని నుండి f మరియు y అనునవి ద్విగుణములు మరియు ఒక దానికొకటి విలోమములు అందువలన f అనునది ద్విగుణము మరియు $f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2}$ y బదులు x ని మార్చినప్పుడు $f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$ లభించును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 43 24-01-2023 16:20:01

1.6.6 బీజీయ ప్రమేయములు (Algebra of functions)

ఏదేని ప్రమేయము యొక్క ప్రతిక్షేత్రము $\mathbb{R}$ లేక $\mathbb{R}$ యొక్క ఉపసమితిని వాస్తవ విలువల ప్రమేయముగా పిలువబడును. అనేక ప్రమేయ పరిక్రియలను అని వాస్తవ విలువలుగా ఉన్నప్పుడు చర్చించెదము.

f మరియు g ని వాస్తవ విలువల ప్రమేయములుగా తీసుకొందుము. f మరియు y ల సంకలనమును మనము నిర్వచించగలమా? సహజముగా రెండు ప్రమేయముల సంకలనము కూడా ప్రమేయమని మనము ఊహించగలము. $f+g$ యొక్క విలువ x వద్ద f కి సంబందపడియున్నది మరియు g కి x వద్ద. కావున $f+g$ ని x బిందువు వద్ద నిర్వచించుటకు, $f(x)$ మరియు $g(x)$ ని తెలుసుకొనవలెను. మరుమాటలలో x ఖచ్చితముగా f యొక్క క్షేత్రము మరియు g యొక్క క్షేత్రము నందు ఉండవలెను. సహజ పద్ధతిలో $f+g$ ని x వద్ద $f(x)+g(x)$ గా నిర్వచించగలము. f మరియు g ల యొక్క క్షేత్రములు సమానముగా ఉండవలెనను నిబందన ఇచ్చినప్పుడు, $f+g$ ని నిర్వచించగలమని ఇదే పద్ధతిలో వ్యవకలనము, గుణకారము మరియు అనేక బీజీయ పరిక్రియలు R సమితి నందు గల వాస్తవ సంఖ్యలను నిర్వచించగలము.

నిర్వచనము 1.11

X అనునది ఏదైన సమితి f మరియు g అనునవి X మీద నిర్వచించబడిన వాస్తవ విలువల ప్రమేయములగును. $x \in X$ యొక్క అన్ని విలువలకు క్రింది వాటిని నిర్వచించగలము.

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$
- $(fg)(x) = f(x)g(x)$
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, $g(x) \neq 0$ గా ఉన్నప్పుడు
- $(cf)(x) = cf(x)$, ఇక్కడ C అనునది వాస్తవ స్థిరసంఖ్య
- $(-f)(x) = -f(x)$

క్షేత్రమనునది ఏదైన సమితి, సంఖ్యల సమితిగా ఉండనవసరము లేదని గుర్తించవలెను. ఉదాహరణకు X అనునది తరగతిలోని విద్యార్థుల సమితి, f మరియు g అనునవి రెండు సమితులలో విద్యార్థులు పొందిన మార్కులుగా తీసుకొనబడిన ప్రమేయములయిన, $f+g$ అను ప్రమేయము రెండు పరీక్షలలో విద్యార్థుల మార్కుల మొత్తమును తెలియజేయును. సంకలనము, వ్యవకలనము, గుణకారము మరియు భాగహారము అను పరిక్రియలను పైనున్న విధముగా నిర్వచించి క్రింది ఇవ్వబడిన లక్షణములను తృప్తిపరచునని చూడగలము.

- $(f+g)+h = f+(g+h)$
- $f+g = g+f$
- $\mathbf{0}+f = f+\mathbf{0}$ ఇక్కడ $\mathbf{0}$ అనునది x యొక్క అన్ని విలువలకు $0(x) = 0$ అని నిర్వచించబడిన శూన్యప్రమేయమగును.
- $f+(-f) = (-f)+f = \mathbf{0}$
- $f(g+h) = fg + fh$
- $(c_1 + c_2)f = c_1 f + c_2 f$ ఇక్కడ c_1 మరియు c_2 అనునవి వాస్తవ స్థిరసంఖ్యలు.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 44 24-01-2023 16:20:04

ఈ పరిక్రియల అనేక లక్షణములను మనము పట్టిక రూపములో చెప్పగలము. వీటి నిరూపణ సులభము. కాని ఈ లక్షణములను నిరూపించు పద్ధతిని ఒక దానిని మాత్రమే నిరూపించి చూపించగలము.

$f(g+h) = fg + fh$ ని నిరూపించెదము. $f(g+h) = fg + fh$ ని నిరూపించుటకు క్షేత్రములోని అన్ని x విలువలకు $(f(g+h))(x) = (fg+fh)(x)$ అని నిరూపించవలెను.

సిద్ధాంతము 1.3 f మరియు g అనునవి వాస్తవ విలువల ప్రమేయములయిన, $f(g+h) = fg + fh$ అగును.

నిరూపణ : X ని ఏదైన ఒక సమితిగాను మరియు g ని X మీద నిర్వచించబడిన వాస్తవ విలువల ప్రమేయముగా తీసుకొనుము. $x \in X$ గా తీసుకొనుము.

$$
\begin{aligned}
(f(g+h))(x) &= f(x)(g+h)(x) && \text{(లబ్ధ నిర్వచనము ప్రకారము)}\\
&= f(x)[g(x)+h(x)] && \text{(సంకలన నిర్వచనము ప్రకారము)}\\
&= f(x)g(x) + f(x)h(x) && \text{(వాస్తవముల సహచరత్వము)}\\
&= (fg)(x) + (fh)(x) && \text{(లబ్ధ నిర్వచనము ప్రకారము)}\\
&= (fg+fh)(x) && \text{(సంకలన నిర్వచనము ప్రకారము)}
\end{aligned}
$$

కావున $(f(g+h))(x) = (fg+fh)(x)$. అన్ని $x \in X$ నకు కావున $f(g+h) = fg + fh$ ■

1.6.7 కొన్ని ప్రత్యేక ప్రమేయములు (Some Special Functions)

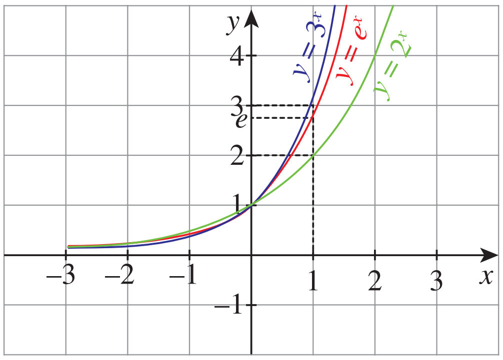
కొన్ని ప్రత్యేక ప్రమేయములను చూసెదము.

(i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ నకు $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, a_i గా నిర్వచించబడి, a అనునవి స్థిరసంఖ్యలుగా తీసుకొన్నప్పుడు f అను ప్రమేయము బహుపద ప్రమేయమగును. సమానత్వమునకు కుడివైపున నిర్వచించబడిన ప్రమేయము బహుపదమైనందున, ఇది బహుపద ప్రమేయమగుచున్నది.

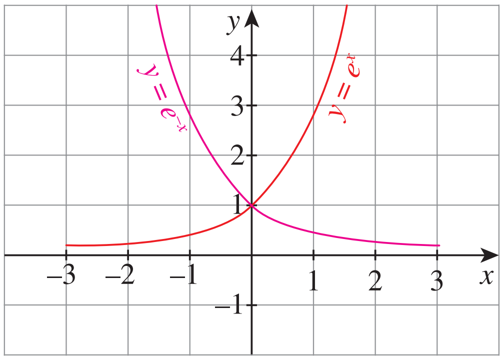
(ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ నకు, $f(x) = ax + b$ గా నిర్వచించబడి $a \neq 0$ మరియు b స్థిరసంఖ్యలైన అది రేఖీయ ప్రమేయమగును. ఒక ప్రమేయము రేఖీయము కాని యెడల అది అరేఖీయ ప్రమేయమగును. స్పష్టముగా రేఖీయ ప్రమేయము అనునది ఒక బహుపద ప్రమేయమగును. ఈ ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రము ఒక సరళరేఖ అగును; ఒక సరళ రేఖను రేఖీయ వక్రరేఖ అందురు; కావున ఈ ప్రమేయమును రేఖీయ ప్రమేయము అందురు. (రేఖీయ ప్రమేయములకు, గణితములో ఉన్నత అభ్యసనలో అనేక నిర్వచనములను మనము చూడగలము)

(iii) a అనునది ఋణముకాని స్థిరసంఖ్యగా తీసుకొనుము. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ని $f(x) = a^x$ నిర్వచించినట్లు తీసుకొందుము $a = 0, x \neq 0$ అయిన ఈ ప్రమేయము శూన్యప్రమేయమగును మరియు $a = 1, x \neq 0$ అయిన $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ నకు $f(x) = a^x$ నిర్వించినప్పుడు స్థిరప్రమేయము $f(x) = 1$ అగును. (పటము 1.42 మరియు 1.42 అను చూడుము)

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 45 24-01-2023 16:20:06



పటము 1.42



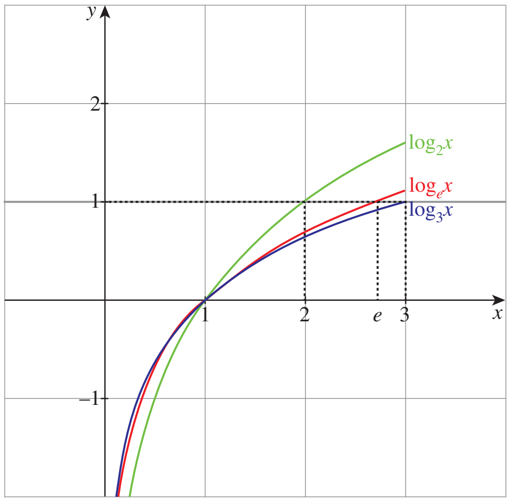
పటము 1.43

$a > 1$ అయినప్పుడు, $f(x) = a^x$ అను ప్రమేయము ఘాత ప్రమేయమగును. మరియు ఏదైన ప్రమేయమునకు ఘాతములో x ఉండిన అవి ఘాత ప్రమేయమగును.

e అనునది ప్రత్యేక కరణీయ సంఖ్య 2 మరియు 3 మధ్య దాని విలువఉండును. e ని గురించి తర్వాత వచ్చు అధ్యాయములలో ఎక్కువగా చదివెదము.

(iv) $a > 1$ ను స్థిర సంఖ్య అనుకొనుము. ప్రమేయము $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$ ను $f(x) = \log_a x$ గా నిర్వచించబడిన అది సంవర్ధమాన ప్రమేయమగును. $f(x) = a^x$ అను ఘాత ప్రమేయము యొక్క విలోమము అనుకూల క్షేత్రమునందు సంవర్ధమాన ప్రమేయమగును.

(v) అనుకూలమైన క్షేత్రమునకు, f వాస్తవ విలువల ప్రమేయమైన, $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ గా నిర్వచించబడి, $p(x)$ మరియు $q(x)$ బహుపద ప్రమేయములతో, $q(x) \neq 0$ ఉండినప్పుడు f అనునది అకరణీయ ప్రమేయమగును. $\mathbb{R}$ నందు $q(x) = 0$ వద్ద వాస్తవసంఖ్యలను తొలగించినప్పుడు, ప్రమేయము యొక్క క్షేత్రమును పొందగలము. అది ఒక సమితి అగును



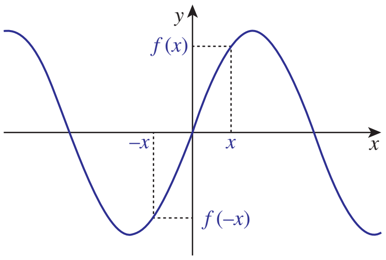
పటము 1.44

(vi) f అనునది వాస్తవ విలువల ప్రమేయము, $f(x) \neq 0$ అయిన వాస్తవ విలువల ప్రమేయము g ని అనుకూలక్షేత్రమునకు $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ గా నిర్వచించన అది f యొక్క వ్యుత్క్రమప్రమేయమగును. $\mathbb{R}$ నందు $f(x) = 0$ వద్ద వాస్తవ సంఖ్యలను తొలగించినప్పుడు g యొక్క క్షేత్రమును పొందగలము. అది ఒక సమితి అన్య ఉధాహరణకు $f(x)$ యొక్క సాధ్యమైన గరిష్ఠక్షేత్రము $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ అనునది $\mathbb{R} - \{1\}$ అగును. ప్రమేయముల మరో రెండు వర్గములను చూసెదము.

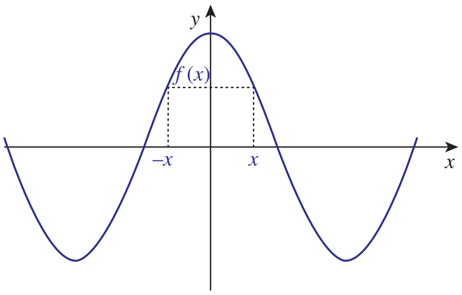
11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 46
24-01-2023 16:20:08

నిర్వచనము 1.12

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ నందు $x\in\mathbb{R}$ యొక్క అన్ని విలువలకు $f(-x) = -f(x)$ అయిన f అను ప్రమేయము బేసి ప్రమేయమగును. $x\in\mathbb{R}$ యొక్క అన్ని విలువలకు $f(-x) = f(x)$ అయిన f అనునది సరిప్రమేయమగును. (పటము 1.45 మరియు 1.46 లను చూడుము)



పటము 1.45



పటము 1.46

$f(x) = x, f(x) = 2x$ మరియు $f(x) = x^3 + 2x$ అని నిర్వచించన ప్రమేయములు బేసి ప్రమేయములకు ఉదాహరణములు. $f(x) = x^2, f(x) = 3, f(x) = x^4 + x^2$ మరియు $f(x) = |x|$ అనునవి సరిప్రమేయములకు ఉదాహదణములు. $f(x) = x + x^2$ అను ప్రమేయము సరి మరియు బేసి అను రెండు ప్రమేయములు కావు.

క్రింది ఫలితములను నిరూపించెదము.

(i) 2 బేసి ప్రమేయములను మొత్తము బేసిప్రమేయమగును.

(ii) రెండు సరి ప్రమేయముల మొత్తము ఒక సరి ప్రమేయమగును.

(iii) రెండు బేసి ప్రమేయములను లబ్ధము ఒక సరి ప్రమేయమగును.

(iv) రెండు సరి ప్రమేయముల లబ్ధము ఒక సరి ప్రమేయమగును.

(v) ఒక బేసి ప్రమేయము ఇంకొక సరి ప్రమేయముల లబ్ధము ఒక బేసిప్రమేయమగును.

(vi) శూన్య ప్రమేయము మాత్రమే బేసి మరియు సరి అను రెండు ప్రమేయములగుటకు వీలగును.

(vii) ధనాత్మక స్థిర సంఖ్య మరియు సరిప్రమేయముల లబ్ధము ఒక సరిప్రమేయమగును.

(viii) ఋణాత్మక స్థిర సంఖ్య మరియు సరిప్రమేయముల లబ్ధము సరి ప్రమేయమగును.

(ix) స్థిర సంఖ్య మరియు బేసి ప్రమేయముల లబ్ధము బేసిప్రమేయమగును.

(x) బేసి మరియు సరిప్రమేయములు కాని కొన్ని ప్రమేయములున్నవి.

పైన తెలిపిన లక్షణాలలో ఏదైన ఒకదానిని నిరూపించెదము. మిగిలిన వాటిని అదేవిధముగా నిరూపించగలము.

సిద్ధాంతము 1.4: సరి ప్రమేయము మరియు బేసి ప్రమేయము లబ్ధము బేసి ప్రమేయమగును.

నిరూపణ : f ని బేసి ప్రమేయముగొను, g ని సరి ప్రమేయంగాను తీసుకొనుము. $h = fg$ అని తీసుకొనుము. ఇప్పుడు $h(-x) = (fg)(-x) = f(-x)g(-x) = -f(x)g(x) = -h(x)$ (f అనునది బేసి మరియు g అనునది సరి ప్రమేయమయినందున)

కావున h అనునది బేసి ప్రమేయము. దీని నుండి fg బేసి ప్రమేయమగును. ■

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 47 24-01-2023 16:20:10

ఒక ప్రమేయము బేసి ప్రమేయము కానప్పుడు అది సరి ప్రమేయమగునని ఆలోచించరాదు. సరి ప్రమేయము మరియు బేసి ప్రమేయములు కాని అనేక ప్రమేయములున్నవి.

అభ్యాసము 1.3

1. 1. ఒక పాఠశాలలో 11వ తరగతి నందు 120 విద్యార్థులు 4 తరగతులలో చదువుతున్నారని తీసుకొందుము. A అనునది విద్యార్థుల సమితిని B అనునది సెక్షనుల సమితిని సూచించునని తీసుకొందుము. x విద్యార్థి y సెక్షన్‌కి చెందినప్పుడు x అనునది y కి సంబందపడినదని A నుండి B కి సంబంధము నిర్వచించబడెను. ఈ సంబంధము ప్రమేయమగునా? కాదా? విలోమ ప్రమేయము గురించి ఏమి చెప్పెదవు సమాధానమును విశదీకరించుము.

2. f యొక్క విలువలు $-4, 1, -2, 7, 0$ వద్ద కనుగొనుము.

$$f(x)=\begin{cases} -x+4 & ; \ -\infty < x \le -3 \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \\ x+4 & ; \ -3 < x < -2 \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \\ x^2-x & ; \ -2 \le x < 1 \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \\ x-x^2 & ; \ 1 \le x < 7 \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \\ 0 & ; \ \text{అట్లు లేనప్పుడు} \end{cases}$$

3. f యొక్క విలువలను కనుగొనుము $-3, 5, 2, -1, 0$ వద్ద

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x-5 & ; \ x\in(-\infty, 0) \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \\ x^2+3x-2 & ; \ x\in(3, \infty) \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \\ x^2 & ; \ x\in(0, 2) \text{ గా ఉన్నప్పుడు} \\ x^2-3 & ; \ \text{అట్లు లేనప్పుడు} \end{cases}$$

4. క్రింది సంబంధములు ప్రమేయములగునా? కాదా తెలుపుము ఇది ప్రమేయమయిన అది ఏక -ఏక ప్రమేయము మరియు ద్విగుణమగునా అని సరిచూడుము. ఇది ప్రమేయము కాలేదనిన ఎందుకని తెలుపుము?

   (i) $A = \{a, b, c\}$ మరియు $f = \{(a, c), (b, c), (c, b)\}; (f{:}A \to A)$

   (ii) $X = \{x, y, z\}$ మరియు $f = \{(x, y), (x, z), (z, x)\};(f{:}X \to X)$

5. $A = \{1, 2, 3, 4\}$ మరియు $B = \{a, b, c, d\}$ అని తీసుకొనుము. క్రింది ఇవ్వబడిన ఒక్కొక్క దానికి $A \to B$ కి ప్రమేయమును తెలుపుము.

   (i) ఏక -ఏకము మరియు ద్విగుణము రెండును కాదు

   (ii) ఏక- ఏకము కాదు కాని ద్విగుణము

   (iii) ఏక- ఏకము కాని ద్విగుణము కాదు

   (iv) ఏక - ఏకము మరియు ద్విగుణము

6. $\dfrac{1}{1-2sinx}$ యొక్క క్షేత్రమును కనుగొనుము

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 48 24-01-2023 16:20:12

7. వాస్తవ విలువల ప్రమేయము $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{x^2-9}}$ నకు సాధ్యమైన గరిష్ఠ క్షేత్రమును కనుగొనుము.

8. $\dfrac{1}{2cosx-1}$ ప్రమేయము యొక్క వ్యాప్తిని కనుగొనుము.

9. $xy = -2$ అను సంబంధమునకు అనువైన క్షేత్రము నందించి ప్రమేయమని చూపుము. ఆ ప్రమేయము యొక్క క్షేత్రము మరియు వ్యాప్తిని కనుగొనుము.

10. $f(x) = |x| + x$ మరియు $g(x) = |x| - x$ అని $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ గా నిర్వచించినప్పుడు, $g \circ f$ మరియు $f \circ g$ ని కనుగొనుము.

11. f, g, h అనునవి $\mathbb{R}$మీద నిర్వచించబడిన వాస్తవ విలువల ప్రమేయములు, అయిన $(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h$ అని నిరూపించుము. $f \circ (g + h)$ ని గురించి ఏమి చెప్పెదవు? సమాధానమునకు తీర్పునిమ్ము.

12. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ నకు $f(x) = 3x - 5$ గా నిర్వచించిన, f అనునది ద్విగుణము అని నిరూపించుము మరియు దాని విలోమమును కనుగొనుము.

13. ఒక మనిషి తన శరీరములోని కండరముల బరువును x అను ప్రమేయముగా తీసుకొని $W(x) = 0.35x$ గా వ్యక్తీకరించిన, ఆ ప్రమేయము యొక్క క్షేత్రమును కనుగొనుము.

14. ఒక వస్తువు క్రిందపడు దూరమును కాలము యొక్క ప్రమేయముగాను మరియు $s(t) = -16t^2$ గా ఇవ్వబడినది. ప్రమేయము ఏక–ఏక ప్రమేయమైనప్పుడు దానిని కనుగొనుము మరియు రేఖాచిత్రము ద్వారా చూపుము.

15. ఇవ్వబడిన మార్గమునకు విమాన టిక్కెట్టు ధర మొత్తమును C గాను, ఇంధన రేటును S గాను రూపాయలలో తెలుపబడినది. C మరియు S అను రెండును m యొక్క ప్రమేయములైన $C(m) = 0.4m + 50$ మరియు $S(m) = 0.03m$ టిక్కెట్టు యొక్క మొత్తము ధరను మైళ్ళలో తెలుపుటకు ప్రమేయమును కనుగొనుము మరియు 1600 మైళ్ళు గాలిలో ప్రయాణించుటకు టిక్కెట్టు ధరను కనుగొనుము.

16. ఒక విక్రయధారి తన సంవత్సరాధాయములో లభించిన దానిని $A(x) = 30,000 + 0.04x$ అను ప్రమేయరూపములో తెలిపిన x అనునది తను అమ్మినదానిని రూపాయలలో చూపును. అతని కుమారుడు కూడా వ్యాపారి మరియు అతని ఆధాయము $S(x) = 25,000 + 0.05x$ గా చూపబడెను. $(A + S)(x)$ ని కనుగొనుము. మరియు ఒక్కొక్కరు, ₹1,50,00,000 రూపాయలకు వ్యాపారము చేసిరి. ఆ కుటుంబం యొక్క మొత్తం ఆధాయమును కనుగొనుము.

17. ఇవ్వబడిన రోజు నందు అమెరికన్ డాలర్లు సింగపూర్ డాలర్లు $f(x) = 1.23x$ అను ప్రమేయము ద్వారా మార్పుచేయబడినది. ఇందు x అనునది అమెరికన్ డాలర్లను తెలియజేయును. అదే రోజు సింగపూర్ డాలర్లను, ఇండియా రూపాయలలో మార్పు జరుగుటను $g(y) = 50.50y$, సూచించబడెను, y అనునది సింగపూర్ డాలర్లను సూచించును. అమెరికన్ డాలర్లను, ఇండియన్ రూపాయలలో మార్పుచెందుటను ప్రమేయముగా మార్పురేటును తెలుపుము.

18. ఒక చిన్న భోజనశాలలో తయారయిన ఒక భోజనము విలువ 100 రూ. ఒక భోజనము తయారీ ఖర్చును x గాను, సాయంత్ర సమయములో భోజనములకు ఆర్డర్ చేసిన ప్రకారము వెలను

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 49 24-01-2023 16:20:15

$D(x) = 200 - x$ అను ప్రమేయముగా సూచించబడెను. యజమాని యొక్క మొత్తము ఖర్చు, భోజనము మీద లభించిన లాభమును x యొక్క ప్రమేయముగా తెలుపుము.

19. ఫారన్‌హీట్ ని సెల్సియస్ ఉష్ణోగ్రతగా మార్చుటకు సూత్రము $y = \frac{5x}{9} - \frac{160}{9}$ ప్రమేయము యొక్క విలోమమును కనుగొనుము. విలోమము కూడా ప్రమేయమని నిర్ధారించుము.

20. ఒక సాధారణ సైఫర్ ఒక సంఖ్యను తీసుకొని దానిని కోడ్‌ని కేటాయించి $f(x) = 3x - 4$ అను ప్రమేయము నందు ఉపయోగించును. ఈ ప్రమేయము యొక్క విలోమమును కనుగొనుము, దాని విలోమము కూడా ప్రమేయమని నిర్ణయించుము మరియు $y = x$ అను రేఖ యొక్క సౌష్ఠవ ధర్మమును సరిచూడుము. (రేఖలను గీయుట ద్వారా)

1.7 రూపాంతరములనుపయోగించి ప్రమేయముల రేఖాచిత్రములు. (Graphing Functions using Tranformations)

"ఒక పటము వెయ్యి పదముల విలువను కలిగియుండును" అనునది మనకు తెలిసిన సామెత. ప్రమేయమును బాగుగా తెలుసుకొనుటకు దాని వివరణాత్మక వివరణ కన్నా దాని రేఖా పటము ఎక్కువగా ఉపయోగపడును. అనేక బిందువులను గుర్తించకుండా రేఖాచిత్రములను త్వరగా గీయుట అనునది అత్యంత విలువైన నైపుణ్యావస్థ. కొన్ని ప్రాథమిక ప్రమేయముల ఆకారములు, కొన్ని క్లిష్టమైన ప్రమేయములను గీయుటకు ఉపయోగపడును. సౌష్ఠవము మరియు అర్థము చేసుకొనుటకు మరియు ఉపయోగించుటకు రేఖాచిత్రములను గీయు సామర్థ్యమును దృఢపరచుటకు రేఖీయ ప్రమేయములు ఉపయోగపడును. ఈ అధ్యాయము రేఖాచిత్రములను, దత్తాంశముల ఆధారత్వమును మాత్రము కలిగియుండదు. కొన్ని ప్రమేయములను రేఖాచిత్రముల ద్వారా గీయు పద్ధతులను తెలుసుకొందుము.

ఒకవేళ $y = 2\,sin(x-1) + 3$ అను ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రమును చిత్రించాలని తీసుకొందుము. ఈ ప్రమేయమును మొదట చూడగానే వక్రరేఖ నిర్మాణము కష్టమనిపించుచున్నది. కాని ఈ అధ్యాయము నందు సారాంశమును అర్థము చేసుకొనిన తర్వాత దీని నిర్మాణము సులభమని తెలియును.

రేఖాచిత్రము యొక్క అర్ధభాగమును అద్దములో చూపినప్పుడు దాని ప్రతిబింబము రేఖతో సంబంధపడిన మరో అర్ధభాగమును తెలియును, లేక తెలిసిన రేఖాచిత్రమును ఏదే ఒక దిశలో జరిపి రేఖాచిత్రమును పొందగలము అప్పుడు క్రొత్తదానిని తెలిసిన దానినుపయోగించి నిర్మించగలము మరియు రేఖాచిత్రమును విశదీకరించుట వలన లేక సూక్ష్మీకరించుట వలన రేఖాచిత్రమును పొందగలము తర్వాత తెలిసిన దానినుపయోగించి క్రొత్త దానిని గీయగలము.

రేఖాచిత్రము నందు క్రింది ఇవ్వబడిన రూపాంతర రకములు ముఖ్యమైన పాత్రను వహించుచున్నది.

(i) పరావర్తనము (reflection)

(ii) అంతర్ధానం (translation)

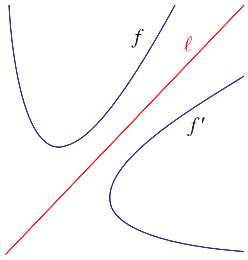
(iii) విస్ఫారణము (dilation)

పరావర్తనము మరియు అనువాదము విషయములో నిజరేఖాచిత్రమునకు అనుగుణంగా రేఖాచిత్రములను ఉత్పత్తి చేయగలవు. అనగా రేఖాచిత్రము యొక్క కొలత మరియు ఆకారము నందు మార్పులేదు. కాని విస్ఫారణము నందు నిజమైన రేఖాచిత్రమునకు సంబంధించి వేర్వేరు ఆకారంతో ఉత్పత్తి చేయబడును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 50 24-01-2023 16:20:17

పరావర్తనము :

ఒక ప్రమేయము యొక్క పరావర్తన రేఖాచిత్రమనునది l కి అనుగుణంగాను మరియు సౌష్ఠవముగాను ఉండును. పరావర్తనమనునది రేఖాచిత్రము యొక్క దర్పణ ప్రతిబింబమగును. ఇక్కడ రేఖ l అనునది పరావర్తనము యొక్క దర్పణమగును (పటము 1.47 ని చూడుము)



పటము 1.47

ఇక్కడ f' అనునది l కి అనుగుణమైన f యొక్క దర్పణ ప్రతిబింబమగును. f యొక్క కొన్ని ఉపయోగకరమైన పరావర్తనములు.

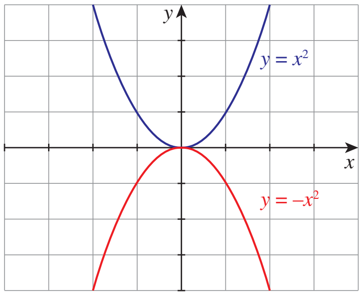
(i) $y = f(x)$ అను రేఖాచిత్రము x అక్షము మీద f యొక్క పరావర్తనమగును.

(ii) $y = f(-x)$ అను రేఖాచిత్రము y అక్షము మీద f యొక్క పరావర్తనమగును.

(iii) $y = f^{-1}(x)$ అను రేఖాచిత్రము $y = x$ నందు f యొక్క పరావర్తనమగును.

వివరణము : క్రింది ప్రమేయములను తీసుకొనుము.

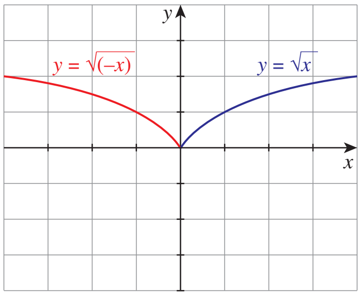
(i) $y = x^2$ (ii) $y = -x^2$ క్రింది ప్రమేయములను తీసుకొనుము..



పటము 1.48

$f(x) = x^2$ వక్రరేఖకు, $-f(x) = -x^2$ కావున $y = -x^2$ అనునది x అను ప్రమేయమును ఒక యూనిట్ క్రిందివైపునకు మార్పుచెందించును. అక్షము మీద $y = x^2$ యొక్క పరావర్తనమగును. (పటము 1.48ని చూడుము)

వివరణము 1.6 $y^2 = x$ మరియు $y^2 = -x$ యొక్క ధనాత్మక శాఖలను తీసుకొనుము.



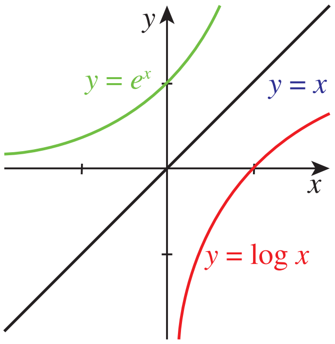
పటము 1.49

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 51 24-01-2023 16:20:18

$f(x) = \sqrt{x}$ వక్రరేఖకు $f(-x) = \sqrt{-x}$. మరియు $f(-x) = \sqrt{-x}$. నందు $x < 0$ అనునది y అక్షము మీద $f(x) = \sqrt{x}$ యొక్క పరావర్తనమగును. (పటము 1.49ని చూడుము)

వివరణము 1.7 క్రింది ప్రమేయములను తీసుకొనుము.

(i) $y = e^x$ (ii) $y = \log_e x$



పటము 1.50

$y = e^x$ అనునది $y = \log_e x$ అను ప్రమేయము యొక్క విలోమమగును మరియు $y = e^x$ అనునది $y = x$ మీద $y = \log_e x$ యొక్క పరావర్తనమగును. (పటము 1.50ని చూడుము)

అంతర్థానం (Translation)

ఒక రేఖాచిత్రము యొక్క అంతర్ధానం అనునది రేఖాచిత్రము యొక్క నిలువు లేక అడ్డముగా కలుగు మార్పు, సర్వసమానమైన రేఖాచిత్రమును రూపొందించును.

$y = f(x + c)$, $c > 0$ అనునది ఎడమవైపుకు మార్పును కలిగించును.

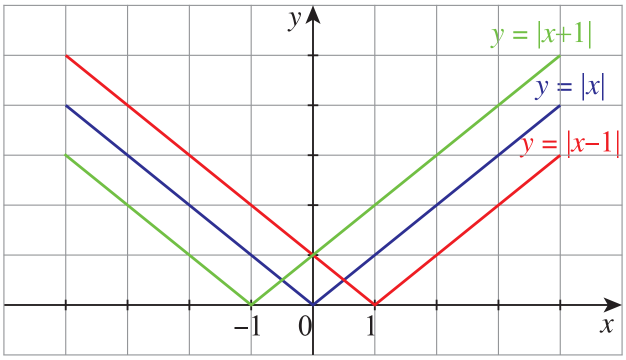
$y = f(x - c)$, $c > 0$ అనునది కుడివైపునకు మార్పును కలిగించును.

$y = f(x) + d$, $d > 0$ అనునది పైవైపుకు మార్పును కలిగించును

$y = f(x) - d$, $d > 0$ అనునది క్రిందివైపునకు మార్పును కలిగించును

వివరణము 1.8 క్రింది ప్రమేయములను తీసుకొనుము.

(i) $f(x) = |x|$ (ii) $f(x) = |x - 1|$ (iii) $f(x) = |x + 1|$



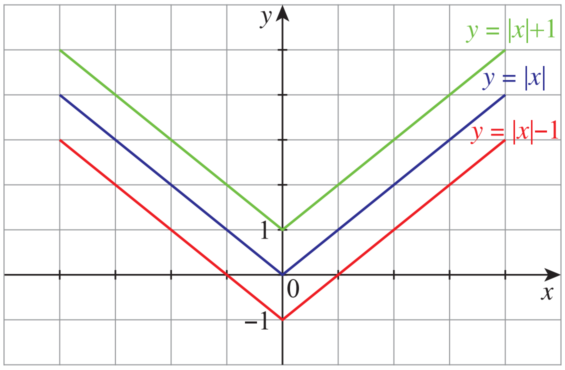
పటము 1.51

$f(x) = |x-1|$ అనునది $f(x) = |x|$ అను ప్రమేయమును ఒక యూనిట్ కుడివైపునకు మార్పుచెందించును.

$f(x) = |x+1|$ అనునది $f(x) = |x|$ అను ప్రమేయమును ఒక యూనిట్ ఎడమవైపునకు మార్పుచెందించును. (పటము 1.51 ని చూడుము)

వివరణము 1.9 క్రింది ప్రమేయములను తీసుకొనుము

(i) $f(x) = |x|$ (ii) $f(x) = |x| - 1$ (iii) $f(x) = |x| + 1$



పటము 1.52

$f(x) = |x| - 1$ అనునది $f(x) = |x|$ అను ప్రమేయమును ఒక యూనిట్ క్రింది వైపునకు మార్పుచెందించును.

$f(x) = |x| - 1$ అనునది $f(x) = |x|$ అను ప్రమేయమును ఒక యూనిట్ పై వైపునకు మార్పుచెందించును. (పటము1.52 ని చూడుము)

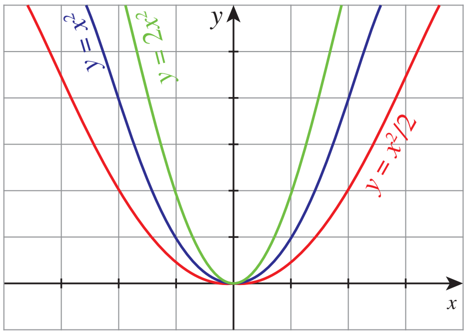
విస్ఫారణము (Dilation)

విస్ఫారణము అనునది ఒక రూపాంతరము. ఇది వక్రరేఖను విరివిచేయును లేక సూక్ష్మీకరించును. ధన స్థిరసంఖ్యతో ఒక ప్రమేయమును గణించునప్పుడు అది నిలువుపైపుకు పొడిగించబడును లేక చిన్నదగును. అనగా x అక్షము నుండి దూరముగా తొలగిపోవును లేక y అక్షము వైపుకు జరుగును. ధన స్థిరసంఖ్య ఒకటి కంటే ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు వక్రరేఖ x అక్షము నుండి తొలగిపోవును. ధన స్థిర సంఖ్య ఒకటికంటె తక్కువగా ఉన్నప్పుడు వక్రరేఖ y అక్షము వైపునకు జరుగును.

వివరణ 1.10

(i) $f(x) = x^2$ (ii) $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ (iii) $f(x) = 2x^2$

క్రింది ప్రమేయములను తీసుకొమును..



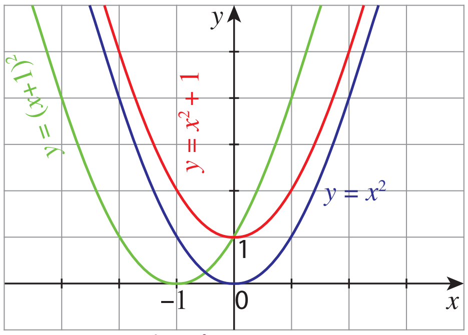
పటము 1.53

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 53 24-01-2023 16:20:24

$f(x) = \frac{1}{2}x^2$ అనునది $f(x) = x^2$ అను ప్రమేయమును x అక్షమువైపు పొడిగించుట ద్వారా లభించును. ఎందుకనగా గుణించబడిన సంఖ్య $\frac{1}{2}$ మరియు అది ఒకటి కంటె తక్కువ $f(x) = 2x^2$ అనునది $f(x) = x^2$ అను ప్రమేయమును y అక్షమువైపు సూక్ష్మీకరించుట ద్వారా లభించును అనగా x అక్షము నుండి తొలగిపోవును ఎందుకనగా గుణించబడిన సంఖ్య 2. అది ఒకటి కంటె ఎక్కువ. (పటము 1.53ని చూడుము)

వివరణము 1.11 క్రింది ప్రమేయములను తీసుకొనుము.

(i) $f(x) = x^2$ (ii) $f(x) = x^2 + 1$ (iii) $f(x) = (x + 1)^2$

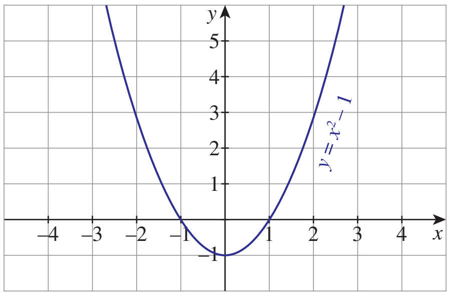


పటము 1.54

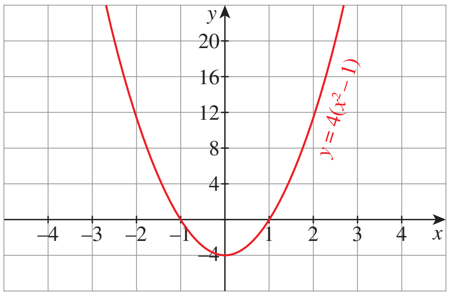
$f(x) = x^2 + 1$ అనునది $f(x) = x^2$ అను ప్రమేయమును పై వైపునకు ఒక యూనిట్ జరపడం ద్వారా లభించును.

$f(x) = (x + 1)^2$ అనునది $f(x) = x^2$ అను ప్రమేయమును ఎడమవైపునకు ఒక యూనిట్ జరపడం ద్వారా లభించును. (పటము 1.54ని చూడుము)

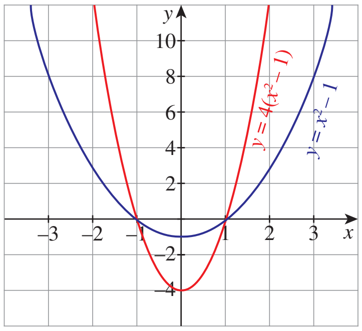
మాదిరి ఉదాహరణ 1.12 $y = x^2 - 1, y = 4(x^2 - 1)$, $y = (4x)^2 - 1$ అను రేఖాచిత్రములను సూక్ష్మీకరించుము మరియు పోల్చి చూడుము.



పటము 1.55



పటము 1.56



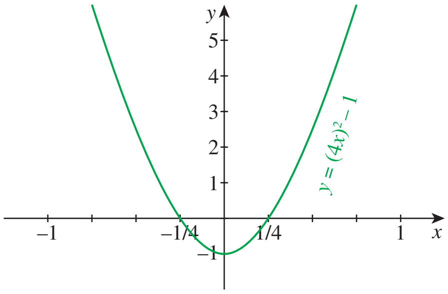
పటము 1.57

y అక్షము మీ స్కేలును పోల్చు వరకు పటము 1.55 మరియు పటము 1.56 చూచుటకు ఒకేవిధముగా ఉన్నవి. పటము 1.56 నందు స్కేలు నాలుగు రెట్లు అధికము, నిజప్రమేయమును నాలుగు గుణించినప్పుడు లభించు పరావర్తనమగును. (పటము 1.55) ఈ మార్పు ఒకే స్కేలు మీద ప్రమేయములను గుర్తించునప్పుడు తెలియచున్నది పటము 1.57లో ఉన్నవిధముగా.

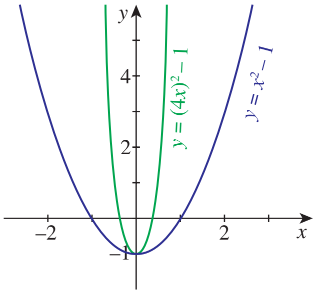
$y = (4x)^2 - 1$ అను రేఖాచిత్రము పటము 1.58లో చూపబడినది. పటము 1.55 మరియు పటము 1.58కి మధ్యగల వ్యత్యాసమును గుర్తించగలరా? ఈ సమస్యనందు x అక్షముని ప్రమేయములో చూపినట్లు నాలుగు యొక్క గుణిజముగా మార్చబడెను (పటము 1.58) దీనిని చూచునప్పుడు $(4x)^2 - 1$ నకు $x = \frac{1}{4}$ అని ప్రతిక్షేపించినప్పుడు $1^2 - 1$ లభించును. ఇవ్వబడిన ప్రమేయమునకు x=1 ని ప్రతిక్షేపించిన విధముగా

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 54 24-01-2023 16:20:27

ఉన్నది (పటము 1.55) పటము 1.59లో ఉన్న విధముగా ఒకే విధమైన అక్షములను గుర్తించినప్పుడు $y = (4x)^2 - 1$ అను పరావలయము సన్నగా చూపించుచున్నది. ఇక్కడ x అంతరములు వేర్వేరు కాని y అంతరములు ఒకే విధముగా ఉన్నవి.



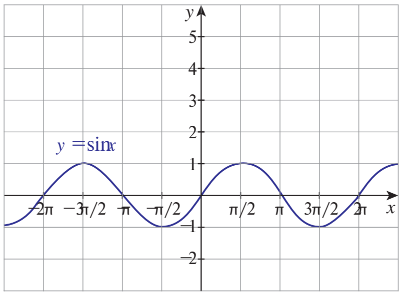
పటము 1.58



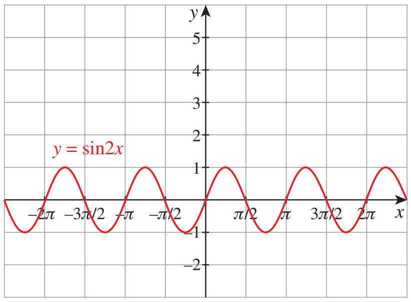
పటము 1.59

మాదిరి ఉదాహరణ 1.13

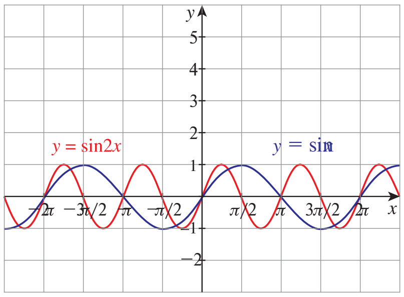
మాదిరి ఉదాహరణము 1.12లో ప్రయోగించిన విధముగా $y = \sin x$; వక్రరేఖ మరియు $y = \sin 2x$ వక్రరేఖతో పాటు వాటిని కూర్చిన రేఖాచిత్రములు పటము 1.60, 1.61 మరియు 1.62 లో లో ఇవ్వబడినవి. $\sin x$ మరియు $\sin 2x$ యొక్క అత్యల్ప మరియు అత్యధిక విలువలు ఒకేవిధముగా ఉన్నవి. కాని వాటి x అంతరములు వేర్వేరుగా ఉన్నవి. $y = \sin x$ యొక్క x అంతర ఖండనము $\pm n\pi$ మరియు $y = \sin 2x$ యొక్క అంతరములు $\pm \frac{1}{2}n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$.



పటము 1.60



పటము 1.61

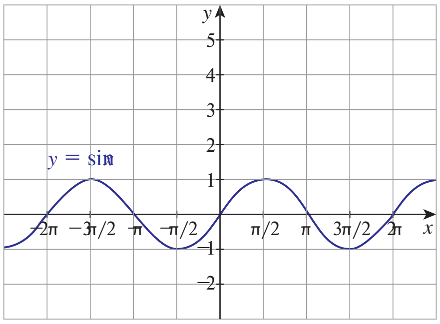


పటము 1.62

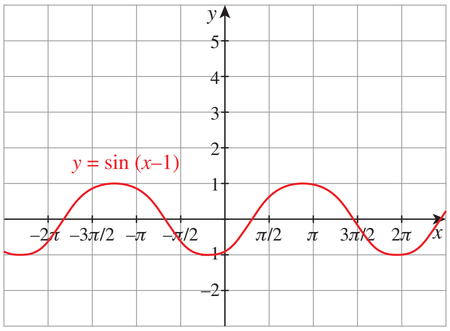
ఈ అధ్యాయము ప్రారంభములో $y = 2\sin(x-1) + 3$ రేఖాచిత్రమును గీయుట గురించి మాట్లాడుకొంటిమి. ఇప్పుడు ఈ వక్రరేఖలను, దీనింకంటె క్లిష్టమైన వక్రరేఖలను కూడా గీయుటకు సిద్ధముగా ఉన్నాము.

వివరణ 1.14 $y = 2\sin(x-1) + 3$ అను వక్రరేఖను గీచెదము.

$y = \sin x$ అను వక్రరేఖ నుండి అనువాదము మరియు విస్ఫారణమునుపయోగించి పొందగలమని స్పష్టమగుచున్నది. కావున మొదట మనము $y = \sin x$ ని గీచెదము. దీని నుండి సులభముగా $y = \sin(x-1)$ ని తర్వాత $y = 2\sin(x-1)$ ని, చివరగా $y = 2\sin(x-1) +$ ని గీయగలము (పటము 1.63 నుండి 1.66ని చూడుము)



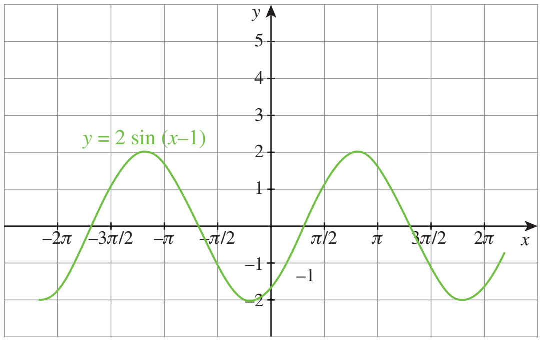
పటము 1.63



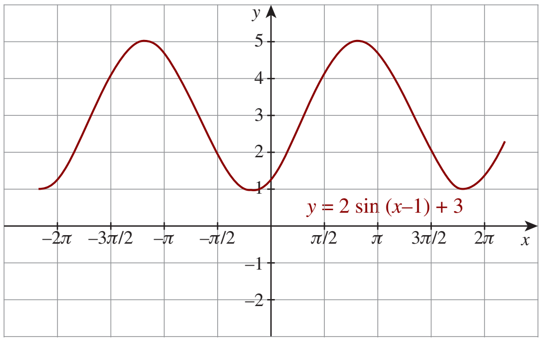
పటము 1.64

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 55

24-01-2023 16:20:29



పటము 1.65

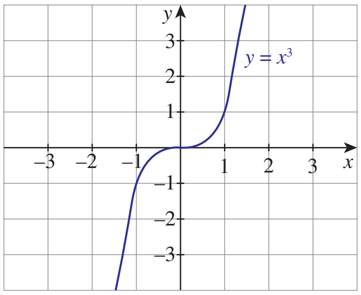


పటము 1.66

అభ్యాసము 1.4

1. $y = x^3$ అను వక్రరేఖకు పటము 1.67లో ఇచ్చిన విధముగా ఒకే విధమైన స్కేలు కొలతతో గీయుము.

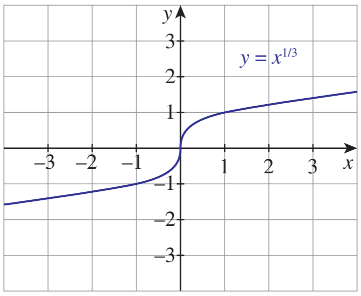
   (i) $y = -x^3$ (ii) $y = x^3 + 1$ (ii) $y = x^3 - 1$ (iv) $y = (x + 1)^3$



పటము 1.67

2. $y = x^{\left(\frac{1}{3}\right)}$ వక్రరేఖకు పటము 1.68లో ఇచ్చిన విధముగా క్రింది వాటిని గీయుము.

   (i) $y = -x^{\left(\frac{1}{3}\right)}$ (ii) $y = x^{\left(\frac{1}{3}\right)} + 1$ (iii) $y = x^{\left(\frac{1}{3}\right)} - 1$ (iv) $y = (x+1)^{\left(\frac{1}{3}\right)}$



పటము 1.68

3. ఒకే నిరూపక తలమునందు $f(x) = x^3$ మరియు $g(x) = \sqrt[3]{x}$ అను ప్రమేయములను గీయుము. $f \circ g$ ని కనుగొనుము మరియు దానిని తలమునందు గీయుము. ఫలితములను వివరించుము.

4. $y = x^2$ నుండి $y = 3(x-1)^2 + 5$ అను ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రమును పొందుటకు పద్ధతులను వ్రాయుము.

5. $y = \sin x$ వక్రరేఖ నుండి క్రింది వాటిని గీయుము

   (i) $y = \sin(-x)$ (ii) $y = -\sin(-x)$

   (iii) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ అనుగా $\cos x$

   (iv) $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ ఇది $\cos x$ అగును (త్రికోణమితిని సరిచూడుము)

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 56 24-01-2023 16:20:32

6. $y = x$ అను వక్రరేఖ నుండి క్రింది వాటిని గీయుము.

   (i) $y = -x$ (ii) $y = 2x$ (iii) $y = x + 1$

   (iv) $y = \frac{1}{2}x + 1$ (v) $2x + y + 3 = 0$

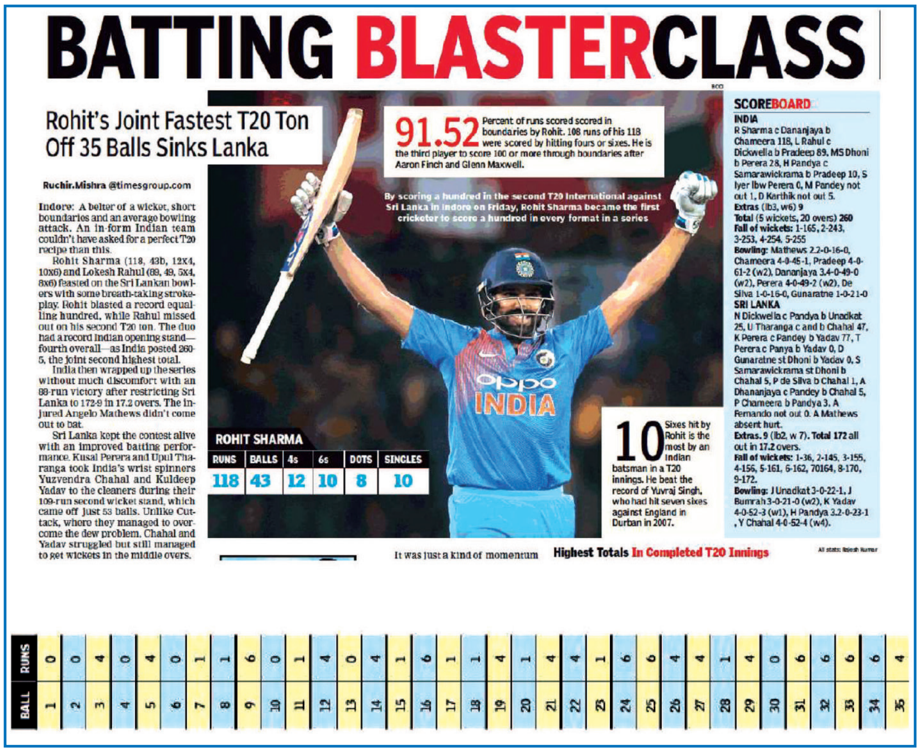
7. $y = |\,x\,|$ వక్రరేఖ నుండి క్రింది వాటిని గీయుము

   (i) $y = |x - 1| + 1$ (ii) $y = |x + 1| - 1$ (iii) $y = |x + 2| + 3$

8. $y = \sin$ వక్రరేఖ నుండి $y = \sin|x|$ ని గీయుము $\sin(-x) = -\sin x]$.

బంతులు మరియు పరుగులు

ఏమి సంబరము! ఏమి సంబంధము! ఏమి ప్రమేయము!



BATTING BLASTERCLASS

Rohit's Joint Fastest T20 Ton Off 35 Balls Sinks Lanka

Ruchir.Mishra @timesgroup.com

Indore: A belter of a wicket, short boundaries and an average bowling attack. An in-form Indian team couldn't have asked for a perfect T20 recipe than this.

Rohit Sharma (118, 43b, 12x4, 10x6) and Lokesh Rahul (89, 49, 5x4, 8x6) feasted on the Sri Lankan bowlers with some breath-taking strokeplay. Rohit blasted a record equalling hundred, while Rahul missed out on his second T20 ton. The duo had a record Indian opening stand—fourth overall—as India posted 260-5, the joint second highest total.

India then wrapped up the series without much discomfort with an 88-run victory after restricting Sri Lanka to 172-9 in 17.2 overs. The injured Angelo Mathews didn't come out to bat.

Sri Lanka kept the contest alive with an improved batting performance. Kusal Perera and Upul Tharanga took India's wrist spinners Yuzvendra Chahal and Kuldeep Yadav to the cleaners during their 109-run second wicket stand, which came off just 53 balls. Unlike Cuttack, where they managed to overcome the dew problem, Chahal and Yadav struggled but still managed to get wickets in the middle overs.

91.52 Percent of runs scored scored in boundaries by Rohit. 108 runs of his 118 were scored by hitting fours or sixes. He is the third player to score 100 or more through boundaries after Aaron Finch and Glenn Maxwell.

By scoring a hundred in the second T20 International against Sri Lanka in Indore on Friday, Rohit Sharma became the first cricketer to score a hundred in every format in a series

ROHIT SHARMA

RUNS	BALLS	4s	6s	DOTS	SINGLES
118	43	12	10	8	10

10 Sixes hit by Rohit is the most by an Indian batsman in a T20 innings. He beat the record of Yuvraj Singh, who had hit seven sixes against England in Durban in 2007.

SCOREBOARD

INDIA
R Sharma c Dananjaya b Chameera 118, L Rahul c Dickwella b Pradeep 89, MS Dhoni b Perera 28, H Pandya c Samarawickrama b Pradeep 10, S Iyer lbw Perera 0, M Pandey not out 1, D Karthik not out 5.
Extras (lb3, w6) **9**
Total (5 wickets, 20 overs) **260**
Fall of wickets: 1-165, 2-243, 3-253, 4-254, 5-255
Bowling: Mathews 2.2-0-16-0, Chameera 4-0-45-1, Pradeep 4-0-61-2 (w2), Dananjaya 3.4-0-49-0 (w2), Perera 4-0-49-2 (w2), De Silva 1-0-16-0, Gunaratne 1-0-21-0

SRI LANKA
N Dickwella c Pandya b Unadkat 25, U Tharanga c and b Chahal 47, K Perera c Pandey b Yadav 77, T Perera c Panya b Yadav 0, D Gunaratne st Dhoni b Yadav 0, S Samarawickrama st Dhoni b Chahal 5, P de Silva b Chahal 1, A Dhananjaya c Pandey b Chahal 5, P Chameera b Pandya 3, A Fernando not out 0. A Mathews absent hurt.
Extras. 9 (lb2, w 7). **Total 172** all out in 17.2 overs.
Fall of wickets: 1-36, 2-145, 3-155, 4-156, 5-161, 6-162, 70164, 8-170, 9-172.
Bowling: J Unadkat 3-0-22-1, J Bumrah 3-0-21-0 (w2), K Yadav 4-0-52-3 (w1), H Pandya 3.2-0-23-1, Y Chahal 4-0-52-4 (w4).

It was just a kind of momentum

Highest Totals In Completed T20 Innings

All stats: Rajesh Kumar

BALL	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
RUNS	0	0	4	0	4	0	1	1	6	0	1	4	0	4	1	6	1	1

BALL	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
RUNS	4	1	4	4	1	6	6	4	4	1	4	0	6	6	6	6	4

ఆధారము : టైమ్స్ ఆఫ్ ఇండియా

1. పైన ఇచ్చిన దత్తాంశము నుండి క్రింది వాటిని తెలుపుము.

   (i) ఒక సంబంధము

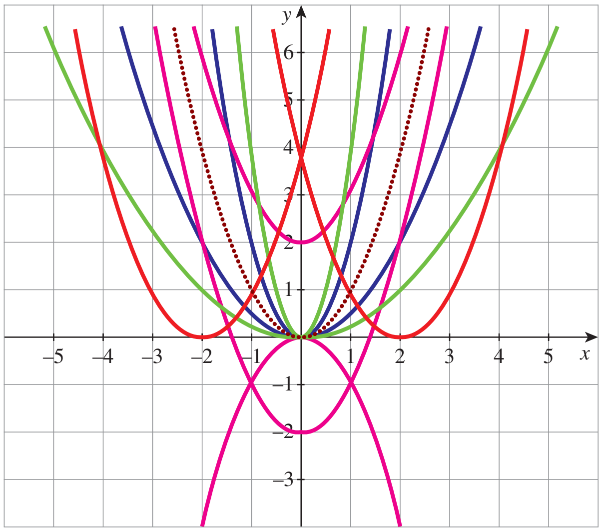
   (ii) ఒక ప్రమేయము

   (iii) ద్విగుణ ప్రమేయము

   (iv) దత్తాంశము నుండి ఏక-ఏక ప్రమేయమును పొందగలమా? లేదనిన ఎందుకు?

2. పటము 1.69లో ఇచ్చిన వక్రరేఖలను గుర్తించుము మరియు ఆధార వక్రరేఖ $y = x^2$ నకు సరియగునట్లు (బిందువు రేఖ యొక్క రేఖాచిత్రము) స్కేలును చుస్తూ గుర్తించుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 57 24-01-2023 16:20:33



పటము 1.69

అభ్యాసము 1.5

సరియైన లేక అనువైన సమాధానమును ఎంపిక చేయుము.

1. $A=\{(x,y): y=e^{x}, x\in\mathbb{R}\}$ అయినప్పుడు మరియు $B=\{(x,y): y=e^{-x}, x\in\mathbb{R}\}$ అయిన, $n(A\cap B)$ అనునది

   (1) అనిర్వచితము (2) 0 (3) 1 (4) 2

2. $A=\{(x,y): y=\sin x, x\in\mathbb{R}\}$ మరియు $B=\{(x,y): y=\cos x, x\in\mathbb{R}\}$ అయిన, $A\cap B$ కలిగియుండు మూలకములు

   (1) ఏ మూలకములు లేవు (2) అనిర్వచితమైన అనేక మూలకములు

   (3) ఒకే ఒక మూలకము (4) కనుగొనలేము

3. $A=\{0, -1, 1, 2\}$ సమితికి $|x^2+y^2|\le 2$ గా ఉండునట్లు R అను సంబంధమును నిర్వచించినప్పుడు, క్రింది వాటిలో ఏది సరియైనది?

   (1) $R=\{(0,0),(0,-1),(0,1),(-1,0),(-1,1),(1,2),(1,0)\}$

   (2) $R^{-1}=\{(0,0),(0,-1),(0,1),(-1,0),(1,0)\}$

   (3) R యొక్క క్షేత్రము $\{0, -1, 1, 2\}$

   (4) R యొక్క వ్యాప్తి $\{0, -1, 1\}$

4. $f(x)=|x-2|+|x+2|$ అయిన, $x\in\mathbb{R}$ నకు

   (1) $f(x)=\begin{cases} -2x \; ; & x\in(-\infty,-2] \text{ అయినప్పుడు} \\ 4 \; ; & x\in(-2,2] \text{ అయినప్పుడు} \\ 2x \; ; & x\in(2,\infty) \text{ అయినప్పుడు} \end{cases}$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 58 24-01-2023 16:20:34

(2) $f(x)=\begin{cases} 2x & ; x\in(-\infty,-2] \\ 4x & ; x\in(-2,2] \\ -2x & ; x\in(2,\infty) \end{cases}$

(3) $f(x)=\begin{cases} -2x & ; x\in(-\infty,-2] \\ -4x & ; x\in(-2,2] \\ 2x & ; x\in(2,\infty) \end{cases}$ (4) $f(x)=\begin{cases} -2x & ; x\in(-\infty,-2] \\ 2x & ; x\in(-2,2] \\ 2x & ; x\in(2,\infty) \end{cases}$

5. $\mathbb{R}$ అనునది వాస్తవ సంఖ్యల సమితి, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ అను తలము యొక్క ఉపసమితులను తీసుకొనుము. $S=\{(x,y): y=x+1$ మరియు $0<x<2\}$; $T=\{(x,y): x-y\}$ అనునది పూర్ణసంఖ్య అయిన క్రింది వాటిలో ఏది సరియైనది?
(1) T అనునది తుల్యసంబంధము కాని S తుల్యసంబంధము కాదు
(2) S మరియు T రెండును తుల్యసంబంధములు కావు
(3) S మరియు T లు రెండును తుల్యసంబంధములగును.
(4) S అనునది తుల్యసంబంధము కాని T తుల్యసంబంధము కాదు.

6. సార్వత్రిక సమితి $\mathbb{N}$ కు A మరియు B అనునవి, రెండు ఉపసమితులు $\mathbb{N}$ అనునది సహజ సంఖ్యల సమితి. అయిన $A'\cup[(A\cap B)\cup B']$ అనునది
(1) A (2) A' (3) B (4) $\mathbb{N}$

7. గణితము మరియు రసాయన శాస్త్రము రెండింటిని తీసుకొనిన విద్యార్థుల సంఖ్య 70 ఇది గణితములో 10% నమోదును మరియు రసాయన శాస్త్రములో 14% నమోదును చూపుచున్నది. రెండిటిలో ఏదైన ఒక్కదానిని ఎంపిక చేసుకోను విద్యార్థుల సంఖ్య
(1) 1120 (2) 1130
(3) 1100 (4) దత్తాంశము చాలలేదు

8. $n[(A\times B)\cap(A\times C)]=8$ మరియు $n(B\cap C)=2$ అయిన, $n(A)$ అనునది
(1) 6 (2) 4 (3) 8 (4) 16

9. $n(A)=2$ మరియు $n(B\cup C)=3$, అయిన $n[(A\times B)\cup(A\times C)]$ అనునది
(1) 2^3 (2) 3^2 (3) 6 (4) 5

10. A మరియు B సమితులకు రెండింటికి ఉమ్మడి మూలకాలు 17, అయిన $A\times B$ సమితికి చెందిన ఉమ్మడి మూలకముల సంఖ్య మరియు $B\times A$ నకు
(1) 2^{17} (2) 17^2 (3) 34 (4) దత్తాంశము చాలలేదు.

11. శూన్యేతర సమితులు A మరియు B లకు $A\subset B$ అయిన $(A\times B)\cap(B\times A)$ కు సమానమైనది
(1) $A\cap B$ (2) $A\times A$
(3) $B\times B$ (4) పైనున్నవాటిలో ఏదికాదు.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 59 24-01-2023 16:20:36

12. మూడు మూలకములను కలిగిన సమితి యొక్క సంబంధముల సంఖ్య

(1) 9 (2) 81 (3) 512 (4) 1024

13. ఒకటి కంటె ఎక్కువ మూలకములను కలిగిన X సమితి నకు R అనునది సార్వత్రిక సంబంధము అయిన R అనునది

(1) పరావర్తనము కాదు (2) సౌష్ఠవము కాదు

(3) సంక్రమణము (4) పైవి ఏవికావు

14. $X = \{1, 2, 3, 4\}$ మరియు $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3),(2,1),(3,1),(1,4),(4,1)\}$ అయిన R అనునది

(1) పరావర్తనము (2) సౌష్ఠవము

(3) సంక్రమణము (4) తుల్యము

15. $\dfrac{1}{1-2\sin x}$ ప్రమేయము యొక్క వ్యాప్తి

(1) $(-\infty, -1)\cup\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$ (2) $\left(-1, \frac{1}{3}\right)$

(3) $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$ (4) $(-\infty, -1)\cup\left[\frac{1}{3}, \infty\right)$

16. $f(x) = |\lfloor x\rfloor - x|, x \in \mathbb{R}$ ప్రమేయము యొక్క వ్యాప్తి

(1) $[0, 1]$ (2) $[0, \infty)$ (3) $[0, 1)$ (4) $(0, 1)$

17. $f(x) = x^2$ అను నియమము ద్విగుణమగును, క్షేత్రము, ప్రతిక్షేత్రము క్రింది విధముగా ఉన్నప్పుడు

(1) $\mathbb{R}, \mathbb{R}$ (2) $\mathbb{R}, (0, \infty)$ (3) $(0, \infty), \mathbb{R}$ (4) $[0, \infty), [0, \infty)$

18. m మూలకములను కలిగిన సమితి నుండి n మూలకములు కలిగిన సమితికి గల స్థిర ప్రమేయముల సంఖ్య

(1) mn (2) m (3) n (4) $m+n$

19. $f:[0,2\pi]\to[-1,1]$ అను ప్రమేయమును, $f(x) = \sin x$ గా నిర్వచించిన అది

(1) ఏక – ఏక ప్రమేయము (2) ద్విగుణము

(3) ద్విగుణత్వము (4) నిర్వచించలేదు

20. $f:[-3,3]\to S$ ని $f(x) = x^2$ గా నిర్వచించినప్పుడు అది ద్విగుణమైన, S అనునది

(1) $[-9, 9]$ (2) $\mathbb{R}$ (3) $[-3, 3]$ (4) $[0, 9]$

21. $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$ మరియు $f = \{(1, a), (4, b), (2, c), (3, d), (2, d)\}$ అయిన f ఒక

(1) ఏక – ఏక ప్రమేయము (2) ద్విగుణ ప్రమేయము

(3) ఏక – ఏక ప్రమేయము కానిది (4) ప్రమేయము కానిది

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 60 24-01-2023 16:20:37

22. $f(x)$ యొక్క విలోమము $f(x)=\begin{cases} x & ; \quad x<1 \text{ అయినప్పుడు} \\ x^2 & ; \quad 1 \le x \le 4 \text{ అయినప్పుడు} \\ 8\sqrt{x} & ; \quad x>4 \text{ అయినప్పుడు} \end{cases}$

(1) $f^{-1}(x)=\begin{cases} x & ; x<1 \\ \sqrt{x} & ; 1 \le x \le 16 \\ \frac{x^2}{64} & ; x>16 \end{cases}$ (2) $f^{-1}(x)=\begin{cases} -x & ; x<1 \\ \sqrt{x} & ; 1 \le x \le 16 \\ \frac{x^2}{64} & ; x>16 \end{cases}$

(3) $f^{-1}(x)=\begin{cases} x^2 & ; x<1 \\ \sqrt{x} & ; 1 \le x \le 16 \\ \frac{x^2}{64} & ; x>16 \end{cases}$ (4) $f^{-1}(x)=\begin{cases} 2x & ; x<1 \\ \sqrt{x} & ; 1 \le x \le 16 \\ \frac{x^2}{8} & ; x>16 \end{cases}$

23. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ నకు $f(x) = 1-|x|$ అని నిర్వచించబడినప్పుడు f యొక్క వ్యాప్తి

(1) $\mathbb{R}$ (2) $(1, \infty)$ (3) $(-1, \infty)$ (4) $(-\infty, 1]$

24. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ నకు $f(x)=\sin x+\cos x$ అని నిర్వచించబడిన అది

(1) ఒక బేసి ప్రమేయము (2) బేసి ప్రమేయము కాదు సరిప్రమేయము కాదు

(3) సరిప్రమేయము (4) బేసి మరియు సరి ప్రమేయములగును

25. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \dfrac{(x^2+\cos x)(1+x^4)}{(x-sin\, x)(2x-x^3)} + e^{-|x|}$ అనునది

(1) బేసి ప్రమేయము

(2) బేసి ప్రమేయము కాదు సరి ప్రమేయము కాదు

(3) సరి ప్రమేయము

(4) బేసి మరియు సరి రెండు ప్రమేయములగును.

సారాంశము (Summary)

ఈ అధ్యాయము నందు మనము గ్రహించిన విషయములు

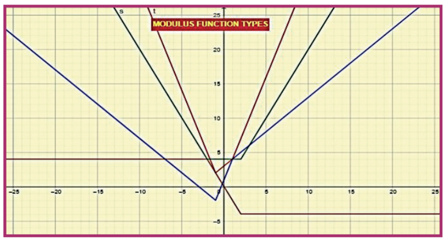
- సమితి
  - ఉపసమితి, ఉపరి సమితి, అల్పమైన ఉపసమితి, శుద్ధఉపసమితి, సరికాని ఉపసమితి
  - శూన్యసమితి, ఘాత సమితి, విశ్వసమితి, ఏకమూలక సమితి, పరిమిత సమితి, అపరిమిత సమితి.
  - సమితి యొక్క కార్డినాలిటి
  - సమ్మేళనము, విచ్ఛేదనము, పూరకము, సమితి వ్యత్యాసము, సౌష్ఠవ వ్యత్యాసము
  - లక్షణాలు మరియు డీమార్గన్ సూత్రములు
  - కార్టీషియన్ లబ్దము
- తరగతులు
  - స్థిరసంఖ్యలు, ఆధార మరియు స్వతంత్ర చరరాశులు
  - వివృత, సంవృతము, పరిమిత మరియు అపరిమిత తరగతులు మరియు సామీప్యము

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 61 24-01-2023 16:20:39

- సంబంధములు
  - క్షేత్రము, మరియు సంబంధము యొక్క వ్యాప్తి
  - అంత్య సంబంధములు (శూన్య మరియు విశ్వ)
  - సంబంధము యొక్క విలోమము
  - పరావర్తనము, సౌష్ఠవము, సంక్రమణము, తుల్యసంబంధము
- ప్రమేయములు
  - నిర్వచనము, క్షేత్రము, ప్రతిక్షేత్రము, వ్యాప్తి, ప్రతిబింబము, పూర్వప్రతిబింబము
  - పట్టిక, రేఖాచిత్రము ప్రయోగాత్మక మరియు విచ్ఛిన్న రూపములు
  - తత్సమ ప్రమేయము, స్థిర ప్రమేయము, శూన్యప్రమేయము, మాప ప్రమేయము, సిగ్నమ్ ప్రమేయము, గరిష్ఠపూర్ణ సంఖ్యల ప్రమేయము, కనిష్ఠ పూర్ణసంఖ్యల ప్రమేయము.
  - అన్వేక ప్రమేయము, సంగ్రస్త ప్రమేయము మరియు ద్విగుణప్రమేయము.
  - నిలువు రేఖ పరీక్ష క్షితిజసమాంతర పరీక్ష
  - ప్రమేయముల సంయుక్తము, ప్రమేయముల విలోమము
  - వాస్తవ విలువల ప్రమేయము యొక్క సంకలనము మరియు గుణకారము
  - బహుపద ప్రమేయము, రేఖీయ ప్రమేయము, ఘాత ప్రమేయము, సంవర్గమాన ప్రమేయము, కరణీయ ప్రమేయము, వ్యుత్క్రమ ప్రమేయము
  - బేసి మరియు సరి ప్రమేయములు
- ప్రమేయముల రేఖాచిత్రీకరణము
  - పరావర్తనము, అనువాదము, విస్ఫారణము
  - కొన్నిరేఖాచిత్రములను గీయుట వలన క్లిష్టమైన ప్రమేయములను సూచించునట్లు తెలియును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 62 24-01-2023 16:20:39

అంతర్జాల కృత్యము - 1 (అ)



ఊహించబడిన ఫలితము

మెట్టు - 1

బ్రౌసర్‌ని ఓపెన్ చేస క్రింద ఇవ్వబడిన URL లింక్‌ని టైప్ చేయవలెను. (లేక) QR కోడ్‌ని స్కాన్ చేయవలెను.

మెట్టు - 2

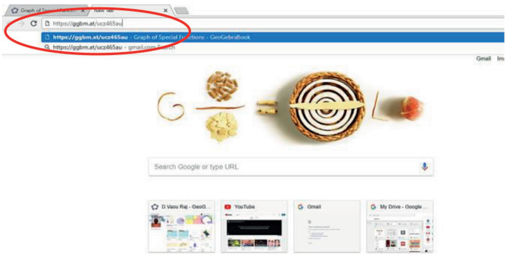
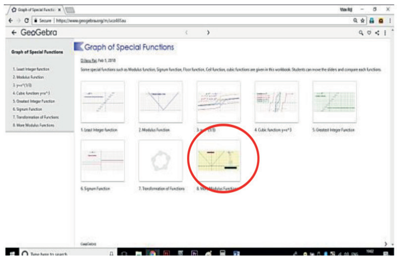
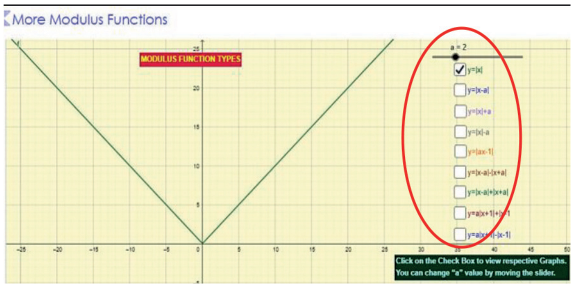
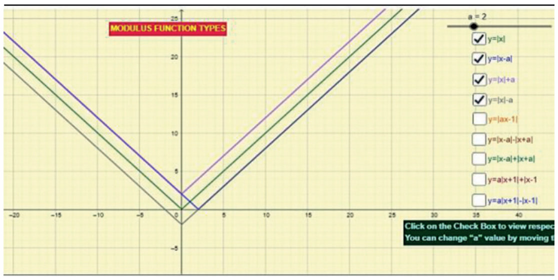
"ప్రత్యేక ప్రమేయముల రేఖాచిత్రములని" వర్క్ బుక్ ఓపెన్ అగును. 7 వర్క్‌షీట్‌లు ప్రమేయము, సంబంధములు మరియు రేఖాచిత్రములకు సంబంధించి ఇవ్వబడును. "అనేక మాప ప్రమేయములు" అని ఎంపిక చేయవలెను.

మెట్టు - 3

వర్క్ షీట్ కి కుడివైపున అనేక మాప ప్రమేయములకు సంబంధించి చెక్ బాక్స్‌లు ఇవ్వబడినవి.

మెట్టు - 4

ఆ రేఖాచిత్రమును చూచుటకు ఏదైన ఘట్టము మీద క్లిక్ చేయవలెను. ప్రమేయమును మార్చుటకు మరియు గమనించుటకు స్లైడ్‌ని జరపవలెను.

మెట్టు -1	మెట్టు -2
	
మెట్టు -3	**మెట్టు -4**
	

ఇదేవిధముగా మరో వర్క్‌షీట్‌ని ఓపెన్ చేసి ప్రమేయములు, రేఖాచిత్రములకు సంబంధించి మరింత పరిజ్ఞానమును పొందగలము.

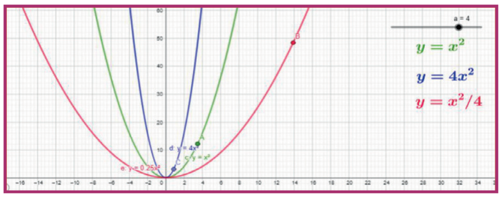
* చిత్రములు మార్గమును చూపుటకు మాత్రము

ప్రత్యేక ప్రమేయముల రేఖాచిత్రముల నందు లింక్‌ని బ్రౌస్ చేయుము https://ggbm.at/ucz465au QR ని స్కాన్ చేయుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 63 24-01-2023 16:20:39

అంతర్జాల కృత్యము - 1 (ఆ)

ఊహించబడిన ఫలితము



మెట్టు -1

బ్రౌసర్‌ని ఒపెన్ చేసి మరియు URL లింక్‌ని టైప్ చేయుము లేక QR కోడ్‌ని స్కాన్ చేయుము.

మెట్టు -2

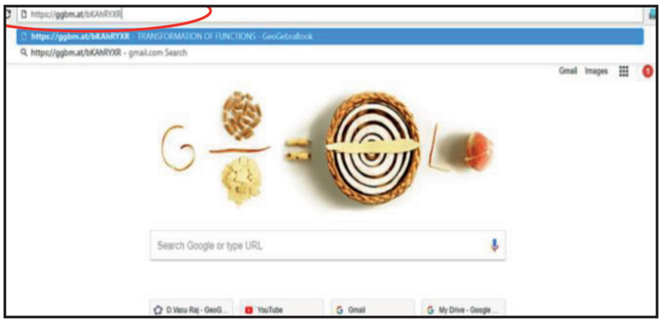
"ట్రాన్స్‌ఫరమేషన్ ఆఫ్ ఫంక్షన్స్" అని పిలువబడు జియోజిబ్రా వర్క్‌బుక్ వచ్చును. ఇందు ఈ పాఠమునకు సంబంధించిన పది వర్క్‌షీట్‌లు ఉండును.

మెట్టు - 3

ఒకదాని తర్వాత ఒకటిగా వర్క్‌షీట్‌లను సెలక్ట్‌చేసి దానిని అన్వయించుము. అవి 1. పరావర్తనము 2. అనువాదము 3. విస్ఫారణము అను రూపాంతరములు.

మరియు సైన్ ప్రమేయములను పోల్చడానికి వర్క్‌షీట్ కూడా కలదు. మనము చేయవలసిని స్లైడర్లను జరిపి వర్క్‌షీట్లలో పోల్చడం మాత్రమే.

మెట్టు -1

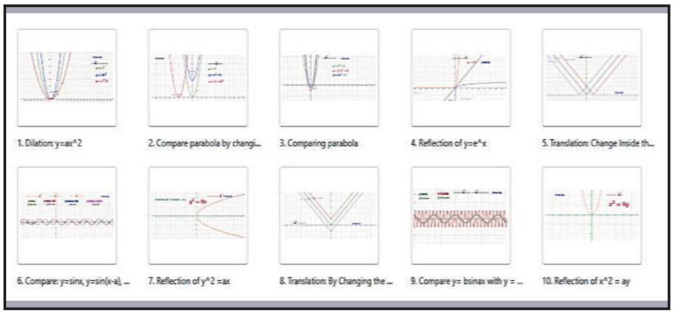


మెట్టు -2

ప్రమేయముల రూపాంతరములు

1. విస్ఫారణము $y = a \times {}^\wedge 2$
2. x యొక్క గుణకమును మరియు స్థిరసంఖ్యను మార్చి పరావలయమును పోల్చుము
3. పరావలయమును పోల్చుట
4. $y = e \wedge x$ యొక్క పరావర్తనము
5. అనువాదము : మాపము లోపల మార్పు
6. పోల్చుము : $y = \sin x,\ y = \sin(x - a)\ \ y = d\sin(x - a),\ y = \sin(x - a) + c$
7. $y \wedge 2 = ax$ యొక్క పరావర్తనము
8. అనువాదత : స్థిర సంఖ్యను మార్చునప్పుడు
9. పోల్చుము : $d\sin x$, a తో $y = \sin x$
10. $x \wedge 2 = ay$ యొక్క పరావర్తనము

మెట్టు -3



* పటములు సూచికలు మాత్రమే.

ప్రమేయముల రూపాంతరములోని లింక్ బ్రౌస్ చేయుము : https://ggbm.at/ucz465au

ECSBG

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_1.indd 64 24-01-2023 16:20:39

అధ్యాయము **2**

ప్రాథమిక బీజగణితము

నేను చూడగలను అయితే నమ్మలేను.

\- రిచర్డ్‌డెక్కెండ్

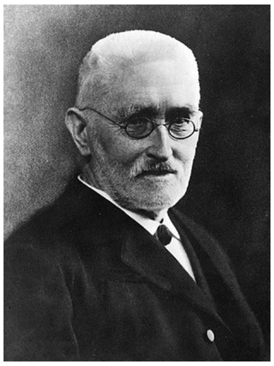
2.1 పరిచయం (Introduction)

పరిమాణాలను సాంకేతిక రూపంలో తీసుకోని వ్రాసి వాటి మధ్య వుండే సంబంధములను వ్యక్తపరచు ఒక గణితశాస్త్ర ఒక విభాగమే బీజగణితము ఈ సంకేతములను చరరాశులు అంటారు. ఈ తరగతిలో చరరాశులను వాస్తవ సంఖ్యలుగా మాత్రమే గుర్తించగలము. ఈ చరరాశులను తీసిసుకొని మరియు లెక్కలలో ఉపయోగించుట అనునది సంఖ్యల వలె అమరివున్నది. ఒక సమాసంలోని చలరాశులకు బదులుగ వాస్తవ సంఖ్యలను ప్రతిక్షేపించగా వచ్చు సంఖ్య ఒక వాస్తవ సంఖ్య అగును. ఒక పరిమాణం ఒక లేదా ఒక గణిత ప్రవచనం చరరాశుల మూలముగా వ్రాసినచో దానిలోని చరరాశులకు తగిన సంఖ్య విలువలను ప్రతిక్షేపించుటకు వీలుఅవుతుంది. ఇది బీజగణితమును ఒక శక్తివంతమైన సాధనంగా తయారుచేయును. దీని కారణంగా గణితంలో మాత్రమే కాకుండా పలురంగాలలో నిత్య జీవితంలో కూడ బీజగణితము అనేక విధంగా ఉపయోగడుచున్నది. పూర్తి గణితంనకు వాస్తవ సంఖ్యల భావన ప్రాథమికమైనది. 19 వ శతాబ్దంలో మాత్రమే వాస్తవ సంఖ్యా వ్యవస్థను బాగుగా అవగాహన చేసుకొన్నారు. అకరణీయ సంఖ్యలను విస్తరించవలసిన అవసరము గణితచరిత్ర ఆరంభములోనే భావించారు.

పైథాగొరియన్లకు $\sqrt{2}$ అనేది ఒక అకరణీయ సంఖ్య కాదని తెలుసు.

క్రీ.పూ. 800 సం,మునుపు ఏర్పడిన సులభ సూత్రంలో కరణీయ సంఖ్యల అమరికలను గూర్చి తెలియజేస్తున్నది ఆర్య బట్ట (476 – 550) π కు రమారమి విలువను కనుగొనెను.

భారతీయ గణిత శాస్త్రవేతలు బ్రహ్మగుప్త. (598-670) మరియు భాస్కరాచార్యులు (1114-1185) వాస్తవ సంఖ్యవ్యవస్థ మరియు బీజగణితము వాటిని అర్థం చేసుకొనుటలో ప్రముఖ పాత్రవహించిరి. రెండునూ ధన మరియు ఋణ మూలాలు కల్గిన సాదారణ వర్గ సమమీకరణములకు బ్రహ్మగుప్త సాధనలను కనుగొనిరి.



రెచర్డ్ డెడికైండ్

(1831-1916)

ఒకటికన్న ఎక్కువ తెలియనిరాశులు కల్గిన వర్గసమీకరణములకు భాస్కరాచార్యులు సాధించారు ఋణ మరియు కరణీయ సాధనలు కనుగొనిరి. అతి ముఖ్యమైన వాస్తవ సంఖ్య సున్నను కనుగొనుటలో భారతీయులు పాలుపంచుకొనిరి.

రెనేడ్‌స్కార్టెస్ (1596 -1650) బహుపద సమాసముల సమీకరణము యొక్క మూలములను వివరించుటలో కల్పితమూలములను వేరుచేసిచూపుటకు వాస్తవ అను పదమును పరిచమం చేస్తారు.

రెచర్డ్‌డెడికైండ్ (1831-1916) ద్వారా వాస్తవ సంఖ్య వ్యవస్థ లోతైన భావన నిర్మించినారు.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 65 10-03-2023 12:07:45

అభ్యసన లక్ష్యాలు:

ఈ అధ్యాయం ముగింపులో విద్యార్థులు క్రింది వాటిని తెలుసుకోవాలని ఆశిస్తున్నాము.

- వాస్తవ సంఖ్యల భావన మరియు వాటి ధర్మాలు.
- పరమమూల్యవిలువ, బహుపదాలు, ఘాతాలు, కరణిమూలము, సంవర్గమానములు మరియు ఏక చరరాశులు కల్గిన ప్రమేయాలు.
- పై ప్రమేయంలు గల సమీకరణములు మరియు అసమీకరణములకు సాధన కనుగొను పద్ధతి
- రెండు చరరాశులు కలిగిన ఏకఘాత అసమీకరణల సాధనను కనుగొనుట మరియు కార్టీషియన్ తలంలో ఆ సాధనములను రేఖాచిత్రం పై చూపుట.

2.2 వాస్తవ సంఖ్య వ్యవస్థ (Real Number System)

మొదట వాస్తవ సంఖ్య వ్యవస్థ ఎలా అభివృద్ధి చెందినది. అని మనము గుర్తు చేసుకొందాము. సహజ సంఖ్యల $\mathbb{N}$ నుండి ప్రారంభిద్దాం.

2.2.1 అకరణీయ సంఖ్యలు (Rational Numbers)

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ అనేది. వస్తువు లెక్కించుటకు సరిపోవును అని గమనించుము. నష్టము లేదా అప్పును నిర్వహించుటకు అనుగుణంగా $\mathbb{N}$ ను పూర్ణ సంఖ్యల సమితి $\mathbb{Z} = \{\cdots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$ కు విస్తరించారు. ఈ సమితిలో సహజ సంఖ్యలు సున్న, ఋణా సహజసంఖ్యలు ఉంటుంది. $\{0, 1, 2, 3, \cdots\}$ అనునవి. రేఖాచిత్రం సమితి అని అంటాము. దీనిని $\mathbb{W}$ చేత సూచిస్తాము. ఈ సమితి సహజసంఖ్యల సమితి నుండి '0' అనే ఒకే ఒక మూలకము మాత్రమే వేరు చేయబడుచున్నది. ఇప్పుడు ఒక కేకును 5 సమభాగాలుగా చేయుటను $5x = 1$ అను సమీకరణం సాధనను కనుగొనుటకు సమానం అగును. కాని దాని సాధనను $\mathbb{Z}$ లో మాత్రము కనుగొనలేము. కావున $\mathbb{Z}$ ను $\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} / m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$ భిన్నంలతో విస్తరించారు.

కావున $\mathbb{Q}$ లో గల ప్రతిసంఖ్య అకరణీయ సంఖ్య అని పిలువబడుచున్నది. అకరణీయ సంఖ్యలకు కొన్ని ఉదాహరణలు

$$-5, \frac{-7}{3}, 0, \frac{22}{7}, 7, 12$$

అకరణీయ సంఖ్యను అంతమయ్యే దశాంశము లేక అంతము కాని ఆవర్తనము లేక అనంత దశాంశములుగా కల్గిన సమితి అని ముందు తరగతిలో నేర్చుకొనియున్నాము.

$$-5.0,\ -2.333\cdots,\ \frac{25}{99} = 0.252525\cdots,\ \frac{2}{3} = 0.6666\cdots,\ 7.14527836231231231\cdots$$

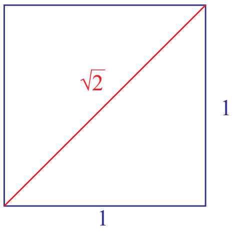
అనేవి అకరణీయ సంఖ్యలకు కొన్ని ఉదాహరణులు.

2.2.2 సంఖ్యారేఖ (The Number Line)

మనము సంఖ్యారేఖను గుర్తు తెచ్చుకొనెదము. ఇది 0 ను కేంద్రముగాను దానికి కుడివైనన 1 ను కల్గిన క్షితిజ సమాంతర రేఖ అగును. 0 కు 1 కి మధ్య దూరము 1 ప్రమాణము. అని నిర్వచించెదము. ఇప్పుడు 1కి కుడివైపున 1 ప్రమాణ దూరంలో 2 ను గుర్తించుము. ఇదే విధంగా x అను ధన అకరణీయ సంఖ్య 0 నుండి

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 66 10-03-2023 12:07:46

కుడివైపున ప్రమాణముల దూరంలో ఆ రేఖపై గుర్తించగలము. ఇదే విధంగా ఋణ అకరణీయ సంఖ్య $-r, r>0$ ను ఒకు ఎడమవైపు r ప్రమాణ దూరంలో గుర్తించగలం. ఇంకనూ $x, y \in \mathbb{Q}$, $x<y$ ను y కు ఎడమవైపు x ప్రమాణ దూరంలో గుర్తించగలము. ఇంకను $x<\frac{x+y}{2}<y$ కావున రెండు వేరేవేరు అకరణీయ సంఖ్యలకు మధ్యలో మరొక అకరణీయ సంఖ్య వుండును.



పటము 2.1

ప్రశ్న : పూర్తి సంఖ్యారేఖను అకరణీయ సంఖ్యలతో మనము నింపవచ్చునా?

దీనికి జవాబు "వీలుకాదు" అనుటను క్రింది విధంగా వివరించవచ్చును. భుజం పొడవు ఒక ప్రమాణం కల్గిన చతురస్రమును తీసుకొనిన పైథాగర్ సిద్ధాంతం ప్రకారము. దాని కర్ణము పొడవు $\sqrt{2}$ ప్రమాణం అగును.

2.2.3 కరణీయ సంఖ్యలు (Irrational Numbers)

సిద్ధాంతము 2.1 $\sqrt{2}$ అనునది ఒక అకరణీయ సంఖ్య కాదు.

నిరూపణ : $\sqrt{2}$ ఒక అకరణీయ సంఖ్య అనుకొందాం. $\sqrt{2}=\frac{m}{n}$, ఇచ్చుట m మరియు n లు ధనపూర్ణ సంఖ్యలు మరియు వీని ఉమ్మడి కారణాంకాల 1 కంటే పెద్దది కాదు. ఇప్పుడు $m^2=2n^2$ అగుటచే m^2 అనునది ఒక సరిసంఖ్య , కావున m ఒక సరిసంఖ్య $m=2k$ అనుకొనుము. ఇంకనూ $2n^2=4k^2$ implies $n^2=2k^2$ కావున n కూడా సరిసంఖ్య

ఈ విధంగా m మరియు n అనునవి ఉమ్మడి కారణాంకము 2 ను కల్గిన సరిసంఖ్యగా మారుచున్నది. ఇది విరుద్ధము కావున $\sqrt{2}$ అనేది ఒక కరణీయ సంఖ్య అగును.

రిమార్కు (Remark)

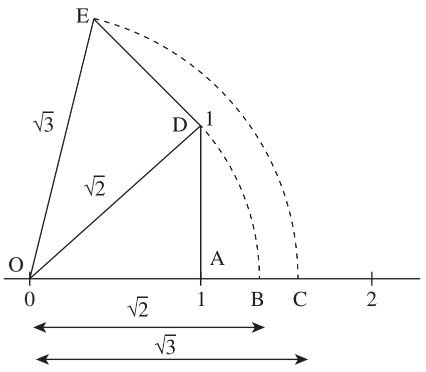
(i) పై నిరూపణలో మనము ఏది నిరూపించవలెనో దానికి వ్యతిరేఖంగా ఊహించుకొంటాము మరియు మనము విరోధ బాసమును చేరుతాము. (*proofbycontradiction*) ఈ పద్ధతిని విరుద్ధత నిరూపణ అంటారు.

(ii) సంఖ్యారేఖపై అకరణీయ సంఖ్యలచే సూచింపబడని బిందువులు కలవు

(iii) సంఖ్యారేఖపై అకరణీయ సంఖ్యలతో సంబంధం లేని ఇట్టి సంఖ్యలను కరణీయ సంఖ్యలు అంటారు. ఈ కరణీయ సంఖ్యల సమితి $\mathbb{Q}'$ చే సూచిస్తారు.

(పటము 1.2 సంఖ్యారేఖను చూడుము)

ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య అకరణీయ సంఖ్య లేక కరణీయ సంఖ్యగా వుండవలెను. కాని రెండునూ కాదు. కావున $R=Q\cup Q'$ మరియు $Q\cap Q'=\phi$ అంతమయ్యే దశాంశ సంఖ్య లేక అంతము చెందని అనంత ఆవర్తన దశాంశ సంఖ్య ఒక అకరణీయ సంఖ్య అగునని మనకు తెలుసు దశాంశ పద్ధతిలో ఒక కరణీయ సంఖ్యను వ్రాయునప్పుడు అది అంతము చెందని మరియు ఆవర్తనం కాని దశాంశ సంఖ్య వుండును. $\mathbb{R}$ అను వాస్తవ సంఖ్య సమితిని సంఖ్యారేఖపై గల సమితిగా క్రింది విధంగా దృశ్యీకరించవచ్చును. $x<y$ అయిన y కు ఎడమ వైపు x వుండును. ఒక సంఖ్యారేఖపై 2 మరియు 3 యొక్క వర్గ మూలమును గుర్తించుటను పటము 2.2 లో చూడవచ్చును.



పటము 2.2

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 67 10-03-2023 12:07:48

$\mathbb{N} \subset \mathbb{W} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ వాటిని నేర్చుకొనెదము. కరణీయ సంఖ్యలను నిత్య జీవితములో పలు చోట్లలో చూడవచ్చును. 2000 సంవత్సరములకు పూర్వము ఈజిప్ట్లు వృత్త పరిధికి మరియు దాని వ్యాసమునకు గల నిష్పత్తి ప్రతి వృత్తంనకు ఒక మాదిరి ఉంటాదని గమనించారు. ఈ స్థిరాంకమును జోహక హెన్రిచ్ లాంబెర్ట్ (Johann Heinrich Lambert) 1767లో ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించెను. దశాంశ స్థానాలకు π యొక్క విలువ 3.141592654 గా సవరించెను గణన వృత్తము వైశాల్యము మరియు గోళము ఘణపరిమాణము) ఉపయోగించు $\frac{22}{7}$ మరియు 3:14 అనునవి π యొక్క సరాసరి విలువ అగును.

గమనిక : ఒక వృత్తము యొక్క చుట్టు కొలతకును దాని వ్యాసమునకును మధ్యగల నిష్పతిగా π అనునది ఒక కరణీయ సంఖ్య అగును.

గణితము యొక్క ప్రాథమికత అను వాస్తవ సంఖ్యా వ్యవస్థ యొక్క ధర్మములను గుర్తుకు తెచ్చుకొనుము.

2.2.4 వాస్తవ సంఖ్యల ధర్మాలు (Properties of Real Numbers)

(i) $a, b \in \mathbb{R}$ అయిన $a+b \in \mathbb{R}$ మరియు $ab \in \mathbb{R}$ (రెండు వాస్తవ సంఖ్యల మొత్తంలో ఒక వాస్తవ సంఖ్య మరియు రెండు వాస్తవ సంఖ్యల లబ్ధము ఒక వాస్తవ సంఖ్య అగును)

(ii) $a, b, c \in \mathbb{R}$ అయిన $(a+b)+c = a+(b+c)$ మరియు $a(bc) = (ab)c$ పరిమిత సంఖ్యలో వాస్తవ సంఖ్యలను సంకలనము లేక గుణకారము చేయునపుడు ఏ క్రమంలోదైన గ్రూపు చేసి సంకలనం (లేదా గుణకారం చేయవచ్చును.)

(iii) ప్రతి $a \in \mathbb{R}$ కు $a+0 = a$ మరియు $a(1) = a$

(iv) ప్రతి $a \in \mathbb{R}$ కు $a+(-a) = 0$ మరియు ప్రతి $b \in \mathbb{R}-\{0\}$, $b\left(\frac{1}{b}\right) = 1$

(v) ప్రతి $a, b \in \mathbb{R}$ కు $a+b = b+a$ మరియు $ab = ba$.

(vi) $a, b, c \in \mathbb{R}$ కు $a(b+c) = ab+ac$

(vii) $a, b \in \mathbb{R}$ కు $a < b \Leftrightarrow b-a > 0$.

(viii) $a \in \mathbb{R}$ అయిన $a^2 \geq 0$.

(ix) $a, b \in \mathbb{R}$ అయిన క్రింది వాటిలో ఒకటి మాత్రికే సత్యమగును. అనగా $a = b$ లేదా $a < b$ లేదా $a > b$

(x) $a, b \in \mathbb{R}$ మరియు $a < b$ అయిన ప్రతి $c \in \mathbb{R}$ కు $a+c < b+c$ కు $c \in \mathbb{R}$.

(xi) $a, b \in \mathbb{R}$ మరియు $a < b$ అయిన ప్రతి $x > 0$ కు $ax < bx$.

(xii) $a, b \in \mathbb{R}$మరియు $a < b$ అయిన ప్రతి $y < 0$ కు $ay > by$ అగును.

అభ్యాసము 2.1

1. $\left\{\sqrt{7}, \frac{-1}{4}, 0, 3.14, 4, \frac{22}{7}\right\}$ అను ప్రతి మూలకమును $\mathbb{N}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}-\mathbb{Q}$ లేక $\mathbb{Z}$ ఆధారంగా వర్గీకరించుము.
2. $\sqrt{3}$ ఒక కరణీయ సంఖ్య అని నిరూపించుము.
   (సూచన : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ యొక్క నిరూపణ పద్ధతిని అనుసరించుము)

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 68 10-03-2023 12:07:53

3. ఏ రెండు కరణీయ సంఖ్యల వ్యత్యాసము ఒక అకరణీయ సంఖ్య అగునా? సరిచూడుము.

4. ఏ రెండు కరణీయ సంఖ్యల మొత్తము అకరణీయ సంఖ్య అగునా మరియు ఏ రెండు కరణీయ సంఖ్యల లబ్ధము అకరణీయ సంఖ్య అగునా? సరిచూడుము.

5. $\frac{1}{2^{1000}}$ కన్నా కనిష్ఠ ధన సంఖ్యలను కనుగొనుము మరియు సరిచూడుము.

2.3 పరమమూల్య విలువ (Absolute Value)

2.3.1 నిర్వచనము మరియు ధర్మాలు (Definition and Properties)

$\mathbb{R}$ లో వుండే ఒక్కొక్క మూలకము సంఖ్యారేఖపై వుండే ఒక్కొక్క బిందువుతో క్రమముగా ఒక్కదానికొకటి ఏక-ఏక సంబంధము వున్నదని గమనించాము. ప్రతి $x \in \mathbb{R}$ కు x మరియు $-x$ అనునవి ఆది బిందువు నుండి సమ దూరంలో వుంటుంది. $a \in \mathbb{R}$ సంఖ్యకు సంఖ్యారేఖపై గల 0 నుండి గల దూరమును a యొక్క పరమ మూల్య విలువ (absolute value) అంటారు. పైగా దీనిని $|a|$ అని సూచిస్తాము.

కావున ఏదైన ఒక $x \in \mathbb{R}$ కు $|x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x \geq 0 \end{cases}$ అయితే .... అయితే అని వ్రాయవచ్చును.

మరియు $|\cdot|$ ను $\mathbb{R}$ నుండి $[0, \infty)$ కు పరమమూల్య ప్రమేయంగా నిర్వచిస్తారు. దీని రేఖాచిత్రంను మొదటి అధ్యాయములో చర్చించియున్నాము.

(i) ఏదేని $x \in \mathbb{R}$ కు $|x| = |-x|$ కావున $|x| = |y|$ అయితే అయినప్పుడు మాత్రమే $x = y$ $x = -y$.

(ii) $|x - a| = r$ అయితే అయినపుడు మాత్రమే $r \geq 0$ మరియు $x - a = r$ లేక $x - a = -r$ అవుతుంది.

2.3.2 పరమ మూల్య విలువ కల్గిన సమీకరణాలు (Equations involving absolute values)

ఒక సమీకరణం లేదా అసమీకరణం యొక్క సాధన a అను వాస్తవ సంఖ్య అయిన , ఆ ప్రతిపాదనలలో చలరాశికి బదులుగా a ను ప్రతిక్షేపించగా ఆ ప్రతిపాదన సత్యం అవుతుంది.

పరమ మూల్య విలువ కలిగిన సమీకరణాలను సాధించుట నేర్చుకుందాం.

ఉదాహరణ 2.1 $|2x - 17| = 3 = x$ కు సాధన కనుగొనుము.

సాధన

ఇప్పుడు $|2x - 17|$ అయిన 3 అనగా $2x - 17 = \pm 3$

అనగా $x = 10$ లేక $x = 7$

ఉదాహరణ 2.2 $3|x - 2| + 7 = 19$ అయితే x కు సాధన కనుగొనుము.

సాధన

$3|x - 2| + 7 = 19$ అయిన $|x - 2|$ లేక $\frac{19 - 7}{3} = 4$

$x - 2 = 4$ లేక $x - 2 = -4$

అనగా సాధన $x = -2$ మరియు $x = 6$

ఉదాహరణ 2.3 $|2x-3|=|x-5|$ సాధించుము.

సాధన

$|u|=|v|$ అయితే అయినప్పుడు మాత్రమే $u=v$ లేక $u=-v$ అగును.

కనుక $|2x-3|=|x-5|$ అనునది $2x-3=x-5$ లేక $2x-3=5-x$

పై రెండు సమీకరణములను సాధించగా మనకు $x=-2$ మరియు $x=\frac{8}{3}$ వచ్చును.

కావున $x=-2$ మరియు $x=\frac{8}{3}$ లు రెండునూ సాధనలు అగును.

2.3.3 పరమ మూల్య విలువలకు కొన్ని ఫలితాలు (Some Results for Absolute Value)

(i) $x,y\in\mathbb{R}, |y+x|=|x-y|$ అయిన $xy=0$

(ii) ఏదేని $x,y\in\mathbb{R}$ కు $|xy|=|x|\,|y|$

(iii) ప్రతి $x,y\in\mathbb{R}$ మరియు $y\neq 0$ కు $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}$

(iv) ఏదేని $x,y\in\mathbb{R}$ కు $|x+y|\leq|x|+|y|$

2.3.4 పరమ మూల్య విలువలు గల అసమీకరణాలు (Inequalities involving absolute values)

ఇక్కడ పరమమూల్య అసమీకరణాల సాధన గురించి నేర్చుకొంటాము. మొదట కొన్ని సరళ అసమీకరణములైన (i) $|x|<r$ మరియు (ii) $|x|>r$ వంటి వాటి గురించి చూద్దాం.

(i) $|x|<r$ అయితే అయినపుడు నిబంధన $-r<x<r$ అని నిరూపించెదము. $|x|\geq 0$ అయినపుడు $r>0$ అని సూచించవచ్చును. x యొక్క సంకేతములను బట్టి రెండు అవకాశములు గలదు.

సందర్భము (1) $x\geq 0$, అయిన $|x|=x$. కావున $|x|<r\Rightarrow x<r$

సందర్భము (2) $x<0$: అయిన $|x|=-x$. కావున $|x|<r\Rightarrow -x<r$ అనగా $x>-r$

$|x|<r$ కు అయితే అయినపుడు నిబంధన $-r<x<r$ లేదా $x\in(-r,r)$ అగును.

(ii) $|x|>r$ అయితే అయినపుడు $x<-r$ లేక $x>r$, అని నిరూపించెదము.

$|x|>r$ అయినపుడు $r<0$ అయిన, ప్రతి $x\in\mathbb{R}$ కు

ఈ అసమీకరణమును తృప్తి పరుచును.

$r\geq 0$, అయినపుడు రెండు అవకాశాలు కలవు.

సందర్భము - 1

$x\geq 0$ అయిన $|x|=x>r$ అగును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 70 10-03-2023 12:07:58

సందర్భము - 2

$x<0$ అయిన $|x|=-x>r$ అనగా $x<-r$ కనుక $|x|>r$ అయితే అయినపుడు $x<-r$ లేక $x>r$ అనగా $x\in(-\infty,-r)\cup(r,\infty)$ అవుతుంది.

రిమార్కు (Remark)

(i) $a\in\mathbb{R}$ మరియు $|x-a|\le r$ అయితే అయినపుడునిబంధన $-r\le x-a\le r$ అగును. $x\in[a-r,\ a+r]$

(ii) $a\in\mathbb{R}$ మరియు $|x-a|\ge r$ అనేదానిని $x-a\le -r$ లేక $x-a\ge r$ అని వ్రాయవచ్చును. అయితే అయినపుడు నిబంధన $x\in(-\infty,\ a-r]\cup[a+r,\ \infty)$ అగును.

ఉదాహరణ 2.4 x కు $|x-9|<2$ ను సాధించుము.

సాధన

$|x-9|<2$ అనేది $-2<x-9<2$ అవుతుంది. కావున $7<x<11$.

ఉదాహరణ 2.5 $\left|\dfrac{2}{x-4}\right|>1,\ x\ne 4.$ ను సాధించుము.

సాధన

ఇచ్చిన అసమీకరణము నుండి $2>|x-4|$ వచ్చును అనగా $-2<x-4<2$ మరియు $x\ne 4$

అసమీకరణం అంతట 4 ను కూడగా $2<x<6$ మరియు $x\ne 4$ ను మనము పొందుతాము కావున సమితి $(2,\ 4)\cup(4,\ 6)$

అభ్యాసము 2.2

1. x కొరకు సాధించుము.

i) $|3-x|<7$ (ii) $|4x-5|\ge -2$

(iii) $\left|3-\dfrac{3}{4}x\right|\le\dfrac{1}{4}$ (iv) $|x|-10<-3$

2. $\dfrac{1}{|2x-1|}<6$ కు సాధన కనుగొని ఆ సాధనను అంతర సంకేతంలో సూచించుము.

3. $-3|x|+5\le -2$ కు సాధన కనుగొని మరియు ఆ సాధనసమితిని సంఖ్యారేఖపై చూపుము.

4. $2|x+1|-6\le 7$ కు సాధన కనుగొని మరియు ఆ సాధన సమితిని సంఖ్యారేఖపై చూపుము.

5. సాధించుము $\dfrac{1}{5}|10x-2|<1$

6. సాధించుము $|5x-12|<-2$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 71 10-03-2023 12:08:01

2.4 రేఖీయ అసమీకరణాలు (Linear Inequalities)

$a, b \in \mathbb{R}$ అనేది స్థిర రాశులు కల్గిన $f(x) = ax + b$ అనే ప్రమేయమును రేఖీయ ప్రమేయము అందురు. దీని రేఖాచిత్రము ఒక సరళరేఖ అగుట వలన ఇది రేఖీయ ప్రమేయము అవుతుంది. ఇక్కడ a అనేది సరళరేఖ యొక్క వాలు b అనేది y అంతర ఖండము అవుతుంది. $a \neq 0$ అయిన $f(x) = ax + b = 0$ అనునది సాధించినా x అంతరఖండము $\frac{-b}{a}$ వచ్చును.

కొన్ని సందర్భములలో రేఖీయ అసమీకరణాలు పరిగణలోకి తీసుకోవలసిన అవసరం కలదు. ఉదాహరణకు “గోపురము యొక్క ఎత్తు 50 అడుగులు కన్నా ఎక్కువ లేదు” అనే ప్రవచనాన్ని వివరించవలెను. 50 అనేది గోపురం యొక్క ఎత్తు అయిన పైన ఇవ్వబడిన ప్రవచనము వ్రాయు పద్ధతి $x \leq 50$.

ఉదాహరణ 2.6 మన నెలసరి విద్యుత్ బిల్లులో మనం వినియోగించిన యూనిట్లతో సంబంధం లేకుండ ఒక ప్రాథమిక చార్జ్ ఉంటుంది మరియు వినియోగించిన యూనిట్లపై ఆధారపడి ఒక చార్జి ఉంటుంది. విద్యుత్ బోర్డు, ప్రాథమిక చార్జ్ ₹110 మరియు ప్రతి ఒక యూనిట్‌కు ₹4 చార్జ్ చేస్తుందని అనుకొందాం. ఒక వ్యక్తి తన యొక్క విద్యుత్ బిల్లును ₹250 కన్నా తక్కువ చేయవలసినప్పుడు అతని యొక్క విద్యుత్ వినియోగం ఎంత ఉండవలెను?

సాధన

x అనేది వినియోగించిన యూనిట్ అనుకొనుము. ఇక్కడ $x \geq 0$ అని గమనించుము. ఇప్పుడు విద్యుత్ చార్జి ₹ $110 + 4x$ అవుతుంది. అది ₹250 కు క్రింద వుండవలెను. కావున $110 + 4x < 250$ అసమీకరణమును సాధించవలెను. అందువలన $4x < 140$ ఇచ్చును. ఒకతను తన ఛార్జీ $0 \leq x < 35$. కన్నా తక్కువ ఉండుటకు విద్యుత్ వినియోగం 35 యూనిట్ల కన్నా తక్కువగా ఉండవలెను.

ఉదాహరణ 2.7 x కొరకు సాధించుము : $3x - 5 \leq x + 1$

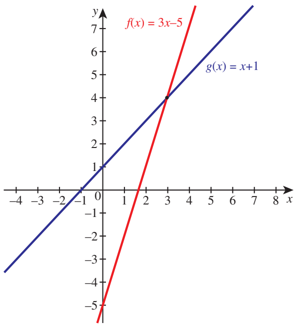
సాధన

$3x - 5 \leq x + 1$ అనునది $2x \leq 6$ అగును.

కావున $x \leq 3$ అవుతుంది.

సాధన సమితి $(-\infty, 3]$ అగును.

గమనిక : పై ఉదాహరణమును రేఖాచిత్రము ద్వారా సాధన కనుగొనవచ్చును. $f(x) = 3x - 5$ మరియు $g(x) = x + 1$ (పటము 2.3) గీయవలెను. తరువాత g యొక్క రేఖాచిత్రం క్రింద గల f యొక్క రేఖాచిత్రం పై గల x బిందువును కనుగొనవలెను.



పటము 2.3

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 72 10-03-2023 12:08:02

ఉదాహరణ 2.8 క్రింది ఇవ్వబడిన రేఖీయ అసమీకరణాలను సాధించుము. $3x-9\geq 0$, $4x-10\leq 6$

సాధన

$3x-9\geq 0$ అయిన $3x\geq 9$ ఇరువైపుల $1/3$ తో గుణించగా $x\geq 3$ వచ్చును. అదేవిధంగా $4x-10\leq 6$ అయిన $4x\leq 16$ అనగా $x\leq 4$. వచ్చును. $[3, \infty)$ మరియు $(-\infty, 4]$. యొక్క ఖండన సమితి

$3x-9\geq 0$, $4x-10\leq 10$ యొక్క సాధన సమితి అగును.

కావున సాధన [3, 4]. అవుతుంది.

ఉదాహరణ 2.9 A అనే ఒక బాలిక 446 పేజీలు గల ఒక పుస్తకంలో 271 పేజీలను చదివెను. ఆ బాలిక పుస్తకంను ఒక వారంలో మొత్తం చదివి ముగించవలెనన్న ఒకరోజుకు కనీసం ఎన్ని పేజీలు చదవవలెను?

సాధన :

బాలిక ఒక రోజు చదవవలసిన పేజీల సంఖ్య x అనుకొనుము. x ను తృప్తిపరచు అసమీకరణము $7x+271\geq 446$ నుండి $x\geq 25$ వచ్చును. కావున ఆ పుస్తకమును ఒక వారంలో చదివి ముగించుటకు ఒక రోజుకు కనీసం 25 పేజీలు చదవవలెను.

పైన గల ఉదాహరణలో ఒక్కొక్క అసమీకరణాల ఒకటి కన్నా ఎక్కువ సాధనలు కల్గివున్నదని గమనించవచ్చును. సాధారణంగా అసమీకరణాలకు సాధనలు క్రమముగా పెరుగుతూ వుండును.

అభ్యాసము 2.3

1. క్రింది అసమీకరణాలను అంతరములుగా వ్రాయుము.

   (i) $x\geq -1$ మరియు $x<4$ (ii) $x\leq 5$ మరియు $x\geq -3$

   (iii) $x<-1$ లేక $x<3$ (iv) $-2x>0$ లేక $3x-4<11$

2. $23x<100$ యొక్క సాధనను

   (i) x ఒక సహజ సంఖ్య (ii) x ఒక పూర్ణాను సంఖ్య అయినప్పుడు కనుగొనుము.

3. $-2x\geq 9$ యొక్క సాధనను

   (i) x ఒక వాస్తవ సంఖ్య (ii) x ఒక పూర్ణ సంఖ్య (iii) x ఒక సహజ సంఖ్య అయినప్పుడు కనుగొనుము.

4. సాధించుము (i) $\dfrac{3(x-2)}{5}\leq\dfrac{5(2-x)}{3}$ (ii) $\dfrac{5-x}{3}<\dfrac{x}{2}-4$.

5. ఒకతను A గ్రేడ్ పొందడానికి ప్రతి సబ్జెక్టులో గరిష్ట మార్కులు 100 గా గల 5 సబ్జెక్టులో సరాసరిగా 90 మార్కులు లేదా ఎక్కువ పొందవలెను. అతను మొదటి నాలుగు సబ్జెక్టులో 84, 87, 95, 91 పొందినట్లయితే అతను A గ్రేడ్ పొందడానికి ఐదవ సబ్జెక్టులో పొందవలసిన కనిష్ట మార్కులు ఎంత?

6. ఒక తయారిదారుని వద్ద 12 శాతంగాఢత గల 600 లీటర్ల ఆమ్ల ద్రావణం గలదు. దీనికి ఎన్ని లీటర్ల 30 శాతం గాఢత గల ఆమ్ల ద్రావణంను కలిపితే ఫలిత మిశ్రమము గాఢత 15 శాతం కన్నా ఎక్కువ మరియు 18 శాతం కన్నా తక్కువ ఉటుంది.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 73 10-03-2023 12:08:04

7. 10 కన్నా పెద్దది అయిన వరుస రెండు బేసి సహజ సంఖ్యల మొత్తము 40 కన్నా తక్కువగా వుండునట్లు ఆ సంఖ్యల అన్ని జతలను కనుగొనుము.

8. ఒక నమూనా రాకెట్ భూమి మీద నుండి ప్రయోగించబడినది. రాకెట్‌ను ప్రయోగించిన t సెకనుల తర్వాత అది చేరు ఎత్తు h ను $h(t) = -5t^2 + 100t,\ 0 \le t \le 20$ ఇచ్చును. ఏ సమయం వద్ద రాకెట్ భూమి నుండి 495 అడుగుల ఎత్తులో ఉంటుంది.

9. నీటి కుళాయిని సరిచేయు వానికి క్రింది పద్ధతిలో కూలి ఇవ్వబడును. మొదటి పద్ధతిలో ₹500 మరియు ప్రతి గంటకు ₹70 లెక్కించి ఇవ్వబడును. రెండవ పద్ధతిలో ప్రతి గంటకు 120 లెక్కించి ఇవ్వబడును. ఒకడు x గంటలు పని చేసిన యెడల x యొక్క ఏ విలువకు మొదటి పద్ధతిలో అతనికి మెరుగైన కూలీ లభించును?

10. A మరియు B లు ఒకే విధమైన పనులు చేసినను వారి నెలసరి జీతములలో 6000 పైగా వ్యత్యాసము కలదు. B యొక్క నెలసరి జీతము 27,000 అయిన A యొక్క నెలసరి జీతముల అవకాశములను కనుగొనుము.

2.5 వర్గ ప్రమేయాలు (Quadratic Functions)

ఏదేని $z \in \mathbb{R}$ మరియు $n \in \mathbb{N}$ $z^n = z \cdot z \cdot z \cdots z (n$ సార్లు) అనుదానిని ముందు తరగతిలో మనము నేర్చుకొన్నాము.

$P(x) = ax^2 + bx + c$ ఇచ్చట $a, b, c \in \mathbb{R}$ అనునది స్థిరాంకాలు. మరియు $a \neq 0$) అను రూపంలో గల ప్రమేయమును వర్గప్రమేయము అంటారు. $t \in \mathbb{R}$ $P(t) = 0$ అయిన, t అనునది $P(x)$ యొక్క ఒక శూన్యం అగును.

2.5.1 వర్గ సూత్రము (Quadratic Formula)

సాధారణ వర్గ ప్రమేయము $P(x) = ax^2 + bx + c$ ను $a(x-k)^2 + d$ అని వ్రాయుటకు వీలగునా? వీలగును.

దీనిని పరిపూర్ణ వర్గము (completing the square) అని అందురు. ఈ ప్రమేయము $P(x)$ ను క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

$$
\begin{aligned}
P(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - a\frac{b^2}{4a^2} + c \\
&= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(a\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - b\frac{b}{2a} + c\right)
\end{aligned}
$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 74 10-03-2023 12:08:06

కనుక, $$P(x) = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + P\left(\frac{-b}{2a}\right) \qquad \text{..... (1)}$$

ఇప్పుడు $P(x) = 0$ అని తీసుకొనిన ఇది వక్రరేఖ $P(x)$ యొక్క x అంతర ఖండమును ఇచ్చును.

$P(x) = 0$ అయిన సమీకరణము 1 నుండి $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + P\left(\frac{-b}{2a}\right) = 0.$ వచ్చును.

$$a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = -P\left(\frac{-b}{2a}\right)$$

$$= -\left(\frac{-b^2 \pm 4ac}{4a}\right)$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

కావున, $x = \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - \dfrac{b}{2a}$ లేక $x = \dfrac{-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} - \dfrac{b}{2a}$

కావున, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.దీనిని వర్గ సూత్రము (quadratic formula) అని అందురు.

ముఖ్యాంశాలు:

(i) $u \geq 0$ కు మాత్రమే $\sqrt{u}$ ఒక వాస్తవ సంఖ్య అని నిర్వచించబడును.

(ii) $\sqrt{u}$ అని వ్రాయగా అది ఒక ఋణేతర మూలమును సూచించును.

$b^2 - 4ac > 0$ అయిన $P(x) = 0$ కు రెండు విభిన్న వాస్తవ సంఖ్యల సాధనలు ఉంటుంది. $b^2 - 4ac = 0$ అయిన రెండు సమాన వాస్తవ సంఖ్యలు సాధనలు అగును. పైగా $b^2 - 4ac < 0$ అయిన వాటికి వాస్తవ మూలాలు లేవు.

కావున $b^2 - 4ac > 0$ అయిన వక్రము x అక్షమును రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించును. $b^2 - 4ac = 0$ అయిన వక్రము x అక్షాన్ని ఒకే బిందువు వద్ద మాత్రమే తాకును. $b^2 - 4ac < 0$ అయిన x అక్షాన్ని ఖండించదు.

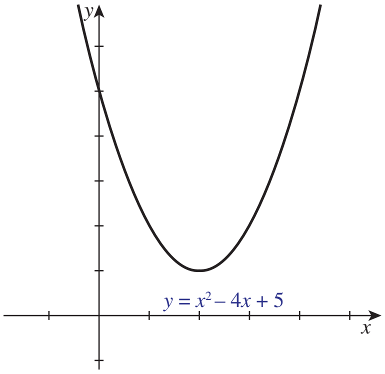
కావున $P(x) = ax^2 + bx + c$ అను వర్గ సమీకరణకు $D = b^2 - 4ac$ ను విచక్షణి అందురు.

(i) α మరియు β లు $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలాలు అయిన $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a}$ మరియు $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$

(ii) విచక్షణి $b^2 - 4ac$ ఒక ఋణసంఖ్య అయిన వర్గ సమీకరణము $ax^2 + bx + c = 0$ కు వాస్తవ మూలాలు వుండవు. ఇకవ్వడ కల్పిత సంఖ్యలే మూలాలు అవుతాయి అవి, $\alpha = \dfrac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}, \beta = \dfrac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$ ఇక్కడ, $i^2 = -1$దీనిని గురించి పై తరగతిలో నేర్చుకొందాము.

(iii) ఉదాహరణకు $y = x^2 - 4x + 5$ (పటము 2.4) అను రేఖాచిత్రమును చూచెదము. ఈ రేఖా చిత్రము x అక్షాన్ని ఖండించలేకపోవుట వలన $x^2 - 4x + 5 = 0$ కు వాస్తవ మూలాలు కల్గివుండవు.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 75 10-03-2023 12:08:09



పటము 2.4

(iv) వర్గ సమీకరణము యొక్క మూలాల స్వభావమును మరియు $D = b^2 - 4ac$ అను విచక్షణి యొక్క గుర్తును వివరించు పట్టిక క్రింద ఇవ్వబడినది.

విచక్షణి	మూలాల స్వభావము	పరావలయము
ధన	వాస్తవం మరియు విభిన్నము	x-అక్షమును రెండు బిందువులలో
సున్న	వాస్తవం మరియు సమానము	x-అక్షమును ఒకే ఒక బిందువు వద్ద తాకును
ఋణ	వాస్తవాలు కావు	x-అక్షాన్ని తాకదు.

ఉదాహరణ 2.10 ఉదాహరణ 2.10 $x^2 - px + q = 0$ అను సమీకరణము యొక్క మూలాలు a మరియు b అయిన $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

a మరియు b అనేవి $x^2 - px + q = 0$ అసమీకరణం యొక్క మూలములు. అయిన $a + b = p$ మరియు $ab = q$

కావున, $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab} = \frac{p}{q}$$

ఉదాహరణ 2.11 $x^2 - ax + a + 2 = 0$ అను వర్గసమీకరణం యొక్క మూలాలు సమానము అయిన a యొక్క అన్నీ విలువలను కనుగొనుము.

సాధన

$x^2 - ax + a + 2 = 0$ యొక్క మూలాలు సమానం కావున దాని విచక్షణి శూన్యం

అందువలన, $$D = b^2 - 4ac = a^2 - 4a - 8 = 0$$

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{48}}{2}$$

కావున, $a = 2 + \sqrt{12},\ 2 - \sqrt{12}$ ను ఇచ్చును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 76
10-03-2023 12:08:11

ఉదాహరణ 2.12 $x^2 + |x - 1| = 1$ యొక్క సాధనల సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన

సందర్భము (1): $x \geq 1$ అయిన $|x - 1| = x - 1$

కావున ఇవ్వబడిన సమీకరణము $x^2 + x - 2 = 0$ గా మారును. కారణాంక పరచగా $(x + 2)(x - 1) = 0$

ఇది $x = -2$ లేక 1 ను ఇచ్చును.

కాని $x \geq 1$ అయిన $x = 1$ అగును.

సందర్భము (2): $x < 1$ అయిన $|x - 1| = 1 - x$

కావున ఇవ్వబడిన సమీకరణము $x^2 + 1 - x = 1$ గా మారును కావున $x(x - 1) = 0$ అగును

ఇది $x = 0$ లేక $x = 1$ ను ఇచ్చును.

కాని $x < 1$ అయిన $x = 0$ వచ్చును.

అందువలన సాధన సమితి $\{0, 1\}$ అగును. కాబట్టి ఈ సమీకరణానికి రెండు సాధనలు కలవు.

అభ్యాసము 2.4

1. 7 మరియు –3 అను మూలాలు కలిగిన వర్గ సమీకరణమును కనుగొనుము.
2. ఒక వర్గబహుపద సమాసము యొక్క ఒక శూన్యము $1 + \sqrt{5}$ మరియు $p(1) = 2$ అయిన ఆ వర్గ బహుపద సమాసమును కనుగొనుము.
3. $x^2 + \sqrt{2}x + 3 = 0$ అను వర్గసమీకరణం యొక్క మూలాలు α మరియు β అయిన శూన్యములు $\frac{1}{\alpha}$ మరియు $\frac{1}{\beta}$ కల్గిన వర్గ బహుపద సమాసమును కనుగొనుము.
4. $k(x - 1)^2 = 5x - 7$ యొక్క ఒక మూలము మరొక దానికి రెట్టింపు అయిన $k = 2$ లేక -25 అని చూపుము.
5. $2x^2 - (a + 1)x + a - 1 = 0$ యొక్క మూలాల వ్యత్యాసము దాని లబ్ధంనకు సమానము అయిన $a = 2$ అని నిరూపించుము.
6. $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క ఒక మూలము (i) మరొక మూలమునకు ఋణాత్మకము (ii) మరొక మూలమునకు మూడురెట్లు (iii) మరొక మూలము యొక్క వ్యుత్క్రమంగా వుండుటకు గల నిబంధనలను కనుగొనుము.
7. $x^2 - ax + b = 0$ మరియు $x^2 - ex + f = 0$ అను సమీకరణములకు ఒక ఉమ్మడి మూలము కలదు. మరియు రెండవ సమీకరణమునకకు సమానమైన మూలాలు కల్గియున్నచో $ae = 2(b + f)$ నిరూపించుము.
8. (i) $-x^2 + 3x + 1 = 0$ (ii) $4x^2 - x - 2 = 0$ (iii) $9x^2 + 5x = 0$ వీటి యొక్క మూలాల స్వభావంను కనుగొనుము.
9. రేఖాచిత్రమును గీయకుండ (i) $y = x^2 + x + 2$, (ii) $y = x^2 - 3x - 7$, (iii) $y = x^2 + 6x + 9$ అనునవి x అక్షాన్ని ఖండించునా అని కనుగొనుము మరియు ఖండన బిందువుల సంఖ్యను కనుగొనుము.
10. $f(x) = x^2 + 5x + 4$ యొక్క సంపూర్ణ వర్గరూపంను వ్రాయుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 77 10-03-2023 12:08:14

2.5.2 ద్విఘాత అసమీకరణాలు (Quadratic Inequalities)

ఇక్కడ మనం $ax^2 + bx + c < 0$ లేక $ax^2 + bx + c > 0$ అను ద్విఘాత అసమికరణాలను సాధించడం గూర్చి నేర్చుకోబోతున్నాము.

ద్విఘాత అసమికరణాలను సాధించుటకు గల సోపానాలు (మెట్లు) :

(i) $ax^2 + bx + c = 0$ ను మొదట సాధించవలెను.

(ii) వాస్తవ సంఖ్యలలో సాధన లేనిచో ప్రతి $x \in \mathbb{R}$ ను పై ఇచ్చిన అసమీకరణాలలో ఒకటి సంతృప్తిపరచబడును.

(iii) వాస్తవ సంఖ్యలలో సాధన ఉన్నచో, అవి కీలక బిందువులు (critical point) అగును. ఆ బిందువులను సంఖ్యారేఖపై గుర్తించవలెను.

(iv) ఈ కీలక బిందువులు సంఖ్యారేఖను వియుక్త అంతరాలుగా విభజించును. (ఒకే ఒక కీలక బిందువు ఉండుటకు వీలుకలుదు.)

(v) ప్రతి అంతరం నుంచి ఒక ప్రతినిధి సంఖ్యను ఎంచుకొనవలెను.

(vi) ఈ ప్రతినిధి సంఖ్యలను అసమికరణంలో ప్రతిక్షేపించవలెను.

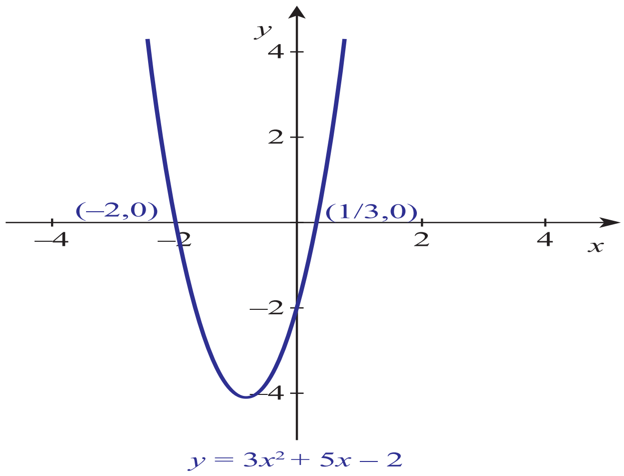
(vii) అసమీకరణాన్ని తృప్తి పరుచు అంతరాలను గుర్తించుము.

ఉదాహరణ 2.13 $3x^2 + 5x - 2 \le 0$ ను సాధించుము.

సాధన

ద్విఘాత బహుపదిని కారణాంక పరచగా వచ్చునది $3(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right) \le 0$ సంఖ్యారేఖను గీచి, దానిపై కీలక బిందువులు -2 మరియు $\frac{1}{3}$ ను గుర్తించుము ఇచ్చట కారణాంకాలు అదృశ్యమగును. (పటం 2.5) ప్రతి ఉపఅంతరములోను $(x+2)\left(x-\frac{1}{3}\right)$ యొక్క సంకేతంను తనిఖీ చేయుము. దీని కొరకు ఆ అంతరములో ఏదైనా ఒక బిందువును తీసుకొనుము. ఈ బిందువు వద్ద బహుపద సమాసపు విలువ ఏ ఫలిత విలువ ఏ గుర్తు ఉంటుందో అదే గుర్తు ఆ అంతరంలో ఆ బహుపది సమాసం కలిగి ఉంటుంది. లేనిచో ఈ అంతరములో మరొక్క కీలక బిందువు ఉండవచ్చును. ఈ ప్రక్రియను క్రింద ఇవ్వబడిన పట్టిక మూలంగా సులభంగా అర్థం చేసుకొనవచ్చును.

X192B



పటము 2.5

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 78 10-03-2023 12:08:14

అంతరం	$(x+2)$ యొక్క గుర్తు	$\left(x-\frac{1}{3}\right)$ యొక్క గుర్తు	$3x^2+5x-2$ యొక్క గుర్తు
$(-\infty, -2)$	−	−	+
$\left(-2, \frac{1}{3}\right)$	+	−	−
$\left(\frac{1}{3}, \infty\right)$	+	+	+

అసమికరణాన్ని తృప్తి పరుచు అంతరము $\left[-2, \frac{1}{3}\right]$ అవుతుంది.

ఉదాహరణ 2.14 $\sqrt{x+14} < x+2$ ను సాధించుము.

సాధన

$\sqrt{x+14}$ ప్రమేయంను నిర్వచించడానికి $x+14 \geq 0$ గా ఉండవలెను. అందువలన $x \geq -14$ $x+2>0$ అయిన $x \geq -2$ అగును. $(x+14) < (x+2)^2$ అయిన $x^2+3x-10>0$ అగును.

కావున $(x+5)(x-2)>0$

$x=-5$ మరియు $x=2$ అను కీలక బిందువులతో సంఖ్యారేఖను విభజించుము. ఉప అంతరంలో ఒక సూచన బిందువును ప్రతిక్షేపించగా, $x<-5$ మరియు $x>2$ అను సాధనసమితి మనకు లభించును.

ఉదాహరణ 2.15 $\sqrt{6-4x-x^2} = x+4$ అను సమీకరణాన్ని సాధించుము.

సాధన

ఇచ్చిన సమీకరణం $(x+4) \geq 0$ మరియు $6-4x-x^2 = (x+4)^2$ కు సమానంగా నుండును.

ఇది $x \geq -4$ మరియు $x^2+6x+5=0$ ను ఇచ్చును. అందువలన $x=-1, -5$

కాని, $x=-1$ మాత్రము రెండు నిబంధనలను తృప్తి పరుచునది

కావున $x=-1$ ఒక సాధన అవుతుంది.

అభ్యాసము 2.5

1. $2x^2+x-15 \leq 0$ ను సాధించుము.
2. $-x^2+3x-2 \geq 0$ ను సాధించుము.

2.6 బహుపద ప్రమేయాలు (Polynomial Functions)

ఇప్పటి వరకు మనం ఏకఘాత మరియు ద్విఘాత ప్రమేయాల గూర్చి నేర్చుకున్నాం. ఇప్పుడు ఆ ఆలోచనలను సాధారణీకరించుదాం. x చలరాశితో కలిగిన సమాస రూపం $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ ను బహుపద సమాసం (polynomial) అని అంటారు. ఇచ్చుట $a_i \in \mathbb{R}$, $i=0,1,2,\cdots,n$ మరియు $a_n \neq 0$ అయినప్పుడు n అనునది ఒక ఋణాత్మకం కాని పూర్ణసంఖ్య బహుపద సమానం యొక్క అంతస్తు (degree) n అవుతుంది. $a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ అనునవి బహుపద సమాసం యొక్క గుణకములు అగును. a_0 అనునది స్థిర పదము మరియు a_n అనునది ప్రధాన గుణకము (రవాని యడల) గా చెప్పవచ్చును. దీని నుంచి స్పష్టంగా:

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 79 10-03-2023 12:08:18

(i) $100x^7 - \pi x^5 + 20\sqrt{2}\,x^2 + 7x + 1.22$ అను బహుపద సమాసం యొక్క అంతస్తు 7

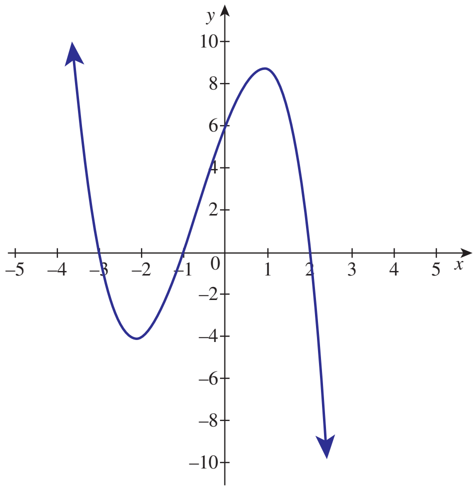
(ii) $(17x - 3)(x + 3)(2x - \sqrt{\pi})(x + 2.3)$ అను బహుపద సమాసం యొక్క అంతస్తు 4

(iii) $(x^2 + x + 1)(x^3 + 2x + 2)(x^5 - 5x + \sqrt{3})$ అను బహుపద సమాసం యొక్క అంతస్తు 10

x కు ఒక నిర్దిష్ట విలువ $x = c$ ను ప్రతిక్షేపించగా వచ్చునది $a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0$, $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$ అనునది $\mathbb{R}$ నుండి $\mathbb{R}$ కు నిర్వచించవచ్చును ఒక బహుపద ప్రమేయమగును. మనము బహుపద సమాసమును మరియు బహుపద ప్రమేయాన్ని ఒకటిగా పరిగణించవచ్చును.

బహుపద సమాసం యొక్క అంతస్తు 1 అయిన ఏకఘాత (సరళ) బహుపద (linear polynomial) సమాసం అని, అంతిస్తు 2 అయిన, ద్విఘాత లేక (వర్గ) బహుపద సమాసం (quadratic polynomial) అని చెప్పచ్చును. త్రిఘాత బహుపద సమాసం (cubic polynomial) యొక్క అంతస్తు మూడు గా ఉండును. అదేవిధంగా, అంతస్లు 4 మరియు అంతస్తు 5 గల బహుపద సమాసాల ను చతుర్ద బహుపద సమాసము (quintic) మరియు పంచమ బహుపద సమాసము అని

చెప్పవచ్చును. గమనించుము స్థిరాంకం $(a \neq 0)$, అనునది బహుపద సమాసం యొక్క అంతస్తు 0 గా ఉండును. రెండు బహుపద సమాసాలు $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$, $a_n \neq 0$ మరియు $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_0, b_m \neq 0$ మొదలైనవి సమానం అయినపుడు మాత్రమే ప్రతి $x \in \mathbb{R}$ కు $f(x) = g(x)$ అయిన అయినప్పుడు మాత్రమే $n{=}m$ మరియు $a_k = b_k$, $k = 0, 1, 2, \cdots n$ గా ఉంటుంది. నిరూపించ వచ్చును. రెండు బహుపద సమాసాలు ఇచ్చిన, వాటి కూడిక మరియు లబ్దములను కనుగొనవచ్చును. ఉదాహరణకు, $P(x) = 2x^3 + 7x^2 - 5$ మరియు $Q(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 + x + 1$ అయిన $P(x) + Q(x) = x^4 + 8x^2 + x - 4$ (x యొక్క సజాతీయ ఘాతల గుణకాలను కూడగా) మరియు $P(x)Q(x) = 2x^7 + 3x^6 - 12x^5 + 4x^4 + 19x^3 + 2x^2 - 5x - 5$ అనునది $P(x)$ లోని ఒకొక్క పదము ను తీసుకొని $Q(x)$ లోని ప్రతి పదమునకు గుణించగా లభించును. $P(x)Q(x)$ యొక్క అంతస్తు అనునది $P(x)$ మరియు $Q(x)$ యొక్క అంతస్తుల మొత్తంనకు సమానం. $P(x) + Q(x)$ యొక్క అంతస్తు $P(x)$ మరియు $Q(x)$ లో ఉండు గరిష్ఠ అంతస్తు గా ఉండును. ఇక్కడ ఉదాహరణకు త్రిఘాత బహుపద ప్రమేయం యొక్క రేఖాచిత్రాన్ని ఇవ్వబడింది.



పటము 2.6

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 80 10-03-2023 12:08:20

$f(x)$ మరియు $g(x)$ అనునవి రెండు బహుపద సమాసములు మరియు $g(x)$ అనునది సున్న కానిది. అయిన $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ అనునది అకరణీయ ప్రమేయం అగును (rational function) ప్రతి $x \in \mathbb{R}$ కు $g(x) \neq 0$ గా నిర్వచింపబడినది. సాధారణంగా ఒక అకరణీయ ప్రమేయం ఒక బహుపద సమాసంగా ఉండాల్సిన అవసరం లేదు.

2.6.1 భాగహార విశేషవిధి (Division Algorithm)

$f(x)$ మరియు $g(x)$ అనునవి ఇవ్వబడిన రెండు బహుపద సమాసాలు, $g(x)$ అనునది సున్నకాని బహుపద సమాసమైన, $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ ఉండునట్లు $q(x)$ మరియు $r(x)$ అను బహుపద సమాసాలు లభించును. ఇక్కడ, $r(x)$ అంతస్తు $< g(x)$ అంతస్తు గా ఉండున. ఇంకనూ $g(x)$ అనునది భాగఫల బహుపద సమాసం, $r(x)$ అనునది శేష బహుపదసమాసం అగును. $r(x)$ సున్న బహుపద సమాసమైన, $g(x)$, $q(x)$ అనునవి $f(x)$ కారణాంకములు అగును మరియు $f(x) = q(x)g(x)$

పూర్ణసంఖ్యలకు ఉపయోగపడు భాగహార నిబంధనలు దీనికి వర్తించును. $g(x) = x - a$, అయిన శేషము $r(x)$ యొక్క అంతస్తు సున్న అగును. కావున $r(x)$ ఒక స్థిరాంకమగును ఆ స్థిరాంక మునుకనుగొనుటకు $f(x) = (x-a)q(x) + c$ నందు $x = a$ ని ప్రతిక్షేపించగా, $c = f(a)$ అభించును.

శేష సిద్ధాంతము (Remainder Theorem)

బహుపద సమాసం $f(x)$ $x - a$ చే భాగించగా లభించు శేషము $f(a)$ శేషము $c = f(a) = 0$ అయినా అయిసప్పుడు మాత్రమే యొక్క కారణాంకము $x - a$, $f(x)$ యొక్క కారణాంకం అగును.

నిర్వచనం 2.1

ఒక వాస్తవ సంఖ్య a అనునది $f(x)$ అను బహుపద సమాసం యొక్క శూన్యము అగుటకు $f(a) = 0$ గా ఉండవలెను. $x - a$ అనునది $f(x)$ యొక్క శూన్య $(x-a)$ యైన $f(x)$ యొక్క కారణంకము $(x-a)$ యొక్క కారణాంకం అగును

సాధారణంగా $f(x)$ ను $f(x) = (x-a)^k \cdot g(x)$, $g(a) \neq 0$ గా వ్రాస్తే a పై ఆధారపడు k వివలువ $f(x)$ యొక్క అంతస్తును దాటదు. k విలువను శూన్యము a యొక్క బహుళఅంతస్తు అని అంటారు.

(i) ఒక బహుపది ప్రమేయం అంతస్తు n ఉండిన గరిష్ఠంగా n విభిన్న వాస్తవ శూన్యములను కలిగియుండును. ఇది కూడా వీలగును $P(x) = x^2 + 1$, అను బహుపది ప్రమేయం కు వాస్తవ శూన్యములు ఉండదు.

(ii) అకరణీయ సంఖ్యలను గుణకములుగా కలిగిన బహుపద ప్రమేయము $P(x)$, $a + b\sqrt{p}$ నందు $a, b \in Q$, p ఒక ప్రధాన సంఖ్య $p(x)$ యొక్క శూన్యమేన దాని సంయుగ్మం (conjugate) $a - b\sqrt{p}$ కూడ శూన్యముగా నుండును.

బహుపద సమాసాలకు సంబంధించి రెండు ముఖ్య సమస్యలు : ఏమనగా

(i) ఇవ్వబడిన బహుపది ప్రమేయానికి శూన్యమును కనుగొనడం అందుకు ఏకఘాత కారణాంకములుగా బహుపద ప్రమేయాన్ని కారణాంకపరచవలెను.

(ii) ఇచ్చిన శూన్యముల లేక కొన్ని నిబంధనల పరంగా బహుపద సమాసము ఏర్పరుచుట.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 81 10-03-2023 12:08:23

బహుపద సమాసముల శూన్యములను కనుగొనుటకు, బీజగణిత సర్వసమీకరణాలు ఉపయోగపడును. సర్వసమీకరణాలు అనగాఏమి?

ప్రమేయం యొక్క ప్రదేశంలోని అన్ని విలువలవు ఒక సమీకరణం సత్యమైన ఆ సమీకరణమును సర్వసమీకరణం (identity) అని అంటారు. ప్రమేయం యొక్క ప్రదేశంలోని కొన్ని విలువలకు మాత్రమే సమీకరణం సత్యమైనచో ఆ సమీకరణాన్ని నిబంధన సమీకరణం అని అంటారు.

2.6.2 ముఖ్యమైన సర్వసమికరణములు (Important Identities)

$x, a, b \in \mathbb{R}$ అన్ని విలువలకు మనకు లభించునవి

1. $(x+a)^3 = (x+a)^2(x+a) = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3 = x^3 + 3xa(x+a) + a^3$
2. $(x-b)^3 = x^3 - 3x^2b + 3xb^2 - b^3 = x^3 - 3xb(x-b) - b^3$ ($a = -b$ ని (1)–లో ప్రతిక్షేపించగా)
3. $x^3 + a^3 = (x+a)(x^2 - xa + a^2)$
4. $x^3 - b^3 = (x-b)(x^2 + xb + b^2)$, ($a = -b$, ని (3) –లో ప్రతిక్షేపించగా)
5. $x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + x^{n-k-1}a^k + \cdots + a^{n-1}),\ n \in \mathbb{N}$
6. $x^n + b^n = (x+b)(x^{n-1} - x^{n-2}b + \cdots + x^{n-k-1}(-b)^k + \cdots + (-b)^{n-1}),\ n \in \mathbb{N}$

అభ్యాసము 2.6

1. బహుపద ప్రమేయం $f(x) = 4x^2 - 25$ యొక్క శూన్యములను కనుగొనుము.
2. $x^3 - x^2 - 17x = 22$ కు ఒక మూలము $x = -2$ అయిన, సమీకరణము యొక్క ఇతర మూలములను కనుగొనుము.
3. $x^4 = 16$ కు వాస్తవ మూలములను కనుగొనుము.
4. సాధించుము $(2x+1)^2 - (3x+2)^2 = 0$

నిర్ధారణము కాని గుణకముల పద్ధతి (Method of Undetermined Co–efficients)

ఇచ్చిన సమాచారం (నుంచి) తీసుకొని నిర్ణయించబడని గుణకముల పద్ధతి ని ఉపయోగించి బహుపద సమాసంను నిర్మించుటలో దృష్టి పెడుదాం. ఇచ్చిన నిబంధనలను ఉపయోగించి బహుపద సమాసముల గుణకములను కనుగొనవలెను. రెండు బహుపద సమాసములు సమానంగా ఉంటే మాత్రము చలరాశి ఘాతములు సమానంగా నుండు పదముల గుణకములు కూడ సమానంగా ఉండువలెను

ఉదాహరణ 2.16 $f(0) = 1$, $f(-2) = 0$ మరియు $f(1) = 0$ గా ఉండు ద్విఘాత బహుపద సమాసము $f(x)$ ను కనుగొనుము.

సాధన

ఇచ్చిన నిబంధనలను తృప్తిపరచు బహుపద సమాసమును $f(x) = ax^2 + bx + c$ గా తీసుకొనుము

$f(0) = a(0)^2 + b(0) + c$ అయిన $c = 1$

$f(-2) = 0$, $f(1) = 0$. అను మిగిలిన రెండు నిబంధనల నుంచి, $4a - 2b + c = 0$ మరియు $a + b + c = 0$ అనునది పొందవచ్చును. $c = 1$ ని ప్రతిక్షేపించగి $4a - 2b = -1$ మరియు $a + b = -1$ రెండు సమీకరణాలను సాధించగా $a = b = -\frac{1}{2}$

కావున $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 82 10-03-2023 12:08:26

పై సమస్యను మరొక విధంగాను సాధించవచ్చును. $x=-2, x=1$ అనునవి $f(x)$ యొక్క శూన్యములు. కావున d అను స్థిరాంకముకు $f(x)=d(x+2)(x-1)$ గా వ్రాయవచ్చును.

$f(0)=1$ ను ఉపయోగించగా $-2d=1$. అయిన $d=-\frac{1}{2}$ కావున

$f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)(x-1)=-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+1$

ఉదిహరణ 2.17 $x=\frac{2}{5}, 1+\sqrt{3}$ శూన్యములను కలిగి మరియు $f(0)=-8$ ని తృప్తి పరుచు వాస్తవ గుణకాలు గల ఒక త్రిఘాత బహుపద ప్రమేయును నిర్మించుము.

సాధన

ఇవ్వబడినది $f(x)$ యొక్క శూన్యములు $\frac{2}{5}$ మరియు $1+\sqrt{3}$ అనగా $1-\sqrt{3}$ కూడ $f(x)$ యొక్క శూన్యమగును.

$$f(x) = a\left(x-\frac{2}{5}\right)[(x-(1+\sqrt{3}))]\,[x-(1-\sqrt{3})]$$
$$= a\left(x-\frac{2}{5}\right)[(x-1)^2-3]$$

$f(0)=-8$ ని ఉపయోగించగా, $\left(-\frac{2}{5}a\right)(-2)=-8$ అని మనకులభించును.

ఇది a =-10 ఇచ్చును.

కావలసిన బహుపద సమాసము $f(x) = (-10)\left(x-\frac{2}{5}\right)[x^2-2x-2]$

$= -10x^3+24x^2+12x-8$

ఉదాహరణ 2.18 $f(x)=x^3-3px+2q$ ను $g(x)=x^2+2ax+a^2$ చే భాగించగా $ap+q=0$ అని నిరూపించుము.

సాధన

గమనించుము $f(x)$ యొక్క అంతస్తు 3 మరియు ప్రధాన గుణకము $f(x)$ ను $g(x)$ భాగించును కనుక $f(x)=(x+b)g(x)$, ఏదోక $b\in\mathbb{R}$ కు

అయిన $x^3-3px+2q = (x+b)(x^2+2ax+a^2)$ ఇరుప్రక్కల సజాతీయ గుణకములను సరిచూడగా $2a+b=0$, $a^2+2ab=-3p$ మరియు $2q=ba^2$ మనకు అభించును కావున, $b=-2a$, $p=a^2$, $q=-a^3$ మరియు $q=-a^3=-a(a^2)=-ap$ దీని నుంచి $ap+q=0$ ను పొందవచ్చును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 83 10-03-2023 12:08:29

ఉదాహరణ 2.19 నిర్ధారణము కాని గుణకముల పద్ధతిని ఉపయోగించియ $1+2+3+\cdots(n-1)+n$, $n\in\mathbb{N}$ మొత్తము ను కనుగొనుము.

సాధన:

$$S(n) = n+(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1 \text{ తీసుకొని.}$$
$$= n+(n-1)+(n-2)+\cdots+[n-(n-2)]+[n-(n-1)]$$
$$= n\left[1+\frac{n-1}{n}+\frac{n-2}{2}+\cdots+\frac{n-(n-2)}{n}+\frac{n-(n-1)}{n}\right]$$
$$\leq n[1+1+\cdots+1] \text{ (కాని, } \frac{n-1}{n}<1,\ \frac{n-2}{n}<1,\cdots)$$

కావున, $S(n) \leq n^2$

$S(n) = a+bn+cn^2$ తీసుకొనుము యందు, $a,b,c\in\mathbb{R}$

$$S(n+1)-S(n) = n+1$$
$$a+b(n+1)+c(n+1)^2-[a+bn+cn^2] = n+1$$
$$b+2cn+c = n+1$$

(సజాతీయ గుణకములను సరిచూడగా), $b+c=1\quad 2c=1,\ b=\frac{1}{2};\ c=\frac{1}{2}$ లభించును.

ఇప్పుడు, $S(1) = 1,\ a+b+c=1, a=0$ $\quad(b+c=1)$ దీని నుంచి లభించును

కావున, $S(n) = \frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n^2=\frac{n(n+1)}{2},\ n\in\mathbb{N}$

ఉదాహరణ 2.20 బహుపద సమీకరణం $(x-1)^3(x+1)^2(x+5)=0$ కు మూలములను కనుగొనుము మరియు దాని బహుళ అంతస్తు ను చెప్పండి

సాధన:

తీసుకొనుము $f(x)=(x-1)^3(x+1)^2(x+5)=0$

స్పష్టంగా $x=1,-1,-5$

కావున, మూలము 1 కి బహుళఅంతస్తు 3, మూలము –1 కి బహుళఅంతస్తు 2, మూలము –5 కి బహుళఅంతస్తు 1

సూచన: మూలము యొక్క బహుళ అంతస్తు 1 అయిన దానిని సామాన్య మూలము అంటారు.

ఉదాహరణ 2.21 సాధించుము $x=\sqrt{x+20},\ x\in\mathbb{R}$

సాధన :

$x=\sqrt{x+20}$ అయినప్పుడు మాత్రము $\sqrt{x+20}$ ని నిర్వచించుటకు వీలు అగును. నిర్వచనం ప్రకారం $x+20\geq 0$ కావున x ఒక ధనాత్మక సంఖ్య. ఇరు ప్రక్కల వర్గము చేయగా,

$$x^2 = x+20 \text{ వచ్చును.}$$
$$x^2-x-20 = 0$$
$$(x-5)(x+4) = 0 \text{ దీని నుంచి}$$
$$x = 5,-4$$

x ధనాత్మకం,కావున కావాలసిన సాధన $x=5$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 84 10-03-2023 12:08:32

ఉదాహరణ 2.22 $x^2 - 6x + a = 0$ మరియు $x^2 - bx + 6 = 0$ సమీకరణాలకు ఒక ఉమ్మడి మూలము కలదు. మొదటి మరియు రెండవ సమీకరణాలను మరొక మూలము పూర్ణసంఖ్యలు మరియు వాటి నిష్పత్తి 4:3 ఉమ్మడి మూలమును కనుగొనుము.

సాధన

α ను సామాన్య మూలముగా తీసుకొనుము.

$$x^2 - 6x + a = 0 \text{ యొక్క మూలములు } \alpha,\ 4\beta$$

$$x^2 - bx + 6 = 0 \text{ యొక్క మూలములు } \alpha,\ 3\beta\,.$$

అయిన, $4\alpha\beta = a$ మరియు $3\alpha\beta = 6 \Rightarrow \alpha\beta = 2$ మరియు $a = 8$.

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \text{ యొక్క మూలములు } 2, 4$$

$$\alpha = 2 \text{ అయిన, } \beta = 1$$

$$\alpha = 4 \text{ అయిన, } \beta = \frac{1}{2}$$

పూర్ణసంఖ్య కాదు కావున ఉమ్మడి మూలము 2.

ఉదాహరణ 2.23 సమీకరణం $x^2 + px + 8 = 0$ యొక్క మూలముల వ్యత్యాసం 2 అయిన p విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$x^2 + px + 8 = 0$ అను సమీకరణం యొక్క మూలాలు α మరియు β గా తీసుకొనుము. అయిన $\alpha + \beta = -p,\ \alpha\beta = 8$ మరియు $|\alpha - \beta| = 2$

ఇప్పుడు, $$(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta = (\alpha-\beta)^2 \Rightarrow p^2 - 32 = 4$$

కావున, $$p = \pm 6.$$

అభ్యాసము 2.7

1. కారణాంకపరుచుము : $x^4 + 1$ (సూచన : వర్గమును పూర్తిచేయుట ద్వారా ప్రయత్నించుము)
2. బహుపద సమాసం $3x^3 + 8x^2 + 8x + a$ కు ఒక కారణాంకం $x^2 + x + 1$ అయిన, a విలువను కనుగొనుము.

2.7 అకరణీయ ప్రమేయాలు (Rational Functions)

రెండు బహుపద సమాసములు $P(x)$ మరియు $Q(x)$, $Q(x) \neq 0$ ల నిష్పత్తిని x ఓ ఉండు అకరణీయ సమాసములగా నిర్వచించవచ్చును. అకరణీయ సమాసములను ఉదాహరణలు $\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$, $\dfrac{x^4+1}{x^2+1}$ మరియు $\dfrac{x^2+x}{x^2-5x+6}$.

లవము $P(x)$ యొక్క అంతస్తు $Q(x)$ యొక్క అంతస్తుకు సమానంగానో లేక అంతకంటే ఎక్కువగా నుండిన $P(x) = f(x)\,Q(x) + r(x)$ గా వ్రాయవచ్చును. ఇచ్చట $r(x) = 0$ లేక $r(x)$ యొక్క అంతస్తు $Q(x)$ యొక్క అంతస్తు కంటే తక్కువగా ఉండును.

కావున, $$\frac{P(x)}{Q(x)} = f(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 85 10-03-2023 12:08:35

2.7.1 అకరణీయ అసమికరణాలు (Rational Inequalities)

ఉదాహరణ 2.24 సాధించుము $\dfrac{x+1}{x+3} < 3$

సాధన

ఇరు ప్రక్కల 3 ను తీసివేయగా, $\dfrac{x+1}{x+3} - 3 < 0$

$$\frac{x+1-3(x+3)}{x+3} < 0$$

$$\frac{-2x-8}{x+3} < 0$$

$$\frac{x+4}{x+3} > 0$$

కావున $x+4$ మరియు $x+3$ అనునవి రెండూ ధనాత్మకంగా నో లేక ఋణాత్మకంగానో ఉండును. $x+3$ మరియు $x+4$ ల గుర్తులకు క్రింది విధంగా కనుగొనవచ్చును.

x	$x+3$	$x+4$	$\dfrac{x+4}{x+3}$
$x < -4$	–	–	+
$-4 < x < -3$	–	+	–
$x > -3$	+	+	+
$x = -4$	–	0	0

కావున సాధన $(-\infty, -4) \cup (-3, \infty)$ అగును.

సూచన: సంఖ్యారేఖ పై అంతరాలలోని కారణంకాల గుర్తులను గుర్తించి కూడ ఈ విధమైన అకరణీయ అసమీకరణాలను సాధించవచ్చును.

అభ్యాసము 2.8

1. $\dfrac{x^3(x-1)}{(x-2)} > 0$ అయిన x యొక్క అన్ని విలువలను కనుగొనుము.
2. $\dfrac{2x-3}{(x-2)(x-4)} < 0$ అను అసమీకరణాన్ని తృప్తిపరుచు x యొక్క అన్ని విలువలను కనుగొనుము.
3. సాధించుము $\dfrac{x^2-4}{x^2-2x-15} \le 0$

2.7.2 పాక్షిక భిన్నాలు (Partial Fractions)

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ అను అకరణీయ సమాసంలో $f(x)$ అంతస్తు $g(x)$ అంతస్తు కంటే తక్కువగా ఉండిన ఆ భిన్నాన్ని క్రమభిన్నము అని అంటారు. ఇచ్చట వాస్తవ సున్నాలు లేకుండా $g(x)$ ను ఏకఘాత మరియు ద్విఘాత కారణాంకములుగా ఉండునట్లు కారణాంకపరుచుటకు వీలు అగును $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ను సులభ సామాన్య పదముల కలిగినదిగా మార్చి వ్రాయగలము. అనగా పదముల మొత్తంను క్రింది రూపంలో వ్రాయవచ్చును.

(i) $\dfrac{A_1}{(x-a)} + \dfrac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \dfrac{A_k}{(x-a)^k}$ $g(x)$ ను $(x-a)$భాగించగా,

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 86 10-03-2023 12:08:37

(ii) $\dfrac{(B_1x+C_1)}{(x^2+ax+b)}+\dfrac{(B_2x+C_2)}{(x^2+ax+b)^2}+\cdots+\dfrac{(B_kx+C_k)}{(x^2+ax+b)^k}$ ఇచ్చుట x^2+ax+b కి వాస్తవ సున్నలు లేకుండును మరియు $g(x)$ ను (x^2+ax+b) భాగించును.

సూచన: దీనిని పాక్షిక భిన్నముల యొక్క మొత్తము గా మార్చుబడిన సమాసముగా ఫిలువబడుచ్చున్నది. ఇచ్చిన అకరణీయ ప్రమేయనిక ఆ విధంగా మార్చబడిన సమాసము ఏకైకముగా ఉండును. ఇచ్చిన అకరణీయ ప్రమేయానికి ఏకైకముగా ఆవిధంగా మార్చిన సమాసం ఉండును. ఈ పద్ధతిని సమాకలన కలన గణితము లోని సమస్యలను సాధించుటలో ఉపయోగించుచున్నారు. కొన్ని ఉదాహరణలను చర్చిద్దాం.

ఉదాహరణ 2.25 పాక్షిక భిన్నాలుగా విడదీయము $\dfrac{x}{(x+3)(x-4)}$

సాధన

$$\frac{x}{(x+3)(x-4)} = \frac{A}{x+3}+\frac{B}{x-4}$$ గా తీసుకొని ఇందులో

A మరియు B లు స్థిరాంకాలు.

అయిన, $$\frac{x}{(x+3)(x-4)} = \frac{A(x-4)+B(x+3)}{(x+3)(x-4)}$$ ఇది ఇచ్చునది

$$\Rightarrow \quad x = A(x-4)+B(x+3)$$ లభించును

$x=4$ అయిన, $B = \dfrac{4}{7}$

$x=-3$ అయిన, $A = \dfrac{3}{7}$

కావున, $$\frac{x}{(x+3)(x-4)} = \frac{3}{7(x+3)}+\frac{4}{7(x-4)}$$

సూచన: హారము లోని శూన్యంలు విభిన్నముగాను, $\mathbb{R}$ లో ఉండునట్లు వచ్చినప్పుడు పై పద్ధతిని ఉపయోగించవచ్చును.

ఉదాహరణ 2.26 $\dfrac{2x}{(x^2+1)(x-1)}$ ను పాక్షిక భిన్నాలుగా విడదీయుము

సాధన

ఇందులో, హారములోనున్న ఒక కారణంకం (x^2+1) కు వాస్తవ శూన్యంలు లేవు

$$\frac{2x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{(x-1)}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$$ గా తిసుకొనినా ఇందులో A, B, C లు స్థిరాంకాలు

$$2x = A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$$

$x=1$ అయిన $A=1$,

$x=0$ అయిన $A-C=0$ మరియు, $A=C=1$

$x=-1$ అయిన $2A-2(C-B)=-2 \Rightarrow B=-1$

కావున $$\frac{2x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{1}{(x-1)}+\frac{1-x}{x^2+1}$$ దిని నుంచి లభించును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 87 10-03-2023 12:08:39

హారము లో ఒక్కటికి మించిన బహుళ అంతస్తు కలిగిన వాస్తవ శూన్యాలు ఉన్న సందర్భమును మనం ఇప్పుడు చూద్దాం.

ఉదాహరణ 2.27 $\dfrac{x+1}{x^2(x-1)}$ ని పాక్షిక భిన్నాలు గా విడదీయుము.

సాధన

$$\frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}$$ తీసుకొనినను.

కావున, $$x+1 = Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2$$

$x = 0$ అయినప్పుడు $B = -1$, $x = 1$ అయినప్పుడు $C = 2$

$x = -1$ అయినప్పుడు $2A - 2B + C = 0 \Rightarrow A = -2$

కావున, $$\frac{x+1}{x^2(x-1)} = \frac{-2}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x-1}$$

అభ్యాసం 2.9

క్రింది ఇవ్వబడిన అకరణీయ సమాసములను పాక్షిక భిన్నములుగా విడదీయుము.

1. $\dfrac{1}{x^2-a^2}$
2. $\dfrac{3x+1}{(x-2)(x+1)}$
3. $\dfrac{x}{(x^2+1)(x-1)(x+2)}$
4. $\dfrac{x}{(x-1)^3}$
5. $\dfrac{1}{x^4-1}$
6. $\dfrac{(x-1)^2}{x^3+x}$
7. $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-5x+6}$
8. $\dfrac{x^3+2x+1}{x^2+5x+6}$
9. $\dfrac{x+12}{(x+1)^2(x-2)}$
10. $\dfrac{6x^2-x+1}{x^3+x^2+x+1}$
11. $\dfrac{2x^2+5x-11}{x^2+2x-3}$
12. $\dfrac{7+x}{(1+x)(1+x^2)}$

2.7.3 ఏక ఘాత అసమీకరణాల రేఖాచిత్రములు (Graphical Representation of Linear Inequalities)

$ax+by=c$ అను ఒక సరళరేఖ కార్టీషియన్ తలమును రెండు భాగములుగా విభజించును. ఒకొక్క భాగము ఒక అర్ధతలములుగా $x=c$ అను లంబ రేఖ తలమును ఎడమ మరియు కుడి అర్ధతలములుగా, మరియు $y=k$ అను క్షితిజ సమాంతర రేఖ తలమును పై మరియు క్రింది అర్ధతలములుగా విభజించును.

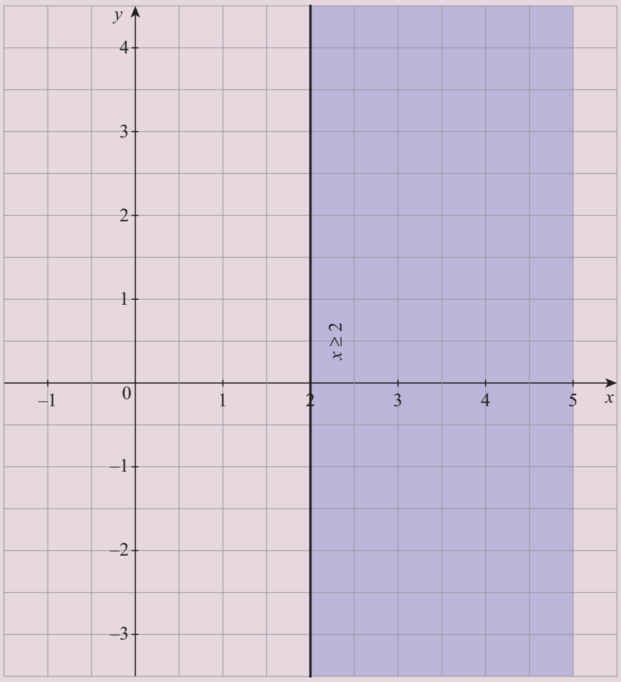
$ax+by=c$ అను రేఖ పై తనటువంటి ఒక బిందువు, ఆ రేఖ విభజించు అర్ధతలములలో ఏదైన ఒకదాని లో మాత్రయే ఉండి $ax+by<c$ మరియు $ax+by>c$ మొదలగు అసమీకరణాలలో ఒకదానిని మాత్రమే తృప్తి చేయును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 88 10-03-2023 12:08:42

$ax + by < c$ అను అసమీకరణాలలో సూచించు అర్ధతలమును కనుగొనుటకు ఏదైన ఒక బిందువు P ని దానిలో ప్రతిక్షేపించవలెను ఆ అసమీకరణమును తృప్తిచెందిన, P అను బిందువు ఆ అర్ధతలములో ఉండును అని చెప్పవచ్చును. తృప్తి పరచని యడల, ఆ బిందువు ఇవ్వబడిన అసమీకరణము సూచించని మరొక తలములో కలదని అనవచ్చును. $c \neq 0$ అయిన p ను అదిబిందువుగా తీసుకొనడం మిక్కిలి సులభం.

ఉదాహరణ 2.28 $x \geq 2$ **అను అసమీకరణము సూచించు ప్రాంతమును ఛాయ చేయుము.**

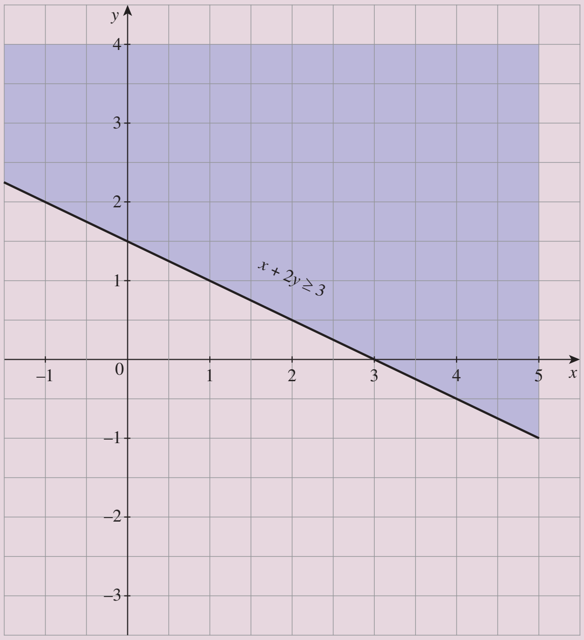
సాధన



$x = 2$ అను సమీకరణమును తీసుకొనుము. ఇది y అక్షము నుండి 2 ప్రమాణల యూనిట్ల దూంలో ఈ అక్షానిక సమాంతముగా గల రేఖ ఈ రేఖ కార్టిషియన్ ఆలమును రెండు భాగములుగా విభజిస్తున్నది. $(0,0)$ ను ఆ అసమీకరణం లో ప్రతిక్షేపించగా, $0 \geq 2$ వచ్చును. ఇది అసత్యం, కావున ఆదిబిందువు లేని ప్రాంతంను $x \geq 2$ అసమీకరణము సూచించును. పటంలో ఛాయ చేయబడిన ప్రాంతం ఈ అసమీకరణం యొక్క సాధిన సమితి అగును. $x \geq 2$ కావడం వలన, $x = 2$ రేఖ పై గల బిందువులు కూడ సాధనలు అగును.

ఉదాహరణ 2.29 $x + 2y > 3$ అసమీకరణం సూచించు ప్రాంతమును ఛాయ చేయుము.

సాధన



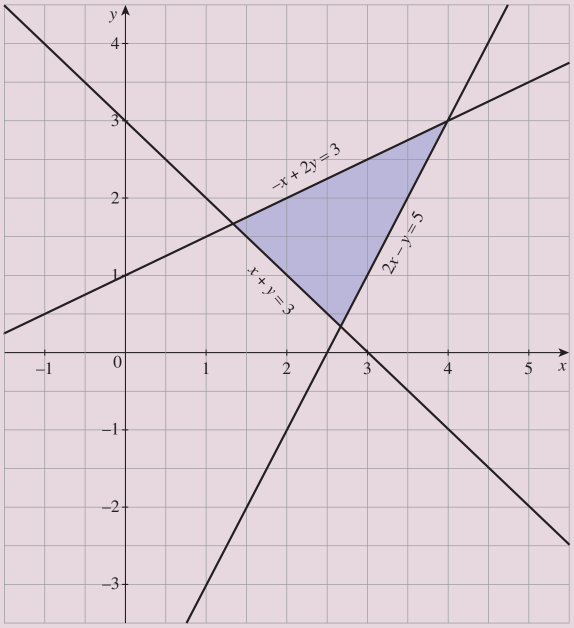
$x + 2y = 3$ రేఖ కార్టిషియన్ తలమును రెండు అర్ధ తలములుగా విభజించును. $x + 2y > 3$ సూచించు అర్ధతలంను కనుగొనుటకు ఈ అసమీకరణం యొక్క అర్ధతలంలో నుండు ఒక బిందువును ప్రతిక్షేపించి అది సంవృప్తి చెందునా సరిచూడుము. అసమీకరణంలో $(0, 0)$ ను ప్రతిక్షేపించినా. $0 > 3$ వచ్చును. ఇది అసత్యం కావున అది బిందువు లేని అర్ధతలము $x + 2y > 3$ సూచించు ప్రాంతమగును

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 89 10-03-2023 12:08:43

ఉదాహరణ 2.30 $x+y \geq 3,\ 2x-y \leq 5$ మరియు $-x+2y \leq 3$ మొదలగు అసమీకరణాలను సాధించి మరియు సాధన సమితి ని రేఖాచిత్రము ద్వారా చూపుము.

సాధన

ఒక సరళరేఖ పై గల రెండు బిందువులను మనము కనుగొనిన ఆ సరళరేఖను గీయగలము. ఉదాహరణకు, $x+y=3$ సరళరేఖ పై $(3, 0)$ మరియు $(0, 3)$ అను రెండు బిందువులను సులభంగా కనుగొనవచ్చును.



$x+y=3,\ 2x-y=5$ మరియు $-x+2y=3$ అను మూడు సరళరేఖలను గీయుము. ఇప్పుడు, $(0, 0)$ తృప్తిపరచుదు, కావున, $x+y=3$ చే పరిబద్ద మరియు ఆదిబిందువు లేని అర్ధతలం అనునది $x+y \geq 3$ యొక్క సాధనసమితి అగును.

ఇదే విధంగా $2x-y \leq 5$ చే బద్దమై మరియు బిందువుగల అర్ధతలం అనునది $2x-y \leq 5$ సాధన సమితిని సూచించును.

$-x+2y \leq 3$ చే సూచింపబడు ప్రాంతం అనునది $-x+2y \leq 3$ చే పరిబద్దమై మరియు ఆది బిందువు గల అర్ధతలము అగును.

పై మూడు అర్ధతలములు ఉమ్మడిప్రాంతమే ఇవ్వబడిన రేఖీయ అసమీకరణాల సాధనసమితి అగును.

అభ్యాసం 2.10

క్రింద ఇవ్వబడిన అసమీకరణాల ప్రాంతం తలంలో కనుగొనుము.

1. $x \leq 3y, \quad x \geq y.$
2. $y \geq 2x, \quad -2x+3y \leq 6.$
3. $3x+5y \geq 45, \quad x \geq 0, y \geq 0.$
4. $2x+3y \leq 35, \quad y \geq 2, \quad x \geq 5.$
5. $2x+3y \leq 6, \quad x+4y \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$
6. $x-2y \geq 0, \quad 2x-y \leq -2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0.$
7. $2x+y \geq 8, \quad x+2y \geq 8, \quad x+y \leq 6.$

2.8 ఘాతాంకాలు మరియు కరణులు (Exponents and Radicals)

మొదటి ఘాతాంకాలు గురించి నేర్చుకొందాం

2.8.1 ఘాతాంకాలు (Exponents)

$n \in \mathbb{N},\ a \in \mathbb{R}$, అయినపుడు $a^n = a \cdot a \cdots a$ (n సార్లు) అగును. m ఒక ఋణ పూర్ణ సంఖ్య మరియు వాస్తవ సంఖ్య $a \neq 0$ అయిన $a^m = \dfrac{1}{a^{-m}}$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 90 10-03-2023 12:08:46

ఏదేని $a \neq 0$ కు $\frac{a}{a} = a^{1-1} = a^0 = 1$ అగును ఇప్పుడు

క్రింది ధర్మములను సులభముగా తెలుసుకొనవచ్చును.

ఘాతాంకుల ధర్మాలు (Properties of Exponents)

i. $m, n \in \mathbb{Z}$ మరియు $a \neq 0$ అయిన $a^m a^n = a^{m+n}$

ii. $m, n \in \mathbb{Z}$ మరియు $a \neq 0$ అయిన $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

2.8.2 కరణీలు (Radicals)

ప్రశ్న :

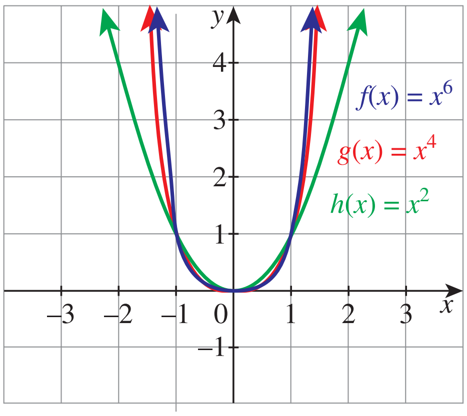
$a \neq 0$ అయిన $r \in Q$ కు a^r ను నిర్వచించుటకు వీలగునా?

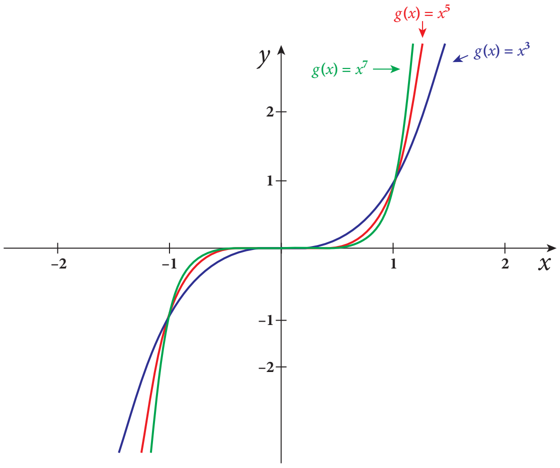
మొదట $r = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ అను సందర్భంను తీసుకొందాం.

$y = a^{1/n}$ గా ఉండునట్లు ఒక వాస్తవ సంఖ్య $y \in \mathbb{R}$ అని ఉండిన $y^n = a$ వచ్చును.

ఈ ధర్మము $y = x^n$ యొక్క విలోమాన ప్రమేయము కనుగొనుటకు క్రింది ప్రమేయముల రేఖాచిత్రములను పరిశీలిద్దాం.

(i) $f(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$ (ii) $g(x) = x^{2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$





పై పటముల నుండి $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, అనునది ఏక-ఏక $g(x) = x^{2n+1}$ ప్రమేయం $n \in \mathbb{N}$ మరియు సంగ్రస్థ ప్రమేయమగును.

కావున $\mathbb{R}$– కు విలోమ ప్రమేయము వ్యవస్థితమగును. కాని $\mathbb{R}$ ఒక సంగ్రస్థ ప్రమేయము అగును. కాని $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $f(x) = x^{2n}$, $n \in \mathbb{N}$, ఏక-ఏక ప్రమేయము కాదు. అయినటికీ ప్రదేశం $[0, \infty)$ ను పరిమితం చేయునపుడు f అనేది ఏక-ఏక మరియు సంగ్రస్థ ప్రమేయములు అగును. ఇది ఒక వాస్తవ సంఖ్య యొక్క n వ మూలంను అవగాహనకు ఉపయోగపడుచున్నది. దీనికి రెండు సందర్భములు గలదు.

సందర్భము 1

n అనునది ఒక సరిసంఖ్య అయినపుడు

$a < 0$ అయిన $y^n = a$ కు అర్థము లేదు. కావున, $a < 0$ అయినపుడు ఇటువంటి వ్యవస్థితం కాదు.

$a > 0$ అనుకొనుము. $x^n = a$ యొక్క సాధన y అయినచో,

$a > 0$ కూడ $x^n = a$ యొక్క సాధన y అయినచో $-y$ కూడ $x^n = a$ యొక్క సాధన అగును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 91 10-03-2023 12:08:49

సందర్భము 2

n అనునది ఒక బేసి సంఖ్య అయినప్పుడు ఈ సంధ్భంలో ఒకటవ సందర్భములో వలె ఆటంకం లేదు. $y \in \mathbb{R}$ కు $y = x^n$ గా ఉండునట్లు ఏకైక $x \in \mathbb{R}$ ఉంటుంది.

పైన సందర్భముల ఆధారముగా కరణులను క్రింది విధముగా నిర్వచించవచ్చును.

నిర్వచనము 2.2

(i) $n \in \mathbb{N}, n$ ఒక సరిసంఖ్య మరియు $b > 0$ కు ఉంటునట్లు ఏకైక $a^n = b$ వుండునట్లు ఏకైక $a > 0$ వుండును.

(ii) $n \in \mathbb{N}, n$ ఒక బేసి సంఖ్య మరియు $b \in \mathbb{R}$ $a^n = b$ వుండు సందర్భముల యందు a & b యొక్క n వ మూలాలు ని

పిలువబడును. మరియు దీనిని $b^{1/n}$ లేదా $\sqrt[n]{b}$ అని అందురు.

గమనిక :

(i) $n = 2$ అయిన n వ మూలమును వర్గమూలము అనబడును. $n = 3$ అయిన అది ఘనమూలమగును.

(ii) $x^2 = a^2$ అని సమీకరణమునకు $x = a$ మరియు $x = - a$ అను రెండు సాధనలు గలవు. అయితే $\sqrt{a^2} = |a|$ అగును.

(iii) ఒక్కొక్క విడిపదమును నిర్వచించబడినచో పైన ఇవ్వబడిన ఘాతంకముల ధర్మములు మూలాలకు కూడా వర్తించును.

(iv) పైగా, $n \in \mathbb{N}$ మరియు $a \neq 0$ అయిన,

$$(a^n)^{1/n} = \begin{cases} |a|, & \text{అయిన } n \text{ ఒక సరిసంఖ్య} \\ a & \text{అయిన } n \text{ ఒక బేసిసంఖ్య} \end{cases}$$

ఉదాహరణము :

$\sqrt[4]{(-2)^4} = 16^{1/4} = 2, \quad 343^{1/3} = 7$ మరియు $(-1000)^{1/3} = -10$

ఏదైన ఒక అకరణీయ సంఖ్య $r = \dfrac{m}{n}, \; m \in \mathbb{Z}, \; n \in \mathbb{N}$

పైగా గ, సా, భా $(m,n) = 1$ మరియు $a > 0$ అయిన $a^r = a^{m/n} = (a^{1/n})^m$ అని నిర్వచించవచ్చును.

ఉదాహరణము $49^{3/2} = (49^{1/2})^3 = 7^3 = 343$. అయితే $(-49)^{3/2}$ కు వాస్తవ సంఖ్య వ్యవస్థలో అనార్థమగును. ఎందుకనగా $x^2 = (-49)^3$ ను తృప్తిపరచు వాస్తవ సంఖ్య లేదు.

2.8.3 ఘాత ప్రమేయములు (Exponential Functions)

$x \in \mathbb{R}$ మరియు ఏ ఒక్క $a > 0$ కును a^x ను నిర్వచించవచ్చును. $a = 1$ అయిన $1^x = 1$ అని నిర్వచించవచ్చును. కావున a^x, $x \in \mathbb{R}$ మరియు $0 < a \neq 1$ అగునపుడు a^x అనునది ఆదారము a కలిగిన ఘాత ప్రమేయము అగును. $a < 0$ మరియు $x = \dfrac{1}{m}, \; m \in \mathbb{N}$ ఒక సరిసంఖ్య అయినచో a^x ను నిర్వచించలేదు. కావున $a > 0$ అని నియత్రించవచ్చును. పైగా ప్రతి $x \in \mathbb{R}$ కు $a^x > 0$ ఇది క్రిందివాటిని కూడ తృప్తిపరుచును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 92 10-03-2023 12:08:52

ఘాత ప్రమేయములు ధర్మాలు (Properties of Exponential Function)

$a, b > 0$ మరియు $a \neq 1 \neq b$ కొరకు

(i) $a^{x+y} = a^x a^y$ మొత్తమునకు $x, y \in \mathbb{R}$

(ii) $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ ప్రతి $x, y \in \mathbb{R}$ కు

(iii) $(a^x)^y = a^{xy}$ ప్రతి $x, y \in \mathbb{R}$ కు

(iv) $(ab)^x = a^x b^x$ ప్రతి $x, y \in \mathbb{R}$ కు

(v) $a^x = 1 \Longleftrightarrow$ అయినా అయినప్పుడు మాత్రమే $x = 0$

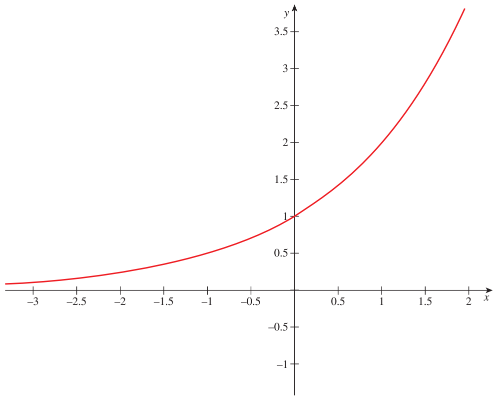
1. $f(x) = a^x,\ x \in \mathbb{R},\ a = 2$ ను తీసుకొందాం.

ఇపుడు $f(x) = 2^x,\ x \in \mathbb{R}$. ఒక ఏక–ఏక ప్రమేయము మరియు సంగ్రస్థ ప్రమేయములని నిరూపించెదము.

ఏదేని $u, v \in \mathbb{R}$ కు $f(u) = f(v)$ అనుకొనుము.

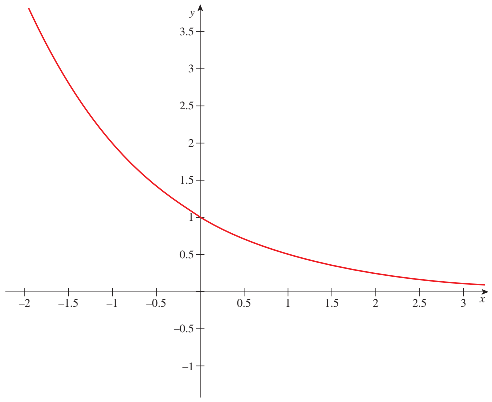
కావున $2^u = 2^v$: ఇచ్చునది $\dfrac{2^u}{2^v} = 1 \Rightarrow 2^{u-v} = 1$

కావున $u - v = 0 \Rightarrow u = v$ అందుచే f ఒక ఏక–ఏక ప్రమేయము అగును.



$f(x) = 2^x$

పటము 2.7



$f(x) = \dfrac{1}{2^x}$

పటము 2.8

రేఖా చిత్రము నుండి x పెరిగినపుడు $f(x) = 2^x$ యొక్క విలువ కూడా పెరుగును అనునది స్పష్టమగును. మరియు f– యొక్క వ్యాప్తి $[0, \infty)$ అగును. ఇచ్చట $2^0 = 1$ అగుటచే $x > 0$ అన్నింటికి $2^x > 1$ వచ్చును. పైగా అన్నింటికీ $x < 0$ $2^x < 1$ వచ్చును.

$f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ఒక సంగ్రస్థ ప్రమేయము అగుటను గమనింపవచ్చును.

2. $a = \dfrac{1}{2}$ అనుకొనిన $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{1}{2^x},\ x \in \mathbb{R}$ అవుతుంది రేఖాచిత్రములో x పెరిగినపుడు $g(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ యొక్క విలువ తగ్గును. మరియు $g(\mathbb{R}) = (0, \infty)$. ఇంకను $g(0) = 1$ అన్నింటికి $x < 0$ కు $g(x) > 1$ మరియు అన్నింటికి $x > 0$ కు $g(x) < 1$ వచ్చును.

ముఖ్యాంశాలు : పై ఉదాహరణంలోని వాదనల ప్రకారము ఏ ఒక్క ఆధారము $0 < a \neq 1$ కల్గిన వర్గప్రమేయాలు $f(x) = a^x$ ఏక ఏక మరియు సంగ్రస్థ ప్రమేయాలుగా వుండును. వాటి ప్రదేశము $\mathbb{R}$ మరియు సహప్రదేశము $(0, \infty)$ అగును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 93 10-03-2023 12:08:56

ఒక ప్రత్యేక ఘాత ప్రమేయము (A special exponential function) :

ఘాత ప్రమేయాలన్నింటిలో కంటే $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$ అను ప్రమేయము ముఖ్యమైనది ఎందుకనగా ఇది గణితము, విజ్ఞానము మరియు ఆర్థిక శాస్త్రాలలో అనువర్తించుచున్నారు. అయితే e అనగానేమి? క్రింది ఇవ్వబడిన చక్రవడ్డీ లెక్కలో స్థిరాంకము e విలువ తెలియజేయుచున్నది.

వివరణ :

2.8.3.1 చక్రవడ్డీ :

P అనునది అసలు $r = \dfrac{\text{వడ్డీరేటు}}{100}$, వడ్డీరేటు n అనునది ఒక సంవత్సరములో చక్రవడ్డీ లెక్కించు సంఖ్య మరియు t అనునది సంవత్సరముల సంఖ్య. కావున $A = P\left(1+\dfrac{r}{n}\right)^{nt}$ ఇది t సంవత్సరములలో లభించు మొత్తము విలువల కనుగొనుటకు సూత్రము. $n = 4$ అయిన, ఇది పావు సంవత్సరపు చక్రవడ్డీ అగును.

(అనగా 3 నెలలకు ఒక్కసారి వడ్డీని లెక్కించి అసలుతో చేర్చబడుచున్నది) $n = 12$ అయిన, అది నెలనెల చక్రవడ్డీ అగును $n = 365$ అనేది రోజువారి చక్రవడ్డీ అగును $n = 365$ ఒక గంట సమయం మరియు ఒక నిమిషం చక్రవడ్డీని లెక్కించుటకు వీలు అగును. p మరియు r మార్పుకాకుండా చక్రవడ్డీ లెక్కించు సంఖ్య అధికమైనచో లభించు మొత్తం విలువ అధికం అగునని మనము తెలుసుకొనవచ్చును.

మొదటి రకము $P = 1, r = 1$ మరియు $t = 1$ అనుకొనుము $A_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ అవుతుంది. కావున n అధిక సంఖ్యగా వున్నపుడు అది ఎంత పెద్ద సంఖ్య అని మనము తెలుసుకొనవలెను. అందుచే $n = 10, 100, 10000,$ $100000, 100000000$ అను వేరువేరు విలువలకు పట్టికను తయారుచేస్తాము A విలువ పెరుగుతూ పోవునపుడు

n	10	100	10000	100000	100000000
A_n	2.593742460	2.704813829	2.718145927	2.718268237	2.718281815

n విలువ పెరుగుతూ పోవునపుడు

A_n– యొక్క విలువ **2.718281815** కు సమీపములో ఉండును. వాస్తవంగా A_n యొక్క విలువ e అను వాస్తవ సంఖ్యను సమీపించినప్పుడు ఒక కణీయ సంఖ్య 2.718281815- యొక్క సరాసరి కావున చక్రవడ్డీ సూత్రము $A = Pe^{rt}$ అని తీసుకొనవచ్చును.

ఇచ్చట వడ్డీరేటు r అసలు P పైగా ఒక సంవత్సరమునకు t సార్లు వడ్డి లెక్కించవలెను. దీనిని నిరంతర చక్రవడ్డి అని అందురు.

ఉదాహరణ 2.31

(i) సూక్ష్మీకరించుము : $(x^{1/2}\, y^{-3})^{1/2}$, ఇచ్చట $x, y \geq 0$ (ii) సూక్ష్మీకరించుము : $\sqrt{x^2 - 10x + 25}$

సాధన :

(i) $x, y \geq 0$ కావున $(x^{1/2}\ y^{-3})^{1/2} = \dfrac{x^{1/4}}{y^{3/2}}$

(ii) $\sqrt{x^2 - 10x + 25} = \sqrt{(x-5)^2} = |x-5|$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 94 10-03-2023 12:08:57

గమనిక : (i) $(x^{1/4})^4 = x$ అయిన $(y^4)^{1/4} = |y|$
x ఒక ధన సంఖ్య అయిన $x^{1/4}$ నిర్వచించబడుచున్నది. కాని $y < 0$ గా ఉన్నప్పుడు $(y^4)^{1/4}$ నిర్వచించబడుచున్నది. ఒక ధన సంఖ్య మరియు దాని 4 వ ఘాతము y^4. కావున అది $|y|$ గా ఉండవలెను.

(ii) $(x^8 \cdot y^4)^{1/4} = x^2|y|$

(iii) u, v, b లు అకరణీయ సంఖ్యలు అనుకొంటే b ఒక ధన సంఖ్య అవి అకరణీయ సంఖ్యల వర్గములు కావు. కావున $u + v\sqrt{b}$, $u - v\sqrt{b}$ లు ఒకదానికొకటి (కాంజుగేట్) Conjugate అంటారు. $(u + v\sqrt{b})(u - v\sqrt{b}) = u^2 - bv^2$ అనేది ఒక సంయుగ్మ అకరణీయ సంఖ్య అగును. ఒక సమాసములోని హారములోని హారములో $u + v\sqrt{b}$ ఉన్నచో దాని హారము మరియు లవమును దాని సంయుగ్మము $u - v\sqrt{b}$ గుణించిన హారములో అకరణీయ సంఖ్య వచ్చును.

(iv) $(u\sqrt{a} - v\sqrt{b})\ (u\sqrt{a} + v\sqrt{b}) = u^2a - v^2b$ ను ఉపయోగించిన $u\sqrt{a} + v\sqrt{b}$ హారములో ఉన్నప్పుడు సూక్ష్మీకరించవచ్చును

ఉదాహరణ 2.32 $\dfrac{\sqrt{5}}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})}$ హారమును అకరణీయం చేయుము

సాధన

లవము మరియు హారమును $(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ తో గుణించగా, మనము పొందునది

$$\frac{\sqrt{5}}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{5}(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{(\sqrt{6} + \sqrt{2})\ (\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{(\sqrt{30} - \sqrt{10})}{4}$$

ఉదాహరణ 2.33 $7 - 4\sqrt{3}$ యొక్క వర్గమూలము కనుగొనుము

సాధన

$\sqrt{7 - 4\sqrt{3}} = a + b\sqrt{3}$ అనుకొనుము

ఇప్పుడు a, b లు అకరణీయ సంఖ్యలు

ఇరువైపులా వర్గము చేయగా

$7 - 4\sqrt{3} = a^2 + 3b^2 + 2ab\sqrt{3}$ వచ్చును.

కావున $a^2 + 3b^2 = 7$ మరియు $2ab = -4$

$$a = \frac{-2}{b}$$

$a^2 + 3b^2 = 7$ నుండి $\left(\frac{-2}{b}\right)^2 + 3b^2 = 7$ వచ్చును.

$\Rightarrow \dfrac{4}{b^2} + 3b^2 = 7$ లేక $3b^4 - 7b^2 + 4 = 0$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 95 10-03-2023 12:09:00

b^2 కొరకు సాధించగా $b^2 = \frac{(7 \pm \sqrt{49-48})}{6}$ అని మనకు లభించును.

ఇది ఇచ్చునది $b^2 = 1$ $b^2 = \frac{4}{3}$

కావున $b = \pm 1$ $b = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$

b ఒక అకరణీయ సంఖ్య కావడం వలన $b = \pm 1$. మరియు కావున

a యొక్క సదృశ విలువలు ∓ 2 $\sqrt{7-4\sqrt{3}} > 0$కావడం వలన $\sqrt{7-4\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$ వచ్చును.

u, v అకరణీయ సంఖ్యలు గల $u + v\sqrt{b}$ యొక్క వర్గమూలమును x, y లు అకరణీయ సంఖ్యలు గల $x + y\sqrt{b}$ రూపంలో ఎప్పటికీ వ్రాయలేము. ఉదాహరణకు $1 + \sqrt{2}$ యొక్క వర్గమూలము a, b లు అకరణీయ సంఖ్యలుగా గల $a + b\sqrt{2}$ రూపంలో వ్రాయలేము.

అభ్యాసము 2.11

1. సూక్ష్మీకరించుము.

   (i) $(125)^{\frac{2}{3}}$ (ii) $16^{\frac{-3}{4}}$ (iii) $(-1000)^{\frac{-2}{3}}$

   (iv) $(3^{-6})^{\frac{1}{3}}$ (v) $\dfrac{27^{\frac{-2}{3}}}{27^{\frac{-1}{3}}}$

2. విలువను కనుగొనుము: $\left(\left((256)^{-1/2}\right)^{-1/4}\right)^3$

3. $(x^{1/2} + x^{-1/2})^2 = \frac{9}{2}$ అయిన, $x > 1$ $(x^{1/2} - x^{-1/2})$ యొక్క విలువ కనుగొనుము.

4. సూక్ష్మీకరించుము $\dfrac{3^{2n} 9^2 3^{-n}}{3^{3n}} = 27$ దీని నుండి n యొక్క విలువను కనుగొనుము

5. $\dfrac{32\pi}{3}$ ఘనపరిమాణము గల గోళాకార నీటితొట్టె వ్యాసార్ధమును కనుగొనుము.

6. $\dfrac{7+\sqrt{6}}{3-\sqrt{2}}$ యొక్క హారమును అకరణీయపరచుము

7. సూక్ష్మీకరించుము $\dfrac{1}{3-\sqrt{8}} - \dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \dfrac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}} - \dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} + \dfrac{1}{\sqrt{5}-2}$

8. $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ అయిన $\dfrac{x^2+1}{x^2-2}$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

2.9 సంవర్గమానము (Logarithm)

ఆదారము $0 < a \neq 1$ కు ప్రమేయము $\mathbb{R}$ మరియు వ్యాప్తి $(0, \infty)$ కల్గిన ఘాత ప్రమేయము $f(x) = a^x$ అని నిర్వచించబడునని నేర్చుకొన్నాము. $f(x)$ ఒక ద్విగుణ ప్రమేయము (bijection) అగుటచే దీనికి విలోమము కలదు. దీని విలోమ ప్రమేయమే సంవర్గమాన ప్రమేయము (logarithmic function) అని పిలువబడును. దీనిని $\log_a(\cdot)$ తో సూచిస్తారు. $f(x)$ అనునది x నుండి $y = a^x$ అని తీసుకొనినా, $\log_a(\cdot)$ అనునది y నుండి x వరకు ఒక ప్రమేయము అవుతుంది.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 96 10-03-2023 12:09:03

అనగా $0 < a \neq 1$ కావున $y = a^x$ మరియు $\log_a y = x$ అనునవి సమానము అగును.

ఉదాహరణకు $3^4 = 81$ ను $\log_3(81) = 4$ అని వ్రాయవచ్చును. a మరియు y ఇవ్వబడినచో $a^x = y$ ని తృప్తిపరుచును. a యొక్క ఘాతం x కు ఎంత విలువ వుండినచో y విలువ లభించునని సంవర్గమానము ద్వారా కనుగొనవచ్చును. ఒక నిర్దిష్ట పెట్టుబడి ఒక నిర్ణీత మొత్తాన్ని పొందుటకు ఎంత కాలము పడుతుంది? ఇలాంటివి నిత్యజీవితంలోని సమస్యలను పరిష్కరించుటకు సంవర్గమానం ఉపయోగపడుతుంది. మరియు మిక్కిలి కనిష్ట మరియు మిక్కిలి గరిష్ట సంఖ్యలను లబ్దం చేయుటకూడా సంవర్గమానము ఉపయోగపడుచున్నది.

(i) ఏదైన $x \in \mathbb{R}$ మరియు $a^x > 0$ కు ఘాత ప్రమేయము a^x అని నిర్వచించుటచే $\log_a(\cdot)$ అను ధనవాస్తవ సంఖ్యలకు మాత్రమే నిర్వచించబడును.

(ii) పైగా ఏదేని ఆధారము a కు $a^0 = 1$ కాబట్టి $\log_a(1) = 0$ అగును.

2.9.1 సంవర్గమాన ధర్మాలు (Properties of Logarithm)

(i) $x \in (0, \infty)$ కు $a^{\log_a x} = x$ మరియు $\log_a(a^y) = y$. ఇక్కడ $y \in \mathbb{R}$

(ii) $x, y > 0$ అయిన $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$ (లబ్ద నియమము)

(iii) $x, y > 0$ అయిన $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$ (భాగహార నియమము)

(iv) $x > 0, r \in \mathbb{R}$ అయిన $\log_a x^r = r \log_a x$ (ఘాత నియమము)

(v) $x > 0$ మరియు a, b, ఆధారములు అయిన $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ (ఆధార మార్పిడి నియమము)

నిరూపణ:

ఆధారము a కలిగిన ఘాత ప్రమేయము మరియు సంవర్గమాన ప్రమేయము ఒకదానికొకటి అనులోమానము అగుటచే

(i) నిర్వచనాల ఆధారముగా ఉపయోగించుట.

(ii) $x, y > 0$ $\log_a x = u$, $\log_a y = v$ మరియు $\log_a(xy) = w$ అనుకొనుము

ఘాత రూపంలో వ్రాయగా $a^u = x$, $a^v = y$ మరియు $a^w = xy$

$a^w = xy = a^u a^v = a^{u+v}$ కావున $w = u + v$

కావున $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$.

(iii) $\log_a x = u$, $\log_a y = v$ మరియు $\log_a \frac{x}{y} = w$.

కావున $a^u = x$, $a^v = y$ మరియు $a^w = \frac{x}{y}$

కావున $a^w = \frac{x}{y} = \frac{a^u}{a^v} = a^{u-v} \Rightarrow w = u - v$

ఇదేవిధముగా $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

(iv) $\log_a x = u$ అనుకొనుము

కావున $a^u = x$, $x^r = (a^u)^r = a^{ru}$

ఇదేవిధంగా $\log_a x^r = ru = r \log_a x$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 97 10-03-2023 12:09:07

(v) $\log_b x = v$ అనిన $b^v = x$ అగును

ఇరు వైపుల ఆధారము a కలిగిన సంవర్గమానముగా తీసుకొనిన $\log_a b^v = \log_a x$

ఘాత నియమము ప్రకారము $\log_a b^v = v \log_a b$

కావున $v \log_a b = \log_a x$

కావున $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}, \quad b > 0$

గమనిక:

(i) $a = 10$ అయితే సంవర్గమాన ప్రమేయము $\log_{10} x$ అగును. దీనిని సామాన్య సంవర్గమానము అందురు. (common logarithm)

(ii) $a = e$ అయితే (ఒక కరణీయ సంఖ్య దాని రమారమి విలువ 2.718) అయిన $\log_e x$ ను సహజ సంవర్గమానము అందురు.

దీనిని $\ln x$ గా సూచిస్తారు.

పైన చూపిన సంవర్గమాన ప్రమేయములు విజ్ఞాన, సాంకేతిక రంగాలలో విరివిగా ఉపయోగపడుచున్నది. ప్రత్యేకంగా సహజసంవర్గమానము సహజంగా సంబవించును. మనము $\log_e x$ ను $\log x$ గా కూడా వ్రాయవచ్చు.

(iii) $a = 2$ అయిన సంవర్గమాన ప్రమేయము $\log_2 x$ ను ఆధారము 2 కల్గిన సంవర్గమాన ప్రమేయము అనబడును. ఇది సంగణక శాస్త్రములో ఉపయోగపడుచున్నది.

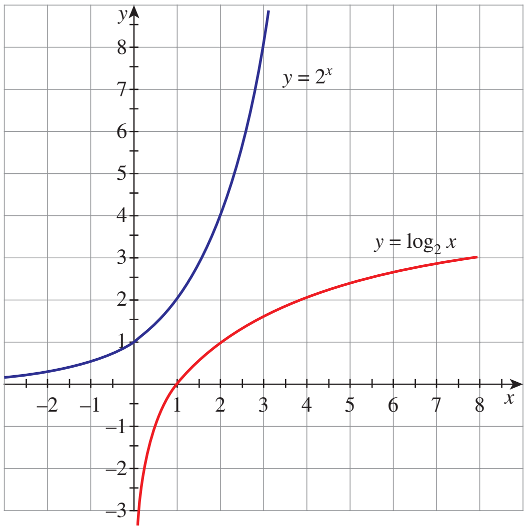
(iv) పరిశీలించుము : $\log_a 35 = \log_a (7 * 5) = \log_a 7 + \log_a 5$

$$\log_a \frac{50}{3} = \log_a 50 - \log_a 3$$

$$\log_a 22^x = x \log_a 22$$

$$\log_5 50 = \frac{\log_{10} 50}{\log_{10} 5}$$

(v) సంవర్గమాన ప్రమేయము మరియు ఘాత ప్రమేయముల రేఖాచిత్రం క్రింది ఇవ్వబడినది.



పటము 2.9

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 98 10-03-2023 12:09:08

ఉదాహరణము 2.34 1728 కు ఆధారము $2\sqrt{3}$ కలిగిన సంవర్గమానమును కనుగొనుము.

సాధన

$\log_{2\sqrt{3}} 1728 = x$ అనుకొనుము

తర్వాత $(2\sqrt{3})^x = 1728 = 2^6 3^3 = 2^6(\sqrt{3})^6$

కావున $(2\sqrt{3})^x = (2\sqrt{3})^6$ అందువలన $x = 6$ అనగా $\log_{2\sqrt{3}} 1728 = 6$

ఉదాహరణ 2.35 324 కు ఆధారము a కలిగిన సంవర్గమానపు విలువ 4 అయినచో a యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$\log_a 324 = 4$ అని ఇవ్వబడినది

కనుక $a^4 = 324 = 3^4(\sqrt{2})^4$

కావున $a = 3\sqrt{2}$

ఉదాహరణ 2.36 $\log\frac{75}{16} - 2\log\frac{5}{9} + \log\frac{32}{243} = \log 2$ అని నిరూపించుము

సాధన

సంవర్గమాన ధర్మములనుపయోగించి,

$$\log\frac{75}{16} - 2\log\frac{5}{9} + \log\frac{32}{243} = \log 75 - \log 16 - 2\log 5 + 2\log 9 + \log 32 - \log 243$$

(భాగహారపు నియమము ప్రకారము)

$$= \log 3 + \log 25 - \log 16 - \log 25 + \log 81 + \log 16 + \log 2 - \log 81 - \log 3$$

$$= \log 2$$

ఉదాహరణము 2.37 $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = \frac{7}{2}$ అయిన x యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$x > 0$ అనునది గమనించుము.

$\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = \frac{7}{2}$ అనునది $\frac{1}{\log_x 2} + \frac{1}{\log_x 4} + \frac{1}{\log_x 16}$ గా మారును (ఆధార మార్పిడి నియమము ప్రకారము)

$\frac{1}{a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{4a} = \frac{7}{2}$, ఇచ్చట $a = \log_x 2$, అనగా $\frac{7}{4a} = \frac{7}{2}$

కావున $a = \frac{1}{2}$ మరియు $\log_x 2 = \frac{1}{2}$ ఇచ్చునది $x^{1/2} = 2$

కావున $x = 2^2 = 4$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 99 10-03-2023 12:09:10

ఉదాహరణము 2.38 సాధించుము $x^{\log_3 x} = 9$

సాధన

$$\log_3 x = y \text{ అనుకొనుము.}$$

$$x = 3^y \text{ మరియు } 3^{y^2} = 9$$

కావున, $y^2 = 2, \; y = \sqrt{2}, -\sqrt{2}$

అందువలన $x = 3^{\sqrt{2}}, \; 3^{-\sqrt{2}}$

ఉదాహరణము 2.39 $\log_3 5 \log_{25} 27$–యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$$\log_3 5 \log_{25} 27 = \log_3 5 \log_{25} 3^3$$

$$= \log_3 5 \times 3 \log_{25} 3 \text{ (ఘాతనియమము ప్రకారము)}$$

$$= 3 \log_{25} 5 = \frac{3}{\log_5 25} = \frac{3}{2 \log_5 5} = \frac{3}{2}$$

ఉదాహరణము 2.40 $\log_{10} 2 = 0.30103, \log_{10} 3 = 0.47712$ (రమారమి) అయిన $2^8 \cdot 3^{12}$ లో వుండే అంకెల సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన

$N = 2^8 3^{12}$ కు $n+1$ అంకెల కలదని అనుకొనుము. $1 \le b < 10$ అని వుండే విధంగా N ను $10^n \times b$ అను రూపంలో వ్రాయవచ్చును.

ఇరువైపుల ఆధారం 10 కల్గిన సంవర్గమానమును తీసుకొనగా,

$$\log_{10} N = \log(10^n b) = n \log 10 + \log b = n + \log b \text{ వచ్చును.}$$

$$\log_{10} N = \log 2^8 3^{12} = 8 \log 2 + 12 \log 3 = 8 \times 0.30103 + 12 \times 0.47712 = 8.13368$$

ఇప్పుడు మనకు, $n + \log b = 8.13368$ వచ్చును.

$1 \le b < 10$ అగుట వలన అంకెల సంఖ్య '9'.

అభ్యాసము 2.12

1. $b > 0$ మరియు $b \neq 1$ అయిన $y = b^x$ ను సంవర్గమాన రూపములో వ్రాయుము. పైగా ఈ సంవర్గమాన ప్రమేయ ప్రదేశము మరియు వ్యాప్తిని తెలియజేయుము.
2. విలువ కనుగొనుము : $\log_9 27 - \log_{27} 9$ సాధించుము
3. $\log_8 x + \log_4 x + \log_2 x = 11$ ను సాధించుము.
4. $\log_4 2^{8x} = 2^{\log_2 8}$ ను సాధించుము.
5. $a^2 + b^2 = 7ab$ అయిన, $\log \frac{a+b}{3} = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ అని చూపుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 100 10-03-2023 12:09:12

6. $\log \frac{a^2}{bc} + \log \frac{b^2}{ca} + \log \frac{c^2}{ab} = 0$ అని నిరూపించుము.

7. $\log_{10} 2 + 16 \log_{10} \frac{16}{15} + 12 \log_{10} \frac{25}{24} + 7 \log_{10} \frac{81}{80} = 1$ అని నిరూపించుము.

8. $\log_{a^2} a \log_{b^2} b \log_{c^2} c = \frac{1}{8}$ అని నిరూపించుము.

9. $\log a + \log a^2 + \log a^3 + \cdots + \log a^n = \frac{n(n+1)}{2} \log a$ అని నిరూపించుము.

10. $\frac{\log x}{y - z} = \frac{\log y}{z - x} = \frac{\log z}{x - y}$ అని చూపువు, $xyz = 1$ సాధించుము.

11. $\log_2 x - 3 \log_{1/2} x = 6$ సాధించుము.

12. $\log_{5-x}(x^2 - 6x + 65) = 2$ అని నిరూపించుము.

2.10 నిత్యజీవితంలో బీజగణితం అనువర్తనాలు (Application of algebra in real life)

నిత్యజీవితంలో బీజగణితం అనేక రకాలుగా ఉపయోగపడుచున్నది. నిత్యజీవితంలో ఆర్థిక ప్రణాళికలో బ్యాంకులలో వడ్డీ రేట్లను ఋణము కొరకు తిరిగి చెల్లించు మొత్తము లెక్కించుటలో, ఆర్థికాభివృద్ధిని తెలుసుకొనుటకు బీజగణితము ఉపయోగపడుచున్నది. ఒకరి ఎత్తు, బరువు వంటి వాటిని నియంత్రణకు తీసుకొవలసిన ఆహారం అంచనావేయుటకు బీజగణితము ఉపయోగపడుచున్నది. ఒకరి వయస్సు మరియు బరువు తగ్గ మందుల పరిమాణమును అంచనావేయుటకు వైద్యులు బీజగణితమును ఉపయోగించుచున్నారు. రహదారులు, వంతెనలు మరియు సొరంగ మార్గములు నిర్మించుటకు ఇంజనీర్లు, భవనములను నిర్మించుటకు సివిల్ ఇంజనీర్లు బీజగణితమును ఉపయోగించుచున్నారు. బీజగణితంలో ఒక్కొక్క దానిని కొలతలతో సూచించుట వలన దానిని ఉపయోగించి రూపొందించే నిర్మాణాలు సరైన నిష్పత్తిలో ఉండును. ఇది సంగణకము మరియు దూరవాహిణి వంటి వాటిలో ఉపయోగపడుచున్నది. కొన్ని ఉదాహరణలను చూద్దాం. మానవుని యొక్క వినికిడి సామర్థ్యము లెక్కించుట కష్టతరమైనది కావున (1 నుండి 1000 మిలియన్లు) శబ్ద పరిమాణము లెక్కించుటకు సంవర్గమానము ఉపయోగపడుచున్నది. దూరవాహిని కనుగొన్న అలెగ్జాండర్ గ్రహంబెల్ యొక్క జ్ఞాపకార్థంగా వినికిడి సామర్థ్యమును డెసిబల్ అనే ప్రమాణాలతో ఉపయోగిస్తున్నారు.

ప్రస్తుత ప్రపంచ జనాభను ఆధారంగా చేసుకొని అది పెరుగు నిష్పత్తిని ఘాత ప్రమేయముతో సంబంధపరచి అంచనా వేయవచ్చును. రేడియో ధార్మిక కార్బన్ 14 మూలకము ఘాత సూత్రము ప్రకారం విచ్ఛేనదము చెందును.

అభ్యాసము 2.13

సరైన సమాధానమును ఎంపిక చేయుము

1. $|x + 2| \leq 9$ అయిన x చెందు అంతరము

(1) $(-\infty, -7)$ (2) $(-11, 7)$

(3) $(-\infty, -7) \cup [11, \infty)$ (4) $(-11, 7)$

2. x, y మరియు b లు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు $x < y$, $b > 0$ అయిన

(1) $xb < yb$ (2) $xb > yb$ (3) $xb \leq yb$ (4) $\frac{x}{b} \geq \frac{y}{b}$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 101 10-03-2023 12:09:13

3. $\frac{|x-2|}{x-2} \geq 0$ అయిన x చెందు అంతరము

(1) $[2, \infty)$ (2) $(2, \infty)$ (3) $(-\infty, 2)$ (4) $(-2, \infty)$

4. $5x - 1 < 24$ మరియు $5x + 1 > -24$ అను అసమీకరణాల సాధన

(1) $(4, 5)$ (2) $(-5, -4)$ (3) $(-5, 5)$ (4) $(-5, 4)$

5. $|x-1| \geq |x-3|$ అను అసమీకరణ సాధనసమితి

(1) $[0, 2]$ (2) $[2, \infty)$ (3) $(0, 2)$ (4) $(-\infty, 2)$

6. $\log_{\sqrt{2}} 512$ యొక్క విలువ

(1) 16 (2) 18 (3) 9 (4) 12

7. $\log_3 \frac{1}{81}$ యొక్క విలువ

(1) -2 (2) -8 (3) -4 (4) -9

8. $\log_{\sqrt{x}} 0.25 = 4$ అయిన, x–విలువ

(1) 0.5 (2) 2.5 (3) 1.5 (4) 1.25

9. $\log_a b \log_b c \log_c a$–యొక్క విలువ

(1) 2 (2) 1 (3) 3 (4) 4

10. 343 యొక్క సంవర్గమానము 3 అయిన, దాని ఆధారము

(1) 5 (2) 7 (3) 6 (4) 9

11. $2x^2 + (a-3)x + 3a - 5 = 0$ అనుసమీకరణంలో మూలముల మొత్తం మరియు లబ్ధము సమానమైన a యొక్క విలువ

(1) 1 (2) 2 (3) 0 (4) 4

12. $x^2 - kx + 16 = 0$ అను సమీకరణం యొక్క మూలములు a మరియు b అనునవి $a^2 + b^2 = 32$ ను తృప్తిపరచినచో k యొక్క విలువ

(1) 10 (2) -8 (3) $-8, 8$ (4) 6

13. $x^2 + |x-1| = 1$ యొక్క సాధనముల సంఖ్య

(1) 1 (2) 0 (3) 2 (4) 3

14. $3x^2 - 5x - 7 = 0$ యొక్క మూలములుకు సంఖ్యాపరంగా గల సమముగాను, వ్యతిరేఖ గుర్తులు కల్గిన మూలముల సమీకరణము

(1) $3x^2 - 5x - 7 = 0$ (2) $3x^2 + 5x - 7 = 0$

(3) $3x^2 - 5x + 7 = 0$ (4) $3x^2 + x - 7 = 0$

15. $x^2 + ax + c = 0$ యొక్క మూలములు 8 మరియు 2 అదేవిధంగా $x^2 + dx + b = 0$ యొక్క మూలాలు 3, 3 అయిన $x^2 + ax + b = 0$ యొక్క మూలములు

(1) 1, 2 (2) $-1, 1$ (3) 9, 1 (4) $-1, 2$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 102 10-03-2023 12:09:15

16. $x^2 - kx + c = 0$ యొక్క వాస్తవ మూలాలు a, మరియు b అయిన $(a, 0)$ మరియు $(b, 0)$ లకు మధ్యగల దూరము.

(1) $\sqrt{k^2 - 4c}$ (2) $\sqrt{4k^2 - c}$ (3) $\sqrt{4c - k^2}$ (4) $\sqrt{k - 8c}$

17. $\dfrac{kx}{(x+2)(x-1)} = \dfrac{2}{x+2} + \dfrac{1}{x-1}$ అయిన, k యొక్క విలువ

(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

18. $\dfrac{1-2x}{3+2x-x^2} = \dfrac{A}{3-x} + \dfrac{B}{x+1}$ అయిన, $A+B$ యొక్క విలువ

(1) $\dfrac{-1}{2}$ (2) $\dfrac{-2}{3}$ (3) $\dfrac{1}{2}$ (4) $\dfrac{2}{3}$

19. $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$–యొక్క మూలముల సంఖ్య

(1) 4 (2) 2 (3) 3 (4) 0

20. $\log_3 11 \ \log_{11} 13 \ \log_{13} 15 \ \log_{15} 27 \ \log_{27} 81$ యొక్క విలువ

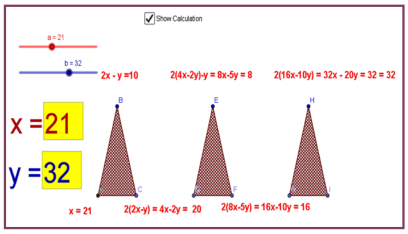
(1) 1 (2) 2 (3) 3 (4) 4

పాఠ్య సారాంశము (Summary)

- ఇచ్చుట p ఒక ప్రధాన సంఖ్య π మరియు $\sqrt{p}$ (p అనేవి కొన్ని కరణీయ సంఖ్యలు
- అయితే అయినప్పుడు మాత్రమే $|x-a| = r$ అయితే అయినప్పుడు మాత్రమే $r \geq 0$ మరియు $x - a = \pm r$
- అయితే అయినప్పుడు మాత్రమే $|x-a| \leq r$ అయితే అయినప్పుడు మాత్రమే $-r \leq x - a \leq r$ లేక $a - r \leq x \leq a + r$.
- $|x-a| > r \Longrightarrow x < a - r$ అయితే $x > a + r$ లేక $x \in (-\infty,\ a-r) \cup (a+r,\ \infty)$
- సాధారణంగా అసమీకరణాలు ఒకటికన్నా ఎక్కువ సాధనలును కలిగియుండును
- విక్షచణి $D = b^2 - 4ac$ అనునది $ax^2 + bx + c = 0$ యొక్క మూలముల స్వభావమును తెలియజేయును.
- $f(x)$ అనే వాస్తవసంఖ్య $(x-a)$ అను బహుపద సమాసము యొక్క ఒక శూన్యంగా వుండుటకు అయితే అయినపుడు మాత్రమే అనునది. $f(x)$ కు కారణాంకము
- $f(x)$ యొక్క అంతస్తు **g (x)** యొక్క అంతస్తు కాన్న తక్కువుగా వుండినచో $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ను పాక్షిక భిన్నముల మొత్తముల మొత్తముగా వ్రాయవచ్చును.
- సాధారణంగా ఘాత ప్రమేయులు మరియు సంవర్గమాన ప్రమేయాలు ఒకదానికొకటి విలోమప్రమేయాలుగా వుండును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 103 10-03-2023 12:09:17

ఆశించిన ఫలితములు 2 (a)



సోపానం –1 క్రింద ఇవ్వబడిన URL లింక్‌ను open చేయుము లేక QR Code ను స్కాన్ చేయుము.

సోపానం –2 Geodebera ను Hill and Flower Puzzle అనే వర్క్‌షీట్ కనబడును.

చిక్కు సమస్య :

(అ) నీ యొక్క చేతిలో కొన్ని పుష్పములు కలవు. మీరు కొండను ఎక్కినప్పుడు నీ చేతిలో గల పుష్పములు రెట్టింపు అగును. అదే సమయంలో కొండపై నుంచి దిగినప్పుడు కూడా రెట్టింపు అగును.

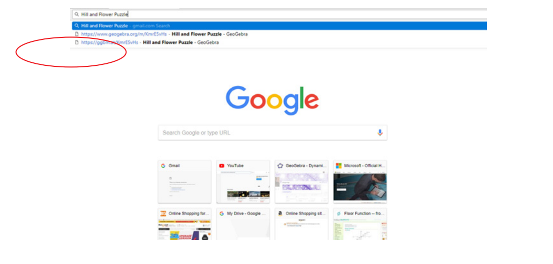
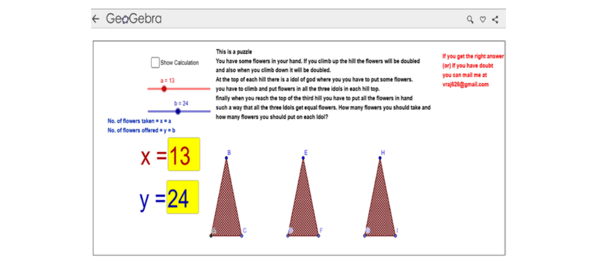
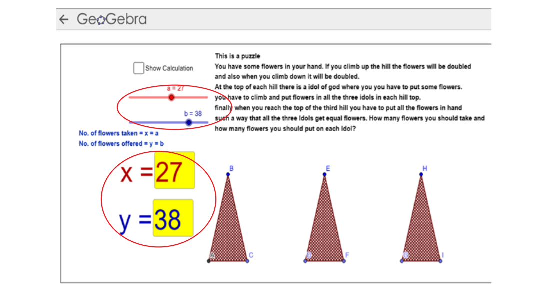
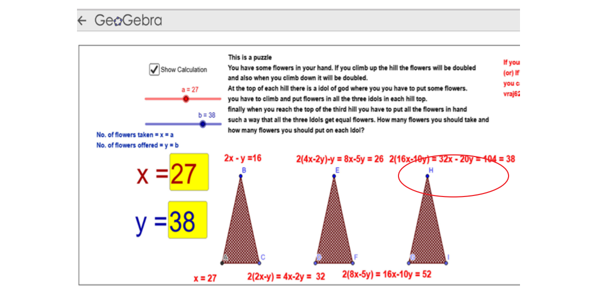
(ఆ) ప్రతి కొండపైకి వెళ్ళినప్పుడు అక్కడ వున్న భగవంతుని శిలకు కొన్ని పుష్పములను ఉంచవలెను. ప్రతి కొండపైకి పోయినప్పుడు అన్ని మూడు భగవంతుని శిలకు పుష్పములను ఉంచవలెను.

(ఇ) చివరిగా, మూడవ కొండపైకి వెళ్ళినప్పుడు అక్కడ నీ చేతిలో గల అన్ని పుష్పములను అన్ని మూడు శిలలకు సమానంగా పుష్పములు లభించునట్లు ఉంచవలెను. నీవు ఎన్ని పుష్పములను తీసుకొవాలి మరియు ఎన్ని పుష్పములను ప్రతి శిలను ఉంచవలెను?

సోపానం –3 మీ చేతిలో గల పుష్పముల సంఖ్య X విలువగా ఉన్నది అనుకొనుము. భగవంతుని శిలకు ఉంచబడిన పుష్పముల సంఖ్య Y విలువగా తీసుకొనుము. ఆ పేజిలో ఉన్న స్లైడర్‌ను జరుపుము. ఆలోచించడం ద్వారా అంత సులభంగా సాధించలేము.

సోపానం –4 ఇప్పుడు బీజగణితం యొక్క అవసరంను గుర్తించవలసిన సమయము బీజగణితము ఉపయోగించుటకు పద్ధతులను ఆలోచించవలెను. లేనిచో SHOW CALCULATION పెట్టెను క్లిక్ చేయుము. బీజగణిత గణనను ప్రతి స్థాయిలోను చూడవచ్చును. ఇప్పుడు పజిల్‌ను సాధించుటకు సమీకరణంను నీవు గుర్తించవలెను.

సూచన : దీని జవాబు ఒక నిష్పత్తి అగును.

సోపానం – 1	సోపానం – 2
	
సోపానం – 3	**సోపానం – 4**
	

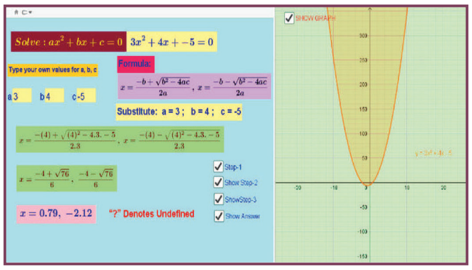
*క్రిందివ్వబడిన Hill and Flower Puzzle లింక్‌ను బ్రౌజ్ చేయుము.

https://ggbm.at/KmrE5vHs కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము.

1GWBD

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 104 10-03-2023 12:09:18

ఆశించిన ఫలితములు 2 (b)

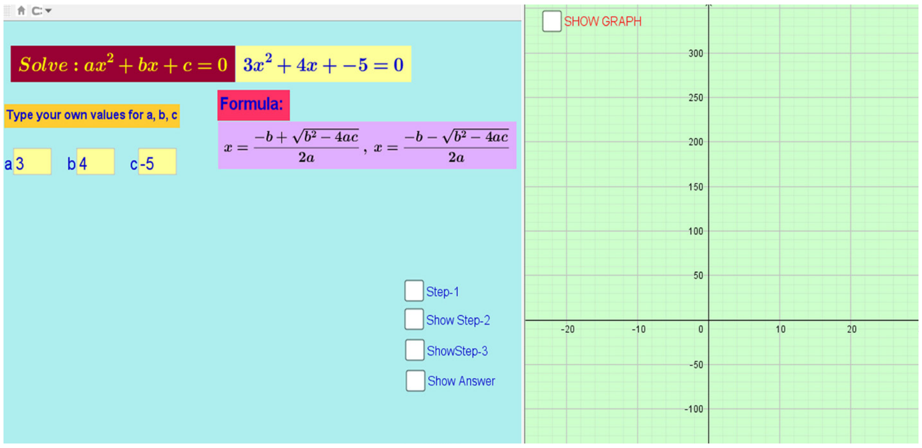


సోపానం –1 క్రింది ఇవ్వబడిన URL లింక్‌ను టైపు చేయుము లేక QR ను స్కాన్ చేయుము. Code అనే జియోజిబ్రా HIGH SCHOOL ALGEBRA వర్క్‌షీట్ కనబడుతుంది. అక్కడ బీజగణితంకు సంబంధించిన అనేక వర్క్‌షీట్‌లు ఇవ్వబడుటను చూడవచ్చును. దానిలో నీకు అవసరమైన ఒక వర్క్‌షీట్‌ను ఎంచుకొనుము. ఉదాహరణకు Quadratic Equation వర్క్‌షీట్‌ను ఎంచుకొని దాన్ని సూత్రం ద్వారా సాధించుము.

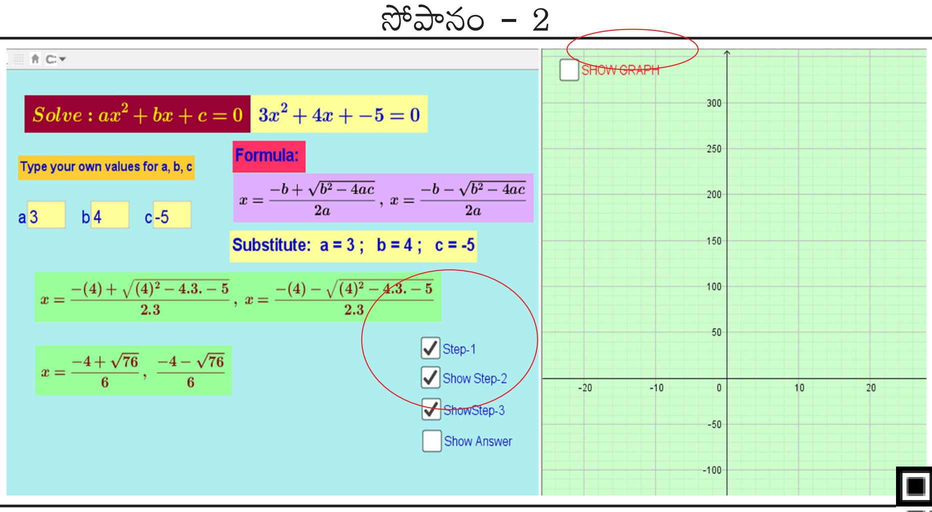
దానిలో a,b,c మరియు 20 కు 20 మధ్య ఏదైన విలువలను టైపు చేయుము. వర్గ సమీకరణం సూత్రమును ఉపయోగించి సాధనను కనుగొనుము '?' ఈ గుర్తు నిర్వచింపబడిన జవాబును సూచించును.

సోపానం – 2 ఇప్పుడు ఆ జవాబు కొరకు సరిచేయుట కొరకు క్లిక్ చేయుము. నీవు చెక్ బాక్సును క్లిక్ చేసి ఒకదాని తరువాత ఒకటిని క్లిక్ చేయడం ద్వారా సోపానాలను చూడవచ్చును. చివరిగా కుడివైపు క్లిక్ చేసిన రేఖాచిత్రమును చూడవచ్చును. నీ యొక్క సమాధానమును రేఖాచిత్రముతో పోల్చుము. వక్రము x అక్షము ఎక్కడ ఖండించినో జవాబు అగును.

సోపానం – 1



సోపానం – 2



**క్రిందివ్వబడిన Hill and Flower Puzzle లింక్‌ను బ్రౌజ్ చేయుము.

https://ggbm.at/N4kX9QJq కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము.

MOJK3

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_2.indd 105 10-03-2023 12:09:19

అధ్యాయము **3**

త్రికోణమితి

నా ఆనందము అంతరిక్షంలో తిరుగుతున్న వస్తువులతో ముడిపడి ఉండుట వలన నా అడుగులు భూమిపై విశ్రాంతి తీసుకొనలేదు.

– టాలెమీ

7CBUZ

3.1 పరిచయము (Introduction)

గణిత శాస్త్రము యొక్క ప్రాథమిక శాఖ త్రికోణమితి, త్రిభుజముల యొక్క కోణములు మరియు భుజాలకు మధ్య గల సంబంధమును అధ్యయనం చేయు శాఖ. Trigonometry అను పదము trigonon మరియు metron అను గ్రీకు పదం నుండి ఉద్భవించినది. Trigonon అనగా త్రిభుజము మరియు metron అనగా కొలుచుట. కావున త్రికోణమితి అనునది త్రిభుజమును కొలిచే ఒక అధ్యయనము. గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్తలు తెలియని దూరాలను కనుగొనుటకు త్రికోణమితి నిష్పత్తులు ఉపయోగించారు. మరొక పక్క ఈజిప్టు వారు రెండు మిలీనియం BC(BCE) లో పిరమిడ్ల నిర్మాణం కొరకు త్రికోణమితి యొక్క ప్రాథమిక రూపాలను ఉపయోగించారు. అరిస్టార్కస్ (310-250 BC(BCE)) చంద్రునికి మరియు సూర్యునికి మధ్య గల దూరమును కనుగొనుటకు త్రికోణమితిని ఉపయోగించారు.

టాలెమీ ఆఫ్ అలెగ్జాండ్రియా
(90–168)

ఎరటోస్తనీస్ (276-195 BC(BCE)) భూమి యొక్క చుట్టుకొలతను గనించిన మొట్టమొదటి వ్యక్తి. దీనికొరకు ఇతను స్టడీయా (stadia) అను కొలిచే వ్యవస్థను ఉపయోగించారు. ఈ స్టడీయా అనునది టాలెమీ ఆఫ్ అలెగ్జాండ్రియా (AD(CE) 90-168) కాలంలో కొలత యొక్క ప్రామాణిక యూనిట్. గ్రీకు ఖగోళవేత హిపార్కస్ (190-120 BC(BCE)) త్రికోణమితి యొక్క సాధారణ ధర్మాలను రూపొందిచెను మరియు ఇతను త్రికోణమితి యొక్క రూపకర్తగా పేరుగాంచేను. ఇతని యొక్క ఐడియాలను టాలెమీ ఆఫ్ అలెగ్జాండ్రియా (AD 90-168) ఉపయోగించాడు. ఇది ఒక గోళం యొక్క టాలెమీ సిద్ధాంతము యొక్క అభివృద్ధికి దారి తీసినది. భారతదేశంలో పురాతన కాలంలో త్రికోణమితి నందు చెప్పుకోదగిన అభివృద్ధి జరిగినది. భారతదేశ గణిత శాస్త్రవేత్త మరియు ఖగోళవేత్తైనా ఆర్యభట్ట (AD(CE) 476-550) సైన్, కొసైన్, విలోమ కొసైన్, విలోమ సైన్ లను నర్వచించారు మరియు ఈయన ఒక త్రిభుజ వైశాల్య సూత్రంలో సహా గణిత ఫలితాలను 108 పద్యాల రూపంలో అందించెను. గణిత శాస్త్రవేత్తలు బ్రహ్మగుప్త (598 AD(CE)) భాస్కర్ I (600 AD(CE)) మరియు భాస్కర్ II (1114 AD(CE)) త్రికోణమితి నందు చెప్పుకోదగిన అభివృద్ధికి కృషిచేసిన పురాతన భారతీయులు. జాన్ బెర్నోలి (1667-1748) మరియు లియొనార్డ్ ఆయిలర్ (1707-1783) కృషి ఫలితంగా త్రికోణమితి గణితశాస్త్రంలో ఒక ప్రత్యేక శాఖగా అభివృద్ధి చెందినది. ఆయిలర్ త్రికోణమితి ప్రమేయాల కు మరియు సంకీర్ణ ఘాతాలను సంబంధ పరిచే ప్రాథమిక ఫలితాలను రూపొందించెను. జోసఫ్ ఫోరియర్ (1768-1830) త్రికోణమితి శ్రేణులను అధ్యయనం చేయుటలో ముఖ్యమైన కృషి చేశారు. ఇతను ఆవిష్కరించిన ఫోరియర్ శ్రేణులు కంపన విశ్లేషణ, ఎలక్ట్రికల్ ఇంజనీరింగ్,ఆక్వా స్టిక్స్, ఆప్టిక్స్, సిగ్నల్ ప్రాసెసింగ్, ఇమేజ్ ప్రాసెసింగ్ మరియు క్వాంటం మెకానిక్స్ లలో ముఖ్యమైన అనువర్తనాలు అగును. ఆధునిక కాలంలో త్రికోణమితి ప్రమేయాలు యాంగులర్ మాగ్ని ట్యూడ్స్ యొక్క గణిత ప్రమేయాలు గా అభివృద్ధి చేయబడినది. ఈ అభివృద్ధి గణితం యొక్క ప్రతి శాఖ మరియు అనువర్తనాలు లో జరిగిన అనేక రకాల జ్యామితీయ మరియు బీజీ ఆవిష్కరణల యానకము ద్వారా జరిగినది. మన యొక్క కార్ల లోని మరియు చరవాణి లోని GPS వ్యవస్థ త్రికోణమితీయ గణనల ద్వారా పని చేయను. కణితులను గుర్తించే CT మరియు MRI వంటి అధునాతన వైద్య స్కానింగ్ ఈ ప్రక్రియలో సైన్ మరియు కొసైన్ ప్రమేయాలు ఉపయోగపడును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 106 10-03-2023 12:06:40

అభ్యాసన లక్ష్యాలు (Learning objectives)

ఈ అధ్యాయం చివరన విద్యార్థులు క్రింది విషయాలను తెలుసుకుంటారు అని ఆశిస్తాము.

- లఘు కోణాలును కలిగిన లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు యొక్క పరిమితులు.
- ఒక కోణం యొక్క రేడియం కొలత యొక్క అధ్యయన ఆవశ్యకతను మరియు డిగ్రి కొలత పై దాని యొక్క ప్రయోజనమును తెలుసుకుంటారు.
- వాస్తవ సంఖ్యలు లెక్క త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల నిర్వచనంలో యూనిట్ వృత్తం ఏ విధంగా ఉపయోగపడునో తెలుసుకుంటారు.
- వివిధ త్రికోణమితీయ సర్వ సమానతలు వాని యొక్క సంబంధాలు మరియు అనువర్తనాలును గురించి తెలుసుకుంటారు.
- ఒక త్రికోణమితీయ సమీకరణం యొక్క ప్రధాన సాధన మరియు సాధారణ సాధనలను తెలుసుకుంటారు.
- త్రికోణమితీయ సమీకరణాలను ఏ విధంగా సాధించాలని తెలుసుకుంటారు,
- త్రిభుజంలో సైన్ న్యాయము మరియు కొసైన్ న్యాయము మరియు నిజ జీవిత సందర్భాలలో వాని యొక్క అనువర్తనాలును తెలుసుకుంటారు.
- సైన్యాలను మరియు కొసైన్ న్యాయాలను ఉపయోగించి ఒక ఒబెలిక్యూ త్రిభుజమును ఏ విధంగా సాధించాలని తెలుసుకుంటారు.
- హెరాన్స్ సూత్రం యొక్క అనువర్తనంను మరియు దాని యొక్క ఎత్తును కనుగొనకుండా ఒక త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యము ఏ విధంగా గనించాలని తెలుసుకుంటారు.
- విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు యొక్క వ్యవస్థీమును మరియు వాని యొక్క ప్రదేశములను మరియు వ్యాప్తులను తెలుసుకుంటారు.

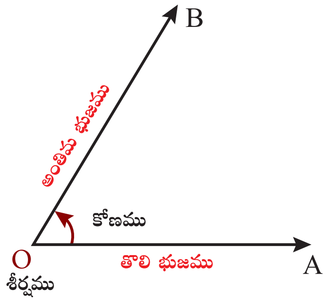
ముందు తరగతుల్లో చర్చించిన లఘు కోణాలను మరియు వారి యొక్క ధర్మాలను ఉపయోగించి త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల యొక్క ప్రాథమిక విషయాలను మనము పునశ్చరణ చేసుకుందాం.

3.2 ప్రాథమిక ఫలితాల పునశ్చరణ (A recall of Basic Results)

మనము మునుపటి తరగతులలో ఒక లంబకోణ త్రిభుజంను మరియు ఒక లఘు కోణముకు నిరూపించబడిన త్రికోణమితీయ సర్వసమానతలను ఉపయోగించి త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను నేర్చుకున్నాము. గ్రహాల మధ్య దూరమును, పర్వతాల ఎత్తులను, అధిక దూరంలో గల భూమి మరియు సూర్యుని వంటి వస్తువుల మధ్య దూరమును, ఎత్తైన భవనాల ఎత్తులను, సూపర్ సానిక్ జెట్ యొక్క వేగములను ఏ విధంగా కొలిచారు లేదా గనించారు అనునది మనలను ఆశ్చర్య పరుచును. ఇటువంటి దూరాలను లేదా ఎత్తులను గణించుటకు లఘు కోణాలకు కనుగొన్న త్రికోణమి తీయ నిష్పత్తుల ను ఉపయోగించారు. ఏదేని వాస్తవ సంఖ్యకు నిర్వచించిన త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల అభివృద్ధి మరియు వానిని గణితం యొక్క వివిధ శాఖలలో ప్రత్యేకించి కలన గణితంలో ఉపయోగించుట మన యొక్క లక్ష్యము. మొదట మనము కోణము మరియు కోణం యొక్క డిగ్రీ కొలత నిర్వచనములును గుర్తుచేసుకుందాం.

3.2.1 కోణాలు (Angles)

కోణము AOB అను ఒక కొలత OA మరియు OB అను రెండు కిరణాల ద్వారా ఏర్పడినది. పటము 3.1 లో చూపినట్లు ఈ కిరణాలు ఉమ్మడి బిందువు O ను పంచుకొనును. ఉమ్మడి బిందువు O ను కోణం యొక్క శీర్షము అంటారు. కిరణం OA ను దాని యొక్క శీర్షము O వెంబడి భ్రమణము చేసిన అది OB స్థానమును పొందును. OA మరియు OB లను వరుసగా తొలి భుజము మరియు అంతిమ భుజము అంటారు. ఒక అపసవ్య దిశ భ్రమణము ఒక ధనాత్మక కోణమును ఇచ్చును (ధనాత్మక గుర్తుతో కోణము), అలాగే ఒక సవ్య దిశ భ్రమణము ఒక రుణాత్మక కోణమును ఇచ్చును (రుణాత్మక గుర్తుతో కోణము).



పటము 3.1

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 107 10-03-2023 12:06:41

OA యొక్క ఒక పూర్తి అపసవ్య దిశ (లేదా సవ్య దిశ) భ్రమణము తిరిగి అదే స్థానంను చేరుటను ఒక భ్రమణము లేదా పరిభ్రమణము అంటారు.

3.2.2 కోణ కొలత యొక్క వివిధ వ్యవస్థలు (Different Systems of measurement of angle)

కోణాలను కొలుచుటకు మనకు 3 వివిధ వ్యవస్థలు గలదు.

(i) షష్ట్యంశ వ్యవస్థ (Sexagesimal system)

షష్ట్యంశ వ్యవస్థ అనునది కొలత యొక్క ప్రబలమైన వ్యవస్థ. ఇచ్చట ఒక లంబకోణమును 90 సమాన భాగాలుగా విభజించబడి ఉండును. ప్రతి సమాన భాగమును డిగ్రీలు అంటారు. ప్రతి డిగ్రీను 60 సమాన భాగాలుగా విభజించి, ప్రతి భాగమును నిమిషము అని మరియు ప్రతి నిమిషము 60 సమాన భాగాలుగా విభజించి, ప్రతి భాగమును సెకండ్లు అంటారు.

గుర్తులు $1^\circ, 1', 1''$ మరియు ... లను ఒక డిగ్రీ, ఒక నిమిషము మరియు ఒక సెకండ్లను సూచించడానికి ఉపయోగిస్తారు.

(ii) శతాంశ వ్యవస్థ (Centesimal system)

శతాంశ వ్యవస్థలో లంబకోణము నూరు సమాన భాగాలుగా విభజించబడి ఉండును. ప్రతి సమ భాగమును గ్రేడ్స్ అంటారు. ప్రతి గ్రేడ్ను 100 నిమిషములుగా, మరియు ప్రతి నిమిషమును 100 సెకండ్లుగా తిరిగి విభజిస్తారు. 1^g గుర్తు ఒక గ్రేడ్ను సూచించుటకు ఉపయోగిస్తారు.

(iii) వృత్తాకార వ్యవస్థ (Circular system)

వృత్తాకార వ్యవస్థలో ఒక కోణం యొక్క రేడియన్ కొలతను r వ్యాసార్థం గల ఒక వృత్తంలో చాప పొడవులను ఉపయోగించి పరిచయం చేస్తారు. వృత్తాకార వ్యవస్థను గణితం యొక్క అన్ని శాఖలలో ఉపయోగిస్తారు మరియు విజ్ఞానశాస్త్రంలో అనుమతిస్తారు. 1^c గుర్తు 1 రేడియన్ కొలతను సూచించుటకు ఉపయోగిస్తారు.

3.2.3 డిగ్రీ కొలత (Degree Measure)

డిగ్రీ అనునది కోణం యొక్క ఒక ప్రమాణ కొలత మరియు దీనిని $^\circ$ గుర్తుచే సూచిస్తారు. డిగ్రీలను,మనము ఒక పూర్తి భ్రమణమును 360 సమాన భాగాలుగా విభజించి మరియు ప్రతి భాగమును ఒక డిగ్రీ అని, దీనిని 1° చే సూచిస్తారు. కావున 1° అనునది ఒక పూర్తి భ్రమణము యొక్క 1/360 భాగమగను. ఒక కోణం యొక్క ఒక భిన్నమును కొలుచుటకు మరియు కోణం కొలత యొక్క ఖచ్చితత్వం కొరకు నిముషాలు మరియు సెకండ్లను పరిచయం చేశారు. ఒక నిమిషము $(1')$ ఒక డిగ్రీ యొక్క (1/60) వ భాగము అగను మరియు ఒక సెకను $(1'')$ ఒక నిమిషం యొక్క (1/60) వ భాగము (లేదా) ఒక డిగ్రీ యొక్క (1/3600) భాగము అగును.

ఒక జత కోణాలను బాగుగా అర్థం చేసుకొనుటకు మరియు ఉపయోగించుటకు క్రింది మార్గాలలో దానిని మనము వర్గీకరిస్తాము.

(i) ఖచ్చితంగా సమాన కొలత గల రెండు కోణాలను సర్వ సమాన కోణాలు అంటారు.

(ii) రెండు కోణము మొత్తము 90° అయినా వానిని పూరక కోణాలు అంటారు.

(iii) రెండు కోణము మొత్తము 180° అయినా వానిని సంపూరక కోణాలు అంటారు.

(iv) 0° మరియు 360° మధ్య గల రెండు కోణాల మొత్తము 360° అయినను వానిని సంయుగ్మ కోణాలు అంటారు.

(i) డిగ్రీలు, నిముషాలు మరియు సెకనులు అను భావన కాల కొలత యొక్క వ్యవస్థతో సారూప్యతను కలిగి ఉంది. ఇచ్చట ఒక డిగ్రీను ఒక గంటగా సూచిస్తారు.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 108 10-03-2023 12:06:41

(ii) దీన్ని పరిశీలించండి

$$59.0854^\circ = 59^\circ + 0.0854^\circ$$

$$0.0854^\circ = 0.0854^\circ \times \frac{60'}{1^\circ} = 5.124'$$

$$5.124' = 5' + 0.124'$$

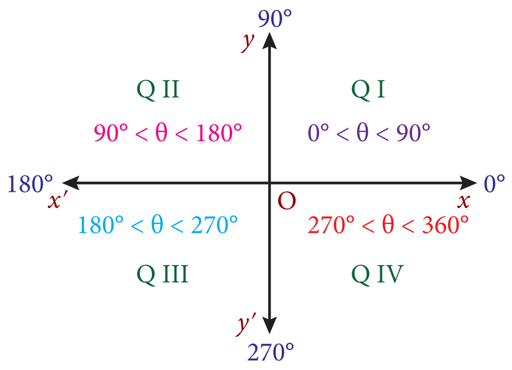
$$0.124' = 0.124' \times \frac{60''}{1'} = 7.44''$$

కావున, $59.0854^\circ = 59^\circ 5' 7.44''$

(iii) దీనిని కూడ గమనించండి $34^\circ 51' 35'' = 34.8597^\circ$

మరియు $90^\circ - 36^\circ 18' 47'' = 53^\circ 41' 13''$

3.2.4 ప్రామాణిక స్థితిలో కోణాలు (Angles in Standard Position)



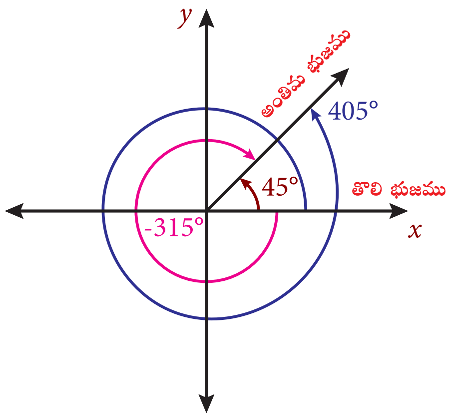
పటము 3.2

ఒక కోణం యొక్క శీర్షము ఆది బిందువు వద్ద మరియు దాని యొక్క తొలి భుజము ధనాత్మక x అక్షము వెంబడి ఉన్నచో ఆ కోణము ప్రామాణిక స్థితిలో గలదని చెప్తారు. ఒక కోణము ప్రామాణిక స్థితిలో ఉండి దాని యొక్క అంతిమ భుజము మొదటి పాదంలో ఉంటే ఆ కోణము మొదటి పాదంలో ఉందని అంటారు. ఇదేవిధంగా మిగిలిన మొదటి పాదాలను మనము నిర్వచించుకోవచు. కోణాలు ప్రామాణిక స్థితిలో ఉండి వాని యొక్క అంతిమ భుజాలు x అక్షము లేదా y అక్షము వెంబడి ఉంటే వానిని పాద కోణాలు అంటారు. కావున $0^\circ; 90^\circ; 180^\circ; 270^\circ$ మరియు 360° అనునవి పాద కోణాలు.

ఒక పాద కోణము యొక్క డిగ్రీ కొలత 90° యొక్క ఒక గుణిజము.

3.2.5 సహవాసానిక కోణాలు (Coterminal angles)

ఒక కిరణం అపసవ్య దిశలో ఒక పూర్తి భ్రమణం చేసిన 360° కోణము వచ్చును. ఇదేవిధంగా అపసవ్య దిశలో కొనసాగించిన 360° కన్నా పెద్దదైన కోణాలు లభించును. $57^\circ, 417^\circ$ మరియు -303° కోణాలకు ఒకే తొలి భుజము మరియు అంతిమ భుజము గలదు కానీ భ్రమణాల సంఖ్య వేర్వేరు. ఎటువంటి కోణాలను సహవాసానిక కోణాలు అంటారు. కావున ఒకే అంతిమ భుజాలును కల్గిన ప్రామాణిక స్థితిలో కోణాలును సహవాసానిక కోణాలు అంటారు. కావున α మరియు β సహవాసానిక కోణాలు అయితే $\beta = \alpha + k(360^\circ)$ అగును. k ఒక పూర్ణ సంఖ్య. సహవాసానిక కోణాల యొక్క కొలతలు 360° యొక్క పూర్ణ గుణిజాలుచే వేర్వేరుగా ఉండును.



పటము 3.3

ఉదాహరణకు, 417° మరియు -303° సహవాసానికాలు ఎందుకనగా

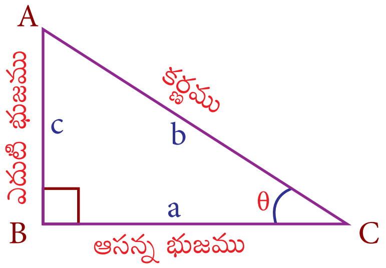
$$417^\circ - (-303^\circ) = 720^\circ = 2(360^\circ).$$

(i) $45^\circ, -315^\circ$ మరియు 405° మొదటి పాదంలో ఉంటుందని గమనించండి.

(ii) $(30^\circ, 390^\circ), (280^\circ, 1000^\circ)$ మరియు $(-85^\circ, 275^\circ)$ కోణాల జతలు సహ్యాంత కోణాలు.

3.2.6 ఒక లంబకోణ త్రిభుజమును ద్వారా ప్రాథమిక త్రికోణమితియ నిష్పత్తులు (Basic Trigonometric ratios using a right triangle)

ఒక లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క మూడు భుజాల పొడవుల ద్వారా ఆరు నిష్పత్తులు ఏర్పడుతుందని మనకు తెలుసు. ఈ నిష్పత్తులు ఆరు ప్రాథమిక త్రికోణమితియ ప్రమేయాల నిర్వచనంకు దారి తీసును. మొదట, ఒక లంబకోణ త్రిభుజము ద్వారా నిర్వచింపబడిన త్రికోణమితియ నిష్పత్తులను మనము గుర్తు చేసుకొందాము.



పటము 3.4

$$\sin\theta = \frac{\text{ఎదుటి భుజము}}{\text{కర్ణము}} \qquad \cos\theta = \frac{\text{ఆసన్న భుజము}}{\text{కర్ణము}}$$

$\sin\theta$ మరియు $\cos\theta$ లను ఉపయోగించి మిగిలిన త్రికోణమితీ నిష్పత్తులు $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$ మరియు $\sec\theta$ లను కింది వాటిని ఉపయోగించి నిర్వచించుకోవచ్చును.

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta},\ \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},\ \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta},\ \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

3.2.7 ఎక్కువగా వాడు కోణాల త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల ఖచ్చిత విలువ (Exact Values for trigonometric functions of widely used angles)

తెలిసిన కోణాల వద్ద త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల విలువలను మనము జాబితా పరుస్తాము.

θ	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	నిర్వచించబడదు

(i) పైన ఇవ్వబడిన విలువలన్నియు ఖచ్చితమైనవి.

(ii) $\sin 30^\circ$ మరియు $\cos 60^\circ$ విలువలు సమానమని మనము గమనించగలరు. మరియు $\sin 60^\circ$ మరియు $\cos 30^\circ$ లు సమానము.

(iii) cosecant, secant మరియు cotangent అను వ్యుత్క్రమల నిష్పత్తులను పై పట్టికను ఉపయోగించి పొందవచ్చును.

(iv) $\cos 90^\circ = 0$ ఫలితము మనల్ని $\tan 90^\circ$ మరియు $\sec 90^\circ$ లను నిర్వచించుటకు అనుమతించదు.

(v) ఇదేవిధంగా $\sin 0^\circ = 0$ కూడా $\operatorname{cosec} 0^\circ$ మరియు $\cot 0^\circ$ లను నిర్వచించుట అనుమతించదు.

3.2.8 ప్రాథమిక త్రికోణమితీయ సర్వసమానతలు (Basic Trigonometric Identities)

ఒక ప్రాథమిక త్రికోణమితీయ సర్వసమానత ప్రదేశంలోని విలువలకు ఎల్లప్పుడు సత్యగునట్లు ఒక సంబధంను సూచించును. ఉదాహరణకు, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ అనునది ప్రతి అనుమతించు θ విలువకు సత్యము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 110 10-03-2023 12:06:42

ఏదిఏమైనప్పటికీ, $\sin\theta = \frac{1}{2}$ సర్వసమానత కాదు. ఎందుకనగా ఈ సంబంధం $\theta = 60^\circ$ అయినపుడు నిజం కాదు. సంక్లిష్ట వ్యక్తీకరణలను సరళీకృతం చేయడానికి సర్వ సమానతలు మనకు అవకాశం ఇచ్చును. ఇవి త్రికోణమితీయ సమీకరణాలను సాధించడానికి ఉపయోగపడే ఒక ప్రధాన సాధన. బీజగణితం లోని వేర్వేరు టెక్నిక్ల సహాయంతో సర్వ సమానతలను మార్చుట అనేది ముఖ్యమైన భాగము

త్రికోణమితి యొక్క ప్రాథమిక సర్వ సమానతలను (పైథాగొరియన్ సర్వసమానతలు), గుర్తుచేసుకుందాం. అవి

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

$$\text{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

(i) $\sin^2\theta$ అనేది $(\sin\theta)^2$ కు వాడే ఒక సాధారణ సంకేతం. ఇలాగే మిగిలిన త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులకు వర్తించవచ్చు.

(ii) $\theta = 90^\circ$ అయినప్పుడు $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ కు అర్థం లేదు. కాని ఇది ఒక సర్వసమానత మరియు $\sec\theta$ మరియు $\tan\theta$ నిర్వచించినప్పుడు θ యొక్క అన్ని విలువలకు సత్యము. కావున, సర్వ సమానత అనేది ఒక సమీకరణము. ఇది దాని యొక్క ప్రదేశంలోని అన్ని విలువలకు సత్యము అగును.

(iii) $\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ ను మనము వ్రాసినప్పుడు, $1+\cos\theta \neq 0$ యొక్క అన్ని θ విలువలకు ఈ సమాసము చెల్లుతుందని మనము అవగాహన చేసుకొనవలెను.

ఉదాహరణ 3.1 $\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}$.

సాధన

$$\begin{aligned}\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} &= \frac{\tan\theta + \sec\theta - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}\\ &= \frac{(\tan\theta + \sec\theta)[1 - (\sec\theta - \tan\theta)]}{\tan\theta - \sec\theta + 1}\\ &= \tan\theta + \sec\theta = \frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}.\end{aligned}$$

ఉదాహరణ 3.2 నిరూపించుము: (sec A – cosec A) (1 + tan A + cot A) = tan A sec A – cot A cosec A.

సాధన

$$\text{L.H.S} = \left(\frac{1}{\cos A} - \frac{1}{\sin A}\right)\left[1 + \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A}\right]$$

$$= \frac{\sin^3 A - \cos^3 A}{\sin^2 A\ \cos^2 A} \qquad \text{...... (i)}$$

$$\text{R.H.S} = \frac{\sin A}{\cos^2 A} - \frac{\cos A}{\sin^2 A} = \frac{\sin^3 A - \cos^3 A}{\sin^2 A\cos^2 A} \qquad \text{...... (ii)}$$

(i) మరియు (ii) ల నుండి మనకు కావలసిన సాధన లభించును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 111 10-03-2023 12:06:43

ఉదాహరణ 3.3 $a\cos\theta = b$ మరియు $c\sin\theta = d$ ల నుండి θ ను తొలగించుము. ఇచ్చట a, b, c, d లు స్థిరాంకములు

సాధన

$ac\cos\theta = bc$ మరియు $ac\sin\theta = ad$ వర్గము చేసి కూడిన

$$a^2c^2 = b^2c^2 + a^2d^2$$

అభ్యాసము 3.1

1. క్రింద ఇవ్వబడిన కోణములు ఏ పాదములో అమరును గుర్తించుము.
   (i) 25° (ii) 825° (iii) – 55° (iv) 328° (v) – 230°
2. ఇవ్వబడిన కోణములకు సహ్యాంత కోణము θ ను $0^\circ \le \theta < 360^\circ$ అగునట్లు కనుగొనుము.
   (i) 395° (ii) 525° (iii) 1150° (iv) – 270° (v) – 450°
3. $a\cos\theta - b\sin\theta = c$ అయితే $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ అని చూపుము.
4. $\sin\theta + \cos\theta = m$ అయితే $\cos^6\theta + \sin^6\theta = \dfrac{4-3(m^2-1)^2}{4}$ అని చూపుము. ఇచ్చట $m^2 \le 2$
5. $\dfrac{\cos^4\alpha}{\cos^2\beta} + \dfrac{\sin^4\alpha}{\sin^4\beta} = 1$ అయితే,
   (i) $\sin^4\alpha + \sin^4\beta = 2\sin^2\alpha\sin^2\beta$ (ii) $\dfrac{\cos^4\beta}{\cos^2\alpha} + \dfrac{\sin^4\beta}{\sin^2\alpha} = 1$ అని నిరూపించుము.
6. $y = \dfrac{2\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}$ అయితే $\dfrac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = y$ అని నిరూపించుము.
7. $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $x = \sum_{n=0}^{\infty}\cos^{2n}\theta$, $y = \sum_{n=0}^{\infty}\sin^{2n}\theta$ మరియు $z = \sum_{n=0}^{\infty}\cos^{2n}\theta\sin^{2n}\theta$ అయితే,
   $xyz = x + y + z$ అని చూపుము.
   [(హింట్: $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \dfrac{1}{1-x}$, $|x|<1$ -సూత్రమును ఉపయోగించుము ఇచ్చట].
8. $\tan^2\theta = 1 - k^2$ అయితే $\sec\theta + \tan^3\theta\,\mathrm{cosec}\,\theta = (2-k^2)^{3/2}$ అని చూపుము. మరియు ఈ ఫలితమును తృప్తిపరిచే k యొక్క విలువలను కనుగొనుము.
9. $\sec\theta + \tan\theta = p$ అయిన $\sec\theta$, $\tan\theta$ మరియు $\sin\theta$ విలువలను p పదాలలో కనుగొనుము.
10. $\cot\theta(1+\sin\theta) = 4m$ మరియు $\cot\theta(1-\sin\theta) = 4n$ అయిన $(m^2-n^2)^2 = mn$ అని నిరూపించుము.
11. $\mathrm{cosec}\,\theta - \sin\theta = a^3$ మరియు $\sec\theta - \cos\theta = b^3$ అయిన, $a^2b^2(a^2+b^2) = 1$ అని నిరూపించుము.
12. $a\sec\theta - c\tan\theta = b$ మరియు $b\sec\theta + d\tan\theta = c$ ల నుండి θ ను తొలగంచుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 112 10-03-2023 12:06:45

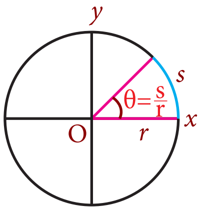
3.3 రేడియన్ కొలత (Radian Measure)

ప్రారంభంలో త్రికోణమితి నిష్పత్తులను నిర్వచించడానికి లంబకోణ త్రిభుజములను ఉపయోగించారు మరియు కోణాలను డిగ్రీలలో కొలిచారు. లంబకోణ త్రిభుజంలలో లఘు కోణాల మాత్రమే కలదు కావున మనకు పరిమితులు గలదు. డిగ్రీలలో ఒక పూర్తి భ్రమణము $360°$ తొ అనుసంధానం చేయబడినది. బాబిలోనియన్లు వేల సంవత్సరాలకు పూర్వమే 360 ను ఎన్నిక చేశారు. వారు ఒక సంవత్సరంలో గల రోజుల సంఖ్య ఆధారంగా 360 ను ఎంచుకొని ఉండవచ్చును. కాని ఇది $30°, 45°, 60°, 90°$ మరియు $180°$ అను చిన్న కోణాలగా విడదీయుటకు చక్కని ధర్మమును కలిగి ఉన్నది. 17 వ శతాబ్దంలో త్రికోణమితి భౌతిక శాస్త్రమును మరియు రసాయనిక శాస్త్రమునకు విస్తరించబడినది. ఈ శాస్త్రాలకు కోణాల కన్నా వాస్తవ సంఖ్యల సమితి ప్రదేశములుగా గల త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల అవసరము కలదు. ఇది ఒక యూనిట్ వృత్తంలో ఒక కోణము మరియు చాప పొడవును సంబంధపరుచటను వాటి ద్వారా సాధ్యమైనది. ఎటువంటి ఒక కోణం యొక్క కొలతను రేడియన్ కొలతగా చెప్పబడినది. సైద్ధాంతిక అనువర్తనాలకు రేడియన్ అను కోణ కొలతను విస్తృతంగా వాడే వ్యవస్థ. రేడియన్లు అనునది కలన గణితంతోబాటు చాలా సాంకేతిక రంగాలలో కొలత యొక్క సాధారణ ప్రమాణము. చాలా ముఖ్యమైన కరణీయ సంఖ్య π కోణం యొక్క కొలత రేడియన్లలో చాలా ముఖ్యమైన పాత్రను పోషిస్తుంది. ఒక కోణం యొక్క రేడియన్ కొలతను పరిచయం చేసుకుందాం.

నిర్వచనం 3.1

ఒక కోణం యొక్క రేడియన్ కొలత అనునది ఆ కోణం చేయు చాప పొడవకు వృత్త వ్యాసార్థమునకు గల నిష్పతి అగును. ఇది కేంద్ర కోణము.

ఒక వృత్త వ్యాసార్థం r గా తీసుకుందాం. s పొడవుగల చాపము చేయు ఒక కోణము θ అనుకుందాం.



పటము 3.5

తరువాత, $\theta = \dfrac{\text{చాపము పొడవు}}{\text{వ్యాసార్థము}}$

$= \dfrac{s}{r}$ రేడియన్లు.

కావున, $s = r\theta$.

(i) అన్ని వృత్తాలు సరూపాలు. కావున, ఏదేని వృత్తంలో ఇచ్చిన ఒక కేంద్ర కోణము చాపము పొడవుకు మరియు వ్యాసార్థంకు గల నిష్పత్తికి ఎల్లప్పుడూ స్థిరము.

(ii) $s = r$ అయినప్పుడు ఏర్పడు కోణము 1 రేడియన్. కావున ఒక రేడియన్ అనునది వృత్త వ్యాసార్థంనకు సమాన పొడవు గల చాపము కేంద్రం వద్ద చేయు కోణము.

(iii) s మరియు r లకు ఒకే ప్రమాణం ఉన్నప్పుడు θ కు ప్రమాణం లేదు. కావున, రేడియన్ను సూచించుటకు మనము ఎటువంటి సంకేతము ఉపయోగించలేము.

(iv) $\theta = 1$ రేడియన్ కొలత అయినప్పుడు $s = r$

$\theta = 2$ రేడియన్ కొలత అయినప్పుడు $s = 2r$

కావున, సాధారణముగా $s = kr$ అయినప్పుడు $\theta = k$ రేడియన్ కొలత కావున, ఒక కోణం యొక్క రేడియన్ కొలత θ కోణమును ఏర్పరచుటకు వ్రతము వెంబడి ఎన్ని వ్యాసార్థలా పొడవులు మనకు అవసరమని మనకి తెలియజేయును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 113 10-03-2023 12:06:46

(v) రేడియన్ కోణ కొలతను యూనిట్ వృత్తం యొక్క అంచుకు సంబంధ పరచవచ్చును. రేడియన్ వ్యవస్థలో, ఒక కోణం యొక్క అంతిమ భుజము యూనిట్ వృత్తమును ఖండించు వరకు యూనిట్ వృత్తం యొక్క అంచు వెంబడి ప్రయాణించిన దూరమును కొలుచుట ద్వారా ఆ కోణమును మనము కొలుస్తాము.

3.3.1 డిగ్రీ మరియు రేడియన్ కొలతల మధ్య సంబంధము (Relationship between Degree and Radian measures)

కోణములను కొలుచుటకు మనకు డిగ్రీ మరియు రేడియన్ ప్రమాణాలు గలదు. వీనిని సరళ మరియు మరింత సహజ మార్గలలో నిర్వచించ కలిగితే ఒక ప్రమాణము మరొక ప్రమాణం కన్నా ఉత్తమము అగును. ఉదాహరణకు, ఉష్ణోగ్రతను కొలిచే సెల్సియస్ మరియు ఫారిన్ హీట్ ప్రమాణాలలో సెల్సియస్ నీటి యొక్క ఘనీభవన మరియు భాష్పీభవన బిందువులను $0°$ మరియు $100°$ లను ఉపయోగించి నిర్వచించుట ద్వారా సెల్సియస్ ఫారెన్ హీట్ కన్నా మెరుగైనదని చెప్పవచ్చును.రేడియన్ కొలత మార్పిడికి మరియు గణనలకు ఉత్తమము.విశ్లేషణకు రేడియన్ కొలత చాలా సౌకర్యవంతమైనది. అదే సమయంలో ఒక కోణం యొక్క డిగ్రీ కొలత ప్రజల మధ్య భావనము అందించుటకు చాలా సౌకర్యవంతమైనది. ఒక వృత్త పరిధి నుండి ఉత్పన్నమైన π ఇంకా సంబంధమును గ్రీకు గణిత శాస్త్రవేత్తలు గమనించారు కావున π రేడియన్ కొలతలో ఒక కీలక పాత్రను పోషించును.

యూనిట్ వృత్తములో, ఒక పూర్తి భ్రమణము $360°$ కు సంభంద పరచ బడును అలాగే ఒక పూర్తి భ్రమణము 2π రేడియన్లకు సంబంధపరచబడును. కావున మరకు క్రింది సంబంధాలు గలదు.

$$\therefore\ 2\pi \text{ రేడియన్ల} = 360° \Rightarrow \pi \text{ రేడియన్లు} = 180°$$

$$\text{కావున, } 1 \text{ రేడియన్ల} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \text{ లేదా } 1° = \frac{\pi}{180} \text{ రేడియన్లు}$$

$$x \text{ రేడియన్లు} = \left(\frac{180x}{\pi}\right)^{\circ} \text{ లేదా } x° = \frac{\pi x}{180} \text{ రేడియన్లు.}$$

రేడియన్లలో వాడే స్కేలు డిగ్రీ లో వాడే స్కేలు కన్నా చాలా చిన్నది. చిన్న స్కేలు త్రికోణమితియ ప్రమేయాల గ్రాఫ్ లను మరింత దృష్టికరణకు మరియు వాడుకోబడేటట్లు తయారుచేయును. పై సంబంధము డిగ్రీలను లేదా డిగ్రీలును రేడియన్లగా మార్పిడి చేయు ఒక మార్గమును చూపును.

(i) ప్రతి వృత్తము పరిధికి మరియు దాని యొక్క వ్యాసముల నిష్పత్తి ఎల్లప్పూడూ ఒక స్థిరాంకం కరణీయ సంఖ్య సూచిస్తారు.

(ii) ఒక యూనిట్ వృత్తముపై ఒక బిందువు P ను గుర్తించి మరియు సంఖ్య రేఖపై ఈ యూనిట్ వృత్తమును P బిందువు O సంఖ్యను తాకునట్లు ఉంచవలెను. ఈ వృత్తమును సంఖ్య రేఖపై దొర్లునట్లు చేయవలెను. ఈ వృత్తము కుడివైపుకు ఒక పూర్తి భ్రమణం చేసినప్పుడు బిందువు P సంఖ్య రేఖపై 2π సంఖ్యను తాకును.

(iii) ఒక కోణం యొక్క కొలత యొక్క ప్రమాణమును పేర్కొనబడినట్లయితే ఆ కోణము రేడియన్లలలో గలదని అర్థం చేసుకొనవలెను.

(iv) r వ్యాసార్థం గల ఒక వృత్తం యొక్క సెక్టారను తీసుకుందాం. సెక్టార్ యొక్క కేంద్ర కోణము θ అయిన, సెక్టార్ యొక్క వైశాల్యము =

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\pi r^2}{360°}\right)\theta & \text{డిగ్రీ కొలతలో} \\ \left(\dfrac{\pi r^2}{2\pi}\right)\theta = \dfrac{r^2\theta}{2} & \text{రేడియన్ కొలతలో} \end{cases}$$

రేడియన్ కొలతలో గణించుట అనునది చాలా సులభమైనదని స్పష్టమగుచున్నది.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 114 10-03-2023 12:06:46

(v) π మరియు $\frac{22}{7}$ యొక్క విలువలు వరుసగా 3.1416 మరియు 3.1429 నాలుగు దశాంశ స్థానాలకు సవరించబడినది. కావున π మరియు $\frac{22}{7}$ లు రెండు దశాంశ స్థానాల వరకు ఉజ్జా యింపుగా సమానము. అందువలన, $\pi \approx \frac{22}{7}$

(vi) 1 రేడియన్ ≈ 57°17′45″ మరియు 1° ≈ 0.017453 రేడియన్

$1' = \left(\frac{\pi}{180 \times 60}\right)$ రేడియన్ ≈ 0.000291 రేడియన్

$1'' = \left(\frac{\pi}{180 \times 60 \times 60}\right)$ రేడియన్ ≈ 0.000005 రేడియన్

(vii) కొన్ని తెలియని కోణాలకు రేడియన్ కోణాలు మరియు వాటికి సంబంధించిన డిగ్రీ కొలతలు క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడినది

రేడియన్లు	0	1	0.017453	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
డిగ్రీలు	0°	57°17′45″	1°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°

(viii) sin 90° = 1 అయితే sin 90 ≠ 1 (రేడియన్ కొలతలో)

ఉదాహరణ 3.4 (i) 18° నుండి రేడియన్ (ii) – 108° నుండి రేడియన్ కు మార్చుము.

సాధన

180° = π రేడియన్లు అయిన ⇒ $1° = \frac{\pi}{180}$ రేడియన్లు

(i) 18° = $\frac{\pi}{180} \times 18$ రేడియన్లు = $\frac{\pi}{10}$ రేడియన్లు

(ii) – 108° = $\frac{\pi}{180} \times (-108)$ రేడియన్లు

= $-\frac{3\pi}{5}$ రేడియన్లు

ఉదాహరణ 3.5 (i) $\frac{\pi}{5}$ రేడియన్ నుండి డిగ్రీకు (ii) 6 రేడియన్ నుండి డిగ్రీకు మార్చుము.

సాధన

π రేడియన్లు = 180° మరియు,

(i) $\frac{\pi}{5}$ రేడియన్లు = $\frac{180°}{5} = 36°$

(ii) 6 రేడియన్లు = $\left(\frac{180}{\pi} \times 6\right)^{\circ} \approx \left(\frac{7 \times 180}{22} \times 6\right)^{\circ}$

= $\left(343\frac{7}{11}\right)^{\circ}$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 115 10-03-2023 12:06:47

ఉదాహరణ 3.6 కేంద్ర కోణము 15° మరియు వ్యాసార్థము 5 సెం.మీ కలిగిన వృత్త చాపము యొక్క పొడవును కనుగొనుము.

సాధన

వృత్తచాపము s, వ్యాసార్థం r, కేంద్రకోణము θ అయిన, $s = r\theta$

$$\theta = 15° = 15 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{12} \text{ రేడియన్లు}$$

$$s = r\theta \Rightarrow s = 5 \times \frac{\pi}{12} = \frac{5\pi}{12} \text{ సెం.మీ}$$

లబ్ధము $r\,\theta$ లో θ ఎల్లప్పుడు రేడియన్ అగును.

ఉదాహరణ 3.7 రెండు వృత్తాలలో ఒకే చాప పొడవులు 30° మరియు 80° కేంద్రకోణములు చేసిన వాని వ్యాసార్థ నిష్పత్తును కనుగొనుము.

సాధన

వృత్తము యొక్క వ్యాసార్థములు r_1 మరియు r_2 వృత్త చాపము యొక్క పొడవు l అనుకొందాం.

$$\theta_1 = 30° = \frac{\pi}{6} \text{ రేడియన్లు}$$

$$\theta_2 = 80° = \frac{4\pi}{9} \text{ రేడియన్లు}$$

$$l = r_1\theta_1 = r_2\theta_2$$

అయిన $$\frac{\pi}{6} r_1 = \frac{4\pi}{9} r_2$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{8}{3} \Rightarrow r_1 : r_2 = 8 : 3.$$

అభ్యాసము 3.2

1. క్రింద ఇవ్వబడిన కోణములను రేడియన్ కొలతలో వ్రాయుము.

   (i) 30° (ii) 135° (iii) −205° (iv) 150° (v) 330°

2. క్రిందివ్వబడిన రేడియన్ కొలతలకు డిగ్రీ కొలతలను వ్రాయుము.

   (i) $\frac{\pi}{3}$ (ii) $\frac{\pi}{9}$ (iii) $\frac{2\pi}{5}$ (iv) $\frac{7\pi}{3}$ (v) $\frac{10\pi}{9}$

3. ఒక అథలెట్ 1 కి.మీ పరిగెత్తుటకు ఒక వృత్తకార మార్గం వెంబడి 5 సార్లు పరిగెత్తిన ఆ వృత్తము యొక్క వ్యాసార్థమును కనుగొనుము.

4. 40 సెం.మీ. వ్యాసం కలిగిన ఒక వృత్తం యొక్క పొడవు 20 సెం.మీ అయిన జ్యా యొక్క లఘు చాప పొడవును కనుగొనుము.

5. ఒక వృత్త వ్యాసార్థము 100 సెం.మీ. మరియు 22 సెం.మీ పొడవు గల చాపము కేంద్రము వద్ద చేయుకొణమును డిగ్రీకొలతలలో కనుగొనుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 116 10-03-2023 12:06:47

6. వ్యాసార్ధము 10 అడుగులు గల వృత్తంలో 41° కేంద్రకోణము చేయు చాప పొడవు ఏమి?

7. రెండు వృత్తములలో ఒకే పొడవు గల చాపములు కేంద్రం వద్ద 60° మరియు 75° కొణములు చేసినా ఆ వృత్త వ్యాసార్ధముల నిష్పత్తిని కనుగొనుము.

8. ఒక వృత్తము యొక్క నిర్దిష్ట సెక్టారు చుట్టూ కొలత ఒకే వ్యాసార్ధం గల అర్ధ వృత్తములోని చాపము యొక్క పొడవు సమానమయిన సెక్టారు కోణమును డిగ్రీలు నిమిషములు మరియు సెకనులలో కనుగొనుము.

9. ఒక విమానం ప్రొపెల్లర్ నిమిషానికి 1000 సార్లు తిరుగుతుంది. ప్రొపెల్లర్ అంచున ఉన్న ఒక బిందువు ఒక సెకనులో తిరిగే డిగ్రీలను కనుగొనుము.

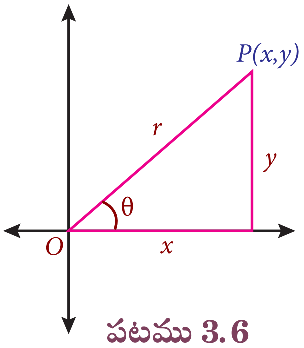
10. ఒక రైలు 66 కి.మీ/ గం రేటున 1500 మీటర్ల వ్యాసార్ధము గల వృత్తాకార ట్రాక్‌లో కదులుతున్నది ఇది 20 సెకన్లలో తిరుగు కోణము ఏమి?

11. వ్యాసార్ధము 8 సెం.మీ మరియు మందం 6 మి.మీ గల వృత్తాకార లోహ పలకను కరిగించి వ్యాసార్ధము 16 సెం.మీ మరియు మందం 4 మి.మీ కరిగిన ఒక సెక్టారు ఏర్పరచబడెను ఆ సెక్టారు కోణమును కనుగొనుము.

3.4 త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు మరియు వాటి ధర్మములు (Trigonometric Functions and their Properties)

3.4.1 కార్టీషియన్ నిరూపకాల పదాలతో ఏదేని కోణం యొక్క త్రికోణమితి ప్రమేయములు (Trigonometric Functions of any angle in terms of Cartesian Coordinates)

లఘుకోణములను ఉపయోగించి త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల ధర్మములను మనము క్రింది తరగతుల్లో అధ్యనము చేసియున్నాము. కానీ మనము లఘు కోణాలు కానీ చాలా కోణాలను దాటి వచ్చియున్నాము. లఘు కోణాల ఐడియాను మనము విస్తరించవలెను మరియు ఏదేని కోణముకు త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలను నిర్వచిస్తాము. త్రికోణమితీయ నిష్పత్తుల రేడియన్ కొలత యొక్క పదాలలో ఏదేని కోణమునకు త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులును త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు అంటారు.



పటము 3.6

ప్రామాణిక స్థితిలోని ఒక కోణము θ అంతిమ భుజముపై ఆది బిందువు కానీ మరొక బిందువు $P(x, y)$ ను తీసుకుందాం. $OP = r.\ r = \sqrt{x^2 + y^2}$

θ యొక్క ఆరు త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు క్రింది విధంగా నిర్వచించవచ్చును.

$\sin\theta = \frac{y}{r}$ మరియు $\cos\theta = \frac{x}{r}$

దీనిని ఉపయోగించి, $\tan\theta = \frac{y}{x},\ x \neq 0;\quad \cot\theta = \frac{x}{y},\ y \neq 0;$

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y},\ y \neq 0;\quad \sec\theta = \frac{r}{x},\ x \neq 0$ అని మనుకు గలదు.

(i) $|\sin\theta| \leq 1$ మరియు $|\cos\theta| \leq 1$ అని మనకు గలదు. ఎందుకనగా $|x| \leq r,\ |y| \leq r$.

(ii) లఘు కోణాల సందర్భంలో, పై నిర్వచనాలు లంబకోణ త్రిభుజం ఉపయోగించి ఇంతకు ముందు నిర్వచనాలకు సమానము.

(iii) త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల ధనాత్మక లేక రుణాత్మక విలువలు θ యొక్క అంతిమ భుజముపై బిందువు $P(x, y)$ గల పాదము పై ఆధారపడును.

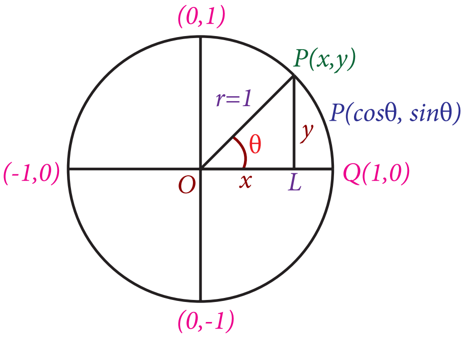
11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 117 10-03-2023 12:06:48

(iv) త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల యొక్క పై నిర్వచనాలు ఒక కోణము యొక్క అంతిమ భుజము పై గల బిందువులకు స్వతంత్రాలు. (సరిచూచుకొనుము!).

పాద కోణాల యొక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు (Trigonometric ratios of Quadrantal angles)

ప్రామాణిక స్థితిలోని ఒక కోణము యొక్క అంతిమ భుజము ఏ దేని ఒక అక్షముతో ఏకీభవించిన ఆ కోణమును పాద కోణాలు అంటారు అను దానిని జ్ఞప్తికి తెచ్చుకుందాం. పాద కోణాలకు త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను మనము కనుగొనవలెను.

$x^2 + y^2 = 1$ అను యూనిట్ వృత్తమును తీసుకుందాము. θ కోణము యొక్క అంతిమ భుజము యూనిట్ వృత్తమును $P(x, y)$ బిందువు వద్ద ఖండించును అని తీసుకుందాం.



పటము 3.7

తరువాత $\cos\theta = \dfrac{x}{1} = x$ (p యొక్క x నిరూపకము)

$\sin\theta = \dfrac{y}{1} = y$ (p యొక్క y నిరూపకము))

కావున, యూనిట్ వృత్తము పై గల ఏదేని బిందువు $P(x, y)$ అనునది $P(\cos\theta, \sin\theta)$ అగును. ఈ విధంగా θ కోణ కొలత యూనిట్ వృత్తము పై గల ఒక బిందువు తో సంబంధ పరచ బడును.

పై వివరణ ను ఉపయోగించి పాద కోణాలకు త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల విలువలు ఏ విధంగా కనగొనబడినదని క్రింది పట్టిక వివరించును.

త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల పాద కోణాల ఖచ్చిత విలువలు

పాదకోణం	యూనిట్ వృత్తంపై అను బంధబిందువు $P(x,y) = P(\cos\theta, \sin\theta)$	కోసైన్ విలువ $\cos\theta$	సైన్ విలువ $\sin\theta$
$\theta = 0^\circ$	$(1,0) = (\cos 0^\circ, \sin 0^\circ)$	$\cos 0^\circ = 1$	$\sin 0^\circ = 0$
$\theta = 90^\circ$	$(0,1) = (\cos 90^\circ, \sin 90^\circ)$	$\cos 90^\circ = 0$	$\sin 90^\circ = 1$
$\theta = 180^\circ$	$(-1,0) = (\cos 180^\circ, \sin 180^\circ)$	$\cos 180^\circ = -1$	$\sin 180^\circ = 0$
$\theta = 270^\circ$	$(0,-1) = (\cos 270^\circ, \sin 270^\circ)$	$\cos 270^\circ = 0$	$\sin 270^\circ = -1$
$\theta = 360^\circ$	$(1,0) = (\cos 360^\circ, \sin 360^\circ)$	$\cos 360^\circ = 1$	$\sin 360^\circ = 0$

(i) యూనిట్ వృత్తంపై గల ప్రతి బిందువుల x మరియు y నిరూపకాలు -1 మరియు 1 మధ్య వుంటుందని గమనించగలరు కావున θ యొక్క విలువ ఎట్లున్ననూ $-1 \leq \cos\theta \leq 1, -1 \leq \sin\theta \leq 1$ అగును.

(ii) $\theta = 360^\circ$ అయినప్పుడు మనము ఒక పూర్తి భ్రమణము చేసి ఉంటాము. అంతిమ భుజము ధనాత్మక x అక్షముతో ఏకీభవించును. అందువలన సైన్ 0° మరియు 360° వద్ద సమాన విలువను కలిగి ఉంటుంది. కొసైన్ మరియు ఇతర త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు కూడా దీనిని పాటించును.

(iii) రెండు కోణాలు 360° లేదా 2π యొక్క పూర్ణ గుణిజములో వేరు గా ఉన్నట్లయితే ప్రతి త్రికోణమితీయ ప్రమేయము ఈ రెండు కోణాల వద్ద సమాన విలువలను కలిగి ఉంటుంది.

(iv) పాద కోణాల వద్ద సైన్ మరియు కొసైన్ విలువలను ఉపయోగించి, మనము క్రింది విధంగా జ్యామితీయంగా సాధారణీకరించవచ్చు.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 118 10-03-2023 12:06:50

పాద కోణాల వద్ద	సమర్థన	సాధారణీకరణ
$\sin 0 = 0 \quad \sin\pi = 0$	$\sin(0 + 2n\pi) = 0;\ n \in \mathbb{Z}$ $\sin(\pi + 2n\pi) = 0;\ n \in \mathbb{Z}$	$\sin\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$
$\cos\frac{\pi}{2} = 0$ $\cos\frac{3\pi}{2} = 0$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0;\ n \in \mathbb{Z}$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = 0;\ n \in \mathbb{Z}$	$\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{Z}$
$\tan 0 = 0$ $\tan\pi = 0$	$\tan(0 + 2n\pi) = 0;\ n \in \mathbb{Z}$ $\tan(\pi + 2n\pi) = 0;\ n \in \mathbb{Z}$	$\tan\theta = 0 \Rightarrow \theta = n\pi;\ n \in \mathbb{Z}$

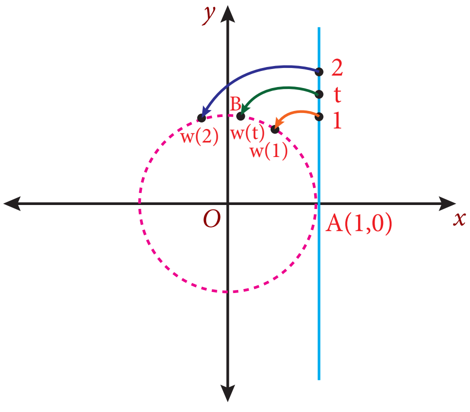
(v) అయినప్పుడు $\cos\theta = 0$ నిర్వచింపబడదు మరియు కావున $\tan\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ అయినప్పుడు $\tan\theta$ నిర్వచించబడదు.

3.4.2 వాస్తవ సంఖ్యల యొక్క త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు (Trigonometric functions of real numbers)

వాస్తవ సంఖ్యల త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు, కలన గణితంతో బాటు ఉన్నత గణిత శాస్త్రంలోని సమస్యలకు మరియు భౌతిక శాస్త్ర, రసాయనశాస్త్ర సమస్యల త్రికోణమితి అనువర్తనాలు శాస్త్రవేత్తలకు అవసరము. ఇది ఒక కోణము మరియు ఒక చాపము పొడవుకు మధ్య గల సంబంధమును ఒక యూనిట్ వృత్తము పై ఒక వాస్తవ సంఖ్యతో ప్రదర్శించుట ద్వారా నైపుణ్యంగా చేయబడినవి.

ఆది బిందువు వద్ద కేంద్రము గల ఒక యూనిట్ వృత్తమును తీసుకుందాం. కోణము సున్న (రేడియన్ కొలతలో) యూనిట్ వృతము పై A(1,0) బిందువుతో సంబంధ పరచబడును అని అనుకుందాము. A(1,0) బిందువు వద్ద యూనిట్ వృత్తమునకు ఒక స్పర్శరేఖను గీయుము. t అను ఒక వాస్తవ సంఖ్యను ఈ స్పర్శరేఖ పై గల బిందువు y నిరూపకము t అగునట్లు తీసుకుందాం.

ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య t కు, AB చాపము పొడవు t కు సమానము అగునట్లు యూనిట్ వృత్తము పై ఒక బిందువు $B\,(x, y)$ ను గుర్తించండి. t ధనాత్మకము అయితే $B\,(x, y)$ ను అపసవ్య దిశలో తీసుకోండి, లేనిచో సవ్యదిశలో తీసుకొనుము. చాపము AB కేంద్రము వద్ద చేయు కోణము θ అనుకుందాము. ఈ పద్ధతిలో, యూనిట్ వృత్తము పై ఒక బిందువు వాస్తవ సంఖ్య t కు సంబంధపరచే ఒక ప్రమేయము $w(t)$ గలదు. ఇటువంటి ప్రమేయాలను వ్రాప్పింగ్ ప్రమేయము అంటారు. $s = r\theta$ చాప పొడవు $t = \theta$ ను ఇచ్చును.



పటము 3.8

ఇప్పుడు, $\sin t = \sin\theta$ మరియు $\cos t = \cos\theta$ లను నిర్వచిస్తాము.

$\sin t = \sin\theta = y$ మరియు $\cos t = \cos\theta = x$ అని స్పష్టమగుచున్నది.

$\sin\ t$ మరియు $\cos\ t$ అను ఉపయోగించి ఇతర త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలను వాస్తవ సంఖ్యల యొక్క ప్రమేయాలుగా నిర్వచించవచ్చును.

(i) యూనిట్ వృత్తము పై ఒక బిందువు B (x, y) = B $(\cos\ t, \sin\ t)$ కావున $-1 \le \cos t \le 1$ మరియు $-1 \le \sin t \le 1$ ఏదేని t వాస్తవ సంఖ్యకు

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 119 10-03-2023 12:06:51

(ii) వ్రాప్పింగ్ ప్రమేయము $w(t)$ అనునది ఒక వృత్తము చుట్టూ ఒక రేఖను వ్రాప్పింగ్ చేయుటకు సారూప్యత గలదు.

(iii) ఒక వాస్తవ సంఖ్య t యొక్క ఒక త్రికోణమితీయ ప్రమేయ విలువ అనునది కోణము t రేడియన్ల వద్ద దాని యొక్క విలువ అగును.

(iv) క్రమ అంతరంలో సంభవించు తరంగాలు, డోలనాలు వంటి ఆధునిక దృగ్విషయాలకు వాస్తవ సంఖ్య యొక్క త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలను ఉపయోగిస్తారు.

ఉదాహరణ 3.8 ప్రామాణిక స్థితిలో ఉన్న కోణం θ యొక్క అంత్యభుజము బిందువు $(3,-4)$ గుండా పోవును. కోణం θ వద్ద ఆరం త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల విలువలను కనుగొనుము.

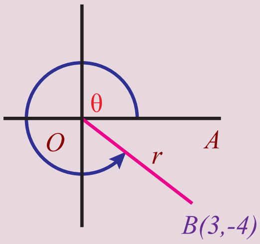
సాధన

$B(x, y) = B(3, -4)$ తీసికొనుము. ప్రామాణిక స్థితిలోని కోణము θ యొక్క ప్రారంభ భుజము OA మరియు టెర్మినల్ భుజము OB

$\angle AOB = \theta$ కోణము θ మరియు θ విలువ IV పాదములో గలదు.

$$OB = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5$$

$$x = 3, y = -4 \text{ మరియు } r = 5$$



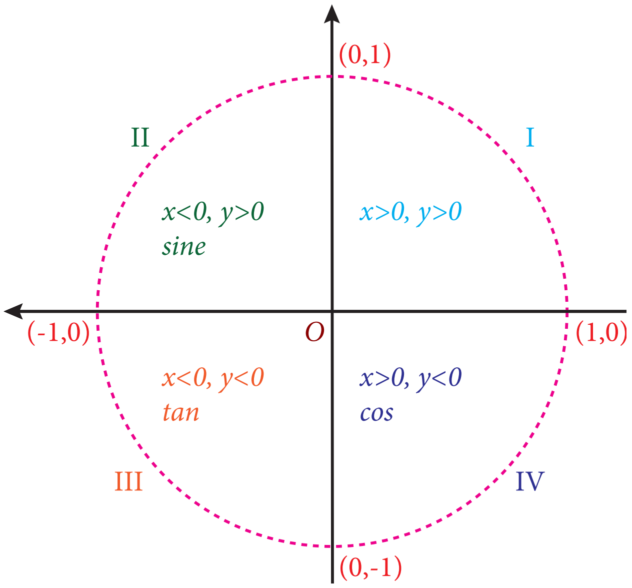
పటము 3.9

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{5};\ \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{3}{5};\ \tan\theta = \frac{y}{x} = -\frac{4}{3}$$

$$\operatorname{cosec}\theta = \frac{r}{y} = -\frac{5}{4};\ \sec\theta = \frac{r}{x} = \frac{5}{3};\ \cot\theta = \frac{x}{y} = -\frac{3}{4}$$

త్రికోణమితీయ ప్రమేయముల గుర్తుల (Signs of Trigonometric functions)

యూనిట్ వృత్తము యొక్క కేంద్రము ఆది బిందువుగా తీసికొనుట. θ ప్రామాణిక స్థితిలో ఉండనివ్వండి కోణం θ కి అనుగుణమైన యూనిట్ వృత్తంపై $P(x, y)$ బిందువుగా ఉండనివ్వండి $\cos\theta = x, \sin\theta = y$ మరియు $\tan\theta = \frac{y}{x}$ విలువ మరియు x విలువ y ధణాత్మకము లేదా ఋణాత్మకము అనునది P ఏ పాదములో అమరియున్నదానిని అనుసరించి ఉండును.



పటము 3.10

మొదటి పాదములో

$\cos\theta = x > 0$ (ధణాత్మకము), $\sin\theta = y > 0$ (ధణాత్మకము)

కావున $\sin\theta$ మరియు $\cos\theta$ ధణాత్మకము అందువలన అన్ని త్రికోణమితి ప్రమేయముల విలువలు మొదటి పాదములో ధణాత్మకము.

రెండవ పాదములో

$\cos\theta = x < 0$ (ఋణాత్మకము), $\sin\theta = y > 0$ (ఋణాత్మకము)

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 120 10-03-2023 12:06:52

కావున $\sin\theta$ మరియు $\operatorname{cosec}\theta$ ధణాత్మకము తక్కినవి ఋణాత్మకము. ఇదేవిధంగా త్రికోణమితీయ ప్రమేయముల గుర్తులను తక్కిన రెండు పాదములోను కనుగొనవచ్చును. పై చర్చలను పటము 3.10లో వివరించబడెను.

వివిధ పాదములోని త్రికోణమితీయ ప్రమేయముల గుర్తులను క్రింది నినాదుతో గుర్తించుకొనవచ్చును.

"All Students Take Chocolate" (ASTC rule).

ఉదాహరణ 3.9 $\sin\theta = \frac{3}{5}$ మరియు కోణము θ రెండవ పాదములో ఉన్నట్లయితే మిగిలిన ఐదు త్రికోణమితీయ ప్రమేయముల విలువలను కనుగొనుము.

సాధన

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \Rightarrow \quad \cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5}$ అని మనకు తెలుసు. రెండవ పాదంలో $\cos\theta$ ఋణాత్మకం కావున $\cos\theta = \frac{-4}{5}$

$$\sin\theta = \frac{3}{5} \Rightarrow \operatorname{cosec}\theta = \frac{5}{3};\ \cos\theta = -\frac{4}{5} \Rightarrow \sec\theta = -\frac{5}{4}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\frac{3}{4};\ \cot\theta = -\frac{4}{3}$$

$\sin\theta$ మరియు $\cos\theta$ విలువలు తెలిసినపుడు వ్యుత్క్రమ మరియు విభక్త సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి మిగిలిన నాలుగు త్రికోణమితీయ విలువలను కనుగొనవచ్చును. ఒక త్రికోణమితీయ విలువ మరియు పాదము తెలిసినపుడు మిగిలిన త్రికోణమితి విలువలను పైథాగరస్ నియమములను ఉపయోగించి కనుగొనవచ్చును.

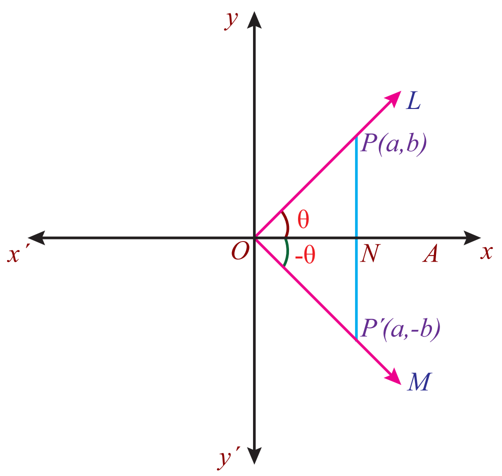
3.4.3 అనుబంధ కోణాలు (Allied Angles)

రెండు కోణాల మొత్తము లేదా వ్యత్యాసం $\frac{\pi}{2}$ రేడియన్‌ల గుణకమయినచో వానిని అనుబంధ కోణాలు అంటారు. θ యొక్క ఏదైన రెండు కోణములకు $-\theta,\ \frac{\pi}{2}\pm\theta,\ \pi\pm\theta,\ \frac{3\pi}{2}\pm\theta, \cdots$ అనునవి అనుబంధ కోణములగును. θ మరియు $-\theta$ అనుబంధ కోణాల త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులను మనము ఇప్పుడు కనుగొందాం.

కోణము θ పదాలలో $-\theta$ యొక్క త్రికోణమితి నిష్పత్తులు
(Trigonometric ratio of $(-\theta)$ in terms of θ)

$\angle AOL = \theta$ మరియు $\angle AOM = -\theta$ తీసికొనుము $P(a, b)$ అను ఒక బిందువును OL పై తీసుకొందాం. P' అను బిందువును OM పై $OP = OP'$ అగునట్లు తీసుకొందాం.

OA కు లంబముగా PN గీసిన అది OM ను P' వద్ద ఖండించును. $\angle AOP = \angle AOP'$ మరియు $\angle PON = \angle P'ON$ కావున ΔPON మరియు $\Delta P'ON$ సర్వ సమానము. $PN = P'N$ కావున P' అనునది $P'(a, -b)$ అగును.



పటము 3.11

త్రికోణమితి ప్రమేయముల నిర్వచనం అనుసరించి

$$\sin\theta = \frac{b}{OP},\quad \cos\theta = \frac{a}{OP},\quad \tan\theta = \frac{b}{a}$$

కావున, $\sin(-\theta) = -\frac{b}{OP'} = -\frac{b}{OP} = -\sin\theta$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 121 10-03-2023 12:06:54

మరియు $\cos(-\theta) = \frac{a}{OP'} = \frac{a}{OP} = \cos\theta$

కావున, వీటిని సులభముగా పొందవచ్చును.

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta\ , \operatorname{cosec}(-\theta) = -\operatorname{cosec}\theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec\theta\ , \cot(-\theta) = -\cot\theta$$

(i) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$ మరియు $\cos(-\theta) = \cos\theta$ ఈ వాస్తవాలు x- అక్షము వెంబడి యూనిట్ వృత్తము యొక్క సౌష్టవం నుండి అనుసరిస్తాయి. x- అక్షమునకు మరియొక్క వైపు తప్ప మిగిలిన వైపు కోణము θ కోణము $(-\theta)$ తో సమానము. x- అక్షము యొక్క మరొక వైపుకు ఒక బిందువు (x, y) తిప్పడం వలన ఆ బిందువు $(x, -y)$ మారుతుంది. కావున y- నిరూపకము ఋణాత్మకముగా మారింది కావున sine కూడా ఋణాత్మకముగా మారింది. కాని x- నిరూపకము అదే విధంగా ఉంటుంది అందువల్ల కొసైన్ మారదు.

(ii) ఋణాత్మక కోణాల సర్వసమీకరణాలను ఉపయోగించి త్రికోణమితి ప్రమేయము బేసి ప్రమేయమా లేదా సరి ప్రమేయమా అని కనుగొనవచ్చును.

ఉదాహరణ 3.10 (i) sin (– 45°) (ii) cos (– 45°) (iii) cot (– 45°) విలువలను కనుగొనుము?

సాధన

(i) $\sin(-45°) = -\sin(45°) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\cos(-45°) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ మరియు (iii) $\cot(-45°) = -1$

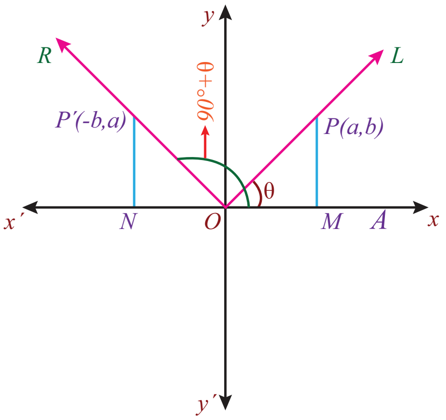
కోణము $(90° - \theta)$ యొక్క త్రికోణమితి నిష్పత్తులను గూర్చి నేర్చుకొనియున్నాము. $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ దిగువ తరగతి కోణము $(90° - \theta)$ యొక్క త్రికోణమితి నిష్పత్తులను గుర్తుతెచ్చుకుందాం.

$$\sin(90° - \theta) = \cos\theta,\quad \cos(90° - \theta) = \sin\theta \quad \tan(90° - \theta) = \cot\theta,$$

$$\operatorname{cosec}(90° - \theta) = \sec\theta,\quad \sec(90° - \theta) = \operatorname{cosec}\theta,\quad \cot(90° - \theta) = \tan\theta$$

ఇప్పుడు మనము కోణము $(90° + \theta)$ కొరకు సంబంధిత త్రికోణమితి నిష్పత్తులను ఏర్పాటు చేస్తాము.

θ పదాలలో $(90° + \theta)$, $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ రూపంలోని కోణం యొక్క త్రికోణమితీయ నిష్పత్తులు (Trigonometric ratios of an angle of the form $(90° + \theta)$, $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ in terms of θ).



పటము 3.12

$\angle AOL = \theta$ మరియు $\angle AOR = (90° + \theta)$ అనుకొనుము $P(a, b)$ అని బిందువు OL పై అమరియున్నది. మరియు P' అను బిందువు OR అని తీసుకొనుము $OP = OP'$ అగునట్లు P మరియు P' నుండి PM మరియు $P'N$ అను లంబములను క్రమముగా Ox మరియు Ox' పై గీయుము.

$\angle AOP' = 90° + \theta$ అనుకొనుము

స్పష్టంగా, ΔOPM మరియు $\Delta P'ON$ సర్వసమానము

$ON = MP$ మరియు $NP' = OM$.

P మరియు P' యొక్క నిరూపకములు క్రమముగా $P(a, b)$ మరియు $P'(-b, a)$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 122 10-03-2023 12:06:56

కావున $\sin(90^\circ+\theta) = \dfrac{P' \text{ యొక్క } y\text{- నిరూపకము}}{OP} = \dfrac{a}{OP} = \cos\theta,$

$\cos(90^\circ+\theta) = \dfrac{P' \text{ యొక్క } x\text{- నిరూపకము}}{OP'} = \dfrac{-b}{OP} = -\sin\theta,$

కావున, $\tan(90^\circ+\theta) = -\cot\theta, \quad \operatorname{cosec}(90^\circ+\theta) = \sec\theta,$

$\sec(90^\circ+\theta) = -\operatorname{cosec}\theta, \quad \cot(90^\circ+\theta) = -\tan\theta$

అదేవిధంగా $\pi\pm\theta,\ \frac{3\pi}{2}\pm\theta,\ 2\pi\pm\theta$ యొక్క అనుబంధ త్రికోణమితీయ ప్రమేయములను పొందవచ్చును. పైన ఇవ్వబడిన ఫలితములను ఈ క్రింది పట్టికలో సంగ్రహించబడింది $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$.

	$-\theta$	$\frac{\pi}{2}-\theta$	$\frac{\pi}{2}+\theta$	$\pi-\theta$	$\pi+\theta$	$\frac{3\pi}{2}-\theta$	$\frac{3\pi}{2}+\theta$	$2\pi-\theta$	$2\pi+\theta$
sine	$-\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$
cosine	$\cos\theta$	$\sin\theta$	$-\sin\theta$	$-\cos\theta$	$-\cos\theta$	$-\sin\theta$	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\cos\theta$
tangent	$-\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$	$\cot\theta$	$-\cot\theta$	$-\tan\theta$	$\tan\theta$

(i) సంబంధిత విలోమ నిష్పత్తులను పైన ఇవ్వబడిన పట్టిక ఉపయోగించి వ్రాయవచ్చును.

(ii) అనుబంధ కోణములు $\pm\theta, \pi\pm\theta, 2\pi\pm\theta\ 2n\frac{\pi}{2}\pm\theta,\ n\in\mathbb{Z}$ కోణాల రూపంలో వున్నచో త్రికోణమితి నిష్పత్తులు మారదు (అనగా sine, sine గాఉండును, cosine ను cosine గా ఉండును).

(iii) అనుబంధ కోణములు $\frac{\pi}{2}\pm\theta,\ \frac{3\pi}{2}\pm\theta$ అనగా కోణరూపం $(2n+1)\frac{\pi}{2}\pm\theta,\ n\in\mathbb{Z}$ అయిన త్రికోణమితి నిష్పత్తుల యొక్క పూరక నిష్పత్తులకు మారును అనగా ఉపసర్గము 'co' లేని యెడల చేర్చుము లేదా ఉపసర్గము 'co' ఉన్న యెడల దానికి తొలగించుము. (అనగా sine అనునది cosine గా cosine అనునది sine మారును)

(iv) సంకేతమును తెలిసికొనుటకు మొదట ఏ పాదము అని తెలిసికొన్న పిదప కావలసిన సంకేతము (+ లేక –) ను **"ASTC"** నిబంధనను అనుసరించి కనుగొనుట.

ఉదాహరణ 3.11 (i) sin 150° (ii) cos 135° (iii) tan 120° విలువలను కనుగొనుము.

సాధన

(i) $\sin 150^\circ = \sin(90^\circ+60^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$

(లేదా) $\sin 150^\circ = \sin(180^\circ-30^\circ) = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2}$

(ii) $\cos 135^\circ = \cos(90^\circ+45^\circ) = -\sin(45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(లేదా) $\cos 135^\circ = \cos(180^\circ-45^\circ) = -\cos(45^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

(iii) $\tan 120^\circ = \tan(180^\circ-60^\circ) = -\tan(60^\circ) = -\sqrt{3}$

(లేదా) $\tan 120^\circ$ ని $\tan(90^\circ+30^\circ)$ అని వ్రాసి విలువలను కనుగొనుము

ఉదాహరణ 3.12 (i) sin (765°) (ii) cosec (– 1410°) (iii) $\cot\left(-\frac{15\pi}{4}\right)$ విలువలను కనుగొనుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 123 10-03-2023 12:06:59

సాధన

(i) $\sin 765° = \sin(2 \times 360° + 45°) = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(ii) $\text{cosec}(-1410°) = -\text{cosec}(1410°) = -\text{cosec}(4 \times 360° - 30°) = \text{cosec}30° = 2$

(iii) $\cot\left(\frac{-15\pi}{4}\right) = -\cot\left(\frac{15\pi}{4}\right) = -\cot\left(4\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \cot\frac{\pi}{4} = 1.$

ఉదాహరణ 3.13 $\tan(315°)\cot(-405°) + \cot(495°)\tan(-585°) = 2$ అని నిరూపించుము.

సాధన

ఎడమవైపు $= \tan(360° - 45°)\,[-\cot(360° + 45°)] + \cot(360° + 135°)\,[-\tan(360° + 225°)]$

$= [-\tan 45°]\,[-\cot 45°] + [-\tan 45°]\,[-\tan 45°] = (-1)(-1) + (-1)(-1) = 2.$

3.4.4 త్రికోణమితి ప్రమేయముల కొన్ని లక్షణములు (Some characteristics of Trigonometric functions)

త్రికోణమితి ప్రమేయముల కొన్ని ధర్మములు. ఉదాహరణమునకు

(i) sine మరియు cosine ప్రమేయములు ఒక దానికొకటి పూరకమగును. అనగా $\sin(90° - \theta) = \cos\theta$ మరియు $\cos(90° - \theta) = \sin\theta$.

(ii) యూనిట్ వృత్తముపై గల బిందువు నిరూపకముల ద్వారా $\cos\theta$ మరియు $\sin\theta$ లను పొందవచ్చును. అసమానతలు $-1 \le \cos\theta \le 1$ మరియు $-1 \le \sin\theta \le 1$ నెరవేర్చును. కావున $\cos\theta,\ \sin\theta \in [-1, 1]$.

(iii) క్రమ అంతరములలో త్రికోణమితి ప్రమేయముల విలువలు పునారావృతం అగును.

(iv) sine మరియు cosine ప్రమేయములు ఆసక్తికరమైన ధర్మములను కలిగియున్నది అవి $\cos(-\theta) = \cos\theta$ మరియు $\sin(-\theta) = -\sin\theta$.

చివరి రెండు ధర్మములను చర్చించెదము.

త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల ఆవర్తనము (Periodicity of Trigonometric functions)

ప్రదేశంలోని ప్రతి x కు $f(x+p) = f(x)$ అగునట్లు ఒక కినిష్ఠ ధనసంఖ్య p వ్యవస్థితమయిన ప్రమేయం f ను p ఆవర్తనముతో ఒక ఆవర్తన ప్రమేయం అంటారు.

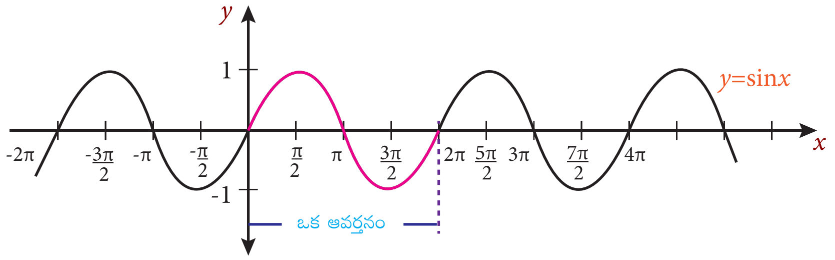
ఉదాహరణకు $\sin(x + 2n\pi) = \sin x,\ n \in \mathbb{Z}$.

$\sin(x + 2\pi) = \sin(x + 4\pi) = \sin(x + 6\pi) = \cdots = \sin x$. పిరియడ్ 2π తో ఆవర్తన ప్రమేయము ఇదేవిధముగా $\cos x$, $\text{cosec}\,x$ మరియు $\sec x$ పిరియడ్ 2π తో ఆవర్తన ప్రమేయములు

కాని $\tan x$ మరియు $\cot x$ పిరియడ్ π తో ఆవర్తన ప్రమేయములు

$\sin x$ మరియు $\cos x$ యొక్క ఆవర్తనలను చిత్ర పటము ద్వారా చూడవచ్చును.

(i) sine ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రము



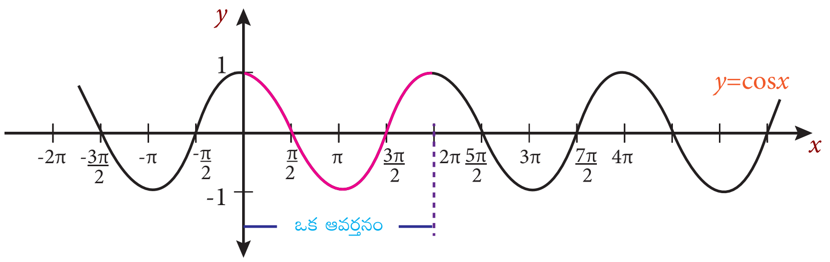
పటము 3.13 : $y = \sin x$

ఇచ్చట చలరాశి కోణాన్ని సూచిస్తుంది. క్షితిజ సమాంతర అక్షాన్ని x–అక్షం మరియు నిలువు అక్షంను y అక్షంగా తీసుకొనెదము. $y = \sin x$ ప్రమేయము యొక్క రేఖాచిత్రం పటము 3.13లో చూపబడింది. మొదట

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 124 10-03-2023 12:07:01

ఇది 2π పిరియడ్ యొక్క ఆవర్తనమగుటను గమనించండి. రేఖాగణితంగా అంటే మీరు వక్రతను తీసికొని 2π గా ఎడమ లేదా కుడివైపు విభజించిన వక్రం తిరిగి వచ్చును. రెండవది రేఖాచిత్రం y అక్షం యొక్క ఒక యూనిట్‌లో ఉంటుందని గమనించండి. రేఖాచిత్రం క్రమానుగతంగా పెరుగుతుంది మరియు తగ్గుతుంది. ఉదాహరణకు ఇది $-\frac{\pi}{2}$ నుండి $\frac{\pi}{2}$ కు పెరుగును మరియు $\frac{\pi}{2}$ నుండి $\frac{3\pi}{2}$ కు తగ్గును.

(ii) **కొసైన్ ప్రమేయపు రేఖాచిత్రము**



పటము 3.14 : $y = \cos x$

$y = \cos x$ యొక్క రేఖాచిత్రము $y = \sin x$ యొక్క రేఖా చిత్రంలాగా కనిపిస్తుంది. కాని ఇది ఎడమవైపు $\frac{\pi}{2}$ కి అనువర్తించినట్లు ఉంటుంది. దీనికి కారణం $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ఇది $\cos x = \cos(-x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ రేఖాచిత్రంను అనుసరిస్తుంది.

(i) sine మరియు cosine ప్రమేయాలు ఉపయోగకరమైనవి కావడానికి చాలా ముఖ్యమైన కారణము ఏమనగా అవి ఒక క్రమ ఆవర్తంలో పునరావృతమగుట. (i.e. అవి ఆవర్తనాలు) మనలో మరియు మనచుట్టూ క్రమబద్దంగా (Periodically) పునిరావృతమయ్యే వస్తువుల విస్తార అమరిక ఇచ్చట గలదు. ఉదాహరణకు క్రమాంతరంలో పునరావృతమయ్యే సూర్యుని యొక్క ఉదయం మరియు అస్తమయం, పైకి మరియు క్రిందికి స్ప్రింగ్ కదలిక, సముద్ర అలలు మొదలగునవి. sin మరియు cosine ప్రమేయాల సంయోగం ద్వారా అన్ని ఆవర్తన ప్రవర్తనలను అభ్యసిస్తాము.

(ii) క్రమానుగతంగా సంభవించే డోలనాలు, తరంగాలు మరియు ఇతర దృగ్విషయాలను వివరించడానికి ఆవర్తన ప్రమేయములు విజ్ఞానశాస్త్రము అంతటా ఉపయోగించబడతాయి.

బేసి మరియు త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు (Odd and even trigonometric functions)

సరి మరియు బేసి ప్రమేయాలు అనునది ఖచ్చిత సమరూపతలను సంతృప్తిపరిచే ప్రమేయాలు ఒక వాస్తవ విలువ ప్రమేయము $f(x)$ అన్ని వాస్తవ సంఖ్య $f(-x) = -f(x)$ ను సంతృప్తి పరిచిన అది సరిప్రమేయమును మరియు అన్ని వాస్తవ సంఖ్య $f(x)$ లకు $f(-x) = -f(x)$ ను సంతృప్తిపరచిన అది బేసి ప్రమేయమగును.

ప్రాథమిక త్రికోణిమితి ప్రమేయములు బహుపది కాని సరి మరియు బేసి ప్రమేయములకు ఉదాహరణములు ఎందుకంటె x అన్ని విలువల $\cos(-x) = \cos x$ కు $\sin(-x) = -\sin x$ మరియు $\cos x$ ఒక సరి ప్రమేయము మరియు $\sin(x)$ ఒక బేసి ప్రమేయము $\sec x$ సరి ప్రమేయము అని $\tan x, \operatorname{cosec} x$ మరియు $\cot x$ ఒక బేసి ప్రమేయము అని గమనించవచ్చును. $f(t) = t - \cos t$ అనునది సరి ప్రమేయమూ మరియు బేసి ప్రమేయమమూ కాదు (ఎందుకు?)

ఉదాహరణ 3.14: క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రమేయములు సరి ప్రమేయమా, బేసి ప్రమేయమా లేదా రెండునూ కాదని నిర్ధారించుము.

(i) $\sin^2 x - 2\cos^2 x - \cos x$ (ii) $\sin(\cos(x))$ (iii) $\cos(\sin(x))$ (iv) $\sin x + \cos x$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 125 10-03-2023 12:07:02

సాధన

(i) $f(x) = \sin^2 x - 2\cos^2 x - \cos x$ అనుకొనుము,

$f(-x) = f(x)$ [కావున $\sin(-x) = -\sin x$ మరియు $\cos(-x) = \cos x$] $f(x)$ సరి ప్రమేయం

(ii) $f(x) = \sin(\cos(x))$ అనుకొందాం,

$f(-x) = f(x)$, $f(x)$ సరి ప్రమేయం

(iii) $f(x) = \cos(\sin(x))$, $f(-x) = f(x)$, కావున,, $f(x)$ ఒక సరి ప్రమేయము.

(iv) $f(x) = \sin x + \cos x$ అనుకొందాం

$f(-x) \neq f(x)$ మరియు $f(-x) \neq -f(x)$

కావున, $f(x) = \sin x + \cos x$ సరి మరియు బేసి ప్రమేయం కాదు..

(i) సాధారణంగా, ఒక రేఖాచిత్రం y- అక్షం వెంబడి ప్రతిబింబించినప్పుడు మారనప్పుడు ఆ రేఖాచిత్రము యొక్క ప్రమేయము ఒక సరిప్రమేయము అగును.

(ii) త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల విశ్లేషణలో ముఖ్యంగా మొత్తం మరియు వ్యత్యాస సూత్రాలతో సరి మరియు బేసి ప్రమేయముల ధర్మములు ఉపయోగకరంగా ఉంటుంది.

iii) కలన గణితంలో మనము చూసే కొన్ని నిశ్చిత సమాకలనుల గణనలో సరి మరియు బేసి ప్రమేయాల ధర్మములు ఉపయోగకరంగా ఉంటుంది.

అభ్యాసము 3.3

1. విలువలను కనుగొనుము

(i) $\sin(480°)$ (ii) $\sin(-1110°)$ (iii) $\cos(300°)$ (iv) $\tan(1050°)$

(v) $\cot(660°)$ (vi) $\tan\left(\frac{19\pi}{3}\right)$ (vii) $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right)$

2. ప్రామాణిక రూపంలో గల కోణము θ- యొక్క టెర్మినల్ భుజము గల ఒక బిందువు $\left(\frac{5}{7}, \frac{2\sqrt{6}}{7}\right)$ కోణము θ- యొక్క త్రికోణమితి ప్రమేయములను కనుగొనుము.

3. క్రింద ఇవ్వబడిన ప్రమేయములకు మిగిలిన ఐదు త్రికోణమితీయ ప్రమేయముల విలువను కనుగొనుము.

(i) $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, θ విలువ III పాదములో కలదు

(ii) $\cos\theta = \frac{2}{3}$, θ విలువ I పాదములో కలదు

(iii) $\sin\theta = -\frac{2}{3}$, θ విలువ IV పాదములో కలదు.

(iv) $\tan\theta = -2$, θ విలువ II పాదములో కలదు.

(v) $\sec\theta = \frac{13}{5}$, θ విలువ IV పాదములో కలదు

4. $\dfrac{\cot(180° + \theta)\sin(90° - \theta)\cos(-\theta)}{\sin(270° + \theta)\tan(-\theta)\operatorname{cosec}(360° + \theta)} = \cos^2\theta\cot\theta$ నిరూపించుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 126 10-03-2023 12:07:02

5. సమీకరణము $\sin^2\theta = \frac{3}{4}$ ను తృప్తిపరచు 0° మరియు 360° మధ్యగల కోణములును కనుగొనుము.

6. $\sin^2\frac{\pi}{18} + \sin^2\frac{\pi}{9} + \sin^2\frac{7\pi}{18} + \sin^2\frac{4\pi}{9} = 2$ అనుచూపుము.

3.5 త్రికోణమితీయ సర్వసమానతలు (Trigonometric Identities)

3.5.1 మొత్తము మరియు వ్యత్యాసాల సర్వసమానతలు లేదా సంయుక్త కోణముల సూత్రములు

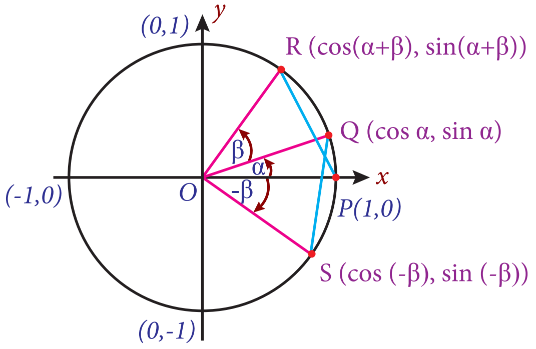
రెండు లేదా అంతకంటె ఎక్కువ కోణముల బీజగణిత మొత్తం ఒక సంయుక్త కోణమగును. త్రికోణమితి ప్రమేయములు $f(x+y) = f(x) + f(y)$ మరియు $f(kx) = kf(x)$, k ఒక వాస్తవ సంఖ్య వంటి క్రియాత్మక సంబంధములను సంతృప్తిపరచదు. ఉదాహరణకు $\cos(\alpha+\beta) \neq \cos\alpha + \cos\beta$, $\sin(2\alpha) \neq 2\sin\alpha$, $\tan 3\alpha \neq 3\tan\alpha \cdots$ కావున $\sin(\alpha+\beta), \cos(\alpha+\beta), \cdots$ వంటి వాటి సూత్రములను ఉత్పాదించాలి మరియు వాటిని అనువర్తన సమస్యలలో ఉపయోగించవలెను.

ప్రకంపనలతో తయారు చేయబడిన సంగీతం చెవిలోని కర్ణబేరిలో సృష్టించే ఒత్తిడి. సైనుసోయిడల్ (sinusoidal) రేఖాచిత్రాలు (ఈ రేఖాచిత్రంలు చూడడానికి $y = \sin x$ లేదా $y = \cos x$ లాగా) తో సంగీత స్వరాలను రూపొందించవచ్చును. ఒకటి కన్న ఎక్కువ స్వరాలను ప్లే చేసినప్పుడు ఫలిత ఒత్తిడి విడివిడి స్వరాల ఒత్తిడి మొత్తంకు సమానము. దీని ప్రకారము త్రికోణమితీయ మొత్తం మరియు వ్యత్యాసాల సర్వసమానతలను ఒక ముఖ్య అనువర్తనంగా ఉపయోగించారు. మరియు త్రికోణమితీయ మొత్తం లేదా వ్యత్యాసాల సర్వసమానతలు తరంగాల విశ్లేషణలో ఉపయోగకరంగా ఉంటుంది.

మొదట మనము cosine యొక్క రెండు కోణాల మొత్తం సర్వసమానతను రుజువు చేస్తాము మరియు మిగతా మొత్తం లేదా వ్యత్యాస సర్వ సమానతలను నిరూపించడానికి దీనిని విస్తరిస్తాము.

సర్వసమానత 3.1 : $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

నిరూపణ : O కేంద్రముతో యూనిట్ వృత్తమును పరిగణించెదము. $P = P(1, 0)$ అనుకొనుము పటము 3.15 లో చూపినట్లు $\angle POQ = \alpha, \angle POR = \alpha+\beta$ మరియు $\angle POS = -\beta$ అగునట్లు Q, R మరియు S అను బిందువులను యూనిట్ వృత్తంపై తీసుకొనుము. స్పష్టంగా $\alpha, \alpha+\beta$ మరియు $-\beta$ కావున కోణాలు ప్రామాణిక స్థితిలో గలదు. ప్రస్తుతం $Q(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $R(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$ మరియు $S(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$ బిందువుల ΔPOR మరియు ΔSOQ సరూప త్రిభుజములు అగును.



పటము 3.15

కావున, $PR = SQ$, మరియు $PR^2 = SQ^2$ అని ఇవ్వబడెను.

కావున,

$$[\cos(\alpha+\beta) - 1]^2 + \sin^2(\alpha+\beta) = [\cos\alpha - \cos(-\beta)]^2 + [\sin\alpha - \sin(-\beta)]^2$$

$$-2\cos(\alpha+\beta) + 2 = 2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta$$

అందువలన, $$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 127 10-03-2023 12:07:04

(i) పై నిరూపణలో $PR = SQ$ అనునది ఒక వృత్తంపై గల రెండు బిందువుల దూరాలను వ్యాసార్థము మరియు కేంద్రకోణం ద్వారా కనుగొనవచ్చని తెలియజేయును.

(ii) చాపము పొడవు PR మరియు SQ కేంద్రము వద్ద క్రమముగా ఏర్పరుచు కోణములు $\alpha + \beta$ మరియు $\alpha + (-\beta)$ కావున $PR = SQ$. బిందువులు $(\cos\alpha, \sin\alpha)$ మరియు $(\cos(-\beta), \sin(-\beta))$ ల మధ్య దూరము బిందువులు $(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$ మరియు $(1, 0)$ మధ్యగల దూరమునకు సమానము.

(iii)పై ఉత్పన్నాలలో $0 \le \alpha < 2\pi,\ 0 \le \beta < 2\pi$ sine మరియు cosin యొక్క ఆవర్తన కారణంగా పై ఫలితం ఏదైన α మరియు β లకు అనుసరించును.

సర్వసమానత 3.2 : $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$ మనకు తెలియునా

ఇప్పుడు, $$\cos(\alpha - \beta) = \cos[\alpha + (-\beta)] = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta)$$

కావున, $$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

(i) $\alpha = \beta$ అయిన పై సమానత $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ కు తగ్గింపబడును

(ii) $\alpha = 0$ మరియు $\beta = x$ అయిన $\cos(-x) = \cos x$ ఒక సరి ప్రమేయమని చూపబడును.

సర్వసమానత 3.3 : $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

నిరూపణ : ఈ సూత్రాన్ని $\sin(\alpha+\beta) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - (\alpha+\beta)\right] = \cos\left[\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - \beta\right]$ అని వ్రాయడం ద్వారా మరియు సమానత 3.2 ను ఉపయోగించి నిరూపించవచ్చును.

$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ అనిన పై సమానత $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ కు తగ్గింపబడును..

సర్వసమానత 3.4 : $\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

నిరూపణ : ఈ సూత్రాన్ని $\sin(\alpha - \beta) = \sin[\alpha + (-\beta)]$ అని వ్రాయడం ద్వారా మరియు సమానత 3.3 ను ఉపయోగించి నిరూపించవచ్చును.

sin మరియు cosin సూత్రముల మొత్తం మరియు వ్యత్యాసము మాత్రిక రూపంలో వ్రాయవచ్చును.

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{pmatrix}$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 128 10-03-2023 12:07:06

సర్వసమానత 3.5 : $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

నిరూపణ :

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

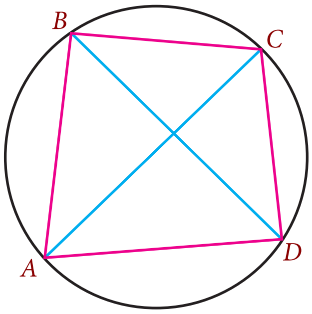
$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

సర్వసమానత 3.6 : $\tan(\alpha-\beta)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$

నిరూపణ : పై ఫలితమును $\tan(\alpha-\beta)=\tan[\alpha+(-\beta)]$ అని వ్రాయడం ద్వారా మరియు సమానత 3.5 ఉపయోగించి నిరూపించబడినది.

(i)టోలేమి (CE 100-170) ఒక కోణం యొక్క జ్యాను తన ప్రాథమిక త్రికోణమితి ప్రమేయముగా భావించి ఈ సిద్ధాంతమును నిరూపించారు. ఈ సిద్ధాంతం చక్రీయ చతుర్భుజంలో కర్ణముల లబ్ధము వ్యతిరేక భుజముల లబ్ధముల మొత్తానికి సమానం. అనగా చక్రీయ చతుర్భుజం.

$$(AC)(BD)=(AB)\,(CD)+(AD)\,(BC).$$



పటము 3.16

ఈ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి, మొత్తం మరియు వ్యత్యాస సర్వసమానతలను నిరూపించవచ్చును. అందువల్ల ఈ సమానతను టోలిమి యొక్క మొత్తం మరియు వ్యత్యాస సూత్రాలు అంటారు.

(ii) $\cos(\alpha\pm\beta)\neq\cos\alpha\pm\cos\beta$ అని గమనించవచ్చును. ఇదే విధముగా ఇతర త్రికోణమితి ప్రమేయములను గమనించవచ్చును.

(iii) $\alpha=\beta$ అయిన $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ అనునది $\sin 0=0$ అని సూచించునని మనము మునపే నిరూపించితిమి.

(iv) $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ మరియు $\beta=\theta, \sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ అనునవి $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$ అని చూపును. దానిని మనము మునుపే నిరూపించితిమి.

(v) ఇవ్వబడిన కోణంకు త్రికోణమితి ప్రమేయముల విలువలను కనుగొనవచ్చును. ఎప్పుడంటే కోణంను రెండు ప్రత్యేక కోణాల మొత్తంగా లేదా వ్యత్యాసంగా విభజించగలిగితే ఉదాహరణకు $\tan 75°$ ను $\tan(45°+30°)$ మరియు $\cos 135°$ ను $\cos(180°-45°)$ చేసి గణించవచ్చును.

ఉదాహరణ 3.15 (i) cos 15° మరియు (ii) tan 165°. విలువను కనుగొనుము.

సాధన

(i) $\cos 15°=\cos(45°-30°)=\cos 45°\cos 30°+\sin 45°\sin 30°$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$\sin 75°=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ అని గమనించవచ్చును (స్వయంగా ప్రయత్నించుము)

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 129 10-03-2023 12:07:07

(ii) ప్రస్తుతం, $\tan 165° = \tan(120° + 45°) = \dfrac{\tan 120° + \tan 45°}{1 - \tan 120° \tan 45°}$

కాని, $\tan 120° = \tan(90° + 30°) = -\cot 30° = -\sqrt{3}$

మరియు $\tan 45° = 1$

కావున, $\tan 165° = \dfrac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}$.

ఉదాహరణ 3.16 $\sin x = \dfrac{4}{5}$ (మొదటి పాదములో) మరియు $\cos y = -\dfrac{12}{13}$ (రెండవ పాదములో) అయిన (i) $\sin(x-y)$ (ii) $\cos(x-y)$ కనుగొనుము.

సాధన

$$\sin x = \frac{4}{5} \text{ అని ఇవ్వబడినది.}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-\frac{16}{25}} = \pm\frac{3}{5}$$

మొదటి పాదములో $\cos x$ ఎల్లప్పుడు ధణాత్మకము కావున $\cos x = \dfrac{3}{5}$

మరియు $\cos y = \dfrac{-12}{13}$ రెండవ పాదంలో కలదు. కావున $\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y}$.

$$= \pm\sqrt{1-\frac{144}{169}} = \pm\frac{5}{13}$$

ంండవ పాదములో $\sin y$ ఎల్లప్పుడు ధణాత్మకము.

కావున $\sin y = \dfrac{5}{13}$.

(i) $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{-12}{13}\right) - \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{5}{13}\right) = -\dfrac{63}{65}$.

(ii) $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y = \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{-12}{13}\right) + \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{5}{13}\right) = -\dfrac{16}{65}$.

ఉదాహరణ 3.17 $\cos\left(\dfrac{3\pi}{4}+x\right) - \cos\left(\dfrac{3\pi}{4}-x\right) = -\sqrt{2}\sin x$ అని నిరూపించుము

సాధన

$$= \cos\frac{3\pi}{4}\cos x - \sin\frac{3\pi}{4}\sin x - \cos\frac{3\pi}{4}\cos x - \sin\frac{3\pi}{4}\sin x$$

$$= -2\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\sin x = -2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\sin x = -\sqrt{2}\sin x$$

$\cos(A+x) - \cos(A-x) = -2\sin A \sin x$ అని గమనించవచ్చును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 130 10-03-2023 12:07:10

ఉదాహరణ 3.18 బిందువు $A(9,12)$ ఒక సమతలములో అది బిందువు O వెంబడి అపసవ్య దశలో 60° భ్రమణం చేసి కొత్త స్థానం B ను చేరెను. B యొక్క నిరూపకములను కనుగొనుము.

సాధన

$A(9,\ 12) = A(r\cos\theta,\ \ r\sin\theta)$ అనుకొనుము. ఇచ్చటి $r = OA$ కావున $r\cos\theta = 9$ మరియు $r\sin\theta = 12$

$r^2 = 81 + 144 = 225 \Rightarrow r = 15$

కావున $A(15\cos\theta,\ 15\sin\theta)$ అనునది బిందువు A ను ఇచ్చును.

ఇప్పుడు $B(15\cos(\theta+60^\circ),\ 15\sin(\theta+60^\circ))$ అనునది బిందువు B ను ఇచ్చును.

$$\begin{aligned}15\cos(\theta+60^\circ) &= 15(\cos\theta\cos 60^\circ - \sin\theta\sin 60^\circ)\\ &= (15\cos\theta)\cos 60^\circ - (15\sin\theta)\sin 60^\circ\\ &= 9\times\frac{1}{2} - 12\times\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}(3-4\sqrt{3})\end{aligned}$$

ఇదేవిధముగా $$15\sin(\theta+60^\circ) = \frac{3}{2}(4+3\sqrt{3})$$

కావున $B\left(\frac{3}{2}(3-4\sqrt{3}),\ \frac{3}{2}(4+3\sqrt{3})\right)$ అని బిందువు B పొందును.

ఉదాహరణ 3.19 ఒక అలల ట్యాంక్ రెండు నీటి తరంగాల కలయిక ప్రభావాన్ని వివరించును. ఈ రెండు తరంగాలను $h = 8\cos t$ మరియు $h = 6\sin t$ ద్వారా సూచిస్తారు. ఇచ్చట $t \in [0, 2\pi)$ సెకండ్లలో ఉండును మరియు t అనేది నిశ్చల నీటిపై గల ఎత్తు మిల్లీమీటర్లలో సూచించును. ఫలిత తరంగం యొక్క గరిష్ఠ ఎత్తు మరియు అది సంభవించే t విలువను కనుగొనుము.

సాధన

H అనునది ఫలిత తరంగం యొక్క ఎత్తు అనుగొనుము. క్రింది విధంగా H ను పొందవచ్చును.

$$\begin{aligned}H &= 8\cos t + 6\sin t\\ 8\cos t + 6\sin t &= k\cos(t-\alpha)\\ &= k(\cos t\cos\alpha + \sin t\sin\alpha)\end{aligned}$$

అందువలన, $$k = 10 \text{ మరియు } \tan\alpha = \frac{3}{4}$$

కావున, $$H = 10\cos(t-\alpha)$$

ఈ విధంగా H యొక్క గరిష్ఠం $= 10$ మి.మీ. $t = \alpha$ అయినప్పుడు గరిష్ఠం లభించును.

ఇచ్చట $\tan\alpha = \frac{3}{4}$.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 131 10-03-2023 12:07:12

ఉదాహరణ 3.20 విస్తరించుము. (i) $\sin(A+B+C)$ (ii) $\tan(A+B+C)$.

సాధన

(i) $\sin(A+B+C) = \sin[A+(B+C)]$

$= \sin A\cos(B+C) + \cos A\sin(B+C)$

$= \sin A\cos B\cos C + \cos A\sin B\cos C + \cos A\cos B\sin C - \sin A\sin B\sin C$

(ii) $\tan(A+B+C) = \tan[A+(B+C)]$

$$= \frac{\tan A + \tan(B+C)}{1-\tan A\tan(B+C)} = \frac{\tan A + \dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}}{1-\tan A\,\dfrac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}}$$

$$= \frac{\tan A+\tan B+\tan C-\tan A\tan B\tan C}{1-\tan A\tan B-\tan B\tan C-\tan C\tan A}$$

(i) $A+B+C=0$ లేదా π , $\tan(A+B+C)=0$ అని పొందెదము కావున $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$

వీలుగా ఉన్న త్రిభుజములోను పైన ఇవ్వబడిన ఫలితములు నిజమగును.

(ii) $\tan(x-y)+\tan(y-z)+\tan(z-x)=\tan(x-y)\tan(y-z)\tan(z-x)$

(iii) $\tan 3A-\tan 2A-\tan A=\tan 3A+\tan(-2A)+\tan(-A)=\tan 3A\tan 2A\tan A$

(iv) $A+B+C=\frac{\pi}{2}$ $\tan A\tan B+\tan B\tan C+\tan C\tan A=1$

అభ్యాసము 3.4

1. $0<x<\frac{\pi}{2}$, $0<y<\frac{\pi}{2}$, $\sin x=\frac{15}{17}$ మరియు $\cos y=\frac{12}{13}$, అయిన

   (i) $\sin(x+y)$ (ii) $\cos(x-y)$ (iii) $\tan(x+y)$ విలువలను కనుగొనుము.

2. $0<A<\frac{\pi}{2}$, $0<B<\frac{\pi}{2}$, $\sin A=\frac{3}{5}$ మరియు $\cos B=\frac{9}{41}$ అయిన

   (i) $\sin(A+B)$ (ii) $\cos(A-B)$ విలువలను కనుగొనుము.

3. $\cos x=-\frac{4}{5}$, $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$ మరియు $\sin y=-\frac{24}{25}$, $\pi<y<\frac{3\pi}{2}$ అయిన $\cos(x-y)$ కనుగొనుము.

4. $\sin x=\frac{8}{17}$, $0<x<\frac{\pi}{2}$ మరియు $\cos y=-\frac{24}{25}$, $\pi<y<\frac{3\pi}{2}$ అయిన $\sin(x-y)$ కనుగొనుము.

5. (i) $\cos 105^\circ$ (ii) $\sin 105^\circ$ (iii) $\tan\frac{7\pi}{12}$ విలువలను కనుగొనుము.

6. (i) $\cos(30^\circ+x)=\frac{\sqrt{3}\cos x-\sin x}{2}$ (ii) $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

   (iii) $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$ అని నిరూపించుము.

7. $\sin 15^\circ$ మరియు $\cos 15^\circ$ మూలాలుగా గల వర్గసమీకరణంను కనుగొనుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 132 10-03-2023 12:07:16

8. $\cos(A+B+C)$ ను విస్తరించి క్రిందిదానిని నిరూపించును. $A+B+C=\frac{\pi}{2}$ అయిన $\cos A\cos B\cos C=\sin A\sin B\cos C+\sin B\sin C\cos A+\sin C\sin A\cos B$.

9. క్రింది వానిని నిరూపించుము (i) $\sin(45^\circ+\theta)-\sin(45^\circ-\theta)=\sqrt{2}\sin\theta$

(ii) $\sin(30^\circ+\theta)+\cos(60^\circ+\theta)=\cos\theta$

10. $a\cos(x+y)=b\cos(x-y)$ అయిన $(a+b)\tan x=(a-b)\cot y$ అని చూపుము.

11. $\sin 105^\circ+\cos 105^\circ=\cos 45^\circ$ అని నిరూపించుము.

12. $\sin 75^\circ-\sin 15^\circ=\cos 105^\circ+\cos 15^\circ$ అని నిరూపించుము.

13. $\tan 75^\circ+\cot 75^\circ=4$ అని చూపుము.

14. $\cos(A+B)\cos C-\cos(B+C)\cos A=\sin B\sin(C-A)$ అని నిరూపించుము.

15. $\sin(n+1)\theta\sin(n-1)\theta+\cos(n+1)\theta\cos(n-1)\theta=\cos 2\theta,\ n\in\mathbb{Z}$ అని నిరూపించుము..

16. $x\cos\theta=y\cos\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)=z\cos\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)$ అయిన $xy+yz+zx$ విలువను కనుగొనుము.

17. క్రింది వానిని నిరూపించుము. (i) $\sin(A+B)\sin(A-B)=\sin^2 A-\sin^2 B$

(ii) $\cos(A+B)\cos(A-B)=\cos^2 A-\sin^2 B=\cos^2 B-\sin^2 A$

(iii) $\sin^2(A+B)-\sin^2(A-B)=\sin 2A\sin 2B$

(iv) $\cos 8\theta\cos 2\theta=\cos^2 5\theta-\sin^2 3\theta$

18. $\cos^2 A+\cos^2 B-2\cos A\cos B\cos(A+B)=\sin^2(A+B)$ అని చూపుము.

19. $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\beta-\gamma)+\cos(\gamma-\alpha)=-\frac{3}{2}$ అయిన

$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=0$ అని నిరూపించుము. .

20. (i) $\tan(45^\circ+A)=\frac{1+\tan A}{1-\tan A}$ (ii) $\tan(45^\circ-A)=\frac{1-\tan A}{1+\tan A}$ క్రింది వానిని నిరూపించుము..

21. $\cot(A+B)=\frac{\cot A\cot B-1}{\cot A+\cot B}$ అని నిరూపించుము.

22. $\tan x=\frac{n}{n+1}$ మరియు $\tan y=\frac{1}{2n+1}$ అయిన, $\tan(x+y)$ ను కనుగొనుము

23. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)\tan\left(\frac{3\pi}{4}+\theta\right)=-1$ అని నిరూపించుము.

24. $\cot\alpha=\frac{1}{2},\ \alpha\in\left(\pi,\frac{3\pi}{2}\right)$ మరియు $\sec\beta=-\frac{5}{3},\ \beta\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ అయిన $\tan(\alpha+\beta)$-ను కనుగొనుము.

25. $\theta+\phi=\alpha$ మరియు $\tan\theta=k\tan\phi$ అయితే, $\sin(\theta-\phi)=\frac{k-1}{k+1}\sin\alpha$ అని నిరూపించుము..

3.5.2 కోణాల గుణిజ సర్వసమానతలు మరియు కోణాల ఉప గుణిజ సర్వసమానతలు :

1831లో మైఖేల్ ఫెరడే అనునతడు అయస్కాంతం దగ్గర ఒక తీగ పోవునప్పుడు తీగలో చిన్న విద్యుత్ ఉత్పత్తి అవుతుందని కనుగొన్నారు. ఈ ధర్మమును ప్రపంచవ్యాప్తంగా ఇళ్ళు, సంస్థలు మరియు వ్యాపార సంస్థలకు విద్యుత్ ప్రవాహాన్ని ఉత్పత్తి చేయడానికి ఉపయోగించబడుతున్నది. పెద్ద విద్యుదయస్కాంతాల దగ్గర వేలాది తీగలను తిప్పడం ద్వారా భారి మొత్తంలో విద్యుత్తును ఉత్పత్తి చేయవచ్చును.

వోల్టేజ్ అనేది సైనుసోయిడల్ గ్రాఫ్‌లు మరియు ప్రమేయముల ద్వారా రూపొందించబడిన ఒక పరిమాణం. విద్యుత్తు మరియు ఇతర దృగ్విషయాలను నమూనాను రూపొందించుటకు కోణ గుణిజాలు లేదా కోణ ఉప

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 133 10-03-2023 12:07:19

గుణిజాలుతో కూడిన త్రికోణమితి ప్రమేయాలు మరియు సర్వసమానతలు ఉపయోగించారు

A ఒక కోణం అయిన $2A, 3A, \cdots$ అనునవి A యొక్క కోణ గుణిజాలు అని మరియు కోణములు $\frac{A}{2}, \frac{A}{3}, \cdots$ అనునవి A యొక్క కోణ ఉపగుణిజాలు అని అంటారు. ఇపుడు మనం కోణగుణిజాలు మరియు కోణ ఉపగుణిజాల యొక్క త్రికోణమితి నిష్పత్తిని చర్చిస్తాము మరియు కొన్ని సర్వమానతలు పొందుతాము.

రెట్టింపు కోణాల సర్వసమానతలు:

మొత్తం మరియు వ్యత్యాస సర్వసమానతలు తీసుకుందాం మరియు వాటి నుండి వచ్చే కొన్ని పరిణామాలను పరిశీలిద్దాం. రెట్టింపు కోణాల సర్వసమానతలు మొత్తం సమానతల యొక్క ప్రత్యేక సందర్భం. అంటే రెండు కోణాలు సమానంగా ఉన్నప్పుడు మొత్తం సర్వసమానతలు రెట్టింపు కోణాల సర్వసమానతలుగా మారును. త్రికోణమితి సమీకరణాలను పరిష్కరించడంలో మరియు త్రికోణమితి సర్వసమానతుల ధృవీకరణలో కూడా ఇవి ఉపయోగపడతాయి. రెట్టింపు కోణ సర్వసమానతలు, లఘుకరణ సర్వసమానతలను (ఘాతలలఘుకరణ సర్వసమానతలు) పొందటానికి ఉపయోగపడుచున్నది. త్రికోణమితి సమాసముల గరిష్ట లేక కనిష్ట విలువను కనుగొనుటకు రెట్టింపు కోణ సమానతలు ఉపయోగపడును.

సర్వసమానత 3.7: $\sin 2A = 2\sin A\cos A$

నిరూపణ :

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ అని మనకు తెలియును.

$$\alpha = \beta = A \text{ అని తీసికొనిన}$$

$$\sin(A+A) = \sin A\cos A + \sin A\cos A$$

కావున,

$$\sin 2A = 2\sin A\cos A$$

(i) $y = \sin 2x$ మరియు $y = 2\sin x$ లు వేర్వేరు. వాటి రేఖాచిత్రమును గీయుము మరియు వాటి వ్యత్యాసమును గుర్తింపుము.

(ii) $\sin 2A = 2\sin A\cos A$ యొక్క అనువర్తనము: ఒక వస్తువు u వేగంతో క్షితిజ సమాంతర స్థాయితో α కోణంతో విసిరనపుడు, అది నేలను తాకుటకు మునుపు అది ప్రయాణించిన క్షితిజ సమాంతర దూరం (పరిధి)ను $R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g}$ అను సూత్రంను ఇచ్చును.

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ అయినప్పుడు R యొక్క గరిష్టం $\frac{u^2}{g}$ అని స్పష్టమగును.

(iii) $|\sin A\cos A| = \left|\frac{\sin 2A}{2}\right| \le \frac{1}{2}$

ఇదేవిధంగా, $-\frac{1}{2} \le \sin A\cos A \le \frac{1}{2}$.

దీని నుండి $A = \frac{\pi}{4}$ అయినప్పుడు $\sin A\cos A$ యొక్క గరిష్ఠ విలువ $\frac{1}{2}$ అని తెలిసికొనవచ్చును.

ఉదాహరణ 3.21 ఒక ఫుట్‌బాల్ ఆటగాడు భూతలం నుండి 80 అడుగులు / సెకల ప్రారంభ వేగంతో ఫుట్‌బాల్‌ను తన్నగలడు ఫుట్‌బాల్ ప్రయాణించే గరిష్ఠ క్షితిజ సమాంతర దూరాన్ని మరియు ఏ కోణం వద్ద కనుగొనుము! ($g = 32$ తీసుకొనుము).

సాధన

క్షితిజ సమాంతర దూరము R యొక్క సూత్రము.

$$R = \frac{u^2\sin 2\alpha}{g} = \frac{(80\times 80)\sin 2\alpha}{32} = 10\times 20\sin 2\alpha$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 134 10-03-2023 12:07:22

ఈ విధంగా గరిష్ట దూరము 200 అడుగులు అందువల్ల, గరిష్ట దూరము చేరుటకు కాలిబంతి అటగాడు కిక్ చేయవలసిన కోణము $\alpha = 45°$

సర్వసమానత 3.8 $\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$

నిరూపణ

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$ అని మనకు తెలుసు.

$\alpha = \beta = A$ తీసికొనిన

$$\cos(A+A) = \cos A\cos A - \sin A\sin A$$

$$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$$ సమానత నుండి

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ సమానత నుండి

$$\cos 2A = \cos^2 A - (1-\cos^2 A) = 2\cos^2 A - 1$$

$$\cos 2A = (1-\sin^2 A) - \sin^2 A = 1 - 2\sin^2 A$$

సర్వసమానత 3.9 $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$

నిరూపణ :

ఇప్పుడు, $$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$\alpha = \beta = A$ అని తీసికొనిన

$$\tan(A+A) = \frac{\tan A+\tan A}{1-\tan A\tan A}$$

$$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$$

సర్వసమానత 3.10 $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$

నిరూపణ

$\sin 2A = 2\sin A\cos A$ అని మనకు తెలుసు.

$$= \frac{2\sin A\cos A}{\sin^2 A+\cos^2 A}$$

$$= \frac{\dfrac{2\sin A\cos A}{\cos^2 A}}{\dfrac{\sin^2 A+\cos^2 A}{\cos^2 A}} = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$$

సర్వసమానత 3.11 $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$

నిరూపణ :

$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ మనకు తెలుసు.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 135 10-03-2023 12:07:24

$$= \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A + \sin^2 A}$$

$$= \frac{\dfrac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos^2 A}}{\dfrac{\cos^2 A + \sin^2 A}{\cos^2 A}}$$

$$\cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$$

ఘాత తగ్గింపు సర్వసమానతలు లేదా లఘూకరణ సర్వసమానతలు

sine, cosine మరియు tangent యొక్క ఘాత తగ్గింపు సమానతలను రెట్టింపు కోణసర్వ సమానతల నుండి పొందవచ్చును, ఉదాహరణకు

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$$

క్రింద ఇవ్వబడిన పట్టిక ఘాత తగ్గింపు సర్వసమానతల జాబిత అగును.

ఘాత తగ్గింపు సమానతలు
$\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$, $\cos^2 A = \frac{1 + \cos 2A}{2}$, $\tan^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{1 + \cos 2A}$

(i) ఘాత తగ్గింపు సర్వసమానతలలో ఒక వైపు వర్గ ఘాతమును తగ్గించి మరియొక వైపు ఘాతముగా తగ్గింపబడును.

(ii) ఘాత తగ్గింపు సర్వసమానతలు, sine లేక cosine సరిసంఖ్య ఘాతములను cosine యొక్క మొదటి ఘాత రూపంలో వ్రాయుటకు అవకాశం ఇచ్చును. ఉదాహరణకు, ఘాత తగ్గింపు సర్వసమానతలను ఉపయోగించి ఎవరైనను క్రిందివానిని నిరూపించవచ్చును.
$\cos^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$ మరియు $\sin^4 x = \frac{1}{8}\cos 4x - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{3}{8}$
ప్రయత్నించుము.

(iii) ఉన్నత స్థాయి గణిత శాస్త్రమును నేర్చుకొనుటకు ఘాత తగ్గింపు సూత్రములు ముఖ్యమైనవి..

మూడు రెట్ల కోణ సర్వసమానతలు

రెండు రెట్ల కోణ సర్వసమానతలు ఉపయోగించి మూడు రెట్ల కోణ సర్వసమానతలను ఉత్పాదించవచ్చును.

సర్వసమానత 3.12: $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$

నిరూపణ :

$$\begin{aligned}\sin 3A = \sin(2A + A) &= \sin 2A\cos A + \cos 2A \sin A \\ &= 2\sin A\cos^2 A + (1 - 2\sin^2 A)\sin A \\ &= 2\sin A(1 - \sin^2 A) + (1 - 2\sin^2 A)\sin A \\ &= 3\sin A - 4\sin^3 A\end{aligned}$$

మనకు గలదు.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 136 10-03-2023 12:07:26

సర్వసమానత 3.13: $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

నిరూపణ :

$$\begin{aligned}\cos 3A &= \cos(2A + A) = \cos 2A \cos A - \sin 2A \sin A \\ &= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\sin A \cos A \sin A \\ &= (2\cos^2 A - 1)\cos A - 2\cos A(1 - \cos^2 A) \\ &= 4\cos^3 A - 3\cos A\end{aligned}$$

సర్వసమానత 3.14 : $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

నిరూపణ :

$$\tan 3A = \tan(2A + A) = \frac{\tan 2A + \tan A}{1 - \tan 2A \tan A} \text{ మనకు గలదు}$$

$$= \frac{\dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A} + \tan A}{1 - \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}\tan A} = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$$

రెండు రెట్ల మరియు మూడు రెట్ల కోణ సమానతలు. క్రింద ఇవ్వబడినది.

sine	cosine	tangent
$\sin 2A = 2\sin A\cos A$ $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$	$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ $\cos 2A = \dfrac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$ $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$	$\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

అర్ధకోణ సర్వసమానతలు (Half-angle Identities) :

అర్ధకోణ సర్వసమానతలు రెండు రెట్ల సర్వసమానతలకు దగ్గరి సంబంధము కలిగియున్నది. ప్రత్యేక కోణం యొక్క సగం పరిమాణంలో కోణం ఉన్నప్పుడు అర్ధ కోణ సర్వసమానతలను ఉపయోగించవచ్చును. ఉదాహరణకు, , $\sin 15^\circ$ ను $\sin 15^\circ = \sin\dfrac{30^\circ}{2}$ గా వ్రాయడం ద్వారా గణించవచ్చును. కొన్ని కోణాల ఖచ్చిత విలువను కనుగొనుటకు అర్ధకోణ సర్వసమానతలను ఉపయోగించవచ్చును. రెండు రెట్ల కోణ సర్వసమానతలలో $2A = \theta$ లేక $A = \dfrac{\theta}{2}$ అని తీసికొనుట ద్వారా కొత్త సర్వసమానతలను కోణం $\dfrac{\theta}{2}$ రూపంలో పొందవచ్చును.

అర్ధకోణ సర్వసమానతల జాబితాను క్రింది పట్టికలో ఇవ్వబడెను.

రెండురెట్ల కోణ సర్వసమానతలు	అర్ధకోణ సర్వసమానతలు
$\sin 2A = 2\sin A\cos A$	$\sin\theta = 2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$
$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$	$\cos\theta = \cos^2\dfrac{\theta}{2} - \sin^2\dfrac{\theta}{2}$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 137 10-03-2023 12:07:27

$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$	$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$
$\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$	$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$
$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$	$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$
$\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$	$\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$
$\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$	$\cos\theta = \frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$

(i) వర్గ త్రికోణమితీయ ప్రమేయము కానిదానితో వర్గ త్రికోణమితీయ ప్రమేయమును మార్చి వ్రాయుటకు అర్ధకోణ సర్వసమానతలను తరచుగా ఉపయోగించెదము.

(ii) అసలు కోణం యొక్క cosine విలువ మనకు తెలిసినచో sine మరియు cosine ల అర్ధకోణములను అర్ధకోణ సర్వసమానతలను ఉపయోగించి కనుగొనవచ్చును.

ఉదాహరణ 3.22 $\sin\left(22\frac{1}{2}^{\circ}\right)$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} \Rightarrow \sin\frac{\theta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$ అని మనకు తెలుసు

$\theta = 45^{\circ}$.

$$\sin\frac{45^{\circ}}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 45^{\circ}}{2}}$$ మనము పొందునది, ($22\frac{1}{2}^{\circ}$ మొదటి పాదంలోనిది కావున ధణాత్మక సంకేతమును మాత్రము తీసికొనెదము.)

కావున, $$\sin 22\frac{1}{2}^{\circ} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

ఉదాహరణ 3.23 $\sin\theta = \frac{12}{13}$, θ మొదటి పాదములో ఉన్నప్పుడు $\sin 2\theta$ యొక్క విలువను కనుగొనుము.

సాధన

లంబ కోణ త్రిభుజమును ఉపయోగించి, $\cos\theta = \frac{5}{13}$ అని సులభముగా కనుగొనవచ్చును.

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{12}{13}\right)\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{120}{169}.$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 138 10-03-2023 12:07:29

త్రిభుజ నిర్మాణం లేకుండా $\cos\theta$ విలువను సూత్రమును ఉపయోగించి కనుగొనవచ్చును.
$\cos\theta = \pm\sqrt{1-\sin^2\theta}$

ఉదాహరణ 3.24 నిరూపించుము $\sin 4A = 4\sin A\cos^3 A - 4\cos A\sin^3 A$

సాధన

$$\begin{aligned} 4\sin A\cos^3 A - 4\cos A\sin^3 A &= 4\sin A\cos A(\cos^2 A - \sin^2 A) \\ &= 4\sin A\cos A\cos 2A = 2(2\sin A\cos A)\cos 2A \\ &= 2(\sin 2A)\cos 2A = \sin 4A \end{aligned}$$

ఉదాహరణ 3.25 నిరూపించుము $\sin x = 2^{10}\sin\left(\frac{x}{2^{10}}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{x}{2^{10}}\right)$

సాధన

$$\begin{aligned} \sin x &= 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\times 2\times\sin\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2} \\ &= 2^2\sin\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2} \end{aligned}$$

sine అర్ధకోణ సూత్రమును పదేపదే ఉపయోగించి పొందవచ్చును.

$$\sin x = 2^{10}\sin\left(\frac{x}{2^{10}}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2^2}\right)\cdots\cos\left(\frac{x}{2^{10}}\right)$$

పైన ఇవ్వబడిన ఫలితంను ఏదైన పరిమిత సంఖ్యలో విస్తరించవచ్చును.

ఉదాహరణ 3.26 $\frac{\sin\theta + \sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta} = \tan\theta$ నిరూపించుము

సాధన

$$\frac{\sin\theta + \sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta} = \frac{\sin\theta + 2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta + (1+\cos 2\theta)} = \frac{\sin\theta(1+2\cos\theta)}{\cos\theta(1+2\cos\theta)} = \tan\theta$$

ఉదాహరణ 3.27 $1-\frac{1}{2}\sin 2x = \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x}$ నిరూపించుము

సాధన

$$\begin{aligned} \frac{\sin^3 x + \cos^3 x}{\sin x + \cos x} &= \frac{(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x\cos x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} \\ &= 1 - \sin x\cos x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x \end{aligned}$$

ఉదాహరణ 3.28 $-\pi \le x \le \pi$ మరియు $\cos 2x = \sin x$ అయిన x విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$\cos 2x = \sin x$ అనిన

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ పొందవచ్చును

సమీకరణము యొక్క మూలములు $\sin x = \frac{-1\pm 3}{4} = -1$ మరియు $\frac{1}{2}$.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 139 10-03-2023 12:07:31

ఇప్పుడు,	$\sin x$	$= \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$
మరియు,	$\sin x$	$= -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2}$
కావున,	x	$= -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

ఉదాహరణ 3.29 (i) sin 18° (ii) cos 18° (iii) sin 72° (iv) cos 36° (v) sin 54° విలువలను కనుగొనుము.

సాధన

(i) $\theta = 18^\circ$ అనుకొనుము.

అప్పుడు, $5\theta = 90^\circ$

$$3\theta + 2\theta = 90^\circ \Rightarrow 2\theta = 90^\circ - 3\theta$$

$$\sin 2\theta = \sin(90^\circ - 3\theta) = \cos 3\theta$$

$$2\sin\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

ఎందుకనగా $\cos\theta = \cos 18^\circ \neq 0$ మనకు గలది

$$2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3 = 4(1-\sin^2\theta) - 3$$

$$4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$$

$$\sin\theta = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(4)(-1)}}{2(4)} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$$

కావున, $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (ధణాత్మక గుర్తు తీసుకొనబడినది. ఎందుకు?)

(ii) $$\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ}$$

$$= \sqrt{1 - \left[\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right]^2} = \frac{1}{4}\sqrt{16 - (5 + 1 - 2\sqrt{5})}$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

(iii) $$\sin 72^\circ = \sin(90^\circ - 18^\circ) = \cos 18^\circ$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

(iv) $$\cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ = 1 - 2\left[\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right]^2 = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

(v) $$\sin 54^\circ = \sin(90^\circ - 36^\circ) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$\sin 18^\circ = \cos 72^\circ$, $\cos 18^\circ = \sin 72^\circ$ మరియు $\cos 36^\circ = \sin 54^\circ$ అని గమనించవచ్చును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 140 10-03-2023 12:07:33

ఉదాహరణ 3.30 $\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}\tan\frac{\phi}{2}$ అయిన $\cos\phi = \frac{\cos\theta - a}{1 - a\cos\theta}$ అని నిరూపించుము.

సాధన

అర్ధ కోణ సర్వసమానతలు అనుసరించి మనకు గలది.

$$\cos\phi = \frac{1-\tan^2\frac{\phi}{2}}{1+\tan^2\frac{\phi}{2}} = \frac{1-\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\left(\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)-a}{1-a\left(\frac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)} = \frac{\cos\theta - a}{1-a\cos\theta}$$

ఉదాహరణ 3.31 $\sqrt{3}\,\mathrm{cosec}\,20^\circ - \sec 20^\circ$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$$\sqrt{3}\,\mathrm{cosec}\,20^\circ - \sec 20^\circ = \frac{\sqrt{3}}{\sin 20^\circ} - \frac{1}{\cos 20^\circ} = 4\left[\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\sin 20^\circ}{2\sin 20^\circ\cos 20^\circ}\right]$$

మనకు గలది $$= 4\left[\frac{\sin 60^\circ\cos 20^\circ - \cos 60^\circ \sin 20^\circ}{\sin 40^\circ}\right] = 4$$

ఉదాహరణ 3.32 $\cos A\cos 2A\cos 2^2A\cos 2^3A\cdots\cos 2^{n-1}A = \frac{\sin 2^nA}{2^n\sin A}$ అని నిరూపించుము.

సాధన

$$= \cos A\cos 2A\cos 2^2A\cos 2^3A\cdots\cos 2^{n-1}A$$

$$= \frac{1}{2\sin A}2\sin A\cos A\cos 2A\cos 2^2A\cos 2^3A\cdots\cos 2^{n-1}A$$

$$= \frac{1}{2\sin A}\sin 2A\cos 2A\cos 2^2A\cos 2^3A\cdots\cos 2^{n-1}A$$

$$= \frac{1}{2^2\sin A}\sin 4A\cos 2^2A\cos 2^3A\cdots\cos 2^{n-1}A$$

ప్రక్రియను కొనసాగించగా మనము పొందునది.

$$= \frac{\sin 2^nA}{2^n\sin A}$$

అభ్యాసము 3.5

1. $\cos 2A$ విలువను కనుగొనుము. A విలువ మొదటి పాదములో గలదు.

   (i) $\cos A = \frac{15}{17}$ (ii) $\sin A = \frac{4}{5}$ (iii) $\tan A = \frac{16}{63}$

2. θ ఒక లఘుకోణము అయిన క్రింది వానిని కనుగొనుము.

   (i) $\sin\theta = \frac{1}{25}$ అయినప్పుడు $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$

(ii) $\sin\theta = \frac{8}{9}$ అయినప్పుడు $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)$

3. $\cos\theta = \frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)$ అయిన $\cos 3\theta = \frac{1}{2}\left(a^3+\frac{1}{a^3}\right)$ అని నిరూపించుము

4. నిరూపించుము $\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

5. నిరూపించుము $\sin 4\alpha = 4\tan\alpha\frac{1-\tan^2\alpha}{(1+\tan^2\alpha)^2}$

6. $A+B = 45^\circ$ అయిన, $(1+\tan A)(1+\tan B) = 2$ అని నిరూపించుము.

7. $(1+\tan 1^\circ)(1+\tan 2^\circ)(1+\tan 3^\circ)\cdots(1+\tan 44^\circ)$ నిరూపించుము 4

8. $\tan\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right) = 2\tan 2\theta$ నిరూపించుము

9. $\cot\left(7\frac{1}{2}\right)^\circ = \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}+\sqrt{6}$ నిరూపించుము

10. $(1+\sec 2\theta)(1+\sec 4\theta)\cdots(1+\sec 2^n\theta) = \tan 2^n\theta\cot\theta$ నిరూపించుము

11. $32(\sqrt{3})\sin\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{48}\cos\frac{\pi}{24}\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{6} = 3$ నిరూపించుము

3.5.3 మొత్తం నుంచి లబ్దముకు మరియు లబ్దము నుంచి మొత్తంకు సర్వసమానతలు

(Product to sum and sum to product identities)

త్రికోణమితీయ ప్రమేయముల కొన్ని అనువర్తనాలు, త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల ఒక లబ్దమును త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల మొత్తం లేదా వ్యత్యాసంగా వ్రాయునట్లు డిమాండ్ చేస్తున్నది. cosine మరియు sin ప్రమేయాల మొత్తం లేదా వ్యత్యాస సర్వసమానతలు మధ్యలో వున్న సంకేతం తప్ప మిగిలినవన్ని చూడడానికి అద్భుతంగా కనిపించును. కావున వానిని చేర్చి సర్వసమానతలు మనము పొందుతాము. అందువలన అనేక సర్వసమానతలను ఉత్పాదించుటకు వానిని మనము ఉపయోగిస్తాము. ఒక మొత్తంను లబ్దంగా లేదా లబ్దంను మొత్తంగా వ్రాయుటకు ఇవి వీలు కల్పించును. ఇది మనకు తెలుసు

$$\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B \quad (3.1)$$

$$\sin(A-B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B \quad (3.2)$$

$$\cos(A+B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B \quad (3.3)$$

$$\cos(A-B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B \quad (3.4)$$

పైన ఇవ్వబడిన సర్వసమానతల నుండి, లబ్దముల మొత్తం సర్వసమానతలను సులభముగా పొందవచ్చును.

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A+B)+\sin(A-B)] \quad (3.5)$$

$$\cos A\sin B = \frac{1}{2}[\sin(A+B)-\sin(A-B)] \quad (3.6)$$

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B)+\cos(A-B)] \quad (3.7)$$

$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)] \quad (3.8)$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 142 10-03-2023 12:07:37

sine మరియు cosine ల లబ్ధమును మొత్తంగా మార్చడం అవసరమైనప్పుడు పైన ఇవ్వబడిన సర్వసమానతలు చాలా ముఖ్యమైనవి కొన్ని సమాకలని గణన వేయడానికి ఈ ఆలోచన చాలా ఉపయోగపడుతుంది.

లబ్ధ సమానతల మొత్తము పొందుటకు, మొత్త సమానతల లబ్ధము 3.5 నుండి 3.8లో $A+B=C$ మరియు $A-B=D$ లేదా సమానంగా $A=\frac{C+D}{2}, B=\frac{C-D}{2}$ ప్రత్యామ్నాయాలను పరిచయం చేద్దాం. లబ్ధ సమానతల మొత్తాన్ని మనము పొందవచ్చును.

$$\sin C+\sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \quad (3.9)$$

$$\sin C-\sin D = 2\cos\frac{C+D}{2}\sin\frac{C-D}{2} \quad (3.10)$$

$$\cos C+\cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2} \quad (3.11)$$

$$\cos C-\cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2} \quad (3.12)$$

సర్వసమానత 3.15 $\sin(60^\circ-A)\sin A\sin(60^\circ+A)=\frac{1}{4}\sin 3A$ అని నిరూపించుము.

నిరూపణ :

$$\begin{aligned}\sin(60^\circ-A)\sin A\sin(60^\circ+A) &= \sin(60^\circ-A)\sin(60^\circ+A)\sin A\\ &= \frac{1}{2}[\cos 2A-\cos 120^\circ]\sin A\\ &= \frac{1}{2}\left[\cos 2A\sin A+\frac{1}{2}\sin A\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\sin 3A\right]=\frac{1}{4}\sin 3A\end{aligned}$$

ఇదే విధంగా క్రింది ముఖ్యమైన సర్వసమానతలను నిరూపించవచ్చును.

సర్వసమానత 3.16 $\cos(60^\circ-A)\cos A\cos(60^\circ+A)=\frac{1}{4}\cos 3A$

సర్వసమానత 3.17 $\tan(60^\circ-A)\tan A\tan(60^\circ+A)=\tan 3A$

ఉదాహరణ 3.33 క్రిందివ్వబడిన లబ్ధములను మొత్తం లేదా వ్యత్యాసములుగా వ్యక్తపరుచుము.

(i) $\sin 40^\circ\ \cos 30^\circ$ (ii) $\cos 110^\circ\ \sin 55^\circ$ (iii) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}$

సాధన

(i) $2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$ అని మనకు తెలియును.

$A=40^\circ$ మరియు $B=30^\circ$ తీసికొనుము..

$2\sin 40^\circ\cos 30^\circ = \sin(40^\circ+30^\circ)+\sin(40^\circ-30^\circ)=\sin 70^\circ+\sin 10^\circ$ అని పొందెదము.

కావున, $\sin 40^\circ\cos 30^\circ = \frac{1}{2}[\sin 70^\circ+\sin 10^\circ]$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 143 10-03-2023 12:07:40

(ii) $2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B)$ మనకు తెలియును

$A = 110^\circ$ మరియు $B = 55^\circ$ తీసికొనుము.

$$2\cos 110^\circ \sin 55^\circ = \sin(110^\circ + 55^\circ) - \sin(110^\circ - 55^\circ)$$

కావున, $$\cos 110^\circ \sin 55^\circ = \frac{1}{2}[\sin 165^\circ - \sin 55^\circ]$$

(iii) $2\sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$ ఇది మనకు తెలియును

$A = \frac{x}{2}$ తీసికొనుము $B = \frac{3x}{2}$

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} = \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{3x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}-\frac{3x}{2}\right)$$ మనము పొందెదము

కావున, $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} = \frac{1}{2}[\sin 2x - \sin x]$

ఉదాహరణ 3.34 క్రిందివ్వబడిన మొత్తం లేదా వ్యత్యాసములను లబ్ధములుగా వ్యక్తపరచుము.

(i) $\sin 50^\circ + \sin 20^\circ$ (ii) $\cos 6\theta + \cos 2\theta$ (iii) $\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{9x}{2}$

సాధన

(i) $\sin C + \sin D = 2\sin\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$ అని మనకు తెలుసు.

$C = 50^\circ$ మరియు $D = 20^\circ$ అని తీసుకొనుము. మనకు గలది.

$$\sin 50^\circ + \sin 20^\circ = 2\sin\frac{50^\circ + 20^\circ}{2}\cos\frac{50^\circ - 20^\circ}{2} = 2\sin 35^\circ \cos 15^\circ$$ అని మనకు తెలుసు.

(ii) $\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$

$C = 6\theta$ మరియు $D = 2\theta$ గా తీసుకొందాం. మనకు గలది.

$$\cos 6\theta + \cos 2\theta = 2\cos\frac{6\theta + 2\theta}{2}\cos\frac{6\theta - 2\theta}{2} = 2\cos 4\theta \cos 2\theta$$ అని మనకు తెలుసు.

(iii) $\cos C - \cos D = 2\sin\frac{C+D}{2}\sin\frac{D-C}{2}$

$C = \frac{3x}{2}$ మరియు $D = \frac{9x}{2}$ మనకు గలది.

$$\cos\frac{3x}{2} - \cos\frac{9x}{2} = 2\sin\frac{\frac{3x}{2}+\frac{9x}{2}}{2}\sin\frac{\frac{9x}{2}-\frac{3x}{2}}{2} = 2\sin 3x \sin\frac{3x}{2}$$

ఉదాహరణ 3.35 $\sin 34^\circ + \cos 64^\circ - \cos 4^\circ$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$$\begin{aligned}\sin 34^\circ + \cos 64^\circ - \cos 4^\circ &= \sin 34^\circ - 2\sin\left(\frac{64^\circ + 4^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{64^\circ - 4^\circ}{2}\right)\\ &= \sin 34^\circ - 2\sin 34^\circ \sin 30^\circ = 0\end{aligned}$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 144 10-03-2023 12:07:43

ఉదాహరణ 3.36 $\cos 36^\circ \cos 72^\circ \cos 108^\circ \cos 144^\circ = \frac{1}{16}$ అని చూపుము.

సాధన

$$= \cos 36^\circ \cos(90^\circ - 18^\circ)\cos(90^\circ + 18^\circ)\cos(180^\circ - 36^\circ)$$

$$= \sin^2 18^\circ \cos^2 36^\circ$$

$$= \left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

ఉదాహరణ 3.37 సూక్ష్మీకరించుము $\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ}$.

సాధన

$$\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ} = \frac{2\cos\left(\frac{75^\circ + 15^\circ}{2}\right)\sin\left(\frac{75^\circ - 15^\circ}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{75^\circ + 15^\circ}{2}\right)\cos\left(\frac{75^\circ - 15^\circ}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\cos 45^\circ \sin 30^\circ}{2\cos 45^\circ \cos 30^\circ} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\sin 75^\circ = \cos 15^\circ$ మరియు $\cos 75^\circ = \sin 15^\circ$ లను ఉపయోగించి పరిష్కరించడానికి ప్రయత్నించుము.

ఉదాహరణ 3.38 $\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = \frac{3}{16}$ అని నిరూపించుము.

సాధన

$\cos(60^\circ - A)\cos A\cos(60^\circ + A) = \frac{1}{4}\cos 3A$ అని మనకు తెలుసు.

$$\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ = \cos 30^\circ[\cos 10^\circ \cos 50^\circ \cos 70^\circ]$$

$$= \cos 30^\circ[\cos(60 - 10^\circ)\cos 10^\circ \cos(60^\circ + 10^\circ)]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{1}{4}\cos 30^\circ\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{3}{16}$$

అభ్యాసము 3.6

1. క్రిందివాటిని మొత్తం లేదా వ్యత్యాసములను వ్యక్తపరచుము.

   (i) $\sin 35^\circ \cos 28^\circ$ (ii) $\sin 4x \cos 2x$ (iii) $2\sin 10\theta \cos 2\theta$

   (iv) $\cos 5\theta \cos 2\theta$ (v) $\sin 5\theta \sin 4\theta$

2. క్రింది ఇవ్వబడిన వాటిని లబ్ధములుగా వ్యక్తపరచుము.

   (i) $\sin 75^\circ - \sin 35^\circ$ (ii) $\cos 65^\circ + \cos 15^\circ$

   (iii) $\sin 50^\circ + \sin 40^\circ$ (iv) $\cos 35^\circ - \cos 75^\circ$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 145 10-03-2023 12:07:45

3. నిరూపించుము $\sin 12^\circ \sin 48^\circ \sin 54^\circ = \frac{1}{8}$

4. నిరూపించుము $\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15} = \frac{1}{128}$

5. నిరూపించుము $\frac{\sin 8x\cos x - \sin 6x\cos 3x}{\cos 2x\cos x - \sin 3x\sin 4x} = \tan 2x$

6. నిరూపించుము $\frac{(\cos\theta - \cos 3\theta)(\sin 8\theta + \sin 2\theta)}{(\sin 5\theta - \sin\theta)(\cos 4\theta - \cos 6\theta)} = 1$

7. నిరూపించుము $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sin 2x(1 + 2\cos x)$.

8. నిరూపించుము $\frac{\sin 4x + \sin 2x}{\cos 4x + \cos 2x} = \tan 3x$

9. నిరూపించుము $1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 4\cos x\cos 2x\cos 3x$

10. నిరూపించుము $\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{7\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}\sin\frac{11\theta}{2} = \sin 2\theta\sin 5\theta$

11. నిరూపించుము $\cos(30^\circ - A)\cos(30^\circ + A) + \cos(45^\circ - A)\cos(45^\circ + A) = \cos 2A + \frac{1}{4}$

12. నిరూపించుము $\frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x} = \tan 4x$

13. నిరూపించుము $\frac{\sin(4A - 2B) + \sin(4B - 2A)}{\cos(4A - 2B) + \cos(4B - 2A)} = \tan(A + B)$

14. $\cot(A + 15^\circ) - \tan(A - 15^\circ) = \frac{4\cos 2A}{1 + 2\sin 2A}$ నిరూపించుము

3.5.4 నియమ బద్ధమైన త్రికోణమితీయ సర్వసమానతలు (Conditional Trigonometric Identities)

ఇవ్వబడిన కోణం యొక్క అన్ని అమోదయోగ్యమైన విలువలకు త్రికోణమితి సర్వసమానతలు నిజమని మనకు తెలుసు. ఇచ్చిన అదనపు నియమములను కొన్ని త్రికోణమితీయ సర్వసమానతలు తృప్తిపరుచును. ఇటువంటి సర్వసమానతలను నియమ బద్ధమైన త్రికోణమితీయ సర్వ సమానతలు అని అంటారు. ఈ విభాగంలో, కొన్ని సంబంధాల ఆధారంగా కొన్ని నియమబద్ధమైన సర్వసమానతలను రూపొందించుటకు మునుపటి విభాగంలో పొందిన సంబంధాలను ఉపయోగించుకుంటాము.

ఉదాహరణ 3.39 $A + B + C = \pi$ అయిన క్రిందివాటిని నిరూపించుము

(i) $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)$

(ii) $\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right) \le \frac{1}{8}$

(iii) $1 < \cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}$

సాధన

(i)
$$\begin{aligned}\cos A + \cos B + \cos C &= 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos C \\ &= 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) + \cos C \quad \left(\frac{A+B+C}{2} = \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2\sin\left(\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) + 1 - 2\sin^2\left(\frac{C}{2}\right) \\ &= 1 + 2\sin\left(\frac{C}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) - \sin\left(\frac{C}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 146 10-03-2023 12:07:47

$$= \quad 1 + 2\sin\left(\frac{C}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)\right]$$

$$= \quad 1 + 2\sin\left(\frac{C}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)\right]$$

$$= \quad 1 + 4\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)$$

(ii) $u = \sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right)$.

$$\text{u} \quad = \quad -\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right]\sin\left(\frac{C}{2}\right)$$

$$= \quad -\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) - \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right]\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$$

$$\cos^2\frac{A+B}{2} - \cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2} + 2u = 0$$

ఇది $\cos\frac{A+B}{2}$ లో వర్గ సమీకరణం.

$\cos\frac{A+B}{2}$ ఒక వాస్తవ సంఖ్య, కావున పైన ఇవ్వబడిన సమీకరణంకు సాధన ఉంటుంది.

కావున విచక్షిణి $b^2 - 4ac \geq 0$, ఇది ఇస్తుంది.

$$\cos^2\frac{A-B}{2} - 8u \quad \geq \quad 0 \Rightarrow u \leq \frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2} \leq \frac{1}{8}$$

అందువల్ల, $\sin\left(\frac{A}{2}\right)\sin\left(\frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{C}{2}\right) \leq \frac{1}{8}$

(iii), (i) మరియు (ii) నుండి మనము పొందునది, $\cos A + \cos B + \cos C > 1$ కావున మనము పొందునది

$$\cos A + \cos B + \cos C \quad \leq \quad 1 + 4 \times \frac{1}{8}$$

అయిన, $1 < \cos A + \cos B + \cos C \leq \frac{3}{2}$

$A + B + C = \pi$ అయిన, $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 0$.

ఉదాహరణ 3.40 $A + B + C = \pi$ అయిన

$\sin\frac{A}{2} + \sin\frac{B}{2} + \sin\frac{C}{2} = 1 + 4\sin\left(\frac{\pi - A}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi - B}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi - C}{4}\right)$ అని నిరూపించుము

సాధన

ఎడమవైపు $= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{B}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)$

$$= \left[2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{4}\right)\cos\left(\frac{B-A}{4}\right)\right] + \left[1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\right]$$

$$= 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\cos\left(\frac{B-A}{4}\right) - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)$$

$$= 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{B-A}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\right]$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 147 10-03-2023 12:07:50

$$= 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{B-A}{4}\right) - \sin\left(\frac{A+B}{4}\right)\right]$$

$$= 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\left[\cos\left(\frac{B-A}{4}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{4}\right)\right]$$

$$= 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{C}{4}\right)\left[2\sin\left(\frac{\frac{B-A}{4} + \frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{4}}{2}\right) - \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \frac{A+B}{4} - \frac{B-A}{4}}{2}\right)\right]$$

$$= 1 + 4\sin\left(\frac{\pi - A}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi - B}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi - C}{4}\right)$$

ఉదాహరణ 3.41 $A + B + C = \pi$ అయిన నిరూపించుము
$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C = 1 - 2\cos A\cos B\cos C$

సాధన :

$$\begin{aligned}
\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C &= \frac{1}{2}[2\cos^2 A + 2\cos^2 B + 2\cos^2 C] \\
&= \frac{1}{2}[(1 + \cos 2A) + (1 + \cos 2B) + (1 + \cos 2C)] \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}[2\cos(A+B)\cos(A-B) + (2\cos^2 C - 1)] \\
&= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}[-2\cos C\cos(A-B) + 2\cos^2 C - 1] \quad (\because A + B = \pi - C) \\
&= \frac{3}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}[-2\cos C(\cos(A-B) - \cos C)] \\
&= 1 - \cos C[\cos(A-B) - \cos C] \\
&= 1 - \cos C[\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\
&= 1 - \cos C[2\cos A\cos B] \\
&= 1 - 2\cos A\cos B\cos C
\end{aligned}$$

అభ్యాసము 3.7

1. $A + B + C = 180^\circ$ అయిన క్రిందివానిని నిరూపించుము.

   (i) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A\sin B\sin C$

   (ii) $\cos A + \cos B - \cos C = -1 + 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

   (iii) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2\cos A\cos B\cos C$

   (iv) $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2\sin A\sin B\cos C$

   (v) $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2} + \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2} = 1$

   (vi) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

   (vii) $\sin(B + C - A) + \sin(C + A - B) + \sin(A + B - C) = 4\sin A\sin B\sin C$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 148 10-03-2023 12:07:53

2. $A+B+C=2s$ అయిన నిరూపించుము $\sin(s-A)\sin(s-B)+\sin s\sin(s-C)=\sin A\sin B$

3. $x+y+z=xyz$ అయిన నిరూపించుము $\frac{2x}{1-x^2}+\frac{2y}{1-y^2}+\frac{2z}{1-z^2}=\frac{2x}{1-x^2}\frac{2y}{1-y^2}\frac{2z}{1-z^2}$

4. $A+B+C=\frac{\pi}{2}$ అయిన క్రిందివాటిని నిరూపించుము

(i) $\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C=4\cos A\cos B\cos C$

(ii) $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=1+4\sin A\sin B\sin C$

5. ΔABC ఒక లంబ కోణ త్రిభుజము మరియు $\angle A=\frac{\pi}{2}$ అయిన నిరూపించుము :

(i) $\cos^2 B+\cos^2 C=1$ (ii) $\sin^2 B+\sin^2 C=1$

(iii) $\cos B-\cos C=-1+2\sqrt{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

3.6 త్రికోణమితీయ సమీకరణములు (Trigonometric Equations)

తెలియని కోణాల త్రికోణమితి ప్రమేయములను కలిగి ఉన్న సమీకరణములను త్రికోణమితీయ సమీకరణాలు అంటారు. తృప్తిపరుచు త్రికోణమితి సమీకరణం యొక్క సాధన అనేది సమీకరణాన్ని తృప్తి పరుచు తెలియని కోణము యొక్క విలువ ప్రదేశంంను పరిమితం చేయనంతవరకు త్రికోణమితి సమీకరణాలకు అనంతమైన సాధనలు ఉంటుంది. కారణం ఏమనగా వాస్తవానికి త్రికోణమితీయ ప్రమేయాల ఆవర్తనం. కొన్ని సమీకరణాలకు అస్సలు సాధన ఉండకపోవచ్చును.

ఉదాహరణకు $\sin\theta=\frac{3}{2}$ అనే సమీకరణానికి సాధన లేదు. ఎందుకంటే $-1\le\sin\theta\le 1$, $\sin\theta=0$ అనే సమీకరణం అనంత అనేక సాధనలు కలిగియుండును. అని $\theta=\pm\pi,\pm 2\pi,\pm 3\pi,\cdots$ అని ఇవ్వబడెను మరియు ఈ సాధనలు క్రమానుగతంగా ఏర్పడును.

సాధారణ సాధన (General Solution)

త్రికోణమితి ప్రమేయము యొక్క ఆవర్తనీయత సహాయంతో పొందిన అన్ని అమోదయోగ్యమైన విలువలను ఇచ్చే త్రికోణమితి సమీకరణం యొక్క సాధనను సమీకరణం యొక్క సాధారణ సాధన అని అంటారు.

ప్రధాన సాధన (Principal Solution)

సంవృతాంతరము $[0,2\pi]$ లేదా $[-\pi,\pi]$ లో సమీకరణాన్ని తృప్తిపరుచు తెలియని కోణం యొక్క అతి చిన్న సంఖ్యా విలువను ప్రధాన సాధన అంటారు. ప్రధాన సాధనను నిర్వచించుటకు సంవృత్తారం $[-\pi,\pi]$ ను తీసికొనెదము. ఇంకా ఈ అంతరంలో రెండు సాధనలు ఉండవచ్చును. రెండు చెల్లుబాటు అయ్యేసాధనలు అయినప్పటికి, మనము సంఖ్యాపరంగా చిన్నవాన్ని మాత్రమే తీసుకుంటాము ప్రమేయముల యొక్క విలోమములను కలిగి ఉండునట్లు వాటి యొక్క ప్రధాన ప్రదేశంను నిర్వచించడానికి ఇది మనకు సహాయపడును.

Sine ప్రమేయము యొక్క ప్రధాన విలువ సంవృతాంతరము $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ లో ఉండును మరియు అందువల్ల I పాదములో లేదా IV పాదములో ఉంటుంది. Cosine ప్రమేయము యొక్క ప్రధాన విలువ సంవృతారంము $[0,\pi]$ లో ఉండును మరియు అందువల్ల I పాదములో లేదా II పాదములో ఉంటుంది. tangent ప్రమేయము యొక్క ప్రధాన విలువ వివృతాంతరము $\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ లో ఉండును మరియు అందువల్ల I పాదము లేదా IV పాదములో ఉంటుంది.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 149 10-03-2023 12:07:55

(i) త్రికోణమితీయ సర్వసమానతల నుండి త్రికోణమితి సమీకరణములు భిన్నముగా ఉండును. ఎందుకంటె తెలియని కోణం θ యొక్క అని అమోదయోగ్యమైన విలువలను త్రికోణమితీయ సర్వసమానతలు నిజమగును కాని త్రికోణమితి సమీకరణములు తెలియని కోణం యొక్క నిర్దిష్ట విలువలకు మాత్రము నిజమగును.

(ii) త్రికోణమితి సమీకరణములను సాధించుటకు సాధారణ పద్ధతి లేదు. ఏదేమైనా, కొన్ని సమీకరణాలు కారణాంక పరుచునట్లు ఉండవచ్చును, కొన్ని సమీకరణాలు ఏక ప్రమేయము పదాలతో వ్యక్తపరుచునట్లు, కొన్ని సమీకరణములు వర్గము చేసినట్లు ఉండవచ్చును.

(iii) త్రికోణమితి సమీకరణములను సాధించుటకు కొన్నిసార్లు సాంకేతికత పరంగా రెండు వైపులా వర్గము చేయవచ్చును. తప్పుడు సాధనలు (అదనపు సాధనలు) కూడా పొందగలగటం వలన జాగ్రత్త తీసుకోవాలి.

ఉదాహరణకు, $0 \le x < 360^\circ$ లో $\sin x - \cos x = 1$ సాధన కనుగొనుటకు, రెండు వైపులా వర్గం చేసిన మనము పొందునది $(\sin x - 1)^2 = \cos^2 x$ ఇది $\Rightarrow 2\sin x(\sin x - 1) = 0$ ఇచ్చును. కావున $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$ అని పొందెదము. స్పష్టంగా $x = 0$ అనునది తప్పుడు సాధన. అందువల్ల వర్గ ప్రక్రియలో సరైన సాధన కోసం మనం తనిఖీ చేయాలి.

(iv) ఎక్కువగా త్రికోణమితి సమీకరణముల సాధనను రేడియనులో వ్రాసెదము.

ఇప్పుడు మనము వివిధ త్రికోణమితీయ సమీకరణల సాధనలను కనుగొంటాము.

(i) $\sin\theta = k(-1 \le k \le 1)$ **రూపంలో గల సమీకరణంనకు సాధన**

$\sin \alpha = k$ అగునట్లు సంఖ్యాపరంగా 2 అను అతిచిన్న కోణంను తీసుకొందాం. కావున

$$\sin\theta = \sin\alpha$$

$$\sin\theta - \sin\alpha = 0$$

$$2\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0 \text{ ఇది యిస్తుంది}$$

$\cos\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ లేక $\sin\left(\frac{\theta-\alpha}{2}\right) = 0$

ఇప్పుడు, $\cos\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$

$\frac{\theta+\alpha}{2} = (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

$\theta = (2n+1)\pi - \alpha,\ n \in \mathbb{Z}$ ... (i)

ఇప్పుడు, $\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0,$

$\frac{\theta-\alpha}{2} = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

$\theta = 2n\pi + \alpha,\ n \in \mathbb{Z}$ ... (ii)

(i) మరియు (ii)-ను కలపడం ద్వారా మనము పొందునది

$$\sin\theta = \sin\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n\alpha,\ n \in \mathbb{Z} \quad (3.13)$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 150 10-03-2023 12:07:56

(ii) $\cos\theta = k\ (-1 \le k \le 1)$ **రూపంలో గల సమీకరణంనకు సాధన**

$\cos\alpha = k$ అగునట్లు సంఖ్యాపరంగా α అను అతిచిన్న కోణంను తీసుకొంటాం. కావున

$$\cos\theta = \cos\alpha \text{ ఇది ఇస్తుంది.}$$

$$\cos\theta - \cos\alpha = 0$$

$$2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\alpha-\theta}{2} = 0$$

$$\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$$

ఇందుమూలంగా $\sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$ లేక $\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$ అని లభించును.

$$\sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\theta+\alpha}{2} = n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$$

$$\theta = 2n\pi - \alpha,\ n\in\mathbb{Z} \quad \text{.... (i)}$$

$$\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\theta-\alpha}{2} = n\pi,\ n\in\mathbb{Z}$$

$$\theta = 2n\pi + \alpha,\ n\in\mathbb{Z} \quad \text{... (ii)}$$

(i) మరియు (ii)-ను కలపడం ద్వారా మనం పొందునది

$$\cos\theta = \cos\alpha \Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \alpha,\ n\in\mathbb{Z} \qquad (3.14)$$

(iii) $\tan\theta = k\ (-\infty < k < \infty)$ **రూపంలో గల సమీకరణంనకు సాధన**

$\tan\alpha = k$ అగునట్లు సంఖ్యాపరంగా α అను అతిచిన్న కోణంను తీసుకొందాం కావున

$$\tan\theta = \tan\alpha$$

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\theta\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha = 0$$

$$\sin(\theta-\alpha) = 0 \Rightarrow \theta - \alpha = n\pi$$

$$\theta = n\pi + \alpha,\ n\in\mathbb{Z}$$

$$\tan\theta = \tan\alpha \Rightarrow \theta = n\pi + \alpha,\ n\in\mathbb{Z} \qquad (3.15)$$

(iv) $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ **రూపంలో గల సమీకరణంనకు సాధన**

$a = r\cos\alpha, b = r\sin\alpha$ తీసికొనుము అప్పుడు

$$r = \sqrt{a^2+b^2};\ \tan\alpha = \frac{b}{a},\ a\neq 0$$

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c \Rightarrow r\cos\alpha\cos\theta + r\sin\alpha\sin\theta = c$$

$$r\cos(\theta-\alpha) = c$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 151 10-03-2023 12:07:59

$$\cos(\theta-\alpha) = \frac{c}{r} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\phi \text{ (అని తీసుకొనుము.)}$$

$$\theta-\alpha = 2n\pi \pm \phi,\ n\in\mathbb{Z}$$

$$\theta = 2n\pi + \alpha \pm \phi,\ n\in\mathbb{Z}$$

$c \le \sqrt{a^2+b^2}$ అయినప్పుడు మాత్రమే పైన ఇవ్వబడిన పద్ధతిని. ఉపయోగించెదము.
$c > \sqrt{a^2+b^2}$ అయితే $a\cos\theta + b\sin\theta = c$ సమీకరణంకు సాధన లేదు.

ఇప్పుడు త్రికోణమితీయ సమీకరణం యొక్క సాధారణ సాధనను మనము సారాంశపరుస్తాం.

త్రికోణమితి సమీకరణం	సాధారణ సాధన
$\sin\theta = 0$	$\theta = n\pi;\ n\in\mathbb{Z}$
$\cos\theta = 0$	$\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2};\ n\in\mathbb{Z}$
$\tan\theta = 0$	$\theta = n\pi;\ n\in\mathbb{Z}$
$\sin\theta = \sin\alpha$ ఇప్పుడు $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha;\ n\in\mathbb{Z}$
$\cos\theta = \cos\alpha$ ఇప్పుడు $\alpha\in[0,\pi]$	$\theta = 2n\pi \pm \alpha,\ n\in\mathbb{Z}$
$\tan\theta = \tan\alpha$ ఇప్పుడు $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	$\theta = n\pi + \alpha,\ n\in\mathbb{Z}$

ఉదాహరణము 3.42 ప్రధాన సాధనను కనుగొనుము

(i) $\sin\theta = \frac{1}{2}$ (ii) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (iii) $\operatorname{cosec}\theta = -2$ (iv) $\cos\theta = \frac{1}{2}$

సాధన

(i) $\sin\theta = \frac{1}{2} > 0$ అయిన ప్రధాన విలువ I పాదములో అమరును.

$\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

అందువల్ల $\theta = \frac{\pi}{2}$ అనునది ప్రధాన సాధన

(ii) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\theta$ యొక్క ప్రధాన విలువ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ వ పాదములో అమరునని మనకు తెలియును.

$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} < \theta$, కావున $\sin\theta$ యొక్క ప్రధాన విలువ IV వ పాదములో అమరును.

$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

అందువల్ల $\theta = -\frac{\pi}{3}$ ప్రధాన విలువ

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 152 10-03-2023 12:08:03

(iii) $\operatorname{cosec}\theta = -2$

$$\operatorname{cosec}\theta = -2 \Rightarrow \frac{1}{\sin\theta} = -2 \Rightarrow \sin\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = -\frac{1}{2} < 0$$

$\sin\theta$ యొక్క ప్రధాన విలువ IV వ పాదములో అమరును.

$$\sin\theta = -\frac{1}{2} = -\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

కావున $\theta = -\frac{\pi}{6}$ ప్రధాన సాధన

(iv) $\cos\theta = \frac{1}{2}$

$\cos\theta$ యొక్క ప్రధాన విలువ I మరియు II వ పాదంలో అమరును.

ఎందుకనగా $\cos\theta = \frac{1}{2} > 0$

$\cos\theta$ యొక్క ప్రధాన విలువ $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ తరగతి నందు అమరును

$$\cos\theta = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

అందువలన $\theta = \frac{\pi}{3}$ అనునది ప్రధాన సాధన.

ఉదాహరణ 3.43 $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ యొక్క సాధారణ సాధనను కనుగొనుము.

సాధన

$\sin\theta = \sin\alpha,\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ యొక్క సాధారణ సాధన

$\theta = n\pi + (-1)^n\ \alpha, n \in \mathbb{Z}$

$$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

అందువల్ల సాధారణ సాధన

$$\theta = n\pi + (-1)^n\left(-\frac{\pi}{3}\right) = n\pi + (-1)^{n+1}\left(\frac{\pi}{3}\right);\quad n \in \mathbb{Z} \qquad \text{..... (1)}$$

పై సాధారణ సాధనను చేరుకోవడంలో, ప్రధాన విలువ $-\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ను సంవృతాంతరము $[-\pi, \pi]$ సంఖ్యాపరంగా అతి చిన్న ప్రధాన విలువను మన వసతి కొరకు తీసుకొన్నాము. ఇపుడు ఈ ఉదాహరణ ద్వారా ప్రధాన సాధన యొక్క నిర్వచనంలో చెప్పినట్లు ప్రధాన విలువను $[0, 2\pi]$ లో తీసుకొనవచ్చని మనము సమర్ధిస్తాము.

సంవృత్తాంతరము $[0, 2\pi]$ లో ప్రధాన సాధనను తీసుకుంటె, ప్రధాన సాధన $\theta = \frac{4\pi}{3}$ మరియు సాధారణ సాధన ......

$$\theta = n\pi + (-1)^n\left(\frac{4\pi}{3}\right),\ n \in \mathbb{Z},\quad \frac{4\pi}{3} \in [0,\ 2\pi] \ \text{..... (ii)}$$

(ii) నుండి $n = 0, -1, 1, -2, 2, \cdots$ నుండి సంబంధిత సాధనలు $\frac{4\pi}{3}, \frac{-7\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}, \cdots$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 153 10-03-2023 12:08:05

(i)-నుండి $n = 0, -1, 1, -2, 2, \cdots$ సంబంధిత సాధనలు $\frac{-\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{-7\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, \cdots$

రెండు సందర్భాల్లో మనకు ఒకే రకమైన సాధన సమితిని పొందవచ్చును. కాని భిన్నమైన క్రమంలో అందువల్ల ప్రధాన సాధనను సంవృతాంతరము $[0, 2\pi]$ లేక $[-\pi, \pi]$ లో గాని తీసికొనవచ్చని మనము సమర్థించాము.

ఉదాహరణ 3.44. సాధారణ సాధనను కనుగొనుము (i) $\sec\theta = -2$ (ii) $\tan\theta = \sqrt{3}$

సాధన

(i)
$$\sec\theta = -2$$
$$\sec\theta = -2 \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{2}$$
$\cos\theta = \cos\alpha, \alpha \in [0, \pi]$ అనునది సాధారణ సాధన

$\theta = 2n\pi \pm \alpha,\ n \in \mathbb{Z}$ అని మనకు తెలుసు. కావున.

$\alpha \in [0, \pi]$ కావున $\cos\alpha = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{2\pi}{3}$

కావున $\alpha = \frac{2\pi}{3}$

కావున θ యొక్క సాధారణ సాధన $\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}$

(ii) $\tan\theta = \sqrt{3}$
$$\tan\theta = \sqrt{3} = \tan\frac{\pi}{3}$$
$\tan\theta = \tan\alpha,\ \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ యొక్క సాధారణ సాధన $\theta = n\pi + \alpha,\ n \in \mathbb{Z}$ అని మనకు తెలుసు.

కావున $\theta = n\pi + \frac{\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}$ అనునది సాధారణ సాధన.

ఉదాహరణ 3.45. $3\cos^2\theta = \sin^2\theta$ ను సాధించుము.

సాధన
$$3\cos^2\theta = 1 - \cos^2\theta \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{4}$$
$$\frac{\cos 2\theta + 1}{2} = \frac{1}{4} \Rightarrow \cos 2\theta = -\frac{1}{2} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$
$$2\theta = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}$$

$\tan^2\theta = 3$ వ్రాయడం ద్వారా సాధించుటకు ప్రయత్నించుము.

ఉదాహరణ 3.46. సాధించుము $\sin x + \sin 5x = \sin 3x$.

సాధన
$$\sin x + \sin 5x = \sin 3x \Rightarrow 2\sin 3x \cos 2x = \sin 3x$$
$$\sin 3x(2\cos 2x - 1) = 0$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 154 10-03-2023 12:08:07

కావున, $\sin 3x = 0$ లేదా $\cos 2x = \frac{1}{2}$

$\sin 3x = 0$ అయిన, $3x = n\pi \Rightarrow x = \frac{n\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}$ ..... (i)

$\cos 2x = \frac{1}{2}$ అయిన, $\cos 2x = \cos\frac{\pi}{3}$ ..... (ii)

$$2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = n\pi \pm \frac{\pi}{6},\ n \in \mathbb{Z}$$

(i) మరియు (ii) నుండి సాధారణ సాధన $x = \frac{n\pi}{3}$ లేదా $x = n\pi \pm \frac{\pi}{6},\ n \in \mathbb{Z}$

ఉదాహరణ 3.47 సాధించుము $\cos x + \sin x = \cos 2x + \sin 2x$.

సాధన

$$\cos x + \sin x = \cos 2x + \sin 2x$$

$$\Rightarrow \cos x - \cos 2x = \sin 2x - \sin x$$

$$2\sin\left(\frac{x+2x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{2x+x}{2}\right)\sin\left(\frac{2x-x}{2}\right)$$

$$2\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{3x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left[\sin\left(\frac{3x}{2}\right) - \cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right] = 0$$

$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ లేక $\sin\left(\frac{3x}{2}\right) - \cos\left(\frac{3x}{2}\right) = 0$.

$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = 0$ అయినప్పుడు,

$\frac{x}{2} = n\pi \Rightarrow x = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$

$\sin\left(\frac{3x}{2}\right) - \cos\left(\frac{3x}{2}\right) = 0$ అయినప్పుడు,

$\tan\left(\frac{3x}{2}\right) = 1 = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \frac{3x}{2} = n\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{6},\ \ n \in \mathbb{Z}$

అందువల్ల, సాధారణ సాధన $x = 2n\pi$ లేక $x = \frac{2n\pi}{3} + \frac{\pi}{6},\ n \in \mathbb{Z}$

$\sin\theta = \cos\theta$ అయిన, $\theta \neq (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$ కావున, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1$.

ఉదాహరణ 3.48 $\sin 9\theta = \sin\theta$ అను సమీకరణం సాధించుము

సాధన

$$\sin 9\theta = \sin\theta \Rightarrow \sin 9\theta - \sin\theta = 0$$

$$2\cos 5\theta \sin 4\theta = 0 \Rightarrow \cos 5\theta = 0 \text{ లేక } \sin 4\theta = 0$$

$\cos 5\theta = 0$ అయినప్పుడు $5\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \theta = (2n+1)\frac{\pi}{10},\ n \in \mathbb{Z}$

$\sin 4\theta = 0 \Rightarrow 4\theta = n\pi$

$\Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z}$

అందువల్ల, ఇవ్వబడిన సమీకరణం యొక్క సాధారణ సాధన $\theta = (2n+1)\frac{\pi}{10},\ \theta = \frac{n\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z}$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 155 10-03-2023 12:08:11

ఉదాహరణ 3.49 సాధించుము $\tan 2x = -\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$.

సాధన

$$\tan 2x = -\cot\left(x+\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{2}+x+\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(\frac{5\pi}{6}+x\right)$$

$$2x = n\pi + \frac{5\pi}{6} + x,\ n \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = n\pi + \frac{5\pi}{6},\ n \in \mathbb{Z}.$$

ఉదాహరణ 3.50 సాధించుము $\sin x - 3\sin 2x + \sin 3x = \cos x - 3\cos 2x + \cos 3x$.

సాధన

$$\sin x - 3\sin 2x + \sin 3x = \cos x - 3\cos 2x + \cos 3x$$

$$\sin 3x + \sin x - 3\sin 2x = \cos 3x + \cos x - 3\cos 2x$$

$$2\sin 2x\cos x - 3\sin 2x = 2\cos 2x\cos x - 3\cos 2x$$

$$(\sin 2x - \cos 2x)(2\cos x - 3) = 0$$

కావున, $\sin 2x - \cos 2x = 0$ అందువలన, $2\cos x - 3 \neq 0$

$$\sin 2x = \cos 2x \Rightarrow \tan 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8},\ n \in \mathbb{Z}.$$

ఉదాహరణ 3.51 సాధించుము $\sin x + \cos x = 1 + \sin x\cos x$.

సాధన

$\sin x + \cos x = t$ అనుకొనుము

$$\Rightarrow 1 + 2\sin x\cos x = t^2 \Rightarrow \sin x\cos x = \frac{t^2-1}{2}$$

కావున, ఇవ్వబడిన సమీకరణం $t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1$

కావున, $\sin x + \cos x = 1$

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = 1$$

$$\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

కావున,

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \text{ లేదా } x = 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 156 10-03-2023 12:08:13

ఉదాహరణ 3.52 సాధించుము $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2$.

సాధన

$$2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2 \Rightarrow 2\sin^2 x + (2\sin x\cos x)^2 = 2$$

$$\cos^2 x(2\sin^2 x - 1) = 0$$

$\cos x = 0$ లేదా $\sin^2 x = \frac{1}{2}$

$\cos x = 0 \Rightarrow x = (2n+1)\frac{\pi}{2},\ n \in \mathbb{Z}$

$\sin^2 x = \frac{1}{2} = \sin^2\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow x = n\pi \pm \frac{\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z}$ (எப்படி)

కావున సాధన $x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ లేదా $x = n\pi \pm \frac{\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z}$.

ఉదాహరణ 3.53 ఏదైన a మరియు b కు క్రిందిదానిని నిరూపించుము

$-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin\theta + b\cos\theta \le \sqrt{a^2+b^2}$.

సాధన

ఇప్పుడు $a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta\right]$

$= \sqrt{a^2+b^2}\,[\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta]$

ఇచ్చుట, $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$= \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\theta)$

కావున, $|a\sin\theta + b\cos\theta| \le \sqrt{a^2+b^2}$

అందువల్ల, $-\sqrt{a^2+b^2} \le a\sin\theta + b\cos\theta \le \sqrt{a^2+b^2}$

ఉదాహరణ 3.54 సాధించుము $\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}$.

సాధన

$$\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta = \sqrt{2}$$

ఇచ్చుట, $a = -1;\ b = \sqrt{3};\ c = \sqrt{2};\ r = \sqrt{a^2+b^2} = 2$

కావున, పైన ఇవ్వబడిన సమీకరణం తిరిగి వ్రాయబడింది.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta\cos\frac{\pi}{6} - \cos\theta\sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$\theta - \frac{\pi}{6} = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

కావున, $\theta = n\pi + \frac{\pi}{6} + (-1)^n\frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 157 10-03-2023 12:08:16

ఉదాహరణ 3.55 సాధించుము $\sqrt{3}\tan^2\theta + (\sqrt{3}-1)\tan\theta - 1 = 0$.

సాధన

$$\sqrt{3}\tan^2\theta + (\sqrt{3}-1)\tan\theta - 1 = 0$$

$$\sqrt{3}\tan^2\theta + \sqrt{3}\tan\theta - \tan\theta - 1 = 0$$

$$(\sqrt{3}\tan\theta - 1)(\tan\theta + 1) = 0$$

కావున, $\sqrt{3}\tan\theta - 1 = 0$ (లేదా) $\tan\theta + 1 = 0$

$\sqrt{3}\tan\theta - 1 = 0$ అయిన,

$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan\dfrac{\pi}{6}$

$\Rightarrow \theta = n\pi + \dfrac{\pi}{6},\ n \in \mathbb{Z}$ ..... (i)

$\tan\theta + 1 = 0$ అయిన,

$\tan\theta = -1 = \tan\left(\dfrac{-\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow \theta = n\pi - \dfrac{\pi}{4},\ n \in \mathbb{Z}$ ..... (ii)

(i) మరియు (ii) నుండి సాధారణ సాధనను పొందవచ్చును.

అభ్యాసము 3.8

1. క్రింద ఇవ్వబడిన వాటికి ప్రధాన సాధన మరియు సాధారణ సాధనను కనుగొనుము.

   (*i*) $\sin\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (*ii*) $\cot\theta = \sqrt{3}$ (*iii*) $\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

2. క్రింద ఇవ్వబడిన సమీకరణములను సాధించుము. ఈ సాధనలను $0^\circ \le \theta < 360^\circ$ అంతరంలో కనుగొనుము.

   (*i*) $\sin^4 x = \sin^2 x$ (*ii*) $2\cos^2 x + 1 = -3\cos x$ (*iii*) $2\sin^2 x + 1 = 3\sin x$

   (*iv*) $\cos 2x = 1 - 3\sin x$

3. క్రింద ఇవ్వబడిన సమీకరణములను సాధించుము.

   (*i*) $\sin 5x - \sin x = \cos 3x$

   (*ii*) $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$

   (*iii*) $\cos\theta + \cos 3\theta = 2\cos 2\theta$

   (*iv*) $\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta = 0$

   (*v*) $\sin 2\theta - \cos 2\theta - \sin\theta + \cos\theta = 0$

   (*vi*) $\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$

   (*vii*) $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 1$

   (*viii*) $\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta = \sqrt{3}$

   (*ix*) $\tan\theta + \tan\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\theta + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$

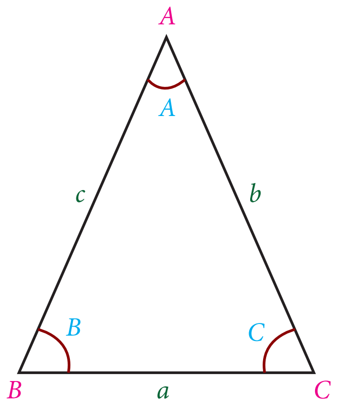
   (*x*) $\cos 2\theta = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$

   (*xi*) $2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 158 10-03-2023 12:08:18

3.7 త్రిభుజము యొక్క ధర్మములు (Properties of Triangle)

త్రిభుజము ద్వారా రూపొందించబడే ఆచరణాత్మక సమస్యలను పరిష్కరించడం త్రికోణమితి యొక్క ఒక ముఖ్యమైన ఉపయోగము. త్రిభుజము యొక్క అన్ని భుజములు మరియు కోణాలను కనుగొనుట అనేది త్రిభుజమును సాధించుటగా సూచిస్తాం. ఏ త్రిభుజములోనైనను మూడు భుజములు మరియు మూడు కోణాలను త్రిభుజము యొక్క ప్రాథమిక అంశాలంటారు. లంబకోణ త్రిభుజము యొక్క సాధనను కనుగొనుటలో పైథాగరస్ సిద్ధాంతము కీలక పాత్ర పోషిస్తుంది. *sine* యొక్క నియమములు మరియు *cosine* యొక్క నియమములు ఒక తిర్యక్ త్రిభుజము (లంబ కోణం లేని త్రిభుజము) పరిష్కరించడంలో సమర్థవంతంగా ఉపయోగించ గల ముఖ్యమైన సాధనాలు. ఈ విభాగంలో మనము త్రిభుజము యొక్క భుజాలు మరియు కోణాల మధ్య సంబంధాన్ని చర్చిస్తాము మరియు *sine* నియమములు మరియు *cosine* నియమములు ఉత్పాదిస్తాము.



పటము 3.17

సంజ్ఞామానం (సంకేతము) : ABC ఒక త్రిభుజమని తీసుకొనుము ΔABC యొక్క శీర్షములు A, B, C యొక్క కోణాలను A, B, C అని సూచిస్తాము. కోణములు A, B, C యొక్క ఎదుటి భుజములను క్రమముగా a, b, c లచే చూచించబడతాయి. త్రిభుజ వైశాల్యమును సూచించడానికి మనము Δ చిహ్నాన్ని ఉపయోగిస్తాము.

త్రిభుజము యొక్క మూడు శీర్షల గుండా పోవు వృత్తమును త్రిభుజము యొక్క పరివృత్తమనబడును. పరివృత్తము యొక్క కేంద్రము మరియు వ్యాసార్థముగాను క్రమముగా పరివృత్త కేంద్రము మరియు పరివృత్త వ్యాసార్థమనబడును.

ΔABC లో, $A + B + C = \pi$ మరియు $a + b > c,\ b + c > a,\ a + c > b$ అని తెలియును.

sines లేక sine సూత్రము యొక్క న్యాయము

3.7.1 sines యొక్క న్యాయము (Law of sines)

sines న్యాయము అనేది కోణాలు మరియు త్రిభుజముల మధ్యగల సంబంధము. త్రిభుజమును పరిష్కంరించునప్పుడు, ఈ క్రింది పరిస్థితులలో sine నియమమును సమర్థవంతంగా ఉపయోగించవచ్చును.

(i) రెండు భుజములు మరియు వాని మధ్యలేని ఒక కోణము ఇవ్వబడిన ఒక కోణమును కనుగొనుట.

(ii) రెండు కోణములు మరియు ఇవ్వబడిన కోణమునకు ఎదురుగా గల ఒక భుజము ఇవ్వబడిన ఒక భుజమును కనుగొనుట.

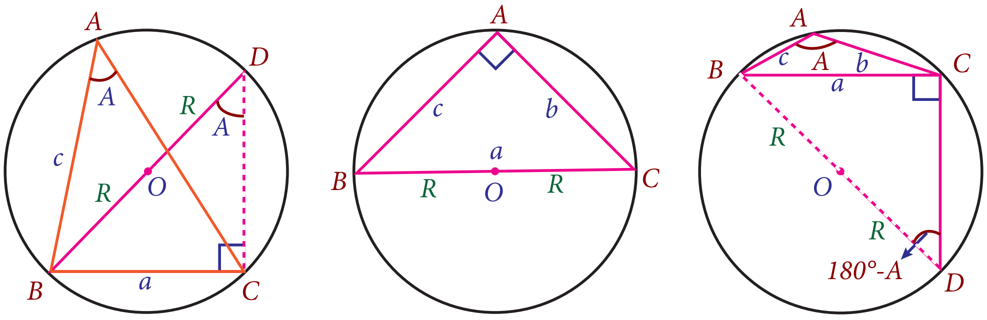
సిద్ధాంతము 3.1 sines యొక్క న్యాయము (Law of sines)

ఏదైన త్రిభుజములో భుజాల పొడవులు వాటి ఎదుటి కోణాల యొక్క sine లకు అనులోమానుపాతంలో ఉండును. అనగా ΔABC లో $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$, ఇచ్చట R అనునది త్రిభుజము యొక్క పరివృత్త వ్యాసార్థము.

నిరూపణ :

ΔABC యొక్క కోణము A లఘు లేక లంబ లేక గురుకోణమగును. ΔABC యొక్క పరివృత్త కేంద్రము O మరియు వ్యాసార్థము R అని తీసికొనెదము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 159 10-03-2023 12:08:19



పటము 3.18

సందర్భం I

సందర్భం : $\angle A$, ఒక లఘుకోణము

BO ను పొడిగించిన వృత్తమును D వద్ద కలుస్తుంది.

$$\angle BDC = \angle BAC = A$$

$$\angle BCD = 90^\circ$$

$$\sin\angle BDC = \frac{BC}{BD} \text{ లేక } \sin A = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

సందర్భం II

$\angle A$, ఒక లంబకోణం

ΔABC లో భుజము BC పై O అమరునట్లు తీసికొనుము

ఇప్పుడు, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{BC}{\sin 90^\circ} = \dfrac{2R}{1} = 2R \Rightarrow \dfrac{a}{\sin A} = 2R$

సందర్భం III

$\angle A$, ఒక గురుకోణం.

BO ను పొడిగించిన వృత్తమును D వద్ద కలుస్తుంది.

$$\angle BDC + \angle BAC = 180^\circ$$

$$\angle BDC = 180^\circ - \angle BAC = 180^\circ - A$$

$$\angle BCD = 90^\circ$$

$$\sin\angle BDC = \frac{BC}{BD} \text{ లేక}$$

$$\sin(180^\circ - A) = \sin A = \frac{a}{2R} \Rightarrow \frac{a}{\sin A} = 2R$$

ఈ సందర్భములో, $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$ అని పొందెదము..

ఇదే విధంగా, కోణములు B మరియు C తీసికొనిన క్రమముగా $\dfrac{b}{\sin B} = 2R$ మరియు $\dfrac{c}{\sin C} = 2R$ నిరూపించవచ్చును.

ఈ విధంగా , $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 160 10-03-2023 12:08:21

(i)సైన్ నియమమును మూడు సమీకరణాల సేకరణగా వ్రాయవచ్చును. $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B};\ \frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C};\ \frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}$;

(ii) త్రిభుజము యొక్క భుజములు వాటి ఎదుటి కోణముల యొక్క సైన్‌కు అనులోమానుపాతములో ఉండునని సైన్ నియమము సూచించును.

(iii) సైన్ నియమమును ఉపయోగించిన త్రిభుజము యొక్క రెండు భుజములు మధ్య గల కోణమును ఇవ్వబడినను సాధన కనుగొనుట అసాధ్యమగును.

(iv) సైన్ నియమము యొక్క ఆసక్తికరమైన రేఖాగణిత విషయం ఏమిటంటే ఏదైన త్రిభుజము యొక్క అతిపెద్ద భుజము పెద్ద కోణమునకు ఎదురుగా ఉండును. (నిరూపించుము)

నేపియర్స్ సూత్రము

సిద్ధాంతము 3.2

ΔABC లో

(i) $\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$

(ii) $\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$

(iii) $\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$

నిరూపణ :

$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ సైన్ సూత్రం తెలియును.

ఇదేవిధంగా, $\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2} = \frac{2R\sin A-2R\sin B}{2R\sin A+2R\sin B}\cot\frac{C}{2}$

$$= \frac{\sin A-\sin B}{\sin A+\sin B}\cot\frac{C}{2}$$

$$= \frac{2\cos\frac{A+B}{2}\ \sin\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{A+B}{2}\ \cos\frac{A-B}{2}}\cot\frac{C}{2}$$

$$= \cot\frac{A+B}{2}\tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

$$= \cot\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)\tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{C}{2}$$

$$= \tan\frac{C}{2}\tan\frac{A-B}{2}\cot\frac{C}{2} = \tan\frac{A-B}{2}$$

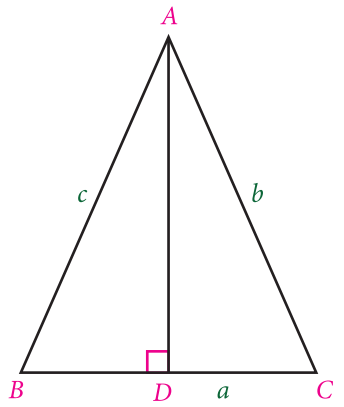
మిగిలిన సూత్రంను నిరూపించవచ్చును.

3.7.2 కొసైన్ న్యాయము (Law of Cosines)

రెండు భుజములు మరియు వాటితో కలుపబడిన కోణం లేదా త్రిభుజం యొక్క మూడు భుజములు ఇవ్వబడినప్పుడు, సైన్ నియమును ఉపయోగించి త్రిభుజమును సాధించలేము. అటువంటి పరిస్థితిలో కొసైన్ నియమమును ఉపయోగించి త్రిభుజమును సాధించవచ్చును. త్రిభుజము యొక్క రెండు భుజములు వాటితో

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 161 10-03-2023 12:08:24

చేర్చబడిన కోణము ఇవ్వబడినప్పుడు త్రిభుజ వైశాల్య సూత్రమును పొందుటకు కొసైన్ సూత్రమును ఉపయోగించవచ్చును.



పటము 3.19

సిద్ధాంతము 3.3 (కొసైన్ న్యాయము)

ΔABC లో,

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};\ \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca};\ \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

నిరూపణ :

ΔABC లో $AD \perp BC$ గీయుము

ΔABD లో మనకు తెలియును $AB^2 = AD^2 + BD^2 \Rightarrow c^2 = AD^2 + BD^2$.

ఇప్పుడు AD మరియు BD విలువలను ΔABC యొక్క అంశాల పదాలలో మనము కనుగొంటాము.

$$\begin{aligned}
\frac{AD}{AC} &= \sin C \Rightarrow AD = b\sin C \\
BD &= BC - DC = a - b\cos C \\
c^2 &= (b\sin C)^2 + (a - b\cos C)^2 \\
&= b^2\sin^2 C + a^2 + b^2\cos^2 C - 2ab\cos C \\
&= a^2 + b^2(\sin^2 C + \cos^2 C) - 2ab\cos C \\
&= a^2 + b^2 - 2ab\cos C
\end{aligned}$$

కావున, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ లేక $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

ఇదేవిధంగా, మిగిలిన రెండు ఫలితములను నిరూపించవచ్చును. ,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \text{ లేక } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \text{ లేక } \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$$

(i) ఒక భుజము యొక్క వర్గము, మిగిలిన రెండు భుజముల వర్గముల యొక్క మొత్తము నుండి ఆ రెండు భుజములు మరియు వాటితో ఏర్పడిన కోణము యొక్క కొసైన్‌ల లబ్ధముల రెండు రెట్లు తగ్గింపబడినది సమానము అని $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ చెబుచున్నది. చక్రీయ పద్ధతి a, b, c అను అక్షరముల రూపంలో ఒక సూత్రము నుండి మరి యొక సూత్రమును పొందవచ్చును.

(ii) లంబ త్రిభుజము యొక్క కొసైన్ నియమము పైథాగరియస్ సిద్ధాంతానికి తగ్గింపబడును అందువల్ల కొసైన్ సూత్రాలను పైథాగరియస్ సిద్ధాంతము యొక్క సాధారణీకరణగా చూడవచ్చును.

(iii) సైన్ నియమము కంటె కొసైన్ నియమము ఉపయోగించడం వల్ల కలిగే ప్రయోజనం ఏమిటంటే సైన్ ప్రమేయము కాకుండా, కొసైన్ ప్రమేయము లఘు మరియు గురు కోణముల మధ్య తేడాను చూపుతుంది. ఒక కోణము యొక్క కొసైన్ ధణాత్మకమైన అది లఘు కోణము లేకపోతే అది గురుకోణమగును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 162 10-03-2023 12:08:26

(iv) కొసైన్ నియమము ఇలా చెబుతుంది. ప్రత్యక్ష మార్గంలో చిన్నది. దీనిని వివరిద్దాం. ΔABC లో $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C, -\cos C < 1$ అయిన $c^2 < a^2 + b^2 + 2ab$ అని పొందెదము ఈ విధంగా $c < a + b$ అగును. అందువల్ల ΔABC లో $a < b + c,\ b < c + a,\ c < a + b$ అగును.

(v) కొసైన్ నియమము ఉపయోగిస్తున్నప్పుడు, ముందుగా తెలియని అతి పెద్ద కోణం యొక్క కొలతను కనుగొనడం ఎల్లప్పుడు మంచిది. అటువంటి కోణం ఉంటె అది త్రిభుజము యొక్క కోణాన్ని ఇస్తుంది.

3.7.3 విక్షేప సూత్రము (Projection Formula)

సిద్ధాంతము 3.4

ΔABC లో,

(i) $a = b\cos C + c\cos B$ (ii) $b = c\cos A + a\cos C$ (iii) $c = a\cos B + b\cos A$

నిరూపణ :

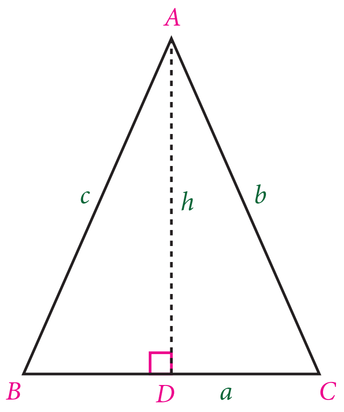
ΔABC లో $a = BC$ $AD \perp BC$ గీయుము,

$$a = BC = BD + DC$$

$$= \frac{BD}{AB}AB + \frac{DC}{AC}AC$$

$$= (\cos B)c + (\cos C)b$$

$$a = b\cos C + c\cos B$$



పటము 3.20

ఇదేవిధంగా మిగిలిన రెండు విక్షేప సూత్రాలను నిరూపించవచ్చును.

$a = b$ cos C + c cos B అనునది $a = a$ పై b యొక్క విక్షేపము + a పై c యొక్క విక్షేపము అని చెబుతుంది. ఈ విధంగా, త్రిభుజము యొక్క భుజము మిగిలిన రెండు భుజముల విక్షేపముల మొత్తమునకు సమానము.

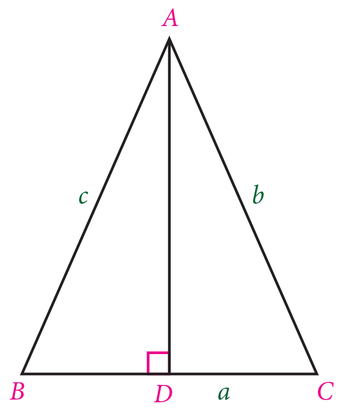
3.7.4 త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము (Area of the triangle)

తిర్యక్ త్రిభుజము యొక్క కొన్ని అంశములు మరియు సైన్ ప్రమేయములను ఉపయోగించి త్రిభుజ వైశాల్యమును కనుగొనుట. ΔABC యొక్క వైశాల్య సూత్రము $\frac{1}{2}bh$ అని గుర్తు తెచ్చుకొనెదము ఇచ్చట b అనునది ఆధార భుజము మరియు h అనునది ఎత్తు. తిర్యక్ త్రిభుజములో వైశాల్య సూత్రమును ఉపయోగించుటకు ముందు ఎత్తు h కనుగొనవలెను.

సిద్ధాంతము 3.5

ΔABC లో త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము

$$\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$$



పటము 3.21

నిరూపణ : ΔABC లో $AD \perp BC$ ను గీయుము.

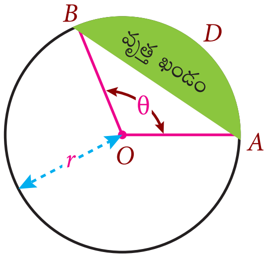
ΔABC లో, $\frac{AD}{AC} = \sin C \Rightarrow AD = AC \sin C$

ఈ విధంగా $\Delta = \frac{1}{2}$ ఆదార భుజము $\times$ ఎత్తు $= \frac{1}{2} ab \sin C$

ఇదే విధంగా మిగిలిన రెండు ఫలితములను పొందవచ్చును.

(i) తిర్యక్ త్రిభుజము వైశాల్యము యొక్క సూత్రము, రెండు భుజములు మరియు వాటితో కలుపబడిన కోణము యొక్క సైన్ల లబ్ధముల సగం వైశాల్యమునకు సమానము అని చెబుతుంది.

(ii) వృత్త ఖండం యొక్క వైశాల్యమును లెక్కించడానికి వైశాల్య సూత్రమును ఉపయోగించబడుతుంది. జ్యా మరియు ఖండింపబడిన చాపము మధ్యగల ప్రాంతం వృత్త ఖండం అగును.



పటము 3.22

వృత్త వ్యాసార్థము r మరియు కేంద్రము వద్ద జ్యా AB ఏర్పరచు కోణం θ అనుకొనుము.

ABD విభాగం యొక్క వైశాల్యము = వృత్త సెక్టార్ వైశాల్యము $-\Delta OAB$ యొక్క వైశాల్యము.

$$= \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2\sin\theta$$

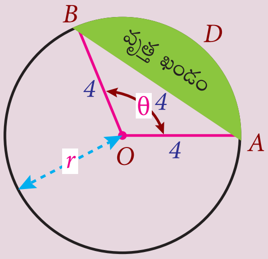
$$= \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin\theta)$$

(iii) త్రిభుజం యొక్క వైశాల్య సూత్రాన్ని లంబ త్రిభుజము యొక్క వైశాల్య సూత్రం యొక్క సాధారణీకరణగా చూస్తారు.

(iv) పై సూత్రంలో, త్రిభుజాల వైశాల్యం కనుగొనడంలో మూడవ భుజము కొలత అవసరం లేదని స్పష్టమైంది. మరియు త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యమును కనుగొనటానికి దాని ఎత్తు కనుగొనవలసిన అవసరం లేదు.

ఉదాహరణ 3.56

8 కిలోమీటర్ల వ్యాసం కలిగిన వృత్తాకార జంతుశాస్త్ర పార్కును కలిగి ఉండాలని ప్రభుత్వం యోచిస్తోంది. పార్కులో 4 కిలోమీటర్ల జ్యా పోడవుతో గల ఒక వృత్త ఖండం రూపంలో గల ప్రత్యేక ప్రాంతాన్ని పశువైద్య ఆసుపత్రికి కేటాయించిరి. పశువైద్య ఆసుపత్రికి కేటాయించిన వృత్త ఖండ వైశాల్యమును కనుగొనుము.



పటము 3.23

సాధన

జ్యా AB మరియు వృత్తాకార పార్కు యొక్క కేంద్రము O అనుకొనుము.

వృత్త ఖండం యొక్క వైశాల్యము = సెక్టారు యొక్క వైశాల్యము $-\Delta OAB$ యొక్క వైశాల్యము

$$= \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2\sin\theta$$

$$= \left(\frac{1}{2}\times 4^2\right)[\theta - \sin\theta] = 8[\theta - \sin\theta] \qquad \text{..... (i)}$$

కాని $\cos\theta = \frac{4^2+4^2-4^2}{2(4)(4)} = \frac{1}{2}$

ఈ విధంగా $\therefore\ \theta = \frac{\pi}{3}$

(i) నుండి, పశు ఆసుపత్రికి కేటాయించిన వృత్త ఖండ వైశాల్యము

$$= 8\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{4}{3}(2\pi - 3\sqrt{3})\ \text{m}^2.$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 164 10-03-2023 12:08:30

3.7.5 అర్ధ కోణ సూత్రము (Half–Angle Formula)

సిద్ధాంతము 3.6: ΔABC లో

(i) $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$, (ii) $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

(iii) $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$,

ఇచ్చుట ΔABC యొక్క అర్ధ చుట్టుకొలత $s = \frac{a+b+c}{2}$. అని తీసికొనబడెను.

నిరూపణ : (i)

$$\sin\frac{A}{2} = +\sqrt{\sin^2\frac{A}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{4bc}} = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(a+b+c-2c)(a+b+c-2b)}{4bc}}$$

$$= \sqrt{\frac{(2s-2b)(2s-2c)}{4bc}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

కావున, $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

ఇదేవిధంగా ఇతర రెండు ఫలితములను నిరూపించబడును.

ఇతర అర్ధ –కోణ సూత్రములు

$\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ac}}$, $\sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

$\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$; $\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

$\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$, $\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

ఉప సిద్ధాంతము $\sin A = 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2} = 2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

$$\sin A = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

త్రిభుజవైశాల్యము (హెరాన్ సూత్రము) (Area of Triangle – Heron's Formula)

హెరాన్ సూత్రానికి గ్రీకు ఇంజనీరు మరియు గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు (CE 10 - 70) అలెక్సెంండ్రియా యొక్క హీరో పేరు పెట్టారు. త్రిభుజము యొక్క మూడు భుజాలు తెలిసినప్పుడే ఈ సూత్రం ఉపయోగించబడుతుంది.

సిద్ధాంతము 3.7: ΔABC లో $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ఇచ్చుట ΔABC యొక్క అర్ధ – చుట్టుకొలత S.

నిరూపణ :

$$\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ab\left(2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right)$$

$$= ab\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 165 10-03-2023 12:08:33

(i) హెరాన్ సూత్రాన్ని ఉపయోగించి, పైథాగరియస్ సిద్ధాంతాన్ని లంబ త్రిభుజం కోసం నిరూపించవచ్చును మరియు వివర్యయముగా లంబకోణ త్రిభుజం కోసం పైథాగరియస్ సిద్ధాంతాన్ని ఉపయోగించి హెరాన్ వైశాల్య సూత్రమును పొందవచ్చును.

(ii) త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము పూర్ణంకముగా ఇవ్వబడినప్పుడు, త్రిభుజము యొక్క భుజములు పూర్ణంకముగా కనుగొనుటకు హెరాన్ సూత్రము ఉపయోగపడును.

(iii) త్రిభుజం యొక్క చుట్టుకొలత స్థిరంగా ఉంటే, పూర్ణంక వైశాల్యము మరియు పూర్ణాంక భుజము ఉన్న త్రిభుజాలను కనుగొనుటకు హెరాన్ సూత్రము ఉపయోగపడును.

ఉదాహరణకు, త్రిభుజము యొక్క చుట్టుకొలత 100 మీ అయితే త్రిభుజము యొక్క భుజములు 32 మీ, 34 మీ, 34 మీ మరియు వైశాల్యము 480 చదురపు మీటర్లు

ఉదాహరణ 3.57: ΔABC లో $b^2\sin 2C + c^2\sin 2B = 2bc\sin A$ అని నిరూపించుము.

సాధన

సైన్ సూత్రము $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

కావున, $a = 2R\sin A;\ b = 2R\sin B;\ c = 2R\sin C$

$$\begin{aligned}
b^2\sin 2C + c^2\sin 2B &= 4R^2\sin^2 B\sin 2C + 4R^2\sin^2 C\sin 2B \\
&= 4R^2(2\sin^2 B\sin C\cos C + 2\sin^2 C\sin B\cos B) \\
&= 8R^2\sin B\sin C(\sin B\cos C + \sin C\cos B) \\
&= 8R^2\sin B\sin C\sin(B+C) \\
&= 8R^2\sin B\sin C\sin(\pi - A) = 8R^2\sin B\sin C\sin A \\
&= 8R^2\left(\frac{b}{2R}\right)\left(\frac{c}{2R}\right)\sin A = 2bc\sin A
\end{aligned}$$

ఉదాహరణ 3.58: ΔABC లో $\sin\left(\dfrac{B-C}{2}\right) = \dfrac{b-c}{a}\cos\dfrac{A}{2}$ అని నిరూపించుము.

సాధన

సైన్ సూత్రము $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

ఇప్పుడు
$$\begin{aligned}
\frac{b-c}{a}\cos\frac{A}{2} &= \frac{2R\sin B - 2R\sin C}{2R\sin A}\cos\frac{A}{2} \\
&= \frac{2\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}\cos\frac{A}{2} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(90^\circ - \frac{A}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)\sin\left(\frac{A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} = \sin\left(\frac{B-C}{2}\right)
\end{aligned}$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 166 10-03-2023 12:08:34

ఉదాహరణ 3.59: త్రిభుజములోని మూడు కోణముల నిష్పత్తి 1:2:3 అయిన దాని సంబంధిత భుజముల నిష్పత్తి $1:\sqrt{3}:2$ అని నిరూపించుము.

సాధన

$\theta, 2\theta, 3\theta$ అనునవి కోణములు

అయిన, $\theta + 2\theta + 3\theta = 180°$

ఈ విధంగా, $\theta = 30°$

సైన్ సూత్రమును ఉపయోగించిన $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

మనము పొందునది $\dfrac{a}{\sin 30°} = \dfrac{b}{\sin 60°} = \dfrac{c}{\sin 90°}$

$$\Rightarrow a:b:c = \sin 30° : \sin 60° : \sin 90°$$

$$= \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1 = 1 : \sqrt{3} : 2$$

ఉదాహరణ 3.60: ΔABC లో నిరూపించుము

$$(b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C = a+b+c$$

సాధన

$$\text{L.H.S} = b\cos A + c\cos A + c\cos B + a\cos B + a\cos C + b\cos C$$

$$= b\cos C + c\cos B + c\cos A + a\cos C + b\cos A + a\cos B$$

$= a + b + c$ (విక్షేప సూత్రం ద్వారా)

ఉదాహరణ 3.61: త్రిభుజము ΔABC లో క్రింది దానిని నిరూపించుము $\dfrac{a^2+b^2}{a^2+c^2} = \dfrac{1+\cos(A-B)\cos C}{1+\cos(A-C)\cos B}$

సాధన

సైన్ సూత్రము $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$

$$\text{L.H.S} = \frac{a^2+b^2}{a^2+c^2} = \frac{(2R\sin A)^2 + (2R\sin B)^2}{(2R\sin A)^2 + (2R\sin C)^2}$$

$$= \frac{\sin^2 A + \sin^2 B}{\sin^2 A + \sin^2 C} = \frac{1-\cos^2 A + \sin^2 B}{1-\cos^2 A + \sin^2 C}$$

$$= \frac{1-(\cos^2 A - \sin^2 B)}{1-(\cos^2 A - \sin^2 C)} = \frac{1-\cos(A+B)\cos(A-B)}{1-\cos(A+C)\cos(A-C)}$$

$$= \frac{1+\cos(A-B)\cos C}{1+\cos(A-C)\cos B}$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 167 10-03-2023 12:08:36

ఉదాహరణ 3.62: ΔABC లో సైన్ నియమమును ఉపయోగించి కోసైన్ సూత్రమును ఉత్పన్నం చేయుము.

సాధన

$$\text{Sine నియమము: } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ నియమము}$$

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(2R\sin B)^2+(2R\sin C)^2-(2R\sin A)^2}{2(2R\sin B)(2R\sin C)}$$

$$= \frac{\sin^2 B+\sin(C+A)\sin(C-A)}{2\sin B\sin C}$$

$$= \frac{\sin B[\sin B+\sin(C-A)]}{2\sin B\sin C}$$

$$= \frac{\sin(C+A)+\sin(C-A)}{2\sin C} = \cos A$$

కావున, $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

ఇదేవిధంగా ఇతర రెండు కోసైన్ సూత్రమును ఉత్పన్నం చేయవచ్చును.

ఉదాహరణ 3.63: హెరాన్ సూత్రమును ఉపయోగించి ఏదైన స్థిర చుట్టుకొలతకు, సమబాహు త్రిభుజమునకు గరిష్ట వైశాల్యము కలిగియుండునని నిరూపించుము. [Hint:In $xyz \le k$ maximum occurswhen, $x = y = z$]

సాధన

త్రిభుజము ΔABC యొక్క స్థిర చుట్టుకొలత $2s$ అనుకొనుము. ఇచ్చుట s ఒక సిద్ధాంతము

$$\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \text{ అని మనకు తెలియును.}$$

ఇప్పుడు $(s-a)(s-b)(s-c)$ గరిష్ఠమైన Δ గరిష్ఠమైన గమనించవచ్చును.

$$\text{ఇప్పుడు, } (s-a)(s-b)(s-c) \le \left(\frac{(s-a)+(s-b)+(s-c)}{3}\right)^3 = \frac{s^3}{27} \quad [\text{GM} \le \text{AM}]$$

కావున $(s-a)(s-b)(s-c) \le \dfrac{s^3}{27}$ అని పొందెదము

$s-a = s-b = s-c$ అయిన సమానత్వం ఏర్పడును.

అనగా $a = b = c$ అయిన $(s-a)(s-b)(s-c)$ యొక్క గరిష్ఠం $\dfrac{s^3}{27}$

కావున, స్థిర చుట్టుకొలత $2s$ కు $a = b = c$ అయిన త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము గరిష్ఠమగును.

కావున, స్థిర చుట్టుకొలతకు, సమ గరిష్ఠ వైశాల్యమును కలిగియుండును. మరియు గరిష్ఠ వైశాల్యము

$$\Delta = \sqrt{\frac{s(s^3)}{27}} = \frac{s^2}{3\sqrt{3}} \text{ చ.ప్ర అని ఇవ్వబడెను.}$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 168 10-03-2023 12:08:39

అభ్యాసము 3.9

1. ΔABC లో $\dfrac{\sin A}{\sin C} = \dfrac{\sin(A-B)}{\sin(B-C)}$ అయిన $a^2,\ b^2,\ c^2$ అనునవి అంక శ్రేఢిలో కలదని నిరూపించుము.
2. త్రిభుజము ΔABC లో కోణములు అంకశ్రేఢిలో ఉన్నది. మరియు $b:c = \sqrt{3}:\sqrt{2}$ అయిన $\angle A$ కనుగొనుము.
3. ΔABC లో $\cos C = \dfrac{\sin A}{2\sin B}$ అయిన ఈ త్రిభుజము సమద్విబాహు త్రిభుజము అని నిరూపించుము.
4. ΔABC లో $\dfrac{\sin B}{\sin C} = \dfrac{c - a\cos B}{b - a\cos C}$ అని నిరూపించుము.
5. ΔABC లో $a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C$ నిరూపించుము.
6. ΔABC లో $\angle A = 60^\circ$ $b + c = 2a\cos\left(\dfrac{B-C}{2}\right)$ నిరూపించుము.
7. ΔABC లో క్రిందివాటిని నిరూపించుము.

   (i) $a\sin\left(\dfrac{A}{2} + B\right) = (b+c)\sin\dfrac{A}{2}$ (ii) $a(\cos B + \cos C) = 2(b+c)\sin^2\dfrac{A}{2}$

   (iii) $\dfrac{a^2 - c^2}{b^2} = \dfrac{\sin(A-C)}{\sin(A+C)}$

   (iv) $\dfrac{a\sin(B-C)}{b^2 - c^2} = \dfrac{b\sin(C-A)}{c^2 - a^2} = \dfrac{c\sin(A-B)}{a^2 - b^2}$

   (v) $\dfrac{a+b}{a-b} = \tan\left(\dfrac{A+B}{2}\right)\cot\left(\dfrac{A-B}{2}\right)$
8. ΔABC లో $(a^2 - b^2 + c^2)\tan B = (a^2 + b^2 - c^2)\tan C$ ను నిరూపించుము.
9. ఒక గ్రామంలో ఒక ఇంజనీరు 120 మీ చుట్టుకొలతతో త్రిభుజకారపు పార్కును అభివృద్ధి చేయాలి. అభివృద్ధి చేయాల్సిన పార్కు వైశాల్యం గరిష్ఠంగా ఉండాలి. పార్కు యొక్క కొలతలను కనుగొనుము.
10. 12 మీ పొడవు గల త్రాడు ఇవ్వబడినది. ఈ త్రాడు ద్వారా ఏర్పడిన త్రిభుజం యొక్క అతిపెద్ద వైశాల్యము కనుగొని, అలా ఏర్పడిన త్రిభుజము యొక్క కొలతలు కనుగొనుము.
11. (i) సైన్ నియమము (ii) కొసైన్ నియమము నుండి విక్షేప సూత్రమును ఉత్పన్నము చేయుము.

3.8 త్రిభుజ అనువర్తనం (Application to triangle)

స్థిరత్వం కోరుకునే ఏ నిర్మాణమైనను, చాలా అర్కిటెక్చర్ మరియు ఇంజనీరింగ్ త్రిభుజాకార మద్దతు పైనే ఆధారపడియుండును. త్రిభుజాకార మద్దతు కోసం సరైన కోణాన్ని లెక్కించడానికి త్రికోణమితి సహాయపడుతుంది. అలాగే త్రికోణమితి ఒక వక్ర నిర్మాణానికి సరిగ్గా లేఅవుట్ చేయడానికి ఉపయోగపడుతుంది. లంబకోణ త్రిభుజములో ఏదైన రెండు సమాచారముతో కనీసం ఒక అంశము *SS, SA* అనునవి త్రిభుజము యొక్క మిగిలిన అంశములను కనుగొనుటకు సరిపోతుంది. కాని తిర్యక్ త్రిభుజము యొక్క సాధనను కనుగొనుటకు కనీసం ఒక భుజములో మూడు కొలతలు అవసరం. త్రిభుజము యొక్క భుజములో మూడు కొలతలు ఇవ్వబడినప్పుడు సైన్ నియమము మరియు కోసైన్ నియమములు మరియు విక్షేప నియమముతో ఇతర మూడు కొలతలను కనుగొనవచ్చును:–

సాధించుటకు నియమములు

- లంబ త్రిభుజములో రెండు భుజములు మూడవ భుజమును పైథాగరియస్ సిద్ధాంతము మరియు లంబకోణ త్రిభుజములో లఘు కోణాలు పూరకాలు అను వాస్తవాన్ని ఉపయోగించి ఒక లఘు కోణమును మరియొక లఘు కోణాన్ని కనుగొనుట ద్వారా కనుగొంటాము.
- త్రిభుజము యొక్క అన్ని భుజములు ఇవ్వబడినప్పుడు త్రిభుజము యొక్క అన్ని కోణాలను లెక్కించడానికి మనము కొసైన్ సూత్రము లేదా అర్ధ కోణం సూత్రమును ఉపయోగించవచ్చును.
- ఏదైన రెండు కోణాలు మరియు ఇచ్చిన కోణాలకు ఎదుటి భుజములలో ఒక భుజము ఇచ్చినట్లయితే, మనము ఇతర భుజములను సైన్ సూత్రముతో సాధించవచ్చును.
- త్రిభుజము యొక్క ఏదైన రెండు భుజములు మరియు వాటి మధ్య గల కోణం ఇచ్చినట్లయితే, మనము సైన్ నియమమును ఉపయోగించ లేము కాని త్రిభుజము యొక్క ఇతర భుజము మరియు ఇతర కోణాలను, లెక్కించడానికి కొసైన్ నియమమును ఉపయోగించవచ్చును. ఈ సందర్భములో మనకు ఒక ఏకైక త్రిభుజము ఉంటుంది.
- తిర్యక్ త్రిభుజాన్ని సాధించే అన్ని పద్ధతులలోను కనీసం ఒక భుజ పొడవైనను ఇచ్చి ఉండాలి.

క్రింది పట్టికలో తిర్యక్ త్రిభుజాన్ని సాధించుటకు గల పని నియమాన్ని సంగ్రహించుకుందాం.

తిర్యక్ త్రిభుజము అన్ని లఘుకోణాలు లేదా ఒక గురుకోణాలు	ఇవ్వబడిన సమాచరం.				
	SAA	SSA*	SAS	SSS	AAA
సాధనలు యొక్క వివరములు మరియు అనువర్తానలు	సైన్ నియమములు	అస్పష్టత తలెత్తుతుంది.	ఇవ్వబడిన కోణంను ఇచ్చిన భుజాల మధ్య కోణంగా ఉండాలి, కోసైన్ లేదా స్పర్శరేఖల నియమము.	కొసైన్ నియమము, మొదట పెద్దకోణమును కనుగొనవలయును	అనంతమైన త్రిభుజములు.

కోణం చేర్చబడలేదు, మనకు ఒకటి కంటే ఎక్కువ త్రిభుజము ఉండవచ్చు సైన్ నియమయు యొక్క అనువర్తనం మూడు సందర్భాలను, ఇస్తుంది.

సాధన లేదు లేదా ఒక త్రిభుజం లేదా రెండు త్రిభుజాల

a, b, A తెలియనని అనుకొనుము. $h = b\sin A$ అనుకొనుము.

$a < h$ అయిన త్రిభుజం లేదు. $a = h$ అయిన లంబ త్రిభుజం

$a > h$ మరియు $a < b$ అయిన మనకు రెండు త్రిభుజములు ఉండును.

$a \geq b$ అయిన మనకు ఒకే ఒక త్రిభుజము ఉండును.

* SSA అనగా భుజము, భుజము మరియు కోణము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 170 10-03-2023 12:08:41

ఉదాహరణ 3.64: ΔABC లో $a = 3, b = 5\ c = 7$ $\cos A, \cos B$ మరియు $\cos C$ విలువలను కనుగొనుము.

సాధన

కోసైన్ సూత్రమును అనుసరించండి.

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{5^2+7^2-3^2}{2(5)(7)} = \frac{13}{14}$$

ఇదేవిధంగా, $\cos B = \frac{11}{14},\ \cos C = -\frac{1}{2}$.

ఉదాహరణ 3.65: ΔABC లో $A = 30°, B = 60°$ మరియు $c = 10$ a మరియు b విలువలను కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడినది, $A = 30°, B = 60°, C = 180° - (A + B) = 90°$

సైన్ సూత్రమును ఉపయోగించి,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{10}{\sin 90^\circ}$$

$$a = \frac{10\sin 30^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{10\left(\frac{1}{2}\right)}{1} = 5$$

$$b = \frac{10\sin 60^\circ}{\sin 90^\circ} = \frac{10\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{1} = 5\sqrt{3}$$

ఉదాహరణ 3.66: ΔABC లో $a = 2\sqrt{2},\ b = 2\sqrt{3}$ మరియు $C = 75°$ అయిన ఇతర భుజము మరియు కోణాలను కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడినది, $a = 2\sqrt{2},\ b = 2\sqrt{3}$ మరియు $C = 75°$

కొసైన్ సూత్రము ఉపయోగించి

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$\cos 75^\circ = \frac{8+12-c^2}{8\sqrt{6}} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{8+12-c^2}{8\sqrt{6}} \Rightarrow c = \sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$$

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

A = 60°, B = 180° – (A + C) = 45°.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 171 10-03-2023 12:08:42

ఉదాహరణ 3.67: ఇవ్వబడిన భుజములు 13 సెం.మీ, 14 సెం.మీ మరియు 15 సెం.మీ అయిన త్రిభుజ వైశాల్యమును కనుగొనుము.

సాధన

$s = \dfrac{a+b+c}{2} \Rightarrow$ అని మనకు తెలుసు $s = \dfrac{13+14+15}{2} = 21$ సెం.మీ

త్రిభుజ వైశాల్యము $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$= \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$ చ.సెం.మీ

ఉదాహరణ 3.68: ΔABC లో $a\cos A + b\cos B + c\cos C = \dfrac{8\Delta^2}{abc}$ అని నిరూపించుము.

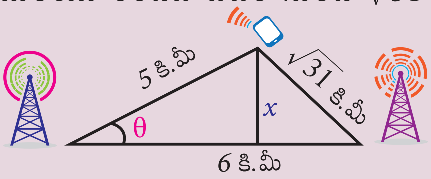
సాధన

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\sin B\sin C$$ అని మనకు తెలుసు

కావున,

$$a\cos A + b\cos B + c\cos C = 2a\left(\frac{2\Delta}{ac}\right)\left(\frac{2\Delta}{ab}\right) = \frac{8\Delta^2}{abc}$$

ఉదాహరణ 3.69: సెల్‌పోన్ పరిధిలో రెండు సెల్‌ఫోన్ టవర్లు ఉన్నాయని అనుకుందాం. రెండు టవర్లు సరళ రహదారి వెంట 6 కిలోమీటర్ల దూరంలో ఉన్నాయి. తూర్పు నుండి పడమర వైపునకు పోతున్నప్పుడు సెల్‌ఫోన్ రహదారికి ఉత్తరమున ఉన్నది. సిగ్నల్ మొదట టవరం నుండి 5 కి.మీ మరియు రెండవ టవర్ నుండి $\sqrt{31}$ కి.మీ కలదు. మొదటి టవర్ యొక్క ఉత్తరము మరియు తూర్పున సెల్‌ఫోన్ యొక్క స్థానం మరియు రహదారి నుండిఎంత దూరంలో ఉందో నిర్ణయించండి.



పటము 3.24

సాధన

మొదటి టవరు యొక్క ఉత్తరం నుండి తూర్పు వరకు సెల్‌ఫోన్ యొక్క స్థానం θ గా తీసికొనుము.

కోసైన్ సూత్రమును ఉపయోగించగా,

$$(\sqrt{31})^2 = 5^2 + 6^2 - 2\times 5\times 6\cos\theta$$

$$31 = 25 + 36 - 60\cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$$

రహదారి నుండి సెల్‌ఫోన్ వరకు గల దూరము x అనుకొనుము.

అయిన, $\sin\theta = \dfrac{x}{5} \Rightarrow x = 5\sin\theta = 5\sin 60^\circ = \dfrac{5\times\sqrt{3}}{2}$ కి.మీ

ఉదాహరణ 3.70: ఒక పడవ ఓడరేవు నుండి తూర్పు వైపు 10 కిలోమీటర్ల దూరం ప్రయాణించి 60° దాని ఎడమవైపుకు తిగురుతుందని అనుకుందాం. పడవ మరింత 8 కి.మీ ప్రయాణించినట్లయితే, ఓడరేవు నుండి పడవ ఎంత దూరంలో ఉంది.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 172 10-03-2023 12:08:44

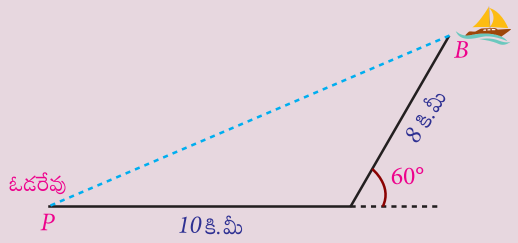
సాధన

BP అనునది కావలసిన దూరం అనుకుందాం

కోసైన్ సూత్రమును ఉపయోగించుట ద్వారా

$BP^2 = 10^2 + 8^2 - 2 \times 10 \times 8 \times \cos 120^\circ = 244$ కి.మీ.

$\Rightarrow BP = 2\sqrt{61}$ కి.మీ.

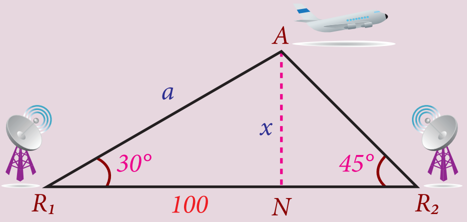


పటము 3.25

ఉదాహరణ 3.71: రెండు రాడార్ స్టేషన్ల మధ్య దూరం 100 కి.మీ అనుకుందాం ఇవి వాటి మధ్య వచ్చిన యుద్ధ విమానంను గుర్తించినది. అది మొదటి రాడర్ స్టేషన్ నుండి 30° ఊర్ధ్వకోణంలోను, అదే సమయంలో రెండవ స్టేషన్ నుండి 45° ఊర్ధ్వకోణంలో ఉంది. ఆ సమయములో విమానము యొక్క ఎత్తును కొనుగొనుము.

సాధన

R_1 మరియు R_2 లను రెండు రాడర్ స్టేషన్లు మరియు A అనునది అవి యుద్ధ విమానమును గుర్తించిన సమయములో దాని స్థానము అని అనుకొనుము. విమానం యొక్క కావలసిన ఎత్తు x అనుకొనుము. A నుండి R_1R_2 కు AN లంబం ($\perp$) గీయగా అది N వద్ద కలియును.



పటము 3.26

$$\angle A = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$$

కావున, $\dfrac{a}{\sin 45^\circ} = \dfrac{100}{\sin 105^\circ} \Rightarrow a = \dfrac{100}{\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} \times \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{200(\sqrt{3}-1)}{2}$

$= 100 \times (\sqrt{3}-1)$ కి.మీ.

ఇప్పుడు, $\sin 30^\circ = \dfrac{x}{a} \Rightarrow x = 50 \times (\sqrt{3}-1)$ కి.మీ.

అభ్యాసము 3.10

1. క్రింది కొలతలు ఒక త్రిభుజము, రెండు త్రిభుజములును ఇచ్చునా లేదా ఏ త్రిభుజమును ఏర్పరచదా అని కనుగొనుము. $\angle B = 88^\circ, a = 23, b = 2$ సాధన ఉంటే సాధించుము.
2. ΔABC యొక్క భుజములు $a = 4, b = 6$ మరియు $c = 8$ అయిన $4\cos B + 3\cos C = 2$ అని నిరూపించుము.
3. ΔABC లో $a = \sqrt{3} - 1,\ b = \sqrt{3} + 1$ మరియు $C = 60^\circ$ అయిన ఇతర భుజమును మరియు ఇతర రెండు కోణములను కనుగొనుము.
4. ΔABC లో Δ వైశాల్యము $= \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{4\cot A}$ అని నిరూపించుము.
5. ΔABC లో $a = 12$ సెం.మీ, $b = 8$ సెం.మీ మరియు $C = 30^\circ$ అయిన త్రిభుజ వైశాల్యము 24 చ.సెం.మీ అని నిరూపించుము.
6. ΔABC లో $a = 18$ సెం.మీ, $b = 24$ సెం.మీ మరియు $c = 30$ సెం.మీ అయిన త్రిభుజ వైశాల్యము 216 చ.సెం.మీ అని నిరూపించుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 173 10-03-2023 12:08:46

7. ఒక నేరుగా గల రోడ్డులో రెండు వేర్వేరు భూగర్భ బంకర్లతో గల A మరియు B అను ఇద్దరు సైనికులు ఒక కొండ పైభాగంలో చొరబాటు దారుడిని గుర్తించిరి. A మరియు B నుండి తూర్పు దిశలో భూస్థాయి నుండి చోరబాటుదారుడిని ఊర్ధ్వకోణం క్రమముగా 30° మరియు 45° ఉండును. A మరియు B మధ్యగల దూరము 5 కి.మీ. B నుండి చొరబాటు దారుడి దూరాన్ని కనుగొనుము.

8. ఒక పరిశోధకుడు చెరువు యొక్క వెడల్పును తూర్పు నుండి పడమర వరకు నిర్ణయించాలనుకుంటున్నారు. దీనిని వాస్తవ కొలత ద్వారా చేయలేము. P అను బిందువు నుండి, అతను చెరువు యొక్క తూర్పు- అంత్య బిందువుకు దూరము 8 కి.మీ అని కనుగొంటాడు అదే సమయంలో P నుండి పశ్చిమ అంత్య బొందువుకు దూరము 6 కి.మీ దృష్టిరేఖల మధ్య కోణం 60° అయిన చెరువు యొక్క వెడల్పును కనుగొనుము.

9. తప్పిపోయిన పడవను కనుగొనుటకు రెండు నేవి హెలికాప్టర్లు సముద్ర మట్టము నుండి ఒకే ఎత్తులో బంగాళఖాతం మీదుగా ఎగరుతున్నాయి. రెండు ఎలకాప్టర్లు పైలట్లువారు ఒకదానికొకటి 10 కిలోమీటర్ల దూరంలో ఉన్నప్పుడు పడవను ఒకే సమయంలో గుర్తించారు A నుండి పడవకు గల దూరం 6 కి.మీ ఉంటే మరియు రేఖా ఖండము AB పడవ వద్ద ఏర్పరచు కోణం 60° ఉంటే B నుండి పడవ యొక్క దూరాన్ని కనుగొనుము.

10. ఒక పర్వతం ద్వారా సరళ సోరంగం వేయాలి. పర్వతం ముందు భాగంలో గల P అను బిందువు నుండి నిర్మించాల్సిన A మరియు B అను రెండు సోరంగ అంత్యకొనలను ఒక సర్వేయర్ గమనించాడు. $AP = 3$ కి.మీ. $BP = 5$ కి.మీ మరియు $\angle APB = 120^\circ$ నిర్మించవలసిన సొరంగం పొడవును కనుగొనుము.

11. ఒక రైతు 120 అడుగులు మరియు 60 అడుగుల మరియు ఈ రెండు భుజముల మధ్య కోణము 60° గా గల త్రిభుజకార భూమిని కొనాలనుకొంటున్నారు. భూమి చదరపు అడుగుకు ₹500 ఖర్చవుతుంటే, అతని భూమిని కొనడానికి అవసరమైన మొత్తాన్ని కనుకొనుము. భూమి యొక్క చుట్టుకొలతను కనుగొనుము.

12. ఒక ఫైటర్ జెట్ ఒక క్షితిజ సమాంతర దూరం ఎగురుతూ చిన్న లక్ష్యన్ని చేధించాలి. లక్ష్యంను చూచినప్పుడు ఫైలట్ దాని నిమ్నకోణము 30° అని కొలిచెను. 100 కి.మీ ప్రయాణం తరువాత దాని నిమ్న కోణము 60° ఆ క్షణంలో ఫైటర్ జెట్ నుంచి లక్ష్యము ఎంత దూరంలో గలదు?

13. ఒక విమానం ఒక ప్రదేశము నుండి 1 కి.మీ మరియు మరొకదాని నుండి 2 కిం.మీలో గలదు. విమాన దృకోణనుండి వాటి మధ్య ఉన్న భూమి 45° కోణంలో ఉంటుంది. మధ్య దూరమును కనుగొనుము.

14. ఒక వ్యక్తి తన యొక్క ఉదయపు నడకను బిందువు A వద్ద ప్రారంభించి రెండు బిందువులు B మరియు C లను చేరుకొని తిరిగి చివరికి A ను ΔABC లో $\angle A = 60^\circ$ మరియు $\angle B = 45^\circ, AC = 4$ కి.మీ అగునట్లు చేరుతాడు. ఉదయపు నడకలోని అతను నడుచు మొత్తం దూరమును కనుగొనుము.

15. రెండు వాహనాలు ఒకే సమయములో ఒకే స్థానం P నుండి వేర్వేరు రహదారుల వెంట కదులుతున్నవి. ఒక వాహనం 60 కి.మీ / గం సగటు వేగంలో మరొక వాహనం 80 కి.మీ / గం సగటు వేగంతో కదులుతున్నవి. అర్ధగంట తరువాత వాహనాలు A మరియు B గమ్యస్థానాలను చేరుకొన్నాయి. ప్రారంభ స్థానం AB వద్ద P ఏర్పరచు కోణం 60° అయిన AB ను కనుగొనుము.

16. అంతరిక్షంలో ఉన్న ఒక ఉపగ్రహము ఒక భూ స్టేషను మరియు భూ కేంద్రము ఒకే తలములో అమరియున్నదనుకొనుము. భూ వ్యాసార్థము r మరియు భూకేంద్రం నుండి ఉపగ్రహంకు గల దూరము R అనుకొందాము. భూ స్టేషన్ నుండి ఉపగ్రహంకు గల దూరము d అనుకొనుము. భూ స్టేషన్ నుండి ఉపగ్రహమునకు ఊర్ధ్వకోణము 30° అనుకొందాం. భూ స్టేషన్‌ను ఉపగ్రహమును కలుపు రేఖాఖండము భూ కేంద్రము వద్ద ఏర్పరుచు కోణం α అయిన $d = R\sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\frac{r}{R}\cos\alpha}$ అని నిరూపించుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 174 10-03-2023 12:08:46

3.9 విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయములు (Inverse Trigonometric Function)

ఒక ప్రమేయము $f(x)$ కు విలోమము ఉంటె అది ఏక-ఏక మరియు సంగ్రస్తం అగును. దీని విపర్యయము కూడా నిజమగును. ఏక-ఏక విఫలమైతే ఒక ప్రమేయము యొక్క విలోమమును నిర్వచించలేము. అయినప్పటికి మనము ప్రదేశంకు సముచితంగా పరిమితం చేసే, పరిమితం చేయబడిన ప్రదేశంలో ప్రమేయమును ఏక-ఏక ప్రమేయంగా చేయగలము. ఉదాహరణమునకు అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలకు $y = x^2$ అనునది ఏక-ఏక కాదు. కాని $y = x^2$ఒక 1-1 మరియు సంగ్రస్తం ఇచ్చుట $x \geq 0$ లేక $x \leq 0$ కు అగును అందువల్లే $y = x^2$, $x \geq 0$ లో విలోమము $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $x \geq 0$ ఉండును. ఇప్పుడు, వాటి ఆవర్తనం కారణంగా ఆరు త్రికోణమితి ప్రమేయములో ఏదీ వాటి సహజ ప్రదేశాలపై 1-1 కాదు. మనము వాటి ప్రదేశంలను వాటి విలోమ ప్రమేయముల వ్యవస్థితం అగునట్లు పరిమితం చేస్తాము. ఈ పరిమితి వాని ఆవర్తన కారణంగా మరోసారి అనేక విధాలుగా చేయవచ్చును. పరిమితం చేయబడిన ప్రదేశం యొక్క సంప్రదాయ ఎంపికలు చరరాశిగా ఉంటాయి. కాని వాటికి కొన్ని ముఖ్యమైన లక్షణాలు ఉన్నాయి. ప్రతి పరిమితం చేయబడిన ప్రదేశం సంఖ్య 0 మరియు కొన్ని ధణాత్మక కోణాలను కలిగి ఉంటుంది. పరిమితం చేయబడిన ప్రదేశం యొక్క ప్రతిబింబము మొత్తం పరిధిని కలిగియుండును.

సైన్ ప్రమేయము యొక్క విలోమమును నిర్వచించెదము. $f(x) = \sin x$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ పరిగణించెదము ఇప్పుడు, పరిమితం చేయబడిన ప్రదేశంలో $\sin x$ ఒక ఏక-ఏక మరియు సంగ్రస్తంగా ఉంటుంది. అందువల్ల సైన్ ప్రమేయము యొక్క విలోమము వ్యవస్థితం $f^{-1}(y) = x$ అయిన $f(x) = y$ వీటి విపర్యయము కూడా నిజము అని గమనించవచ్చును. $f^{-1}(x) = \sin^{-1}(x)$ అని వ్రాయబడెను. ఈ విధంగా $\sin^{-1}(y) = x$ అయిన $\sin x = y$ వీటి విపర్యయము అని సైన్ యొక్క విలోమమును నిర్వచింపబడెను.

స్పష్టంగా $\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ మరియు $\sin^{-1} x : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ అందువలన $\sin^{-1} t$ అనేది ఒక కోణం. దీని సైన్ t కు సమానము. మరియు $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ లో ఉండును. ఇదే విధంగా మనము ఇతర విలోమ త్రికోణమితి ప్రమేయములను నిర్వచించవచ్చును.

విలోమ ప్రమేయాలు $\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}x$, $\tan^{-1}x$, $\operatorname{cosec}^{-1}(x)$, $\sec^{-1}(x)$, $\cot^{-1}(x)$ ను విలోమ వృత్తాకార ప్రమేయములు అంటారు. ప్రమేయము $y = \sin x$ కు $\sin x = t$, $-1 \leq t \leq 1$ ను తృప్తిపరిచే అనంత అనేక కోణాలు x చే పూరించబడును. అనంతమైన విలువల సమితిలో ఒక విలువ $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$లో అమరియుండును. ఈ కోణాన్ని ప్రధాన కోణం అని అంటారు. మరియు $\sin^{-1} t$ అని సూచిస్తారు. విలోమ ప్రమేయము యొక్క ప్రధాన విలువ సంఖ్యాపరంగా కనీసంగా ఉండే సాధారణ విలువ ఇది ధణాత్మముగా లేదా ఋణాత్మకముగా ఉండవచ్చును. రెండు విలువలలో ఒకటి ధణాత్మకముగాను మరియు మరొకటి ఋణాత్మకముగా సంఖ్యాపరంగా సమానంగా ఉన్నప్పుడు ప్రధాన విలువ ధణాత్మకముగా ఉంటుంది.

మనము త్రికోణమితి ప్రమేయముల పరిమితం చేయబడిన ప్రవేశంలు వ్యాప్తిలు మరియు వాటి సంబంధిత విలోమ ప్రమేయముల ప్రదేశంల వ్యాప్తిలను క్రింద వివరిస్తాము.

(i) $\sin x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$; $\sin^{-1} x : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

(ii) $\cos x : [0, \pi] \to [-1, 1]$; $\cos^{-1} x : [-1, 1] \to [0, \pi]$

(iii) $\tan x : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to (-\infty, \infty)$; $\tan^{-1} x : (-\infty, \infty) \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 175 10-03-2023 12:08:49

(iv) $\cot x:[0,\pi] \rightarrow (-\infty,\infty)$; $\cot^{-1}x:(-\infty,\infty)\rightarrow[0,\pi]$

(v) $\operatorname{cosec} x:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\{0\} \rightarrow \mathbb{R}-(-1,1)$; $\operatorname{cosec}^{-1}x:\mathbb{R}-(-1,1)\rightarrow\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]-\{0\}$

(vi) $\sec x:[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\} \rightarrow \mathbb{R}-(-1,1)$; $\sec^{-1}x:\mathbb{R}-(-1,1)\rightarrow[0,\pi]-\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

(i) $\sin^{-1}x$ అంటే $\frac{1}{\sin x}$ కాదు.

(ii) సర్.జాన్ ఎఫ్‌డబ్ల్యూ హెర్షెల్ (1813) వలన $\sin^{-1}x$ కి మరొక సంజ్ఞామానం $\arcsin x$

(iii) సైన్ ప్రమేయము యొక్క విలోమము గురించి చర్చిస్తున్నప్పుడు $y=\sin x, -\frac{\pi}{2}\le x\le\frac{\pi}{2}$ మరియు $x=\sin^{-1}y, -1\le y\le 1$ పరిమితం చేయబడెను.

(iv) విలోమ ప్రమేయము f^{-1} యొక్క రేఖాచిత్రము $y=x$ అను రేఖపై f యొక్క రేఖాచిత్ర ప్రతిబింబము కావున $(a,b)\in f$ అయిన $(b,a)\in f^{-1}$

విలోమ త్రికోణమితి ప్రమేయముల ప్రధాన విలువలు క్రింద ఇవ్వబడినది.

$x\ge 0$ కు ప్రధాన విలువ	$x<0$ కు ప్రధాన విలువ
$0\le\sin^{-1}(x)\le\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}\le\sin^{-1}(x)<0$
$0\le\cos^{-1}(x)\le\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<\cos^{-1}(x)\le\pi$
$0\le\tan^{-1}(x)<\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}<\tan^{-1}(x)<0$
$0<\cot^{-1}(x)\le\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}<\cot^{-1}(x)<0$
$0\le\sec^{-1}(x)<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<\sec^{-1}(x)\le\pi$
$0<\operatorname{cosec}^{-1}(x)\le\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}<\operatorname{cosec}^{-1}(x)<0$

(i) విలోమ త్రికోణమితి ప్రమేయములపై ధర్మములు, రేఖాచిత్రములు, సిద్ధాంతాలు ఉన్నత మాధ్యమిక రెండవ సంవత్సరంలో అధ్యయనం చేయబడును.

(ii) విలోమ త్రికోణమితి ప్రమేయములు కొన్ని సమాకలనము మూల్యాంకనంలో చాలా ఉపయోగకరంగా ఉంటాయి. దీనిని తరువాత అధ్యయనం చేస్తాము.

ఉదాహరణ 3.72: ప్రధాన విలువను కనుగొనుము (i) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, (ii) $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, (iii) $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 176 10-03-2023 12:08:52

సాధన

(i) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = y$ అనుకొనుము ఇచ్చట $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow y = \frac{\pi}{3}$

కావున, $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ యొక్క ప్రధాన విలువ $\frac{\pi}{3}$.

(ii) $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = y$ అనుకొనుము ఇచ్చట $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \operatorname{cosec} y = \frac{2}{\sqrt{3}} = \sin y = \frac{\sqrt{3}}{2}$

కావున, $\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ యొక్క ప్రధాన విలువ $\frac{\pi}{3}$.

(iii) $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = y$ అనుకొనుము ఇచ్చట $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$

$\tan y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan y = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow y = -\frac{\pi}{6}$

కావున, $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ యొక్క ప్రధాన విలువ $-\frac{\pi}{6}$.

అభ్యాసము 3.11

1. ప్రధాన విలువను కనుగొనుము: (i) $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}$, (ii) $\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}$, (iii) $\operatorname{cosec}^{-1}(-1)$, (iv) $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$, (v) $\tan^{-1}(\sqrt{3})$

2. x మీటర్లు వెడల్పు గల రోడ్డుకు ఒక వైపున నిలబడిన వ్యక్తి అతనికి ఎందురుగా, గల a మీటర్లు వ్యాసం గల వృత్తాకార ట్రాఫిక్ సిగ్నల్‌ను చూస్తున్నాడు. పచ్చరంగు సిగ్నల్ అడుగుభాగం పరిశీలకుని కంటి దృష్టి యొక్క క్షితిజసమాంతర మట్టం నుండి b మీటర్లు ఎత్తులో గలదు. పరిశీలకుని కంటి వద్ద పచ్చరంగు సిగ్నల్ యొక్క వ్యాసము చేయు కోణం α అయిన $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{a+b}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{b}{x}\right)$ అని నిరూపించుము.

అభ్యాసము 3.12

సరియైన సమాధానమును లేదా తగిన సమాధామును ఎన్నుకొనుము.

1. $\frac{1}{\cos 80^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} =$

(1) $\sqrt{2}$ (2) $\sqrt{3}$ (3) 2 (4) 4

2. $\cos 28^\circ + \sin 28^\circ = k^3$ అయిన $\cos 17^\circ$ కు సమానమయిన విలువ

(1) $\frac{k^3}{\sqrt{2}}$ (2) $-\frac{k^3}{\sqrt{2}}$ (3) $\pm\frac{k^3}{\sqrt{2}}$ (4) $-\frac{k^3}{\sqrt{3}}$

3. $4\sin^2 x + 3\cos^2 x + \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}$ యొక్క గరిష్ఠ విలువ

(1) $4+\sqrt{2}$ (2) $3+\sqrt{2}$ (3) 9 (4) 4

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 177 10-03-2023 12:08:54

4. $\left(1+\cos\frac{\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{5\pi}{8}\right)\left(1+\cos\frac{7\pi}{8}\right)=$

(1) $\frac{1}{8}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

5. $\pi<2\theta<\frac{3\pi}{2}$ అయిన, $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 4\theta}}$ =

(1) $-2\cos\theta$ (2) $-2\sin\theta$ (3) $2\cos\theta$ (4) $2\sin\theta$

6. $\tan 40^\circ=\lambda$ అయిన, $\frac{\tan 140^\circ-\tan 130^\circ}{1+\tan 140^\circ\ \tan 130^\circ}=$

(1) $\frac{1-\lambda^2}{\lambda}$ (2) $\frac{1+\lambda^2}{\lambda}$ (3) $\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}$ (4) $\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}$

7. $\cos 1^\circ+\cos 2^\circ+\cos 3^\circ+\cdots+\cos 179^\circ=$

(1) 0 (2) 1 (3) – 1 (4) 89

8. $f_k(x)=\frac{1}{k}[\sin^k x+\cos^k x]$ అనుకొనుము ఇచ్చుట, $x\in R$ మరియు $k\geq 1$ అయిన, $f_4(x)-f_6(x)=$

(1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{1}{12}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{1}{3}$

9. క్రింద ఇవ్వబడిన వీటిలో ఏది నిజము కాదు

(1) $\sin\theta=-\frac{3}{4}$ (2) $\cos\theta=-1$ (3) $\tan\theta=25$ (4) $\sec\theta=\frac{1}{4}$

10. $\cos 2\theta\cos 2\phi+\sin^2(\theta-\phi)-\sin^2(\theta+\phi)$ =

(1) $\sin 2(\theta+\phi)$ (2) $\cos 2(\theta+\phi)$ (3) $\sin 2(\theta-\phi)$ (4) $\cos 2(\theta-\phi)$

11. $\frac{\sin(A-B)}{\cos A\cos B}+\frac{\sin(B-C)}{\cos B\cos C}+\frac{\sin(C-A)}{\cos C\cos A}=$

(1) $\sin A+\sin B+\sin C$ (2) 1 (3) 0 (4) $\cos A+\cos B+\cos C$

12. $\cos p\theta+\cos q\theta=0$ అయిన $p\neq q$ అయిన θ దేనికి సమానము (n ఏదైన ఒక పూర్ణాంకము)

(1) $\frac{\pi(3n+1)}{p-q}$ (2) $\frac{\pi(2n+1)}{p\pm q}$ (3) $\frac{\pi(n\pm 1)}{p\pm q}$ (4) $\frac{\pi(n+2)}{p+q}$

13. $x^2+ax+b=0$ యొక్క మూలములు $\tan\alpha$ మరియు $\tan\beta$ అయిన $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\ \sin\beta}$ దేనికి సమానము

(1) $\frac{b}{a}$ (2) $\frac{a}{b}$ (3) $-\frac{a}{b}$ (4) $-\frac{b}{a}$

14. త్రిభుజము ΔABC లో $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2$ అయిన ఆ త్రిభుజము

(1) సమభుజ త్రిభుజము (2) సమద్విబాహు త్రిభుజము

(3) లంబకోణ త్రిభుజము (4) విషమబాహు త్రిభుజము

15. $f(\theta)=|\sin\theta|+|\cos\theta|, \theta\in\mathbb{R}$ అయిన, $f(\theta)$ గల అంతరము

(1) $[0, 2]$ (2) $[1,\sqrt{2}]$ (3) $[1, 2]$ (4) $[0, 1]$

16. $\frac{\cos 6x+6\cos 4x+15\cos 2x+10}{\cos 5x+5\cos 3x+10\cos x}=$

(1) $\cos 2x$ (2) $\cos x$ (3) $\cos 3x$ (4) $2\cos x$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 178 10-03-2023 12:08:59

17. స్థిర చుట్టుకొలత 12 మీ కలిగిన త్రిభుజ గరిష్ఠ వైశాల్యము

(1) భుజము 4 మీ గల ఒక సమభుజత్రిభుజము

(2) భుజము 2 మీ, 5 మీ 5 మీ గల సమద్విబాహు త్రిభుజము

(3) భుజములు 3మీ, 4మీ, 5మీ గల త్రిభుజము

(4) వ్యవస్థితం కాదు.

18. ఒక సెకండుకు 2 రేడియన్ల చొప్పున ఒక చక్రము తిరుగుచున్నది. 10 పూర్తి భ్రమణంకు ఎన్ని సెకండ్లు తీసుకొనును.

(1) 10π సెకండ్లు (2) 20π సెకండ్లు

(3) 5π సెకండ్లు (4) 15π సెకండ్లు

19. $\sin\alpha + \cos\alpha = b$ అయిన, $\sin 2\alpha$ =

(1) $b \le \sqrt{2}$ అయిన, $b^2 - 1$ (2) $b > \sqrt{2}$ అయిన, $b^2 - 1$

(3) $b \ge 1$ అయిన, $b^2 - 1$ (4) $b \ge \sqrt{2}$ అయిన, $b^2 - 1$

20. ΔABC లో (i) $\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} > 0$ (ii) $\sin A\sin B\sin C > 0$ అయిన

(1) (i) మరియు (ii) రెండూ నిజము (2) (i) మాత్రమే నిజము

(3) (ii) మాత్రమే నిజము (4) (i) మరియు (ii) రెండునూ నిజము కాదు.

సారాంశం (Summary)

సమానతల మొత్తము మరియు వ్యత్యాసము (టోలెమి సమానతలు)

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta;\ \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta};\ \tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

రెండురెట్లు, మూడురెట్లు మరియు అర్ధకోణ సమానతలు		
సైన్	**కోసైన్**	**టాన్జంట్**
$\sin 2A = 2\sin A\cos A$ $\sin 2A = \frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}$ $\sin 3A = 3\sin A - 4\sin^3 A$	$\cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A$ $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$ $\cos 2A = \frac{1-\tan^2 A}{1+\tan^2 A}$ $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$	$\tan 2A = \frac{2\tan A}{1-\tan^2 A}$ $\tan 3A = \frac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$
$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$ $\sin\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}$	$\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2}$ $\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$ $\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}$	$\tan\theta = \frac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 179 10-03-2023 12:09:02

త్రికోణమితి సమీకరణము	సాధారణ సాధనలు
$\sin\theta = \sin\alpha$, ఇచ్చుట, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha,\ n \in \mathbb{Z}$
$\cos\theta = \cos\alpha$, ఇచ్చుట, $\alpha \in [0,\ \pi]$	$\theta = 2n\pi \pm \alpha,\ n \in \mathbb{Z}$
$\tan\theta = \tan\alpha$, ఇచ్చుట, $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$	$\theta = n\pi + \alpha,\ n \in \mathbb{Z}$

సైన్ నియమము	కోసైన్ నియమము	టాన్జంట్ నియమము
$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$	$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$ $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$	$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$ $\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$ $\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$

ΔABC లో,

(i) $a = b\cos C + c\cos B,\ b = c\cos A + a\cos C$ మరియు $c = a\cos B + b\cos A$ (విక్షేపము సూత్రము)

(ii) $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$ (త్రిభుజము యొక్క వైశాల్యము)

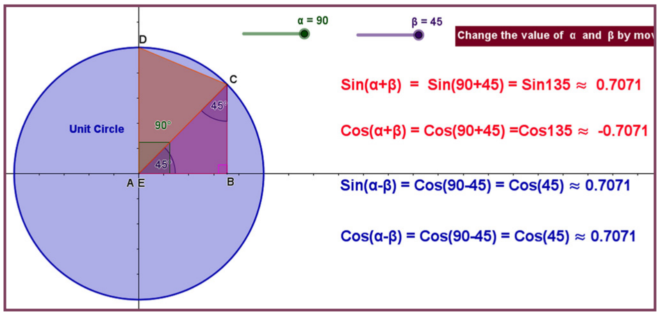
(iii) $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(iv) $\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},\ \cos\frac{A}{2} - \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},\ \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ ఇచ్చుట,

s అనునది ΔABC–యొక్క అర్ధచుట్టుకొలత $s = \frac{a+b+c}{2}$ అని ఇవ్వబడెను **[అర్ధ కోణ సూత్రము]**

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_3.indd 180 10-03-2023 12:09:04

ఆశించిన ఫలితం



దశ -1

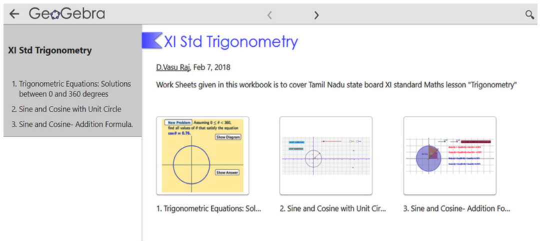
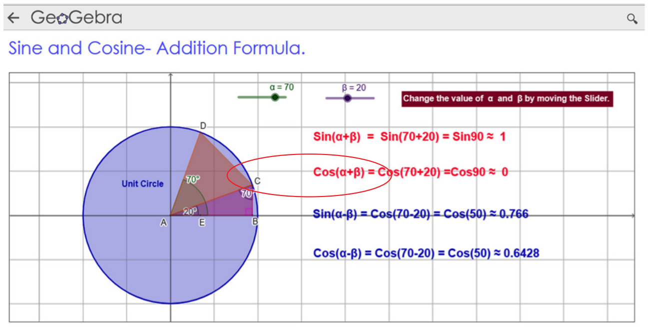
బ్రౌజర్‌ను తెరిచి, క్రింద ఇవ్వబడిన URL లింక్‌ను టైప్ చేయండి (లేదా) QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయండి.

దశ -2

జియోజీబ్రా వర్క్ బుక్ "XI Std త్రికోణమితి" అని కనిపిస్తుంది. ఇందులో వివిధ త్రికోణమితి భావనల యొక్క అనేక వర్క్‌షీట్లు కనిపిస్తాయి. మీకు కావలసిన దాన్ని ఎంచుకొనుము ఉదాహరణకు "సైన్ మరియు కోసైన్ సంకలన సూత్రము"

దశ -3

α మరియు β విలువలను మార్చడానికి స్లైడర్‌లను తరలించండి. పటములోని కోణాలు మారుతాయి మరియు సంకలన సూత్ర విలువలు తదనుగుణంగా మారుతాయి.

<table>
<tr><th>దశ -1</th><th>దశ -2</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><th colspan="2">దశ -3</th></tr>
<tr><td colspan="2">
</td></tr>
</table>

ప్రతి విలువను గమనించండి మరియు సూత్రాల ద్వారా లెక్కించండి మరియు ఫలితాలను తనిఖీ చేయండి. అదేవిధంగా నిష్పత్తులు మరియు యూనిట్ వృత్తం మొదలైన వాటి కోసం ఇతర వర్క్ షీట్లను తెరిచి తనిఖీ చేయండి. చిత్రాలు సూచికలు మాత్రమే.

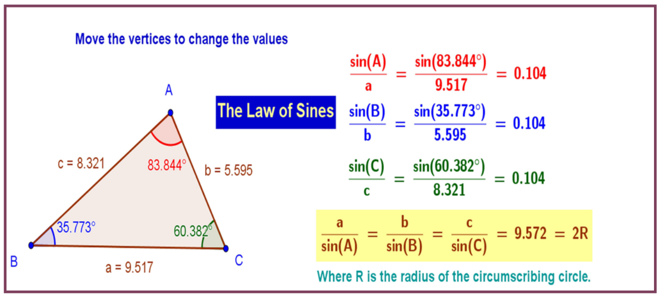
*XI Std త్రికోణమితి జియోజిబ్రా వర్క్ పుస్తకం:

https://ggbm.at/k5vP7pv2 లింక్‌లో బ్రౌజ్ చేయండి.

S42ZVB

ఐసిటి కార్నర్ – 3 (b)

ఆశించిన ఫలితం



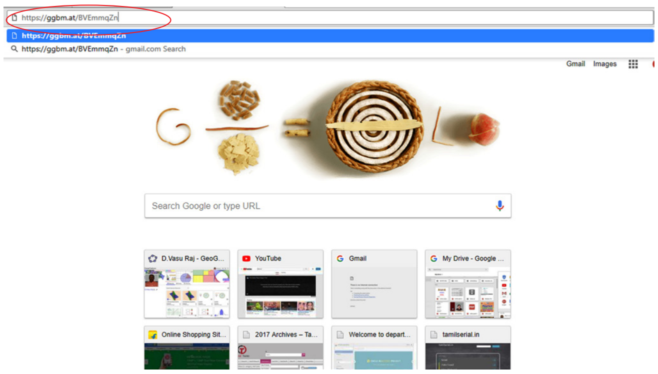
దశ –1

బ్రౌజర్‌ను తెరచి, క్రింది ఇవ్వబడిన URL లింక్‌ను టైప్ చేయండి (లేదా) QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయండి.

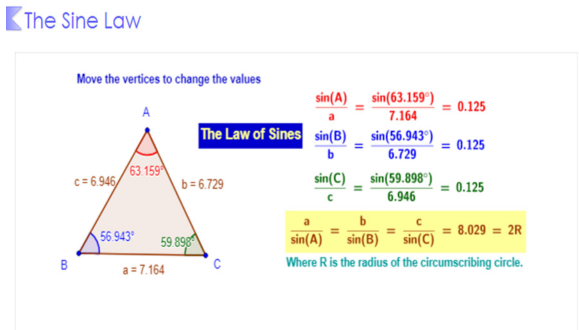
దశ –2

జియోజీబ్రా వర్క్‌షీట్ “డిఫైన్‌లా” అని కనిపిస్తుంది. వర్క్‌షీట్ లో a, b మరియు c అను భుజములు A, B మరియు C శీర్షలతో త్రిభుజము కనిపించును. త్రిభుజం పరిమాణాని మార్చుడానికి శీర్షలను తరలించండి. ఏదైన త్రిభుజం కోసం సైన్ నియమము నిర్వహించబడుతుంది. మరియు వాటి పనిని కుడి వైపున చూపబడుతుంది – గమనించండి

దశ – 1



దశ – 2



*చిత్రాలు సూచికలు మాత్రమే

N9LR0

సైన్‌లా – జియోజీబ్రా వర్క్‌షీట్:

https://ggbm.at/k5vP7pv2 లింక్‌లో బ్రౌజ్ చేయండి.

అధ్యాయము **4**

సంయోగత మరియు గణిత ప్రేరణ

TCAI9

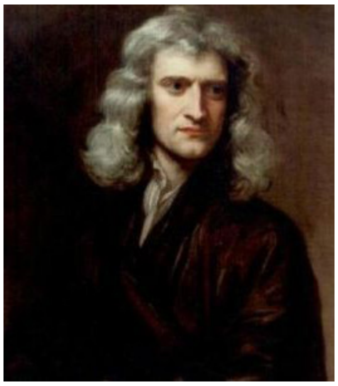
“ధైర్యమైన అంచనా లేకుండా గొప్ప ఆవిష్కరణ వెలువడదు”

– సర్ ఐసాక్ న్యూటన్

4.1 పరిచయం

సంయోగత అనునది ఏ విధంగా లెక్కించుటను తెలియ చేసేదే గణిత శాఖ అగును. దీనిలో వస్తువులు ఎన్ని విధాలుగా (మార్గాలు) అమర్చ వచ్చును అని కొన్ని గుర్తించిన నియమాలతో వస్తువులను ఏ విధముగా లెక్కించుటను ఇక్కడ వివరముగా తెలుసుకొనవచ్చును. ఈ ఆధ్యాయము యొక్క ప్రాథమిక ఆధార భూతము క్రీ.పూ 2800 లో మాయ చతురస్రాలు మరియు నమూనాలు గురించి చదువుటకు ఉపయోగపడింది.

ఇంగ్లాడు చెందిన భౌతిక మరియు గణిత శాస్త్ర వేత్త అయిన “సర్ ఐసాక్ న్యూటిన్” అతని ఆకర్షణ నియమము ద్వారా ప్రఖ్యతి గాంచెను. 17 వ శతాబ్దములో విప్లవ కారునిగా వుండెను. ఇతని యొక్క నమూనాల నిలకడ అతని మొదటి ముఖ్యమైన గణిత ఆవిష్కరణకు దారి తీసినది.



సర్ ఐసాక్ న్యూటన్
(1643–1727)

న్యూటన్ యొక్క ద్విపద సిద్ధాంతము వక్రరేఖల యొక్క పాదాలను పరిష్కరించడానికి సులభమైన మార్గాన్ని తెలిపాడు మరియు సంభావ్యతను అర్థం చేసుకోవడంలో ఈ ఆవిష్కరణ అవసరమైనది. సాధరణీకించిన ద్విపద సిద్ధాంతము సంస్కరణ బహుపదుల యొక్క చలరాశులకు వర్తిస్తుంది. ఇది సంయుక్త మరియు సాంఖ్యాక శాస్త్రంలో విస్తారంగా ఉపయోగపడుతుంది.

పాక్షిక సూచికలను ఉపయోగించిన మొదటి వ్యక్తి ఇతను. డయాపొరేటిక్ సమీకరణాలకు సాధనలు పొందడానికి సిరూపక జ్యామితి ని ఉపయోగించాడు. సంవర్గనాన్ని ఉపయోగించి హరాత్మక వరుస యొక్క పాక్షిక మొత్తములను కనుగొనెను. ఘాత వరసలను ఎంతో నమ్మకముతో వుపయోగించిన మొదటి వ్యక్తి ఇతను సైమన్ స్టీవెన్స్ దశాంశాలు న్యూటన్ యొక్క అనంతశ్రేణి పై ప్రేరణ కలిగెను.

1705 లో ఇంగ్లాండు రాణి అనె అతనికి సర్ ఐసాక్ న్యూటన్ అను బిరుదు ఇచ్చి గౌరవించెను. న్యూటన్ దృష్టి సిద్ధాంతము మరియు వస్తువుల కదలిక సిద్ధాంతము లను ఆవిష్కరణలు చేసారు. గణిత శాస్త్రవేత్త అయిన లిబినెట్స్ తో కలిని సంకలన గణితం యొక్క ముఖ్యమైన సిద్ధాంతములను అభివృద్ధిచేసెను.

నిజజీవితంలో ఎక్కడ్డితే “గణనము” అవసరమవునో అక్కడ సంయుక్తాలు వుపయోగపడుతుంది. ఉదాహరణకు కావలసినంత కొలత చరవాణి సంఖ్యలను సృష్టించవచ్చునా లేక కంప్యూటర్ లో ఎన్ని విభిన్నమైన పదములను అమర్చవచ్చును అను సంయుక్తాలను వుపయోగించి నిర్ధారించవచ్చును. మరియు వీటిలో ఎన్ని మార్గాలు కలవు అని చూచుటకు అనగా నిజజీవితంలో గల చాలా అవకాశాలలో ఎన్ని

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 183 10-03-2023 12:06:57

అవకాశాలు మనకు ముఖ్యమైనవిగా వుండును. ఈ భాగంలో క్రమ ఘాతాలు, క్రమము లేని ఘాతాలు గూర్చి నేర్చుకుందాము. సంయుక్తాలు అనునది చాలా వరకు సమాచార వలయుం, సాంకేతిక గుర్తుగా, సంభావ్యత సిద్దాంతములోను ఎక్కువగా ఉపయోగపడుతుంది.

మరొక పరిస్థితిని పరిగణించుదాం. మన విద్యుత్ వినియోగదారుల కార్డు నెంబరు A:B:C, రూపంలో వుంటుంది. A అనునది విద్యుత్ ఉపకేంద్రము /ఎక్కువ సామర్థ్యము గల ట్రాన్స్‌ఫార్మర్ నెంబరు, B అనునది తక్కువ సామర్థ్యము గల ట్రాన్స్‌ఫార్మర్ నెంబరు మరియు C అనునది వినియోగదారుని నెంబరగును. ప్రతి ఉప విద్యుత్ కేంద్రమునకు షరతులు వుండును. గరిష్ట సంఖ్యలో ట్రాన్స్‌ఫార్మర్‌లు మాత్రమే అనుసంధానం చేయవచ్చు మరియు నిర్ధిష్ట ట్రాన్స్‌ఫార్మర్ తో నిర్ధిష్ట గరిష్ట సంఖ్యలో వినియోగదారుని విద్యుత్ సంబంధమును మాత్రమే అనుసంధానము చేయవచ్చును. ఇప్పుడు కొత్త ట్రాన్స్‌ఫార్మర్ లేదా విద్యుత్ ఉప కేంద్రము నిర్మించాల్సన అవసరం ఉందా అని నిర్ధారించే ప్రశ్న. ఉప విద్యుత్ కేంద్రముతో అను సంధాన చేయబడిన వినియోగదారుని విద్యుత్ అనుసంధాన సంఖ్య లెక్కించడం ద్వారా చేయవచ్చును. ఎలా లెక్కించాలి? లెక్కింపు సూత్రాలను ఉపయోగించడం ద్వారా ఈ గణనను సులభంగా లెక్కించవచ్చును.

ఈ అధ్యాయంలో లెక్కింపు విధానాన్ని ప్రస్తారణ మరియు సంయుక్తాలు ద్వారా లెక్కింపు యొక్క ప్రాథమిక సూత్రాలతో ప్రారంభమవుతుంది.

అభ్యాసన లక్ష్యాలు (Learning objectives)

ఈ ఆధ్యాయము పూర్తియిన తరువాత తెలుసుకోగల విషయాలు.

- లెక్కించడం పాథమిక సూత్రములు వివిధ పరిస్థితులకు మరియు వర్తింప చేయడానికి తెలుసుకోవడం
- విభిన్న వస్తువుల సమితిని ఏర్పాటు చేసే మార్గాల సంఖ్యను లెక్కించే విధానం తెలుసుకోవడం.
- ఒకే రకం వస్తువులను కలిగి వున్న సమితి నుండి ఏర్పాటు చేయుబడిన సంఖ్యలను లెక్కించడం తెలుసుకోవడం
- విభిన్న వస్తువుల సమితి కలయిక సంఖ్యను కనుగొనడాని వ్యూహములుఎలా లెక్కించాలి మరియు వర్తింపచేయాలి.
- గణిత ప్రేరణ సూత్రము యొక్క అనువర్తనాలు మనము ఆధ్యామాన్ని కొన్ని విభాగాలతో ప్రారంభిస్తాము.

4.2 లెక్కింపు యొక్క ప్రాథమిక సూత్రాలు (Fundamental Principles of Counting)

1. సంకలన నియమము (*Sum Rule*):

ముగించవలసిన రెండు పనులను తీసుకొందాము ఒకే సమయంలో చేయుటకు వీలుకాని రెండు పనులలో మొదటి పనిని M మార్గలు (విధాలు) ద్వారాను రెండవ పనిని N మార్గాల ద్వారా చేయవచ్చును. అయిన వీటిలో ఏ దేని ఒక పనిని $M+N$ మార్గాల ద్వారా చేయవచ్చును. దీనిని సంకలన విధి అందురు.

ఉదాహరణ 4.1:

17 మంది బాలురు, 29 మంది బాలికలు గల ఒక తరగతిలో ఒక పోటీకోసం బాలికనో లేక బాలురు నో ఎన్ని విభిన్న పద్ధతుల ద్వారా ఎన్నుకొనవచ్చును.

సాధన

మొదటి పనిగా ఒక బాలికను ఎన్నుకొనుటకు 29 మార్గాలు కలవు. రెండవ పనిగా ఒక బాలున్ని ఎన్నుకొనుటకు 17 మార్గాలు కలవు కావున ఈ పోటీలో ఒకరిని ఎన్నుకొనుటకు సంకలన న్యాయము ద్వారా $17 + 29 = 46$ మార్గాలు కలవు.

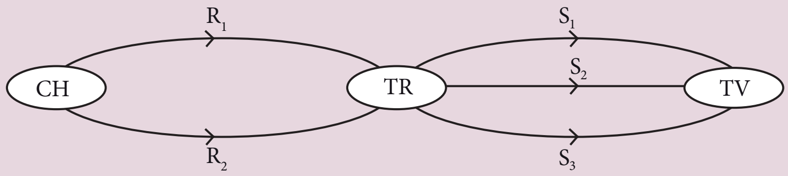
11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 184 10-03-2023 12:06:57

ఈ న్యాయమును రెండు కంటే ఎక్కువ గల పనులకూ విస్తరించ వచ్చును. కావున ఒకే సమయంలో చేయలేని n పనులు $T_1, T_2, T_3,..., T_n$ చేయుటకు క్రమముగా $m_1, m_2,..., m_n$ మార్గాలు కలవు అయిన, వీటిలో ఏదేని ఒకటిని $m_1 + m_2 + ... + m_n$ మార్గాల ద్వారా చేయవచ్చును.

2. గుణకార నియమము (*Product Rule*):
ఒక పని రెండు పద్ధతులలో చేయవచ్చును అనుకొందాము. మొదటి పనిని M వివిధ మార్గాలలో చేసిన మరియు మొదటి విధానం పూర్తి అయిన తరువాత రెండువ పద్ధతిని N వివిధ మార్గాలలో పూర్తి చేసిన అప్పుడు పనిని పూర్తి చేసే మొత్తము మార్గాల సంఖ్య $M \times N$ అగును.

ఉదాహరణ 4.2:
చెన్నై, తిరుచ్చి మరియు తిరునల్వేలి అను మూడు నగరములను తీసుకొందుము. ఒకరు చెన్నై నుంచి తిరుచ్చి మార్గము ద్వారానే తిరునల్వేలికి పోదలెచెను. చెన్నై కు మరియు తిరుచ్చికి మధ్య 2 మార్గాల కలవు మరియు తిరుచ్చి నుంచి తిరునల్వేలికి వెళ్ళుటకు 3 మార్గాలు కలవు. అయిన చెన్నై నుంచి తిరునల్వేలికి వెళ్ళుటకు ఎన్ని మార్గాలు కలవు.

సాధన
చెన్నై నుంచి తిరుచ్చిపోవుటకు 2 మార్గాలు కలవు. వీటిని R_1 మరియు R_2 అనుకొనుమ. మరియు తిరుచ్చినుండి తిరునల్వేలికి వెళ్ళుటకు 3 మార్గాలు కలవు వాటిని S_1, S_2 మరియు S_3 అనుకొనుము. ఒకరు చెన్నై నుండి తిరుచ్చివెళ్ళుటకు R_1 ను ఎన్నుకొనిన తిరుచ్చి నుండి తిరునల్వేలికి వెళ్ళుటకు S_1, S_2 లేక S_3 లలో ఏదేని ఒక మార్గములో వెళ్ళవచ్చును. కావున $(R_1, S_1), (R_1, S_2), (R_1, S_3)$ అను సాధ్యమైన మార్గాలు కలవు. ఈ విధంగానే చెన్నై నుంచి తిరుచ్చి వెళ్ళుటకు R_2 ను ఎన్నుకొనిన $(R_2, S_1), (R_2, S_2), (R_2, S_3)$ అను సాధ్యమైన మార్గాలు కలవు.



కావున చెన్నై నుండి తిరునల్వేలికి వెళ్ళుటకు $2 \times 3 = 6$ మార్గములు కలవు.

గుణక లబ్ద నియమము యొక్క విస్తరణ ఈ క్రింది విధముగా చెప్పవచ్చును. ఒక పనిలో గల $P_1, P_2,...,$ P_n అను n విధానాలు చేయుటకు క్రమముగా $m_1, m_2,..., m_n$ అను మార్గాలు కలవు అనుకొనుము. మరియు $P_1, P_2,..., P_{i-1}$ మార్గాలు పూర్తియిన తరువాత P_i ను చేయగా ఆ పనిని $m_1 \times m_2 \times ... \times m_n$ మార్గాల ద్వారా చేయవచ్చును.

3. చేర్చుట తొలగించుట సూత్రము: A, B అను రెండు పనులను ఒకే సమయంలో జరుగుతున్నవి అనుకొనుము. ఒకొక్క పని వేరువేరుగా $n(A), n(B)$ మార్గాలు (విధాలు) ద్వారా చేయవచ్చును అని అనుకొనము. A, B వాటిని ఒకే సమయంలో చేర్చి $n(A \cup B)$ మార్గాల ద్వారా చేయవచ్చుయిన, వీటిలో ఏదేని ఒక పని చేయు మార్గల సంఖ్య తెలుసుకొనుటకు సంకలన నియమమును అది వున్న దాని కన్నా ఎక్కువ సంఖ్యలను ఇచ్చును. కావున సరియైన జవాబు పొందుటకు ఈ రెండు పనులు చేయు మార్గాల సంఖ్యను కూడిన తర్వాత రెండు పనులు ఒకే సమయంలో వేయు మార్గాల సంఖ్యను తీసివేయవలెను. దీనినే చేర్చుట తొలగించుట విధానము అందురు. సమితి సంకేత గుర్తులను ఉపయోగించి $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$. గా వ్రాయవచ్చును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 185
10-03-2023 12:06:57

1000 వరకు గల ధన పూర్ణాంకములలో 2 లేక 7 చే భాగింపబడు (ఈ రెండు అంకెలు కాకుండా) సంఖ్యలను తీసుకొనుము. 2 చేత బాగింపబడు సంఖ్యల సంఖ్యను $n(A)$ గాను 7 చేత బాగింపబడు సంఖ్యల సంఖ్యను $n(B)$ గాను, 2 మరియు 7 చేత బాగింపబడు సంఖ్యల సంఖ్యను $n(A \cap B)$ గాను తీసుకొందాము. 2 లేక 7 చేత బాగింపబడిన ధన పూర్ణాంకముల సంఖ్యలు

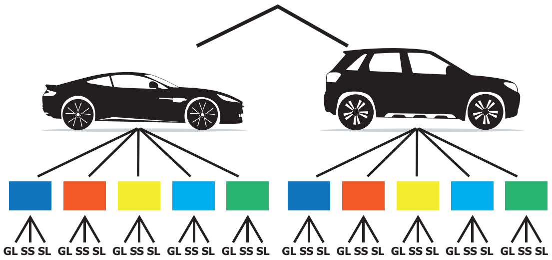
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 500 + 142 - 71 = 571$ అగును.

సూచన: ఇక్కడ 1000 వరకు గల అన్ని సంఖ్యలు 2 యొక్క గుణిజాలను $n(A)$ గాను 7 యొక్క గుణిజాలను $n(B)$ గాను తీసుకొనవచ్చును.

వృక్ష పటము:

లెక్కింపు సమస్యలలో అవకాశాలను సూచించడంలో వృక్ష పటము తరచుగా వుపయోగపడును. సాధారణముగా ఒక వృక్షములో గల కొమ్మలు వివిధ అవకాశాలను సూచిస్తుంది. ఉదాహరణకు ఒక వ్యక్తి తన కుటుంబము కోసము కారు కొనదలెచను. మార్కెట్టు లో రెండు వేర్వేరు బ్రాండు గల కార్లు ఒకొక్క బ్రాండులో 5 రంగులతో వుండును. ఒక్కొక్క రంగులో 3 వైవిధ్యమైనవి GL, SS, SL కలవు. కారును కొనుటకు విభిన్న అవకాశములను వృక్షపటము ద్వారా గుర్తించవచ్చును.

నా కొత్త కారు



పటము 4.2

పై వివరించిన విభిన్న నియమాలను ఉదాహరణ ద్వారా వివరించవచ్చును.

ఉదాహరణ 4.3 ఒక పాఠశాల గ్రంధాలయంలో 75 గణిత పుస్తకములు 35 భౌతిక శాస్త్ర పుస్తకములు కలవు. ఒక విద్యార్థి వీటిలో ఏదేని ఒక పుస్తకమును మాత్రమే ఎన్నుకోవచ్చును గణితము లేక భౌతిక శాస్త్ర పుస్తకాలలో ఏదేని ఒక పుస్తకమును ఎన్ని విధములుగా ఆ విద్యార్థి ఎంచుకోవచ్చును.

సాధన

(i) ఒక విద్యార్థి గణిత పుస్తకాన్ని 75 విధాలుగా ఎంచుకోవచ్చును.

(ii) భౌతిక శాస్త్ర పుస్తకాన్ని 35 విధాలుగా ఎంచుకోవచ్చును.

కావున గణితము లేక భౌతిక శాస్త్రము పుస్తకములలో ఏదేని ఒకటిని మాత్రమే ఎంచుకొనుటకు సంకల నియమము ప్రకారం $75 + 35 = 110$ మార్గాలు కలవు

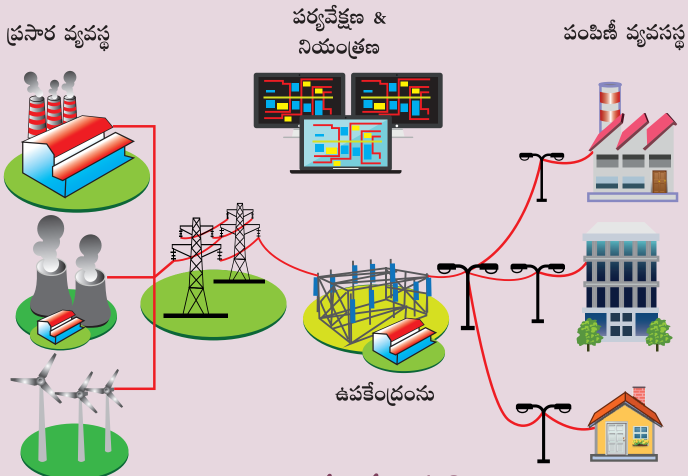
ఇప్పుడు మన పాఠ్యంశంలో పేర్కొన్న సమస్యను చర్చించుదాం.

ఉదాహరణ 4.4 ఒక విద్యుత్ వినియోగదారుని యొక్క విద్యుత్ అట్ట నెంబరు 238 : 110 : 29 గా వుంది. 238 ఎక్కువ సామర్ధ్యం కలిగిన విద్యుత్ ట్రాన్స్‌పార్మర్‌లో ఈ 29వ వినియోగదారుని సంఖ్య వరకు గల విద్యుత్ సంబంధముల సంఖ్యలను తక్కువ సామర్థ్యం గల ట్రాన్స్‌పార్మర్‌లో అత్యధికంగా 100 బంధాలను మాత్రము అనుసంధానము చేయువచ్చును అను షరతులకులోబడి వుండునని చూడుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 186 10-03-2023 12:06:58

సాధన

క్రింది పటము విద్యుత్ పంపిణీ విద్యుత్ వలయ విధానాన్ని వివరిస్తుంది.



పటము 4.3

ఎక్కువ సామర్థ్యం గల ట్రాన్స్‌పార్మర్‌ను 110 తక్కువ సామర్థ్యం గల ట్రాన్స్‌పార్మర్‌కి జత చేయబడింది. ప్రతి తక్కువ సామర్థ్యం గల ట్రాన్స్‌పార్మర్ కి 100 మంది వినియోగదారులతో మాత్రము అనుసంధానమవ్వచ్చును. మనకు 109 ట్రాన్స్‌పార్మర్ లు కలవు కావున $109 \times 100 = 10900$ అనుసంధానాలు (connections) కలవు 110వ ట్రాన్స్‌పార్మర్‌కి 29 వినియోగదారుల అను సంధానము మాత్రమే వుండును. కావున 238 ఎక్కువ సామర్థ్య గల ట్రాన్స్‌పార్మర్ తో అనుసంధానించబడిన మొత్తం వినియోగదారుల సంఖ్య $10900 + 29 = 10929$ అగును.

ఉదాహరణ 4.5 ఒక వ్యక్తి ఒక కారును కొనదలెచెను. పటము 4.2 లో చూపిన విధముగా మార్కెట్లో రెండు బ్రాండు కార్లు అందుబాటులోవున్నవి మరియు ప్రతి బ్రాండులో 3 వైవిద్యం గల మోడళ్ళ కలిగి వుంది మరియు ప్రతి మోడల్ నందు 5 విభిన్న రంగులు కలవు. అయిన ఆ వ్యక్తిఆ కారును కొనడానికి ఎన్ని మార్గాలు కలవు.

సాధన

ఒక కారును బ్రాండు, వైవిధ్యమైన మోడల్ ఆపై రంగును ఎంచు కోవడం ద్వారా కొనుగోలు చేయవచ్చును. బ్రాండును రెండు విధాలుగా ఎంచుకోవచ్చును, వైవిద్యాన్ని 3 మార్గాల ద్వారా, రంగును 5 మార్గాల ద్వారా ఎంచు కోవచ్చును . గుణకార నియమము ద్వారా ఆవ్యక్తి $2\times3\times5 = 30$ మార్గాలుగా ఆకారును కొనవచ్చును.

ఉదాహరణ 4.6 కాంచీపురంలో గల ఒక బట్టల దుకాణంలో ఒక ఆమె ఒక పట్టు చీరను, ఒక సుంగుడి చీరను కొనదలెచను. దుకాణంలో 20 విభిన్న వైవిద్యము గల పట్టు చీరలు 8, విభిన్న వైవిద్యములు గల సుంగుడి చీరలు కలవు. ఆమె తనకు కావలిసిన చీరను ఎన్ని మార్గాల ద్వారా ఎంచుకోవచ్చును.

సాధన

ఆమె ఒక పట్టు చీరను మరియు ఒక సుంగుడి చీరను ఎంచు కొనవలెను. ఆమె పట్టు చీర ఎంచుకోడానికి 20 విధాలు గాను సుంగుడి చీరను ఎంచుకోవడానికి 8 విధానాలు కలవు. ఈ రెండు చీరలు ఎంచు కోవడానికి గుణకార నియమము ప్రకారము $20 \times 8 = 160$ మార్గాలు కలవు.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 187 10-03-2023 12:06:58

ఉదాహరణ 4.7 ఒక గ్రామంలో నివశించు ప్రజలలో 80 శాతం మంది కొబ్బరి తోటను 65 శాతం మంది వరి పొలాలను కలిగివున్నారు. కనిష్ట శాతంగా ఎంత మంది రెండింటిని కలిగివున్నారు

సాధన

కొబ్బరి తోట కలిగి వున్న వారి శాతమును $n(C)$ గాను వరి పొలాలు కలిగి వున్న వారి శాతమును $n(P)$ గా అనుకొనుము. ఇక్కడ $n(C)=80, n(P)=65$ గా ఇవ్వబడినది. చేర్చుట తొలగించుట నియమము ప్రకారము $n(C\cap P)=n(C)+n(P)-n(C\cup P)$ $n(C\cup P)$యొక్క గరిష్ట విలువ 100 అగును కావున $n(C\cap P)$ యొక్క కనిష్ట విలువ $80+65-100=45$. కావున కనిష్టంగా 45 శాతము మంది రెండింటిని కలిగి వున్నారు.

తదుపరి సమస్యలలో అక్షర తీగ (String) యొక్క భావనను వుపయోగిస్తాము. ఇచ్చిన అక్షరాలను ఒకొక్కటిగా వ్రాయడం ద్వారా అక్షర తీగ ఏర్పడుతుంది. ఉదాహరణమునకు a, b, c మరియు d అక్షరాలతో రూపొందించబడు 3 అక్షరాల అక్షర తీగ aaa, abb, bda, dca, cdd,... విధంగా వ్రాయవచ్చును.

ఉదాహరణ 4.8:

(i) BIRD అను ఆంగ్ల పదంలో 4 అక్షరాను ఉపయోగించి అక్షరాలు పునరావృత్తం కాకుండా ఎన్ని అక్షర తీగలు రూపొందించవచ్చును.

(ii) PRIME అను ఆంగ్ల పదంలో గల 5 అక్షరాలను ఉపయోగించి అక్షరాలు పునరావృతం కాకుండా ఎన్ని అక్షర తీగలు రూపొందించవచ్చును.

సాధన

(i) ఖాళీగావున్న 4 స్థానాలను 4 అక్షరాల ద్వారా నింపేంత అక్షర తీగలు గలవు. పునరావృతం కాకూడదు అని గుర్తించుకోండి. మొదటి స్థానాన్ని B, I, R, D అను అక్షరాలలో ఏదేని ఒకటిని 4 మార్గాలలో నింపవచ్చును. దాని తరువాత రెండు స్థానాన్ని మిగిలిన 3 అక్షరాలలో ఏదేని ఒకటిని 3 మార్గాల ద్వారా నింపవచ్చును తరువాత 2 వ స్థానాన్ని 2 విధాలుగా నింపవచ్చు, నాల్గవ స్థానాన్ని 1 విధముగా నింపవచ్చును. కావున 4 స్థానాలను నింపుటకు మార్గాల సంఖ్యను గుణకార నియమము ప్రకారము $4\times3\times2\times1=24$ అగును.

(ii) ఇక్కడ 5 స్థానాలు నింపుటకు 5 విభిన్న అక్షరాలు కలవు. మొదటి స్థానాన్ని P,R,I,M,E అను అక్షరాలలో ఏదేని ఒక దానితో 5 విధాలుగా నింపవచ్చును. మొదటి స్థానాన్ని 5 అక్షరాలతో ఏదేని ఒక దానితో నింపిన తరువాత మిగిలిన 4 అక్షరాలతో రెండవ స్థానాన్ని, మూడవ స్థానాన్ని నింపుటకు మిగిలిన 3 అక్షరాలలో ఒకటి 4 వ స్థానాలన్ని నింపుటకు 2 అక్షరాలలో ఒకటిని మిగిలిన ఒక అక్షరాన్ని చివరి స్థానాలను నింపవచ్చును. కావున 5 స్థానాలను నింపుటకు మార్గాల సంఖ్య $5\times4\times3\times2\times1=120$. అగును.

పై రెండు స్థితుల యందు సారూప్యతను గమనించండి.

ఉదాహరణ 4.9 FLOWER అనుపదంలో గల 6 అక్షరాలతో క్రింది షరతులలో ఎన్ని అక్షర తీగలను రూపొందించవచ్చును.

(i) F తో ప్రారంభమై వుండాలి లేదా R తో ముగించాలి.

(ii) F తో ప్రారంభమో, R తో ముగించడమో వుండకూడదు.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 188 10-03-2023 12:06:59

సాధన

F, L, O, W, E, R అను అక్షరాలు ప్రతి ఒక్కటి ఒకే సారివచ్చును.

(i) ఒక అక్షర తీగ F తో ప్రారంభమైతే మిగిలిన 5 స్థానాలను L, O, W, E, R అను వాటితో నింపవచ్చును. అక్షరాలు పునరావృత్తం కాకూడదు కావున 2వ ,3వ ,4వ,5వ మరియు 6వ స్థానాలను క్రమముగా 5,4,3,2 మరియు 1 మార్గాలలో నింపవచ్చును. కావున గుణకార నియమము ప్రకారము F తో ప్రారంభమగు అక్షర తీగ $5\times4\times3\times2\times1=120$ మార్గాలు కలవు.

F					
1మార్గము	5మార్గము	4మార్గము	3మార్గము	2మార్గము	1మార్గము

పటము 4.4

ఒక తీగ R తో ముగించవలెనన్న మిగిలిన 5 స్థానాలను F, L, O, W, E అను అక్షరాలతో నింపవచ్చును. పైన చెప్పిన విధముగా R తో ముగించు అక్షరలతో తీగలు 120 మార్గాలతో ఏర్పరచ వచ్చును.

					R
5మార్గము	4మార్గము	3మార్గము	2మార్గము	1మార్గము	1మార్గము

పటము 4.5

ఒక తీగ F తో మొదలై R తో ముగియునంటే మిగిలిన 4 స్థానాలను L, O, W, E అను అక్షరాలతో నింపాలి.

F					R
1మార్గము	4మార్గము	3మార్గము	2మార్గము	1మార్గము	1మార్గము

పటము 4.6

పై విధంగా F తో ప్రారంభమై R తో ముగించు 6 అక్షర తీగల సంఖ్య $4\times3\times2\times1=24$. చేర్చుట తొలగించుట నియమము ప్రకారము F తో ప్రారంభమై లేక R తో ముగించాలి అనువాటి అక్షర తీగల సంఖ్య $120+120-24=216$ అగును.

(ii) F తో ప్రారంభమూ, R తో ముగింపు కాని అక్షర తీగల సంఖ్య అనునది (i) లో లెక్కించలేదు. ఇదియేకాకుండా F, L, O, W, E, R అను అక్షరాలు పునరావృత్తం కాకుండా గల అన్ని 6 అక్షర తీగలు సంఖ్య లెక్కించవలెను. ఇప్పుడు మొదటి స్థానాన్ని ఈ 6 అక్షరాలలో ఏదేని ఒకటిని వుపయోగించడం ద్వారా రెండు స్థానాన్ని మిగిలిన 5 అక్షరాలలో ఏదేని ఒక దానిని వుపయోగించి ఇదేవిధంగా మిగిలిన స్థానాలనూ నింపుట వలన వచ్చు అక్షర తీగల సంఖ్య $6\times5\times4\times3\times2\times1=720$. వచ్చును. F తో ప్రారంభమో, R తో ముగింపో కాని అక్షర తీగ సంఖ్యను మొత్త అక్షర తీగ సంఖ్య నుండి F తో ప్రారంభమై లేక R తో ముగింపు అక్షర తీగ సంఖ్యను తీసి వేయగా పొందవచ్చును. అనగా $720-216=504$ అగును.

ఉదాహరణ 4.10 మొదటి రెండు విభిన్నమైన ఆంగ్ల అక్షరాలను దాని తరువాత 4 విభిన్నమైన సంఖ్యలు లేక మొదటి రెండు విభిన్న సంఖ్యలు తరువాత 4 విభిన్నమైన లైసెన్స్ ఫలకలు (*Licence Plates*) తయారు చేయవచ్చును.

సాధన

దీని సాధనను రెండు స్థితులలో కనుగొన వచ్చును

స్థితి1: మొదటి రెండు విభిన్న ఆంగ్ల అక్షరాలను నాలుగు విభిన్న అంకెలను తీసుకొని తయారుచేయబడు లైసెన్సు ఫలకల సంఖ్య . $26\times25\times10\times9\times8\times7=32,76,000$.

స్థితి2: 4 విభిన్న అక్షరాల తరువాత రెండు విభిన్న అంకెలతో తయారు చేయబడు లైసెన్సు ఫలకల సంఖ్య $10\times9\times26\times25\times24\times23=3,22,92,000$ అగును. స్థితి (1) లో లేక స్థితి (2) లో వునట్లు తయారుచేయబడు లైసెన్స్యఫలకల సంఖ్యను సంకలన నియమము ప్రకారము, $(26\times25\times10\times9\times8\times7)+(10\times9\times26\times25\times24\times23)=3,55,68,000$ అగును.

ఉదాహరణ 4.11 7000 కంటే ఎక్కువగాను 8000 కంటే తక్కువ గా గల పునరావృత్తం కాని 5 చేత బాగింపబడు సంఖ్యల సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన

ఇది నాలుగు అంకెల సంఖ్య 7000 కంటే ఎక్కువ 8000 కంటే తక్కువ గా వుండాలి. వేల స్థానంలో గల అంకె 7 అవుతుంది.

7			0/5
1మార్గము	8 మార్గము	7 మార్గము	2 మార్గము

పటము 4.7

ఈ సంఖ్య 5 చేత బాగింపబడుతుంది. కావున ఒకట్ల స్థానంలో 0 లేక 5 అయివుండాలి. పునరావృత్తం అనుమతించబడదు కావున వందల స్థానాన్ని మిగిలిన సంఖ్యలను ఉపయోగించి 8 విధాలుగా నింపవచ్చును మరియు పదుల స్థానాన్ని 7 మార్గాలలో నింపవచ్చును. కావున కావలసిన సంఖ్యల సంఖ్య $1\times8\times7\times2=112$. అగును.

ఉదాహరణ 4.12 అంకెలు పునరావృత్తం కాకుండ 0, 1, 2, 3 మరియు 4 అంకెలను పయోగించి ఎన్ని నాలుగు అంకెల సరిసంఖ్యలు ఏర్పరచవచ్చును.

సాధన

ఈ సమస్య సాధనకు ఈ క్రింది విధముగా రెండు షరతులు కలవు.

1. ఇది నాలుగు అంకెల సంఖ్య కావున వేల స్థానము సున్న కాకుడదు.

2. ఇది సరి సంఖ్య కావున ఒకట్ల స్థానంలో 0 , 2 లేక 4 వుండవలెను. ఒకట్ల స్థానంలో సున్న వున్నప్పుడు లేదా సున్న లేనట్లు పరిగణించి ఈ సమస్యను రెండు స్థితులలో సాధించవచ్చును.

			0
4 మారము	3మారము	2 మారము	1 మారము

పటము 4.8

స్థితి 1: ఒకట్ల స్థానంలో 0 ను నింపినట్లు అయితే వేలస్థానాన్ని 4 విధాలు గా నింపవచ్చును, వందల స్థానాన్ని మూడువిధాలుగాను పదుల స్థానాన్ని 2 విధాలుగా నింపవచ్చును కావున ఒకట్ల స్థానంలో సున్న వున్న 4 అంకెల సంఖ్య $4\times3\times2\times1=24$ అగును.

$\bar{0}$			2/4
3 మారము	3 మారము	2 మారము	2 మారము

పటము 4.9

స్థితి 2: ఒకట్ల స్థానంలో సున్నకాని సంఖ్యలతో నింపవలెనన్న 2 విధాలుగా నింపవచ్చును. వేల స్థానం నింపే మార్గాల సంఖ్య 3 విధాలుగా వుండును (సున్న కాకుండ) వందల స్థానాన్ని 3 విధాలుగా, పదుల స్థానాన్ని 2 విధాలుగా నింపవచ్చును. కావున ఒకట్ల స్థానంలో సున్న కాని 4 అంకెల సంఖ్య $3\times3\times2\times2=36$ అగును.

కావున సంకలన నియమము ప్రకారము కావలసిన 4 అంకెల మార్గముల సంఖ్య $24+36=60$. అగును.

ఉదాహరణ 4.13 5 నాణెములను ఒకే సారి ఎగురవేయబడు నప్పుడు వెలువడు మొత్తము ఫలితాలు సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన: ఒక నాణెమును ఎగురవేసినప్పుడు (బొమ్మ, బొరుసు) రెండు ఫలితాలు వెలువడును. గుణకార నియమము ప్రకారము 5 నాణెములు ఎగుర వేయునప్పుడు ఏర్పడు మొత్తము ఫలితాలు సంఖ్య $2\times2\times2\times2\times2=2^5=32$. అగును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 190 10-03-2023 12:07:00

సాధారణముగా n నాణెములు ఎగుర వేయునప్పుడు ఏర్పడు మొత్తము ఫలితాల సంఖ్య 2^n అగును.

ఉదాహరణ 4.14 క్రింది వాటి మార్గముల సంఖ్యను కనుగొనుము.

(i) 5 విభిన్న బంతులను 3 పెట్టెలలోకి పంపిణి చేయుట

(ii) 3 విభిన్న బంతులు 5 వేర్వేరు పెట్టెలలో పంపిణీచేయుట

సాధన

(i) ప్రతి బంతులని 3పెట్టెలలో ఏదేని ఒక దానిలో 3 మార్గాల ద్వారా పంపిణి చేయవచ్చును. కావున గుణకార నియమము ప్రకారము 5 బంతులను 3 పెట్టెలలోకి పంపీణీ చేయు మార్గాల సంఖ్య $3\times3\times3\times3\times3=3^5=243$

(ii) ప్రతి బంతిని 5 పెట్టెలలో ఏదేని ఒక దానిలో నింపుటకు 5 మార్గములు కలవు. కావున గుణకార నియమము ప్రకారము 3 విభిన్నమైన బంతులను 5 పెట్టెలలో పంపిణీచేయు మార్గాల సంఖ్య $5\times5\times5=5^3=125$

ఈ విధమైన సమస్యలలో ఏర్పడు గందరగోళం తొలగించుటకు వస్తువులను (బంతులు) తీసుకొని స్థలాలను (పెట్టెలు) లో పంపీణీ చేయుటను గుర్తించుకోవలెను.
సాధారణంగా n విభిన్న వస్తువులను m స్థలాలలో వుంచుటకు మొత్తం m^n విధాలు (మార్గాలు) కావలెను.

ఉదాహరణ 4.15 ఒక గదిలో 10 బల్బులు కలవు వాటిలో ప్రతి ఒక్కటి స్వతంత్రముగా పనిచేసేవి. అయిన గది ప్రకాశించే మార్గాల సంఖ్యను కనుగొనుము.

సాధన

ప్రతి 10 బల్బులు స్వతంత్రముగా పనిచేయును అంటే ప్రతి బల్బు రెండు విధలుగా పని చేయవచ్చును. అనగా కాంతి నిచ్చునది (on) కాంతి ఆపివేయబడినది. (off) 10 బల్బులు కాంతిని ఇవ్వని (off) సందర్భంలో చేసే మొత్తం పని సంఖ్య 2^n అగును. 10 బల్బులు ఆఫ్ (off) లో వుంటే ఆ గది ప్రకాశవంతముగా వుండదు. కావున ఆ గదిని ప్రకాశింపచేయుటకు $2^{10}-1=1024-1=1023$ విధాలు (మార్గాలు) కలవు.

పావురపు ద్వారము నియమము (Pigeonhole Principle)

పావురాల సంపు పావురాల ద్వారము (గూడు) లోనికి పోవుతున్నది అనుకొనుము. పావురాళ్ళ గూళ్ళ.

కంటే పావురాల సంఖ్య ఎక్కువగా వున్నట్లుయితే రెండు పావురాళ్ళు కనీసము ఒక గూడు లో వుండువలెను. దీని యొక్క సాధారణ రూపం ఇతర వస్తువులు పరిస్థితులకు కూడా వర్తించవచ్చును. k పెట్టెలో $k+1$ వస్తువులు వున్నట్లు అయితే కనీసం ఒక పెట్టెలో రెండు లేక అంతకంటే ఎక్కువ వస్తువులు కలిగివుంటాయి.

కొన్ని ఉదాహరణలు:

1. ఏ సమూహంలోనైనా 27 ఆంగ్ల పదాలలో కనీసం రెండు పదాలు అదే అక్షరముతో ప్రారంభమవుతుంది (ఆంగ్లములో 26 అక్షరములు కలవు)

2. ఒక వారంలో 5 పని రోజులలో జరుగు ఏ 6 సమావేశాలులో కనీసము రెండు సమావేశాలైనా ఒకే రోజు జరుగును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 191 10-03-2023 12:07:00

ప్రస్తారణ మరియు సంయోగములను అర్థము చేసుకొనుటకు మనకు Factorials (క్రమగుణితములు) అనే భావన అవసరమౌతుంది క్రమగుణితములు గురించి తర్వాత విభాగంలో చర్చిద్దాము.

4.3 క్రమగుణితములు (Factorials)

n సహజ సంఖ్యల యొక్క ప్రసారం అనునది మొదట n సహజ సంఖ్యల లబ్ధము. దీనిని $n!$ తో సూచిస్తారు. $n! = 1\times 2\times 3\times ...\times n$.

మనము దీనిని "n factorial" క్రమగుణితములు లేదా n యొక్క క్రమగుణితములు అని చదువుతాము. ఫ్రెంచ్ గణిత శాస్త్రవేత్త క్రిష్టియన్ క్రాంప్ (*Christian Kramp*) 1808 సంత్సరములో పరిచయం చేసారు. n అనునది ధనాత్మక సహజ సంఖ్య

$$\begin{aligned}
n! &= n\times(n-1)\times(n-2)\times...\times 3\times 2\times 1\\
&= n(n-1)!\ ,\ n>1\\
&= n(n-1)(n-2)!\ ,\ n>2\\
&= n(n-1)(n-2)(n-3)!\ ,\ n>3 \text{ గమనించండి,}\\
1! &= 1\\
2! &= 2\times 1 = 2\\
3! &= 3\times 2\times 1 = 6\\
4! &= 4\times 3\times 2\times 1 = 24\\
5! &= 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120\\
... &= ...\\
22! &= 22\times 21\times 20\times ...\times 3\times 2\times 1 = 1124000727777607680000
\end{aligned}$$

సంఖ్య 22(రామానుజము పుట్టినతేదీ) అనేది ప్రస్తారణలలోప్రత్యేక స్థానమును కల్గివుంది. ఇవి 1 కంటే ఎక్కువ కల్గిన కనీస పూర్ణసంఖ్య N కి ప్రస్తారణలలో 22 అంకెలుండును. $N!$ లో ఖచ్చితంగా N అంకెలు కలిగిఉన్నది ఏది అని ఉపాధ్యాములకు, విద్యార్థులకు మధ్య ఒక మంచి సాధన అవుతుంది.

$0!=1$ కి నిరూపణకు $N=0$ ను $(n+1)!=(n+1)\cdot n!$ లో ప్రతిక్షేపించగా $1!=(0+1)\times 0! \Rightarrow 0! = \frac{1!}{1} = 1$ ఈ విధముగా క్రమగణితములో ఋణాత్మకముకాని పూర్ణాంకాలు కలవు అని చెప్పవచ్చును. ఈ పుస్తకము నందు ఋణాత్మక సంఖ్యలకు మరియు సంకీర్ణ సంఖ్యలకు క్రమగుణితములను తెలియచేయలేదు.

కొన్ని ఉదాహరణలు ద్వారా క్రమగుణితములు (Factorials) గురించి క్షుణ్ణంగా తెలుసుకొందాము.

ఉదాహరణ 4.16

(i) $5!$ (ii) $6!-5!$ (iii) $\frac{8!}{5!\times 2!}$ విలువలను కనుగొనుము

సాధన

(i) $5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120.$

(ii) $6!-5! = 6\times 5! - 5! = (6-1)\times 5! = 5\times 120 = 600.$

(iii) $\frac{8!}{5!\times 2!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5!}{5!\times 2!} = \frac{8\times 7\times 6}{2} = 168.$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 192 10-03-2023 12:07:02

ఉదాహరణ 4.17 $\frac{7!}{2!}$ ను సూక్ష్మీకరించుము.

సాధన

$$\frac{7!}{2!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2!}{2!} = 7\times6\times5\times4\times3 = 2520.$$

ఉదాహరణ 4.18 $\frac{n!}{r!(n-r)!}$ ను లెక్కించండి, ఇక్కడ (i) $n = 7,\ r = 5$ (ii) $n = 50,\ r = 47$ (iii) $r = 3$, n–ఏ విలువకైనా

సాధన

(i) $n = 7, r = 5$ అయినపుడు

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{7!}{5!(7-5)!} = \frac{7\times6\times5!}{5!\times2!} = \frac{7\times6}{1\times2} = 21.$$

(ii) $n = 50, r = 47$ అయినపుడు

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{50!}{47!(50-47)!} = \frac{50\times49\times48\times47!}{47!\times3!} = \frac{50\times49\times48}{1\times2\times3} = 19600.$$

(iii) $r = 3$, n–ఏ విలువకైనా

$$\frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{1\times2\times3\times(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

ఉదాహరణ 4.19 "N" అనునది రోజుల సంఖ్యను సూచిస్తుంది. N అనునది N రోజులలో వుండే గంటల సమయానికి సమానమైతే N విలువను కనుగొనుము?

సాధన

$$N! = 24\times N$$

$N = 1,2,3,4,\ \ N! < 24\times N.$

$N = 5,\ N! = 5! = 4!\times5 = 24N.$

$N > 5,\ N! \geq 5!N > 24\times N$ కావున, $N = 5$.

ఉదాహరణ 4.20 $\frac{6!}{n!} = 6$ అయితే, n–విలువను కనుగొనుము?

సాధన

$$\frac{6!}{n!} = \frac{1.2.3.4.5.6.}{1.2.3...n} = 6.$$

$n < 6$ వుండాలి. అంటే $n = 5$.

ఉదాహరణ 4.21 $n! + (n-1)! = 30$ అయితే, n–విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$30 = 6\times5.$

$n! + (n-1)! = (n+1)(n-1)!\ \ (n-1)! = 6 = 3!$, $n = 4$ అవుతుంది.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 193 10-03-2023 12:07:04

ఉదాహరణ 4.22 $2! + 3! + 4! + ... + 22!$ లో ఒకట్ల స్థానంలో వున్న అంకె ఏమి?

సాధన

$5!$ నుంచి అన్ని $n!$ కు ఒకట్ల స్థానంలో "0" కలిగి ఉంటుంది కావున $2! + 3! + 4!$ లో మాత్రమే ఒకట్ల స్థానములో $2! + 3! + 4!$ గా ఉంటుంది. $2 + 6 + 24 = 32$ కావున ఒకట్ల స్థానంలో వుండే అంకె 2

ఉదాహరణ 4.23 $\frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} = \frac{A}{9!}$ లో A–విలువ ఎంత?

సాధన

$$\frac{A}{9\times 8\times 7!} = \frac{1}{7!} + \frac{1}{8\times 7!}.$$

$$\frac{1}{7!}\times\frac{A}{9\times 8} = \frac{1}{7!}\times\left[1+\frac{1}{8}\right] \quad \frac{A}{72} = \frac{9}{8}, A = 81.$$

ఉదాహరణ 4.24 $\frac{(2n)!}{n!} = 2^n(1.3.5...(2n-1)$ ను నిరూపించుము

సాధన

$$\frac{(2n)!}{n!} = \frac{1.2.3.4...(2n-2)(2n-1)\times 2n}{n!}$$

$$= \frac{(1.3.5...(2n-1))(2.4.6...(2n-2)\times 2n)}{n!}$$

(సరి మరియు బేసి సంఖ్యలను వేర్వేరుగా)

$$= \frac{(1.3.5...(2n-1)\times 2^n\times(1.2.3...(n-1).n))}{n!}$$

(2 ను మొత్తం మీద వెలుపల తీస్తే)

$$= \frac{(1.3.5...(2n-1))\times 2^n\times n!}{n!}$$

$$= 2^n(1.3.5...(2n-1)).$$

అభ్యాసము 4.1

1. (i) ఒకడు భోజనం చేయుటకు భోజన శాలకు వెళ్ళెను. అక్కడ ఉన్న ఆహార పట్టికలో 10 భారతీయ మరియు చైనా ఆహారములు కలవు ఒక భారతీయ లేక చైనా ఆహారమును అతను ఎన్ని విధములుగా ఎంపిక చేయవచ్చును?

(ii) ఒక అంగడిలో 3 రకములైన కారు బొమ్మలు, 2 రకములైన రైళ్ళ బండి బొమ్మలు కలవు. ఒక బాలుడు ఒక కారు బొమ్మను మరియు ఒక రైలు బండి బొమ్మను ఎన్ని విధాలుగా ఎంపిక చేయ వచ్చును?

(iii) $1,2,3,4,5$ అనే అంకెలు మరలా మరలా రాకుండా ఉపయోగించి ఎన్ని రెండు అంకెల సంఖ్యలను ఏర్పరచ వచ్చును

(iv) 10 కుర్చీలు గల ఒక సమావేశ గదిలో ముగ్గురు సభ్యులు వచ్చారు. ఎన్ని విధములుగా ఆ ముగ్గురు సభ్యులు కుర్చీలో కూర్చోగలరు?

(vi) 5 మంది సభ్యులను ఒక అడ్డు వరుసలో ఎన్ని విధములుగా కూర్చోబెట్టగలము?

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 194 10-03-2023 12:07:05

2. (i) ఒక సెల్‌ఫోన్‌లో 6 వేర్వేరు అంకెలు కల్గిన సంకేత సంఖ్య కలదు. ఆ సంకేత సంఖ్యను పొందుటకు గరిష్ఠంగా ఎన్ని ప్రయత్నములు చేయ వలెను?

(ii) నాల్గు వేర్వేరు రంగులు గల జెండాల నుండి 3 జెండాలను ఒకటిగా అమర్చి ఎన్ని వేర్వేరు రకాలైన సంకేతాలను ఏర్పరచ వచ్చును?

3. నలుగురు పిల్లలు పరుగు పందెములో పాల్గొనిరి.

(i) మొదటి రెండు స్థానములను ఎన్ని విధాలుగా నింపవచ్చును?

(ii) ఆ పందెమును ఎన్ని విధములుగా ముగించ వచ్చును?

4. $2, 4, 6, 8$ అంకెలును ఉపయోగించి ఎన్నిమూడు అంకెల సంఖ్యలను

(i) పునరావృత్తమయ్యే అంకెలను

(ii) పునరా వృత్తము కాని అంకెలును లెక్కించ వచ్చును?

5. మూడు అంకెల సంఖ్య యొక్క ఒకట్ల స్థానములో 3 వుండే విధముగా

(i) పునరావుత్తమయ్యే

(ii) పునరావృత్తం కాని సంఖ్మలు ఎన్ని.

6. 100 మరియు 500 కు మధ్యలో 0,1,2,3,4,5 అంకెలును ఉపయోగించి

(i) అంకెలు పునరావృత్తమయ్యే విధంగా.

(ii) అంకెలు పునరావృత్తం కాని విధంగా ఎన్ని సంఖ్యలను ఏర్పరచవచ్చును.

7. $0, 1, 2, 3, 4, 5$ అంకెలను ఉపయోగించి మూడు అంకెల బేసి సంఖ్యలను

(i) పునరావృత్తం కాని

(ii) పునరావృత్తం అమ్యే విధముగా ఎన్ని సంఖ్యలను ఏర్పరచవచ్చెను.

8. ఈ క్రింది నిబంధనలకు అనుగుణముగా 999 మరియు 10000 లకు మధ్యగల సంఖ్యలను.

(i) ఏ నిబంధన లేకుండా

(ii) పునరావృత్తం కాని అంకెలు

(iii) కనీసం ఏదైన ఒక్క అంకె పునరావృత్తమయ్యే విధంగా సంఖ్యలను లెక్కించుము?

9. $0, 1, 2, 3, 4, 5$ అంకెలను ఉపయోగించి 5 చే భాగించబడు 3 అంకెల సంఖ్యలు క్రింది నిబంధనలకు అనుగుణంగా.

(i) పునరావృత్తం కాని అంకెలు

(ii) పునరావృత్తం అయ్యే అంకెలు గల సంఖ్యలు ఎన్ని కలవో కనుగొనుము?

10. A ప్రదేశము నుండి B ప్రదేశమునకు వెళ్ళుటకు B_1 మరియు B_2 అను రెండు వేర్వేరు బస్సు మార్గములు కలవు T_1, T_2 రెండు వేర్వేరు మార్గములు మరియు A_1 అనే విమాన మార్గం కలదు.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 195 10-03-2023 12:07:05

B ప్రదేశము నుండి C ప్రదేశము వెళ్ళుటకు B_1' అనే ఒక బస్సు మార్గము T_1', T_2' అనే రెండు రైలు మార్గములు మరియు A_1' అనే రెండు విమాన మార్గం కలదు. A ప్రదేశము నుండి C ప్రదేశమునకు B మార్గం ద్వారా మరలా మరలా ఉపయోగించుకోకుండా ఎన్ని విధములుగా వెళ్ళవచ్చును?

11. 1 నుండి 1000 వరకు గల సంఖ్యలు 2 చే మరియు 5 చే భాగింపబడని సంఖ్యలును కనుగొనుము

12. LOTUS అనే పదములోని అక్షరములను ఉపయోగించి

    (i) L తో ప్రారంభించి లేక S తో అంతమయ్యే విధంగా ఎన్ని అక్షర వరసలు కలవు?

    (ii) L తో ఆరంభము కాకుండ మరియు S తో అంతము కాకుండ వుండే అక్షర వరుసలను కనుగొనుము?

13. (i) ప్రతి లక్ష్యాత్మక ప్రశ్నలకు 4 ఎంపికలు కలవు. 6 ప్రశ్నలుకు ఎన్ని విధాలుగా జవాబు ఇవ్వవచ్చును?

    (ii) 3 పావురాల గూటిలో 10 పావురాలును ఎన్ని విధములుగా ఉండనివ్వవచ్చును?

    (iii) 10 మంది విద్యార్థులుకు 12 వేర్వేరు బహుమతులను ఎన్ని విధములుగా పంచవచ్చును.

14. క్రింది విలువలను కనుగొనుము?

    (i) $6!$ (ii) $4! + 5!$ (iii) $3! - 2!$ (iv) $3! \times 4!$ (v) $\dfrac{12!}{9! \times 3!}$ (vi) $\dfrac{(n+3)!}{(n+1)!}$

15. క్రింది విలువలతో $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ ను కనుగొనుము.

    (i) $n = 6$, $r = 2$ (ii) $n = 10, r = 3$ (iii) n–అన్ని విలువలకు, $r = 2$

16. క్రింది వాటిలో n యొక్క విలువను కనుగొనుము?

    (i) $(n+1)! = 20(n-1)!$ (ii) $\dfrac{1}{8!} + \dfrac{1}{9!} = \dfrac{n}{10!}$

క్రమగుణితములను క్రింది ఇవ్వబడిన విధంగా ద్వంద్వ కారకాలుగా సాధారణీకరించ వచ్చును.

n–యొక్క రెట్టింపు క్రమగుణితములు. (Double Factorial of n)

n కారకాలను $n!$ గా గుర్తించవచ్చును, దీనిని $f: \mathbb{N} \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$, ఇక్కడ $\mathbb{N}$ అనునది సహజ సంఖ్యల సమితిగా నిర్వచించవచ్చును.

$$f(n) = \begin{cases} 1 & , n = 0, \\ n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1, & n \neq 0. \end{cases} \text{ అయినపుడు}$$

$n!!$ ను ((n యొక్క ద్వంద్వకారకము) క్రింది విధముగా నిర్వచించవచ్చును.

$$g(n) = \begin{cases} 1 & n = 0, \\ n \times (n-2) \times (n-4) \times \ldots \times 4 \times 2 & n \text{ సరి సంఖ్య అయినపుడుల} \\ n \times (n-2) \times (n-4) \times \ldots \times 3 \times 1 & n \text{ బేసి సంఖ్య అయినపుడు} \end{cases}$$

దీని నుంచి $5!! = 5 \times 3 \times 1 = 15$ మరియు

$8!! = 8 \times 6 \times 4 \times 2 = 384$ గా వ్రాయ వచ్చును.

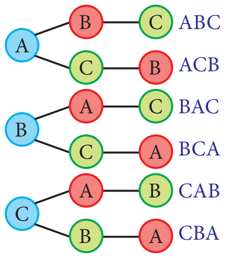
గమనిక $n!! \neq (n!)!$ ఎందుకనగా $4!! = 8$ అదే విధంగా $(4!)! = (24)!$ అవుతుంది.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 196 10-03-2023 12:07:06

4.4 ప్రస్తారణములు (Permutations)

ప్రస్తారణ అనగానేమి?

ప్రస్తారణలు అనేక సందర్భాలలో ఎదుర్కొంటున్నాము. ముగురు సేహితులు A, B మరియు C లు ఛాయా చిత్రము. తీసుకొనుటకు ఒక వరుసలో నిలబడవలెను. ఎన్ని విధములలైన వరుసలలో నిలబడే (ఎడమ నుండి కుడికి) విధానాన్ని క్రింది ఇవ్వబడినది.



$A, B, C : A, C, B : B, A, C$

$B, C, A : C, A, B : C, B, A$

కావున ఛాయ చిత్రమును తీసుకొనుటకు వారికి వారే 6 విధములైన వరుసలలో నిలబడవచ్చును.

కావున 3 వస్తువులను ఒక అడ్డ వరుసలో అమర్చిన $3 \times 2 \times 1 = 3!$ ప్రస్తారణలుగా వ్రాయవచ్చును. 4 వస్తువులను ఒకే సమయములో తీసినపుడు వచ్చు ప్రస్తారణల సంఖ్య $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4!$ కావున సాధారణంగా n వస్తువులను ఒక అడ్డ వరుసలో అమర్చుటకు $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$ ప్రస్తారణలుగా వ్రాయవచ్చును.

మనవద్దగల A, B, C, D, E, F మరియు G అనే 7 అక్షరముల నుండి 4 అక్షరంల వరుస ఏర్పరచేటప్పుడు, మొదటి అక్షరమును ఎంపిక చేయుటకు 7 ఎంపికలు కలవు. మొదటి అక్షరమును ఎంపిక చేసిన తర్వాత మన వద్ద రెండవ స్థానానికి 6 అక్షరములు కలవు. ఇదే విధముగా కొనసాగించిన 4 వ అక్షరమునకు 4 ఎంపికలు కలవు. కావున 7 అక్షరములు నుండి ఏర్పరచు 4 అక్షరముల వరుస సంఖ్య.

$$7 \times 6 \times 5 \times 4 = \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{7!}{3!} = \frac{7!}{(7-4)!}$$

సాధారణంగా n వేర్వేరు వస్తువుల నుండి r వేర్వేరు వస్తువులను ఉపయోగించి ఏర్పరిచే ప్రస్తారణల సంఖ్య $\frac{n!}{(n-r)!}$ దీనిని ${}^nP_r$ గా సూచించవచ్చును. ఈ నియమ నిరూపణను క్రింది విభాగంలో తెలుసు కొంటాము

4.4.1 విభిన్న వస్తువుల పైన ప్రస్తారణలు (Permutations of Distinct Objects)

ప్రమేయాల ద్వారా ప్రస్తారణలను $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ అని పరిమిత సమితుల నుండి S పై నిర్వచింపబడిన ఒక ద్విగుణ ప్రమేయాన్ని ప్రస్తారణలుగా నిర్వచించిన S పై నిర్వచించబడిన ద్విగుణ ప్రమేయాల సంఖ్యకు సమానము

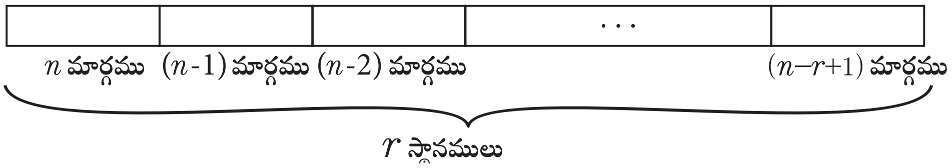
ఈ ప్రస్తారణముల సంఖ్యను ${}^nP_r$ అని సూచిస్తాము

సిద్ధాంతము 4.1

n, r లు ధనపూర్ణ సంఖ్యలు అయితే మరియు $r \leq n$ అయిన n విభిన్న వస్తువుల నుండి ఒక సమయంలో r వస్తువులను తీసుకొని ఏర్పడు ప్రస్తారణాల సంఖ్య $n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)$ అగును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 197 10-03-2023 12:07:06

నిరూపణ: ఒక ప్రస్తారణ అనునది వరుసలో అమర్చ వచ్చును. n విభిన్న వస్తువుల నుండి ఒకే సమయంలో r వస్తువులను తీసుకొనిన ఏర్పడు వరుసల అమరిక n వస్తువులను r స్థానములలో అమర్చువచ్చును.



మొదటి స్థానమును నింపటకు r వస్తువుల కల్గిన రెండవ స్థానమును నింపుటకు $(n-1)$ వస్తువులు ఉన్నవి. మూడవ స్థానమును నింపుటకు $(n-2)$ వస్తువులు ఉన్నది. ఇదే విధనముగా చివరి వరకు కొనసాగించడానికి, అనగా r వ స్థానమును నింపుటకు $(n-(r-1))$ వస్తువులు ఉన్నది. గుణక లబ్ద నియమము ప్రకారము మనము ${}^nP_r = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$ అని పొందవచ్చును.

సిద్ధాంతము 4.2

$n \geq 1$ మరియు $0 \leq r \leq n$ అయినపుడు ${}^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

నిరూపణ: సిద్ధాంతము 4.1 నుండి

$$\begin{aligned}
{}^nP_r &= n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-r+1) \\
&= \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-r+1) \times (n-r) \times (n-r-1) \times ... \times 2 \times 1}{(n-r) \times (n-r-1) \times ... \times 2 \times 1} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!}.
\end{aligned}$$

□

ప్రత్యేకంగా n ఒక ధనపూర్ణసంఖ్య మరియు r ఏ దైన ఋణాత్మక కాని పూర్ణ సంఖ్య, మనం క్రింది విధముగా వ్రాయవచ్చును.

$${}^nP_r = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-r)!} & ,r \leq n \quad \text{కొరకు} \\ 0 & ,r > n. \quad \text{కొరకు} \end{cases}$$

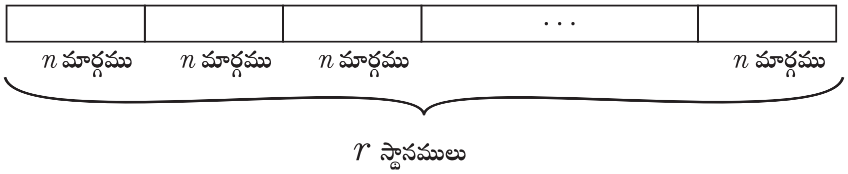
$${}^nP_r = \begin{cases} {}^nP_n = n! & ,r = n \quad \text{కొరకు} \\ {}^nP_0 = 1 & ,r = 0. \quad \text{కొరకు} \end{cases}$$

n విభిన్న వస్తువులను ఒక అడ్డు వరుసగా అమర్చినపుడు ${}^nP_n = n!$ విధాలుగా వ్రాయవచ్చును.

సిద్ధాంతము 4.3

n అనేక రకాలైన వస్తువుల నుండి ఒకే సమయంలో r వస్తువులను మరలా వచ్చు పద్ధతిలో n^r విధాలుగా ప్రస్తారణలు అమర్చవచ్చును.

నిరూపణ: సిద్ధాంతము 4.1 నుంచి



11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 198 10-03-2023 12:07:07

మనం n వస్తువుతో మొదటి స్థానాన్ని పూరించిన తర్వాత రెండవ స్థానంలో (మొదటి స్థానంలో వస్తువులను ఉపయోగించిన విధంగా) n వస్తువులను మరియు r స్థానములో n వస్తువులను నింపవచ్చును. లబ్ధ నియమము ప్రకారము n విభిన్న వస్తువులను r విధాలుగా మరల అమర్చి నట్లయితే

$$n \times n \times n \times \dots \times n \, (r \text{ times}) = n^r$$ □

4.4.2 ప్రస్తారణలు యొక్క నియమాలు (Properties of Permutations)

1 : $${}^nP_n = {}^nP_{n-1}$$

నిరూపణ : మనము

$${}^nP_{n-1} = \frac{n!}{(n-(n-1))!} = \frac{n!}{1!} = n! = \frac{n!}{(n-n)!} = {}^nP_n$$ □

2 : $${}^nP_r = n \times {}^{n-1}P_{r-1}$$

నిరూపణ : మనము

$$n \times {}^{n-1}P_{r-1} = n \times \frac{(n-1)!}{((n-1)-(r-1))!} = \frac{n!}{(n-r)!} = {}^nP_r$$

ఈ పద్ధతి కొనసాగిస్తే క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

$${}^nP_r = n \times {}^{n-1}P_{r-1} = n \times (n-1) \times {}^{n-2}P_{r-2}$$

$$= n \times (n-1) \times (n-2) \times {}^{n-3}P_{r-3} \times \dots \times (n-(r-1)) \times {}^{n-r}P_0$$

$$= n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1)$$

$$\boxed{{}^nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-r+1).}$$

□

3 : $${}^nP_r = {}^{n-1}P_r + r \times {}^{n-1}P_{r-1}$$

నిరూపణ : మనదగ్గర

$${}^{n-1}P_r + r \times {}^{n-1}P_{r-1} = \frac{(n-1)!}{((n-1)-r)!} + r\frac{(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-1)!}{(n-1-r)!} + r\frac{(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-1)! \times (n-r)}{(n-1-r)! \times (n-r)} + r\frac{(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-1)! \times (n-r)}{(n-r)!} + r\frac{(n-1)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{(n-1)! \times ((n-r)+r)}{(n-r)!} = \frac{(n-1)!n}{(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} = {}^nP_r$$ □

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 199 10-03-2023 12:07:10

ఉదాహరణ 4.25 (i) ${}^{4}P_{4}$ (ii) ${}^{5}P_{3}$ (iii) ${}^{8}P_{4}$ (iv) ${}^{6}P_{5}$ విలువలును కనుగొనుము.

సాధన

(i) ${}^{4}P_{4} = 4\times3\times2\times1 = 4! = 24.$

(ii) ${}^{5}P_{3} = 5\times4\times3 = 60.$

(iii) ${}^{8}P_{4} = 8\times7\times6\times5 = 1680.$

(iv) ${}^{6}P_{5} = 6\times5\times4\times3\times2 = 6! = 720.$

ఉదాహరణ 4.26 ${}^{(n+2)}P_{4} = 42\times{}^{n}P_{2}$ అయినపుడు, n విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$$\begin{aligned} {}^{(n+2)}P_{4} &= 42\times{}^{n}P_{2} \\ \Rightarrow \frac{{}^{n+2}P_{4}}{{}^{n}P_{2}} &= 42 \\ \Rightarrow \frac{(n+2)(n+1)(n)(n-1)}{n(n-1)} &= 42 \\ \Rightarrow (n+2)(n+1) &= 42 = 7\times6 \\ \Rightarrow n+2 &= 7 \Rightarrow n = 5. \end{aligned}$$

ఉదాహరణ 4.27 ${}^{10}P_{r} = {}^{7}P_{r+2}$ అయినపుడు, r విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$$ {}^{10}P_{r} = {}^{7}P_{r+2} $$

$$ \frac{10!}{(10-r)!} = \frac{7!}{(5-r)!} $$

$$ \frac{10\times9\times8\times7!}{(10-r)\times(9-r)\times(8-r)\times(7-r)\times(6-r)\times(5-r)!} = \frac{7!}{(5-r)!} $$

$$ (10-r)\times(9-r)\times(8-r)\times(7-r)\times(6-r) = 10\times9\times8 $$

$$ (10-r)\times(9-r)\times(8-r)\times(7-r)\times(6-r) = 6\times5\times4\times3\times2 $$

$(10\times 9\times 8)$

కాబట్టి, $10 - r = 6 \Rightarrow r = 4.$

ఉదాహరణ 4.28 "VOWELS" అను పదములో గల అక్షరముల నుండి క్రింది ఇవ్వబడిన నిబంధనలకు అనుగుణంగా ఎన్ని అక్షరవరుస క్రమముఏర్పరచగలము?

(i) E తో ఆరంభమగు అక్షర వరుస

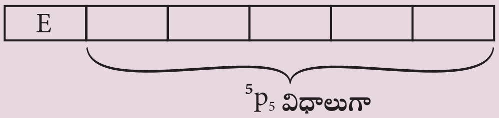
(ii) E తో ప్రారంభమయి, W తో అంతమగు అక్షర వరుస.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 200 10-03-2023 12:07:11

సాధన

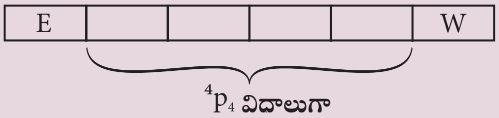
ఇవ్వబడిన పదములో 6 అక్షరములు (V, O, W, E, L, S) ఉన్నవి.

i. E తో అన్ని అక్షర వరుసలు ప్రారంబం కావలెను. మిగిలిన 5 అక్షరములను వరస పరచిన ${}^5P_5 = 5!$ విదాలుగా ఉన్నవి అందువల్ల E తో ప్రారంభమయ్యే అక్షర వరుసల సంఖ్య $5! = 120$.



పటము 4.10

ii. అన్ని అక్షరములు E తో ప్రారంభించి మరియు W తో అంతమగును.



పటము 4.11

iii. అనగా E ను మొదటి అక్షరముగా W ను చివరి అక్షరంగా అమర్చి మిగిలిన 4 అక్షరములను ${}^4P_4 = 4!$ విధాలుగా అక్షర వరుసలు వ్రాయవచ్చును.

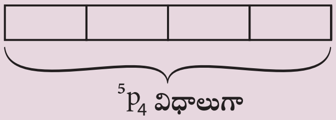
అందువలన E తో ప్రారంభమై W తో అంతమగు అక్షర వరుసల సంఖ్య $4! = 24$ గా వ్రాయవచ్చును.
అనగా 4 చేత భాగించబడు సంఖ్యలు యొక్క సంఖ్య ${}^4P_1$ X ${}^3P_2$ = 4 X 6 += 24

ఉదాహరణ 4.29 1,2,3,4 మరియు 5 అంకెలను ఉపయోగించి నాల్గు వేర్వేరు అంకెలు గల సంఖ్యను ఎన్ని విధాలుగా ఏర్పరచ వచ్చును. క్రింది వాటిని కనుగొనుము.

(i) ఎన్ని సంఖ్యలను ఆ విధంగా ఏర్పరచవచ్చును?

(ii)దీనిలో ఎన్ని సరిసంఖ్యలు కలవు ?

(iii) వీటిలో ఎన్ని ఖచ్చితంగా 4 చే భాగించబడు సంఖ్యలు కలవు.

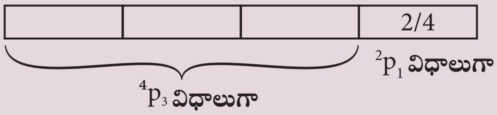


పటము 4.12

సాధన

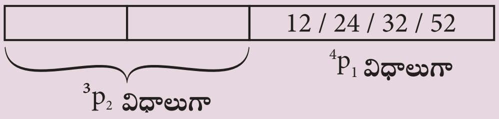
(i) 4 అంకెలు అనునది ఇవ్వబడిన 5 అంకెల నుండి 4 అంకెలను తీసుకొని ఏర్పరచు ప్రస్తారణముల సంఖ్యకు సమానము అగును. ${}^5P_4 = 5\times4\times3\times2 = 120$

(ii) సరి సంఖ్యలకు చివరి అంకె 2 లేదా 4 గా వుండవలెను. అనగా చివరి అంకెను ${}^2P_1$ విధాలుగా పూరించవచ్చును. మరియు మిగిలిన 3 స్థానాలలో మిగిలిన. 4 అంకెల నుంచి ${}^4P_3$ విధాలుగా పూరించ వచ్చును. అందువలన కావలసిన సంఖ్య ${}^2P_1\times{}^4P_3 = 2\times24 = 48$ విధాలుగా వ్రాయవచ్చును.



పటము 4.13

(iii) ఒక సంఖ్య 4 చే భాగించబడాలంటే ఆ సంఖ్య చివరి రెండు అంకెలు 4 చే భాగించబడాలి. అనగా చివరి రెండు అంకెలు 12, 24, 32, 52 (4 విధాలుగా) ఉండలెను. మిగిలిన మొదటి రెండు స్థానాలను మిగిలిన 3 అంకెలుగా తీసుకొని ${}^3P_2$ విధాలుగా



పటము 4.14

అనగా 4 చేత భాగింపబడు సంఖ్యలు ${}^4P_1\times{}^3P_2 = 4\times6 = 24$.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 201 10-03-2023 12:07:12

4.4.3 ఎల్లప్పుడు వస్తువులు కలసి ఉండుట (అక్షర వరుస పద్ధతి) (Objects always together (String method))

వేర్వేరు విధములు గల n వస్తువులలో నిర్దేశించిన m వస్తువుల సంఖ్య ఎల్లపుడు ఒకటిగా వచ్చు విధముగల ప్రస్తారణల సంఖ్యను కనుగొనుము.

- నిర్దేశించిన m వస్తువుల యొక్క అక్షర వరుసను ఒక విభాగాలుగా పరిగణించండి.
- అపుడు మనకు $(n-m+1)$ వస్తువులు కలదు. ఈ $(n-m+1)$ స్తువులను $(n-m+1)!$ విధములుగా వ్రాయవచ్చును.
- అపుడు నిర్దేశించిన m వస్తువులు ప్రస్తారణలును మధ్యలో $m!$ విధాలుగా వ్రాయవచ్చును.
- చివరగా ప్రస్తారణల సంఖ్య $m!\times(n-m+1)!$. గా వ్రాయవచ్చును.

4.4.4 ఏ రెండు వస్తువులు కలిసి వుండవు (No two things are together (Gap method))

n వేర్వేరు వస్తువులలో ఇవ్వబడిన ఏ రెండు k వస్తువులు ఒకటిగా వుండకుండా మరియు మిగతా వున్న $m=n-k$ వస్తువుల మీద ఏ విధమైన నిర్భంధము లేకుండా ప్రస్తారణలను క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

- మొదటిగా ఒక అడ్డువరుసలో నిబంధన లేకుండా m వస్తువులు క్రమబద్ధీకరించినచో, అపుడు m వస్తువుల ప్రస్తారణలను ${}^{m}P_{m}=m!$ విధాలుగా వ్రాయవచ్చును.
- ఏ నిబంధనలేని ప్రతి రెండు m వస్తువుల మధ్య గల అంతరమును మొదటి మరయు చివరి స్థానములను చేర్చి లెక్కింపవలెను. ఈ విధమైన అంతరము m కంటే 1 ఎక్కువగా అంటే $(m+1)$ అంతరాలుగా ఉండును. ఈ $(m+1)$ స్థానాలలో k వస్తువులను ${}^{(m+1)}P_{k}$ విధాలుగా క్రమబద్ధీకరింవచ్చును.
- అపుడు కావలసిన ప్రస్తారణల సంఖ్య $m!\times{}^{(m+1)}P_{k}$

ఉదాహరణ 4.30 "EQUATION" అను పదములో గల అక్షరములను ఉపయోగించి.

(i) అచ్చులు ఎల్లప్పుడు వచ్చు విధంగా

(ii) అచ్చులు ఎల్లప్పుడు రాని విధాలుగా అక్షరవరుస క్రమమును ఏర్పరుచుము?

సాధన

(i) "EQUATION" పదంలో 8 అక్షరములు కలవు. వీటిలో 5 అచ్చులు (E, U, A, I, O) మరియు 3 హల్లులు (Q, T, N) కలవు. 5 అచ్చులను ఒక అక్షరముగా పరిగణించిన మన వద్ద 4 అక్షరములు కలవు. దీనిని ${}^{4}P_{4}=4!$ విధాలుగా క్రమబద్ధీకరించవచ్చు అయితే ఈ ఒక్కొక్క E, U, A, I, O లను క్రమబద్ధీకరించిన ${}^{5}P_{5}=5!$ విధాలుగా వచ్చును. కావున లబ్ద నియమము ప్రకారము కావలసిన పదముల సంఖ్య $4!\times 5!=24\times 120=2880$.

(ii) "EQUATION" పదంలో గల 8 అక్షరముల నుండి ఏర్పడే అక్షర వరుసల సంఖ్య. ${}^{8}P_{8}=8!=40320$.

కాబట్టి అచ్చులు ఒకటిగా రాని విధంగా గల అక్షర వరుస సంఖ్యను మొత్తం అక్షరముల అక్షర వరుస సంఖ్యలను నుండి అచ్చులు ఒకటిగా వచ్చు విధంగా గల అక్షర వరుస సంఖ్యలను తీసి వేసిన ఈ క్రింది ఫలితం వచ్చును.

కావున అవసర అక్షర వరుస సంఖ్య $40320-2880=37440$.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 202 10-03-2023 12:07:12

ఉదాహరణ 4.31 15 మంది విద్యార్థులు వ్రాయగల పరీక్షలో 7 మంది విద్యార్థులు గణిత పరీక్షను మిగిలిన 8 మంది విద్యార్థులు వేర్వేరు పాఠ్యాంశములను వ్రాస్తున్నారు. గణిత పరీక్ష వ్రాయు ఏ ఇరువురు విద్యార్థులు ఒకే వరుసలో వెంటవెంటనే లేని విధంగా ఎన్ని విధాలుగా కుర్చోబెట్టవచ్చును?

సాధన

గణితం తప్ప మిగిలిన పాఠ్యాంశములను పరీక్ష వ్రాయు 8 మంది విద్యార్థులను $^8P_8 = 8!$ విధాలుగా వ్రాయవచ్చును. ఈ క్రమబద్ధీకరించుటలో 9 అంతరములు కలవు. కావున గణిత పరీక్ష వ్రాయు 7 మంది విద్యార్థులను ఈ అంతరములలో $^9P_7$ విధాలుగా కుర్చోపెట్టవచ్చును.

$$_O_1_O_2_O_3_O_4_O_5_O_6_O_7_O_8_$$

కావున లబ్ద నియమముల ప్రకారము కావలసిన ప్రస్తారణముల సంఖ్య $8! \times {}^9P_7 = 8! \times \frac{9!}{2!} = \frac{8! \times 9!}{2!}$

ఉదాహరణ 4.32 5 మంది విద్యార్థులు మరియు 4 మంది విద్యార్థినులు ఒకే అడ్డ వరుసలో ఏ రెండు విద్యార్థినులు వెంటవెంటనే రాని విధంగా ఎన్ని విధానాలుగా కూర్చోబెట్టవచ్చును.

సాధన

$$_B_1_B_2_B_3_B_4_B_5_$$

5 విద్యార్థులు ఒకే అడ్డవరుసలో $^5P_5 = 5!$ విధాలుగా కూర్చొబెట్టవచ్చును. ఈ క్రమబద్ధీకరించుటలో 6 అంతరములు కలవు. ఈ అంతరంలలో 4 విద్యార్థినులను $^6P_4$ విధములుగా కూర్చొబెట్టవచ్చును.

అందువలన ఈ విధంగా కూర్చొబెట్టగల సంఖ్య

$$5! \times {}^6P_4 = 120 \times 360 = 43200.$$

ఉదాహరణ 4.33 4 మంది బాలురు మరియు 4 మంది బాలికలను ఒకే వరుసలో ఒక బాలుడు తర్వాత ఒక బాలిక వచ్చునట్లు ఎన్ని విధాలుగా ఏర్పరచవచ్చును.

సాధన

4 బాలురను ఒక వరుసలో అమర్చుటకు $^4P_4 = 4!$ విధాలుగా వ్రాయవచ్చును. మొదట బాలురతో ప్రారంభించినట్లు అయితే 4 అంతరములు వచ్చును. ఈ అంతరములలో 4 బాలికలను అమర్చు విధముల సంఖ్య $^4P_4 = 4!$ విధాలుగా వ్రాయవచ్చును.

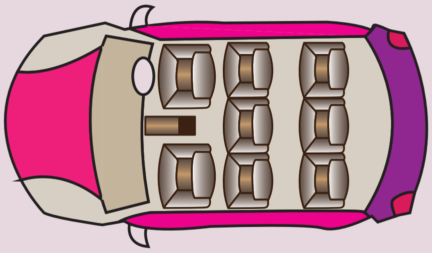
$$B_1_B_2_B_3_B_4_ \text{ or } G_1_G_2_G_3_G_4_$$

అందువలన మొదట విద్యార్థిగా తీసుకొన్నపుడు వచ్చు మొత్తం అమర్చువిధానాల సంఖ్య $4! \times 4!$ విధాలుగా వ్రాయవచ్చును. ఇదేవిధంగా మొదట బాలికను తీసుకొన్నప్పుడు వచ్చు మొత్తం అమర్చు విధానాల సంఖ్య $4! \times 4!$ విధాలుగా వ్రాయవచ్చును. సంకలన నియమము ప్రకారము ఒక బాలుడు లేదా ఒక బాలికను మొదట తీసుకొన్నపుడు వచ్చు మొత్తం అమర్చు విధానాల సంఖ్య

$$(4! \times 4!) + (4! \times 4!) = 2(4!)^2 = 1152.$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 203 10-03-2023 12:07:13

ఉదాహరణ 4.34 ఒక బండిలో '8' సీట్లు కలవు. మొదటి వరుసలో 2 సీట్లు దీనికి వెనుక వచ్చు రెండు వరుసలలో ఒక్కొక్కటిలో 3 సీట్లు కలవు. అదే బండిలో 7 మంది $F, M, S_1, S_2, S_3, D_1, D_2$ లు ఒకే కుటుంబమునకు చెందినవారు. క్రింద ఇవ్వబడిన నిబంధనల ప్రకారము ఎన్ని విధాలుగా కూర్చొబెట్టవచ్చును.



(i) ఎటువంటి నిబంధనలు లేకుండా

(ii) F లేదా M బండిని నడపవలెను.

(iii) F బండిని నడుపుతూ మరియు D_1, D_2 లు కిటికి సీటు ప్రక్కన కుర్చొనపుడు.

సాధన

(i) బండిలో వున్న 8 సీట్లలలో ఒక సీటును బండిని నడుపు వారికి కేటాయించబడినది. ఏ నిబంధన లేనందువలన ఏవరైన బండిని నడుపవచ్చును. అందువలన బండిని నడుపువారు $^7P_1 = 7$ విధాలుగా కూర్చొవచ్చును. మిగిలి వున్న 7 సీట్లలలో మిగిలిన 6 మంది $^7P_6 = 5040$ విధాలుగా కూర్చొవచ్చును. అందువలన బండిలో ఆ కుటుంబమును $7 \times 5040 = 35280$ విధాలుగా కూర్చొబెట్టవచ్చును.

(ii) F లేదా M బండిని నడుపుటకు రెండు విధములుగా నడపగలరు. అందువలన ఆ కుటుంబమును ఒండిలో $2 \times 5040 = 10080$ విధాలుగా కూర్చొబెట్టవచ్చును.

(iii) బండిలో 5 కిటికీ ప్రక్క సీట్లు మాత్రము కలవు అందులో D_1, D_2 కిటికి ప్రక్క సీట్లలలో $^5P_2 = 20$ విధాలుగా కూర్చొవచ్చును. F బండిని నడుపు వారుగ తీసుకున్నపుడు మిగిలిన 4 మంది మిగిలిన 5 సీట్లలలో $^5P_4 = 120$ విధాలుగా కూర్చొవచ్చును. అందువలన ఆ బంతిలో మొత్తం కుటుంబ సభ్యులు $20 \times 1 \times 120 = 2400$ విధాలుగా కుర్చొబెట్టవచ్చును.

తర్వాత లెక్కను అర్థము చేసుకొనుటకు మనము ఆంగ్ల నిఘంటువులో పదము యొక్క శ్రేణిగా నిర్వచిస్తాము. ఇవ్వబడిన పదంలో గల అక్షరములను తీసుకొని ఏర్పడు అక్షర వరుసను ఆంగ్ల నిఘంటువులో వున్న వరుస ప్రకారము వ్రాయునపుడు ఆ పదము వచ్చు స్థానమును దాని శ్రేణిగా నిర్వచించవచ్చును.

ఉదాహరణ 4.35 TABLE అను పదంలో గల అక్షరములను ఉపయోగించి నిఘంటువు ఆధారముగా అమర్చినచో క్రింది యివ్వబడిన పదంల యొక్క శ్రేణిని కనుగొనుము.

(i) TABLE (ii) BLEAT

సాధన

ఇవ్వబడిన పదంలో గల అక్షరములను ఆంగ్ల నిఘంటువులో A, B, E, L, T అను వరుస క్రమంలో అమిరి వున్నది. నిఘంటువులో A తో ప్రారంభమైనపుడు A ను మొదటి అక్షరముగా తీసుకొని మిగిలిన 4 అక్షరాలు (B,E,L,T) ను అమర్చినచో 4! విధాలుగా వ్రాయవచ్చును. దీని ప్రకారము.

(i) TABLE అను పదం శ్రేణ

A _ _ _ _ = 4! = 24 విధాలుగా

B _ _ _ _ = 4! = 24 విధాలుగా

E _ _ _ _ = 4! = 24 విధాలుగా

L _ _ _ _ = 4! = 24 విధాలుగా

T A B E L = 1 విధముగా

T A B L E = 1 విధముగా

TABLE అను పదం వచ్చు శ్రేణి $4 \times 4! + 1 + 1 = 98$.

(ii) BLEAT అను పదం శ్రేణి

A _ _ _ _ = 4! = 24 విధాలుగా

B A _ _ _ = 3! = 6 విధాలుగా

B E _ _ _ = 3! = 6 విధాలుగా

B L A _ _ = 2! = 2 విధాలుగా

BLEAT = 1 విధాలుగా

BLEAT అను పదం శ్రేణి $24 + 6 + 6 + 2 + 1 = 39$.

4.4.5 అన్నీ వేర్వేరు కాని వస్తువులు యొక్క ప్రస్తారణలు (Permuntations of not all distinct objects)

J E E అను పదము యొక్క అక్షర ప్రస్తారణను తీసుకొనుము. ఈ సందర్భంలో వున్న పదం యొక్క అక్షరములు వేర్వేరుగా లేదు. దీనిలో వున్న E అక్షరము రెండుసార్లు ఒకేవిధంగా వున్నది. తాత్కాలికంగా ఈ రెండు E లను E_1 మరియు E_2 వేర్వేరుగా తీసుకొనుము. 3 వేర్వేరు అక్షరముల ద్వారా ప్రస్తారణల సంఖ్య 3! అగును.

E_1, E_2 వేర్వేరుగా తీసుకొన్నపుడు ప్రస్తారణలు	E_1, E_2 లను ఒకే విధంగా తీసుకొన్నపుడు ప్రస్తారణలు
$J E_1 E_2$, $J E_2 E_1$	JEE
$E_1 J E_2$, $E_2 J E_1$	EJE
$E_1 E_2 J$, $E_2 E_1 J$	EEJ

E_1,E_2 రెండు అక్షరములను వాటిలో ప్రస్తారణములను చేయునపుడు వాస్తవంగా అదే ప్రస్తారణ రావడం దీనికి కారణమవుతుంది. ఇవి రెండు ఒకటే అయినచో కావలసిన ప్రస్తారణల సంఖ్య $\frac{3!}{2!} = 3$.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 205 10-03-2023 12:07:13

సిద్ధాంతము 4.4

n వస్తువులలో p వస్తువులు ఒకే మాదిరిగానూ మిగిలిన అన్నీ వేర్వేరుగానూ గల వస్తువుల యొక్క ప్రస్తారణల సంఖ్య $\frac{n!}{p!}$

సాధారణంగా n వస్తువులలో p_1 వస్తువులు మొదటి రకంగానూ p_2 వస్తువులు రెండవ రకంగానూ p_k వస్తువులు k రకంగానూ మిగిలిన వస్తువులు ఒక్కొక్కటి వేర్వేరుగానూ వుండు ప్రస్తారణల సంఖ్య $\frac{n!}{p_1! \times p_2! \times ... \times p_k!}$. □

ఉదాహరణ 4.36 BANANA అనే పదంలో గల అక్షరములను ఎన్ని విధములుగా ప్రస్తారణ చేయవచ్చును?

సాధన

సాధన : ఆ పదంలో 6 అక్షరములు కలవు. దీనిలో 3A లు 2N లు మరియు 1B కలదు. వీటిని ప్రస్తారణలుగా రాసినపుడు $\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$ వచ్చును.

ఉదాహరణ 4.37 RAMANUJAN అనే పదంలో గల అచ్చులు మరియు హల్లులు వున్న స్థానములను మార్చకుండా ఎన్ని విధాలుగా క్రమపరచవచ్చును?

సాధన

RAMANUJAN అను పదంలో 4 అచ్చులు (A,A,U,A) కలవు. దీనిలో 3A లు, 1U కలవు ఇంకా 5 హల్లులు (R,M,N,J,N) కలవు. వీటిలో 2N లు మిగిలినవి వేర్వేరుగా కలవు. ఈ 4 అచ్చులను (A,A,A,U) వాటిలో $\frac{4!}{3!} = 4$ విధాలుగా క్రమపరచవచ్చును 5 హల్లులు (R,M,N,J,N) వాటిలో $\frac{5!}{2!} = 60$ విధాలుగా క్రమపరచవచ్చును. కావున కావలసిన ప్రస్తారణల సంఖ్య $\frac{4!}{3!} \times \frac{5!}{2!} = 4 \times 60 = 240$.

ఉదాహరణ 4.38 ఒక ఛాయ చిత్రమునకు ఒక వరుసలో 3 జతలు నిలబడియున్నారు. క్రింద యివ్వబడిన నిబంధనల ప్రకారము ఎన్ని విధాలుగా అమర్చవచ్చును.

(i) ఎటువంటి నిబంధనలేనపుడు

(ii) ఒక్కొక్క వ్యక్తి వాళ్ళు జత ప్రక్కన నిలబడి వుండవలెను.

సాధన

(i) ఎటువంటి నిబంధన లేకుండా 6 మందిని ${}^6P_6 = 6! = 720$ విధాలుగా నిలబెట్టవచ్చును.

(ii) T_1, T_2, T_3 అనే మూడు జతలు కలవు. ఒక్కొక్క జతను ఒక భాగముగా తీసుకొనిన వానిని 3 విధాలుగా అమర్చవచ్చును. మరలా ప్రతి జత వారి మధ్యలో 2! విధాలుగా ప్రస్తారణలు చేయవచ్చును. అందువలన క్రమపరుచు విధానాల మొత్తం సంఖ్య $3! \times 2! \times 2! \times 2! = 48$ విధాలు.

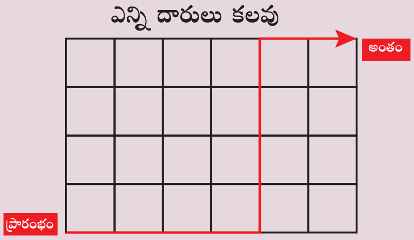
ఉదాహరణ 4.39 1,2,3,4,2,1 అంకెలనుపయోగించి సరిసంఖ్యలను సరిస్థానాలలో వచ్చునట్లు ఎన్ని సంఖ్యలను ఏర్పరచవచ్చును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 206 10-03-2023 12:07:14

సాధన

6 స్థానాలలో వుండు 3 సరిస్థానాలలో 2,4,2 అను సరి సంఖ్యలు రావలెను. అపుడు 2, 4,2 అంకెను ఉపయోగించి 3 సరిస్థానాలలో వచ్చు ప్రస్తారణలు $\frac{3!}{2!}=3$ విధాలుగా వచ్చును. అందువలన కావలసిన మొత్తం సంఖ్యలు $3\times3=9$.

ఉదాహరణ 4.40 పటంలో చూపిన విధంగా 6×4 దీర్ఘచతురస్రాకార పెట్టెలో ప్రారంభము నుండి అంతము వరకు పోవుటకు ఎన్ని దారులు కలవు.



పటము 4.15

సాధన

ఒక్కొక్క దారిలో 6 క్షితిజ సమాంతర యూనిట్ పొడవులు మరియు 4 లంబయూనిట్ పొడవులు కలవు. ఒక్కొక్క దారిలో 10 యూనిట్ పొడవులు కల్గియున్నవి. ఇక్కడ 6 ఒక రకమైనది (క్షితిజ సమాంతరం) మరియు 4 మరొక రకమైనది (లంబము) గా కలవు. అపుడు మొత్తం దారులు సంఖ్య $\frac{10!}{4!\times6!}=210$.

ఉదాహరణ 4.41 BHASKARA అనుపదంలో వున్న అక్షరం యొక్క వేర్వేరు ప్రస్తారణలు నిఘంటువులో కలవు. B తో ప్రారంభమగు పదము ముందు ఎన్ని అక్షర వరుస క్రమములుండును?

సాధన : B– కు ముందుగా A తో ప్రారంభమగు పదములు వచ్చును. A తో ప్రారంభమై A,A,B,H,K,R,S అక్షరములలో ఏర్పడు అక్షరవరుస క్రమముల సంఖ్య $\frac{7!}{2!}=2520$ వచ్చును.

ఉదాహరణ 4.42 IITJEE అనుపదంలో గల అన్నీ అక్షరములను అన్నీ విధాలుగా ప్రస్తారణలు చేసి రూపొందించునపుడు వచ్చు అక్షర వరుస క్రమం ఆంగ్ల నిఘంటువులో వున్న విధంగా క్రమపరిచినపుడు IITJEE అనుపదం యొక్క శ్రేణిని కనుగొనుము?

సాధన : IITJEE లో గల అక్షరముల ఆంగ్ల నిఘంటువులో వున్న విధంగా E,E,I,I,J,T గా వున్నవి. E తో ప్రారంభమగు పదముల అక్షర వరుస కావాలంటే, మొదట స్థానంలో E ను తీసుకొని మిగిలిన 5 అక్షరములు E,I,I,J,T) ను అమర్చినచో $\frac{5!}{2!}$ విధాలుగా వ్రాయవచ్చును. ఇదే విధంగా వరుస క్రమంలో

E _ _ _ _ _ $=\frac{5!}{2!}$ = 60 విధాలుగా

I E _ _ _ _ $=4!$ = 24 విధాలుగా

I I E _ _ _ $=3!$ = 6 విధాలుగా

I I J _ _ _ $=\frac{3!}{2!}$ = 3 విధాలుగా

I I T E _ _ $=2!$ = 2 విధాలుగా

I I T J E E $=1$ విధంగా.

IITJEE పదం యొక్క శ్రేణి $60+24+6+3+2+1=96$..

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 207 10-03-2023 12:07:14

ఉదాహరణ 4.43 1,2,4,6,8 అంకెలనుపయోగించి ఏర్పడు నాల్గు అంకెలు గల సంఖ్యల మొత్తంను కనుగొనుము?

సాధన : ఇవ్వబడిన 5 అంకెలునుపయోగించి ఏర్పడు 4 అంకెల గల సంఖ్య $^5P_4 = 120$ మనం మొదట 120 సంఖ్య లలో ఒకటి స్థానంలో వున్న అంకెల మొత్తంను కనుగొనవలెను. అపుడు ఒకట్లస్థానంలో 1 ని తీసుకొని మిగిలిన 3 స్థానాలలో మిగిలిన 4 అంకెలను తీసుకున్నపుడు $^4P_3 = 24$ విధాలుగా వ్రాయవచ్చును. అనగా 4 అంకెల సంఖ్యలో ఒకట్లస్థానంలో 1 ని తీసుకొని మిగిలిన 3 స్థానాలలో మిగిలిన 4 అంకెలను తీసుకున్నపుడు $^4P_3 = 24$ విధాలుగా వ్రాయవచ్చును. అనగా 4 అంకెల సంఖ్యలో ఒకట్లస్థానంలో 1 ని తీసుకున్నపుడు $^4P_3 = 24$ ఇదేవిధంగా 2,4,6,8 అంకెలను ఒకట్లస్థానంలో లభించినచో 24 సార్లు వచ్చును. 120 సంఖ్యలలో గల అన్నీ ఒకట్లస్థానంలోని అంకెలను మొత్తం కూడగా $(^4P_3 \times 1) + (^4P_3 \times 2) + (^4P_3 \times 4) + (^4P_3 \times 6) + (^4P_3 \times 8)$

$$= {}^4P_3 \times (1+2+4+6+8)$$

$$= {}^4P_3 \times \text{ (అంకెల మొత్తం)}$$

$$= {}^4P_3 \times 21.$$

ఇదేవిధంగా పదుల స్థానంలోని అంకెల మొత్తంను $^4P_3 \times 21$. ఇది పదుల స్థానంలో ఉండడం వల్ల దాని విలువ $^4P_3 \times 21 \times 10$. అవుతుంది. ఇదేవిధంగా వందల స్థానంలో మరియు వెయ్యిలస్థానంలో వున్న అంకెల మొత్తం విలువ వరుసగా $^4P_3 \times 21 \times 100$ మరియు $^4P_3 \times 21 \times 1000$. అవుతుంది. కావున 1,2,4,6,8 అంకెలనుపయోగించి 4 అంకెల మొత్తంను

$$(^4P_3 \times 21) + (^4P_3 \times 21 \times 10) + (^4P_3 \times 21 \times 100) + (^4P_3 \times 21 \times 1000) \text{ వ్రాయవచ్చును.}$$

$$= {}^4P_3 (21 \times 1111)$$

$$= 24 \times 21 \times 1111$$

$$= 559944.$$

ఉత్పాదకం 4.1: ఇవ్వబడిన n శూన్యేతర అంకెలనుపయోగించి అన్నీ r అంకెల మొత్తంను $^{n-1}P_{r-1} \times$ (అంకెల మొత్తం) $\times 111...1$ (r సార్లు)

ఉత్పాదకం 4.2: ఇవ్వబడిన n అంకెలలో 0 అనేది ఒక అంకె అయిన వీటిని ఉపయోగించి ఏర్పడు అన్నీ r అంకెల సంఖ్యల మొత్తం ('0' తో సహా)

$$\{^{n-1}P_{r-1} \times \text{ (అంకెల మొత్తం) } \times 111...1 (r \text{ సార్లు})\} -$$
$$\{^{n-2}P_{r-2} \times \text{ (అంకెల మొత్తం) } \times 111...1 ((r-1) \text{ సార్లు})\}.$$

ప్రమేయంగా ప్రస్తారణ (Permutation as Function)

$S_n = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$ అనుపరిమిత సమితిపై ప్రస్తారణలు $S_n \to S_n$ కు ద్విగుణప్రమేయం అగును. కావున n మూలకాలు కల్గిన పరిమిత సమితిపై నిర్వహించబడిన ప్రస్తారణలు సంఖ్య ఆ సమితిపై నిర్వచించబడిన ద్విగుణ ప్రమేయం మొత్తంనకు సమానము. ఇది ఖచ్చితంగా $n!$ అవుతుంది. కావున ఒక సమితిపై ప్రస్తారణ గురించి నేర్చుకొనడము ఒకటే అవుతుంది. S_3 పై గల కొన్ని ప్రస్తారణలు క్రిందవిధంగా యివ్వడమైనది.

$$\begin{bmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & A & B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} A & B & C \\ C & B & A \end{bmatrix}, ...$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 208 10-03-2023 12:07:16

అభ్యాసము 4.2

1. ${}^{(n-1)}P_3 : {}^{n}P_4 = 1:10$ అయినపుడు, n విలువను కనుగొనుము.

2. ${}^{10}P_{r-1} = 2\times{}^{6}P_r$ అయినపుడు, r విలువను కనుగొనుము.

3. (i) ఈత పోటీలో 8 మంది పాల్గొన్నారు. బంగారు, వెండి మరియు కాంస్య బహుమతులను ఎన్ని విధములుగా యివ్వగలరు?

   (ii) ముగ్గురు వ్యక్తులు వద్ద 4 చొక్కాలు, 5 పై చొక్కాలు మరియు 6 టోపీలును కల్గి వున్నది వారు వాటిని ఎన్నివిధములలో ధరించవచ్చును (ధరించగలరు).

4. SIMPLE అనుపదంలోని అన్నీ అక్షరములను ఒకే సమయంలో ఉపయోగించి ఎన్ని ప్రస్తారణలను వ్రాయవచ్చును.

5. ఒక పరీక్షలో 10 బహుళైచ్చిక ప్రశ్నలు కలవు క్రింద యివ్వబడిన నిబంధనల ప్రకారము ఆ పరీక్షకు ఎన్ని విధాలుగా యివ్వవచ్చును.

   (i)ప్రతి ప్రశ్నకు 4 ఎంపికలు కలవు.

   (ii)మొదటి 4 ప్రశ్నలుకు 3 ఎంపికలు మరియు మిగిలిన ప్రశ్నలుకు 5 ఎంపికలు కలవు.

   (iii)n ప్రశ్నలుకు $n+1$ ఎంపికలు కలవు.

6. ఒక విద్యార్థి 5 లక్ష్యాత్మక ప్రశ్నలుకు జవాబు ఇవ్వవలెను. ప్రతి ప్రశ్నకు 4 ఎంపికలలో ఒక ఎంపిక సరైనది.

   (i)గరిష్ఠంగా ఎన్ని వేర్వేరు సమాధానాలు ఒక విద్యార్థి ఎంపిక చేయగలడు?

   (ii)ఒక్కొక్క ప్రశ్నకు ఒకటి కన్నా ఎక్కువ ఎంపికలు సరిగ్గా వున్నచో ఆ సమాధానంను ఏవిధంగా వ్రాయవచ్చును?

7. ARTICLE అను పదంలో వున్న అక్షరముల ద్వారా సరిస్థానాలలో అచ్చులనుపయోగించి ఎన్ని వరుస పదాలును ఏర్పరవచ్చును?

8. ఒక వరుసలో 8 మంది స్త్రీలు మరియు 6 మంది పురుషులు నిలబడి వున్నారు.

   (i)ఏ వ్యక్తి అయిన, ఏ స్థానంలోనైనా నిలబడుటకు ఎన్ని విధాలుగా క్రమపరచవచ్చును?

   (ii)6 మంది పురుషులు ఒకరి తర్వాత ఒకరు నిలబడుటకు ఎన్ని విధాలు కలవు?

   (iii)ఏ ఇద్దరు పురుషులు ఒకరి తర్వాత ఒకరు నిలబడకుండా వుండేటట్లు ఎన్ని విధాలుగా నిలబెట్టవచ్చును?

9. MISSISSIPPI అను పదంలో గల అక్షరములనుపయోగించి ఎన్ని వేర్వేరు ప్రస్తారణలును కనుగొనవచ్చును?

10. $a^2b^3c^4$ అను లబ్ధము నందు ఘాతము లేకుండా ఎన్ని విధాలుగా వ్రాయవచ్చును?

11. 4 గణిత పుస్తకములు, 3 భౌతికశాస్త్ర పుస్తకములు, 2 రసాయన శాస్త్ర పుస్తకములు, 1 జంతుశాస్త్ర పుస్తకమును ఒక అలమారలో ఒకే పాఠ్య పుస్తకములు ఒకటిగా వచ్చు విధంగా ఎన్ని విధాలుగా అమర్చవచ్చును?

12. SUCCESS అను పదంలో గల అక్షరములలో అన్నీ S లు ఒకటిగా వచ్చు విధంగా ఎన్ని విధములుగా క్రమపరచవచ్చును?

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 209 10-03-2023 12:07:16

13. ఒక నాణెమును 8 సార్లు విసిరినపుడు

(i)వేర్వేరు బొమ్మలు మరియు బొరుసులు గల వరుసలు ఎన్ని గలవు?

(ii)6 బొమ్మలు మరియు 2 బొరుసులు గల వేర్వేరు వరుసలు ఎన్ని గలవు?

14. INTERMEDIATE అను పదంలో గల అక్షరములను ఉపయోగించి క్రింద నిబంధనలకు అనుగుణంగా ఎన్ని అక్షర వరుస క్రమములను ఏర్పరచవచ్చును.

(i)అచ్చులు మరియు హల్లులు వెంటవెంటనే వచ్చు విధంగా

(ii)అన్నీ అచ్చులు ఒకటిగా వచ్చు విధంగా

(iii)అచ్చులు ఒకటిగా రాని విధంగా

(iv)ఏ రెండు అచ్చులు ఒకటిగా రానివిధంగా

15. 1, 1, 2, 3, 3 మరియు 4 అంకెల విడివిడిగా ఒక అట్టముక్కపై వ్రాయబడినది. ఒక 6 అంకెల సంఖ్యను వ్రాయుటకు ఈ ఆరు అట్ట ముక్కలను వరుస పరిచినపుడు

(i) ఎన్ని విభిన్న 6 అంకెల సంఖ్యలను ఏర్పరచవచ్చును.

(ii) వీటిలో ఎన్ని 6 అంకెల సంఖ్యలో ఎన్ని సరిసంఖ్యలు కలవు.

(iii) వీటిలో ఎన్ని 6 అంకెల సంఖ్యలో 4 చే భాగించబడు సంఖ్యలు కలవు.

16. GARDEN అనుపదంలో గల అక్షరములను ప్రస్తారణ చేయుట ద్వారా వచ్చు అక్షరవరుస క్రమం ఆంగ్ల నిఘంటువులో వున్న వరుస క్రమములో వ్రాయునపుడు క్రింద యివ్వబడిన పదముల యొక్క శ్రేణిని కనుగొనుము? (i) GARDEN (ii) DANGER

17. THING అను పదంలో గల అక్షరములను ప్రస్తారణ చేయునపుడు అక్షర వరుసక్రమం పొందవచ్చును. దీనిని ఆంగ్ల నిఘంటువులో వున్న వధంగా వరుస పరిచినపుడు 85 వ అక్షర వరుస క్రమం ఏది వచ్చును.

18. FUNNY అను పదంలో గల అక్షరములను ప్రస్తారణ చేయునపుడు వచ్చు అక్షర వరుస క్రమం ఆంగ్ల నిఘంటువులో వున్న విధంగా అమర్చిన FUNNY అనే పదం యొక్క శ్రేణిని కనుగొనుము.

19. 1, 2, 3, 4 మరియు 5 అంకెలును ఆవర్తనము కాని విధముగా వచ్చు 4 అంకెల సంఖ్యల మొత్తంను కనుగొనుము.

20. 0, 2, 5, 7, 8 అంకెలను ఆవర్తనము కాని విధంగా వచ్చు అన్నీ 4 అంకె సంఖ్యల మొత్తంను కనుగొనుము?

4.5 సంయోగాలు (Combinations)

A,B,C మరియు D అనేవి ఏదైన నాలుగు వస్తువులలో ముగ్గరు వ్యక్తులును ఎంపిక చేసి ఒక సమూహాన్ని ఏర్పరచినట్లు అనుకొందాము. ఈ ఎంపికను ఎన్ని విధాలలో చేయవచ్చును? ఉదాహరణకు A,B,C అనే విధంగా ఒక ఎంపిక చేయవచ్చును. ఇక్కడ ఎంపిక చేసిన సంఖ్యల యొక్క వరుస ముఖ్యం కాదు. అందువలన A,B,C అనునది B,A,C; A,B,D; A,C,D; మరియు B,C,D అగును. అందువలన 4 మంది వ్యక్తులు నుండి 3 వ్యక్తులును 4 విధాలుగా ఎన్నుకొనవచ్చును. ఈ ఒక్కొక్క ఎంపిక 4 వేర్వేరు వస్తువుల నుండి ఒకే సమయంలో 3 వస్తువులను ఎంపిక చేయు సంయోగము అని చెప్పగలము.

4 మంది వ్యక్తులు నుండి 2 వ్యక్తులును ఎంపిక చేసాము అని అనుకొనుము. సాధ్యమైన ఎంపికలు A,B: A,C: A,D: B,C: B,D: C,D అందువలన 4 వేర్వేరు వస్తువులనుండి రెండు వస్తువులను ఎంపిక

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 210 10-03-2023 12:07:16

చేయు సంయోగములసంఖ్య 6 అగును. విభిన్న n వస్తువులనుండి r వస్తువులును ఎంపిక చేయు సంయోగముల సంఖ్య ^nC_r గా వ్రాయుదము. వైవిధంగా మనము $^4C_3 = 4$ మరియు $^4C_2 = 6$ అని తెలుసుకోవచ్చును. $^4C_3$ అనునది 4 విభిన్నవస్తువులనుండి ఒక సమయంలో 3 వస్తువులును ఎంపికచేయు సంయోగముల సంఖ్య అగును. ఒక్కొక్క 3 వస్తువుల సంయోగమును 3 విధాలుగా ఏర్పరచవచ్చును అందువలన నాల్గు వేర్వేరు వస్తువుల నుండి ఒక సమయంలో 3 వస్తులును వరుస పరుచు ప్రసారణలసంఖ్య $^4C_3 \times 3!$ అగును ఇది $^4P_3$ కి సమానమగును. అందువలన $^4P_3 = {}^4C_3 \times 3!$.

సాధారణంగా ప్రస్తారణలు మరియు సంయోగముల మధ్య ముఖ్యమైన సంబంధమును క్రింది విధంగా వ్రామవచ్చును.

$$^nP_r = {}^nC_r \times r!$$

సహజంగా ప్రస్తారణము మరియు సంయోగము గురించి చదివే అందరికి ఒక సందిగ్ధం (confuse) వచ్చు అవకాశము కలదు. ఉదాహరణలతో వివరించిన క్రింది ఇవ్వబడిన పట్టిక ద్వారా సందిగ్ధతను తొలిగించుటకు సహాయపడును.

వరుస	వివరణ	ప్రస్తారణలు	సంయోగములు
1	అనగానేమి?	క్రమపరచు విదానాల సంఖ్య లేదా వస్తువుల యొక్క జాబితా	ఎంపిక చేయు విధానాల సంఖ్య లేదా వస్తువుల యొక్క సమూహము.
2	ఎక్కడ ఉపయోగిస్తారు	వస్తువుల వరుస ముఖ్య మైనది అయితే	వస్తువుల వరుస ముఖ్యత్వం లేనపుడు
3	ప్రాతినిధ్యం	^nP_r	^nC_r
ఉదాహణలు			
4	క్రికెట్ ఆటలో	15 మంది బ్యాటింగ్ క్రీడా కారులు నుండి 11 మంది బ్యాటింగ్ క్రీడాకారుల కల్గిన వరుస సంఖ్య	15 మంది బ్యాటింగ్ క్రీడాకారుల నుండి 11 మంది క్రీడాకారుల కల్గిన వరుసంఖ్య కల్గిన జట్టుల సంఖ్య
5	బహుమతులను పంచువిధానములో	3 విభిన్న బహుమతులును పంచు విధానముల సంఖ్య	3 ఒకే రకమైనబహుమతులును పంచు విదానాల సంఖ్య.
6	సముహామును ఏర్పరుచటలో	13 మంది వ్యక్తులు నుండి ఒక అద్యక్షుడు మరియు ఒక ఉపఅధ్యక్షుడు ఎన్నుకొనే విధానాల సంఖ్య	13 మంది వ్యక్తులు నుండి 2 వ్యక్తులు యొక్క సమూహాముగా ఎన్ను కొను విధానాలు సంఖ్య
7	వస్తువుల ఎంపిక చేయువిధానములో	15 విభిన్న వస్తువుల నుండి 3 వస్తువులు ఒకటి తర్వాత ఒకటి వచ్చునట్లు ఎంపిక చేయు విధానాల సంఖ్య	15 విభిన్న వస్తువుల నుండి 3 వస్తువులను ఒకే సమయంలో ఎంపిక చేయువిధానాల సంఖ్య

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 211 10-03-2023 12:07:18

సిద్ధాంతము 4.5

n విభిన్న వస్తువుల నుండి ఒకే సమయంలో r వస్తువులును ఎంపిక చేయు సంయోగముల సంఖ్య ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}, 0 \le r \le n$.

నిరూపణ: ప్రస్తారణలుకు మరియు సంయోగాల మధ్యగల సంబంధము నుండి ${}^nC_r = \dfrac{{}^nP_r}{r!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ (ప్రస్తారణల నిర్వచనం నుండి)

4.5.1 సంయోగాల ధర్మాలు:

ధర్మము 1 :

(i) ${}^nC_0 = 1$ (ii) ${}^nC_n = 1$ (iii) ${}^nC_r = \dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}$

నిరూపణ

(i) ${}^nC_0 = \dfrac{n!}{0!(n-0)!} = 1$

(ii) ${}^nC_n = \dfrac{n!}{n!(n-n)!} = \dfrac{n!}{n!0!} = 1$

(iii) ${}^nC_r = \dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-(r-1))}{r!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-r+1)}{r!}$.

ధర్మము 2 : ${}^nC_{n-r} = \dfrac{n!}{(n-r)!(n-(n-r))!} = \dfrac{n!}{(n-r)!r!} = {}^nC_r$

${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

ధర్మము 3 :

${}^nC_x = {}^nC_y$ అయిన $x = y$ లేక $x + y = n$.

నిరూపణ: 2 వ ధర్మము నుండి మనకు ${}^nC_y = {}^nC_{n-y}$ అందువలన, ${}^nC_x = {}^nC_y = {}^nC_{n-y}$

ఇవ్వబడినది $x = y$ లేక $x = n - y$ కావున, $x = y$ లేక $x + y = n$

ధర్మము 4 : ${}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r$

నిరూపణ: సంయోగము కొరకు సమాసము ఉపయోగించి

$$\begin{aligned}
{}^nC_r + {}^nC_{r-1} &= \frac{n!}{r!.(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!.(n-(r-1))!} \\
&= \frac{n!}{r! \times (n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)! \times (n-r+1)!} \\
&= \frac{n!}{r.(r-1)! \times (n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!.(n-r)!(n-r+1)} \\
&= \frac{n!}{(r-1)! \times (n-r)!} \times \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{(n-r+1)}\right) \\
&= \frac{n!}{(r-1)! \times (n-r)!} \times \frac{(n-r+1+r)}{r(n-r+1)} \\
&= \frac{n!}{(r-1)! \times (n-r)!} \times \frac{(n+1)}{r(n-r+1)} \\
&= \frac{(n+1)!}{r! \times (n+1-r)!} = {}^{n+1}C_r.
\end{aligned}$$

□

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 212 10-03-2023 12:07:20

ధర్మము 5 : $^{n}C_{r} = \frac{n}{r} \times {}^{(n-1)}C_{(r-1)}$

నిరూపణ: $\frac{n}{r} \times {}^{(n-1)}C_{(r-1)} = \frac{n}{r} \frac{(n-1)!}{(r-1)! \times ((n-1)-(r-1))!}$

$$= \frac{n(n-1)!}{r(r-1)!(n-r)!} = {}^{n}C_{r}.$$ □

ఉదాహరణ 4.44 విలువను కనుగొనుము

(i) $^{10}C_3$ (ii) $^{15}C_{13}$ (iii) $^{100}C_{99}$ (iv) $^{50}C_{50}$

సాధన

(i) $^{10}C_3 = \frac{10!}{7! \times 3!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7! \times 3 \times 2 \times 1}$

$= \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120$

(ii) $^{15}C_{13} = \frac{15!}{2! \times 13!} = \frac{15 \times 14 \times 13!}{2 \times 1 \times 13!}$

$= \frac{15 \times 14}{2 \times 1} = 105$

(iii) $^{100}C_{99} = \frac{100 \times 99!}{99!} = 100$

(iv) $^{50}C_{50} = \frac{50!}{50! \times 0!} = 1$

ఉదాహరణ 4.45 5 వ ధర్మము ఉపయోగించి $^{5}C_2$ మరియు $^{7}C_3$ విలువను కనుగొనుము.

సాధన $^{n}C_r = \frac{n}{r} \times {}^{n-1}C_{r-1}$

$n = 5$ మరియు $r = 2$ ను ప్రతిక్షేపించిన

$$^{5}C_2 = \frac{5}{2} \times {}^{4}C_1 = \frac{5}{2} \times \frac{4}{1} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

$n = 7$ మరియు $r = 3$ ను ప్రతిక్షేపించిన

$$^{7}C_3 = \frac{7}{3} \times {}^{6}C_2 = \frac{7}{3} \times \frac{6}{2} \times {}^{5}C_{2-1}$$

$$= \frac{7}{3} \times \frac{6}{2} \times {}^{5}C_1 = \frac{7}{3} \times \frac{6}{2} \times \frac{5}{1}$$

$$= \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35$$

ఉదాహరణ 4.46 $^{n}C_4 = 495$ అయితే n విలువను కనుగొనుము?

సాధన

$^{n}C_4 = 495$ అని మనకు తెలుసు

అందువలన $\frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 495$

$$\Rightarrow n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) = 495 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

495 యొక్క కారణాంకాలు $= 3 \times 3 \times 5 \times 11$ ఈ లబ్దమును 4 వరుస సంఖ్యలో అవరోహణ క్రమము లబ్దముగా వ్రాయవచ్చును. $n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3) = 12 \times 11 \times 10 \times 9$ వచ్చును.

n ను గరిష్ఠ విలువతో సమానపరచిన, మనకు $n = 12$ లభించును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 213 10-03-2023 12:07:23

ఉదాహరణ 4.47 ${}^nP_r = 11880$ మరియు ${}^nC_r = 495$ అయిన n మరియు r విలువను కనుగొనుము

సాధన

$\frac{{}^nP_r}{{}^nC_r} = r!$ అని తెలుసు.

అందువలన, $r! = \frac{11880}{495} = 24 = 4!$.

దీని నుండి $r = 4$ అని పొంద వచ్చును. అనగా $r = 4$ ను ${}^nC_4 = 495$ లో ఉపయోగించిన పలితము ఉదాహరణ 4.46 నుండి $n = 12$ గా వచ్చును.

ఉదాహరణ 4.48 ${}^{24}C_4 + \sum_{r=0}^{4} {}^{(28-r)}C_3 = {}^{29}C_4$ అని నిరూపించుము.

సాధన

$$\begin{aligned}
{}^{24}C_4 + \sum_{r=0}^{4} {}^{(28-r)}C_3 &= {}^{24}C_4 + {}^{28}C_3 + {}^{27}C_3 + {}^{26}C_3 + {}^{25}C_3 + {}^{24}C_3 \\
&= {}^{24}C_4 + {}^{24}C_3 + {}^{25}C_3 + {}^{26}C_3 + {}^{27}C_3 + {}^{28}C_3 \\
&= {}^{25}C_4 + {}^{25}C_3 + {}^{26}C_3 + {}^{27}C_3 + {}^{28}C_3 \\
&= {}^{26}C_4 + {}^{26}C_3 + {}^{27}C_3 + {}^{28}C_3 \\
&= {}^{27}C_4 + {}^{27}C_3 + {}^{28}C_3 \\
&= {}^{28}C_4 + {}^{28}C_3 \\
&= {}^{29}C_4.
\end{aligned}$$

ఉదాహరణ 4.49 ${}^{10}C_2 + 2 \times {}^{10}C_3 + {}^{10}C_4 = {}^{12}C_4$ అని నిరూపించుము.

సాధన

$$\begin{aligned}
{}^{10}C_2 + 2 \times {}^{10}C_3 + {}^{10}C_4 &= {}^{10}C_2 + ({}^{10}C_3 + {}^{10}C_3) + {}^{10}C_4 \\
&= ({}^{10}C_2 + {}^{10}C_3) + ({}^{10}C_3 + {}^{10}C_4) \\
&= {}^{11}C_3 + {}^{11}C_4 \\
&= {}^{12}C_4.
\end{aligned}$$

ఉదాహరణ 4.50 ${}^{(n+2)}C_7 : {}^{(n-1)}P_4 = 13 : 24$ అయిన n విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$$\begin{aligned}
{}^{(n+2)}C_7 : {}^{(n-1)}P_4 &= 13 : 24 \\
\frac{{}^{(n+2)}C_7}{{}^{(n-1)}P_4} &= \frac{13}{24} \\
\frac{(n+2)!}{(n-5)! \times 7!} \times \frac{(n-5)!}{(n-1)!} &= \frac{13}{24} \Rightarrow \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)!}{(n-1)! \times 7!} = \frac{13}{24}
\end{aligned}$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 214 10-03-2023 12:07:25

$$(n+2)(n+1)(n) = \frac{13}{24}\times 7! = \frac{13}{24}\times 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1$$
$$(n+2)(n+1)(n) = 13\times 14\times 15$$
$$n+2 = 15 \Rightarrow n = 13.$$

ఉదాహరణ 4.51 ఒక అల్పాహారశాలలో ఆపిల్ అరటిపండ్లు, జామ పండు, దానిమ్మ పండు, ద్రాక్ష, బొప్పాయి పండు మరియు అనాస పండ్లల నుండి 4 పండ్లను మిశ్రమండి తీసుకొనుము పండ్లు మిశ్రమమును మొత్తం ఎన్ని విధాలుగా తయారు చేయవచ్చును.

సాధన

7 పండ్లు నుండి ఫల మిశ్రమమును తయారు చేయుటకు 4 పండ్లు ఎంపిక చేయవలెను. అందువలన సాధ్యమైన ఫల మిశ్రమము తయారుచేయు విధానాల సంఖ్య $^{7}C_{4} = {^{7}C_{3}} = 35$.

ఉదహరణ 4.52 ఒక గణిత క్లబ్‌లో 15 మంది వ్యక్తులు కలరు. దానిలో 8 మంది అమ్మాయిలు కలరు. సగం మంది అమ్మాయిలు వచ్చునట్లు ఒక పోటీను 6 మంది ఎంపిక చేయవలెను. ఎన్ని సాధ్యమైన విధాలుగా ఎంపిక చేయవచ్చును.

సాధన

గణిత క్లబ్ లో 8 మంది అమ్మాయిలు 7 మంది అబ్బాయిలు కలరు. దీని లో 6 మంది వ్యక్తులలో సగం అమ్మాయిలు (3 మంది అమ్మాయిలు మరియు 3 మంది ఇతరులు) వచ్చునట్లు $^{8}C_{3}\times {^{7}C_{3}} = 56\times 35 = 1960$ విధాటుగా ఎంపిక చేయవచ్చును.

ఉదాహరణ 4.53 20 వ్యాసార ముద్ర కారులలో కారుల విలువను నిర్ణయించు సంస్థ, 5 వ్యాపార ముద్ర కారులను మొదటిది,రెండవది, మూడవది, నాల్గవది మరియు ఐదవది మంచి కారులు అని మిగిలిన 7 కారులను ఎంపిక చేసి అంగీకరింపబడినవి అని చెప్పుటకు ఎన్ని విధములు కలవు?

సాధన

20 వ్యాపార ముద్ర కార్లరో 5 కార్లు తీసుకొనిన మొదటిది, రెండవది, మూడవది, నాల్గవది మరియు ఐదవది అని మొత్తం 20 విధములలో వరుస పరచవచ్చును. మిగిలిన 15 వ్యాపార ముద్ర కారులలో 7 కారులు అంగీకరింపబడినవి అని చెప్పుటకు 15 విధములు కలవు . అందువలన లబ్ద నియమము ప్రకారము $^{20}P_{5}\times {^{15}C_{7}}$ విధములలో చేయ వచ్చును.

ఉదాహరణ 4.54 25 మంది విద్యార్థులు గల ఒక తరగతిలో 10 మంది విద్యార్థులను విహారయాత్రకు ఎంపిక చేయువలెను. దీనిలో 4 మంది విద్యార్థులు ఒకటిగా పాల్గోనడం లేదా పాల్గొనక పోవడము అని నిర్ణయించిరి. విహారయత్రకు విద్యార్థులు ఎన్ని విధాలుగా ఎంపిక చేయవచ్చును?

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 215 10-03-2023 12:07:26

సాధన : దీనిలో రెండు సాధ్యములు కలవు

(i) నలుగురు విద్యార్థులు ఒకటిగా విహారయాత్రకు పాల్గోనడము వల్ల మిగిలిన 6 మంది విద్యార్థులను 21 మంది విద్యార్థులు నుండి $^{21}C_6 = \frac{21!}{6! \times 15!}$ విధాలుగా ఎంపిక చేయవచ్చును.

(ii) నలుగురు విద్యార్థులు ఒకటిగా విహారయాత్రలో పాల్గోనకుండా వుండిన, 10 మందివిద్యార్థులను 21 మంది విద్యార్థులు నుండి $^{21}C_{10} = \frac{21!}{10! \times 11!}$ విధాలుగా ఎంపిక చేయవచ్చును. అందువలన

మొత్తం విధానాల సంఖ్య $^{21}C_6 + {}^{21}C_{10} = \frac{21!}{6! \times 15!} + \frac{21!}{10! \times 11!}$.

ఉదాహరణ 4.55 ఒక డజన్ ఆపిల్ పండ్ల గల పెట్టెలో ఒక క్రుళ్ళిపోయిన ఆపిల్ కలదు. వీటిలో 3 ఆపిల్‌ను ఒకే సమయములో తీసుకొన్నప్పుడు ఎన్ని విధాలుగా మంచి ఆపిల్‌ను ఎంపిక చేయవచ్చును.

సాధన

12 ఆపిల్‌లనుండి 3 ఆపిల్‌లను $^{12}C_3 = 220$ విధాలుగా ఎంపిక చేయవచ్చును. 12 ఆపిల్‌ల నుండి 3 ఆపిల్‌లను ఎంపిక చేయునపుడా ఒక కుళ్ళి పోయిన ఆపిల్ ను ఎంపిక చేయు సంఖ్య అనునది ఒక కుళ్ళిపోయిన ఆపిల్‌ను ఎంపిక చేయుట మరియు రెండు ఆపిల్‌ను మిగిలిన 11 ఆపిల్‌ల నుండి $^{11}C_2 = 55$ విదాలుగా ఎంపికచేయవచ్చును.

అందువలన మంచి ఆపిల్‌లను మాత్రము పొందుటకు గల విధానాల సంఖ్య $^{12}C_3 - {}^{11}C_2 = 220 - 55 = 165$.

ఉదాహరణ 4.56 ఒక ప్రశ్నా పత్రములో 8 ప్రశ్నలు కలవు భాగము A లో 4 ప్రశ్నలు మరియు భాగము B లో 4 ప్రశ్నలు వున్నవి. పరీక్ష వ్రాయువారు 5 ప్రశ్నలుకు జవాబు యివ్వవలెను. క్రింద యివ్వబడిన నిబంధనల ప్రకారము ఎన్ని విధాలుగా చేయవచ్చును.

(i) రెండు భాగాలలో ఏ నిబంధన లేకుండా ఎన్ని ప్రశ్నలైనను ఎంపిక చేయవచ్చును.

(ii) కనీసము 2 ప్రశ్నలైన భాగము A నుండి జవాబు వ్రాయవలెను.

సాధన

(i) ఏ నిబంధన లేకుండా : భాగము A మరియు భాగము B లో వున్న మొత్తం 8 ప్రశ్నలలో 5 ప్రశ్నలును ఈ విధంగా ఎంపిక చేయవచ్చును. $^8C_5 = {}^8C_3 = 56$

(ii) కనీసము రెండు ప్రశ్నలు భాగము A నుండి జవాబు యివ్వుట : దీని ప్రకారము క్రింద పట్టికలో వున్నవిధంగా సాధ్యమగును.

భాగము A	భాగము B	ఎంపిక చేయువిధానాల సంఖ్య
2	3	$^4C_2 \times {}^4C_3$
3	2	$^4C_3 \times {}^4C_2$
4	1	$^4C_4 \times {}^4C_1$

అందువలన జవాబు యివ్వుటకు కావలసిన విధానాల సంఖ్య

$$^4C_2 \times {}^4C_3 + {}^4C_3 \times {}^4C_2 + {}^4C_4 \times {}^4C_1 = 24 + 24 + 4 = 52.$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 216 10-03-2023 12:07:27

ఉదాహరణ 4.57 7 హల్లులు మరియు 4 అచ్చులు నుండి 3 హల్లులు మరియు 2 అచ్చులు వుండునట్లు ఎన్ని అక్షర వరుస క్రమములను వ్రాయవచ్చును?

సాధన

7 హల్లులు నుండి 3 హల్లులను మరియు 4 అచ్చుల నుండి 2 అచ్చులను తీసుకొను విధానాల సంఖ్య ${}^7C_3 \times {}^4C_2$ ప్రతి అక్షర వరుసక్రమంలో 5 అక్షరములు కలవు. ఈ 5 అక్షరముల మధ్య ఏర్పడు అక్షర వరుసక్రమము $5! = 120$ విధాలుగా వ్రాయవచ్చును. కావలసిన విధానాల సంఖ్య ${}^7C_3 \times {}^4C_2 \times 5! = 35 \times 6 \times 120 = 25200$

ఉదాహరణ 4.58 PROPOSITION అను పదంలో గల అక్షరములనుపయోగించి 5 అక్షరములు గల అక్షరవరుస క్రమములను ఎన్ని విధాలుగా వ్రాయవచ్చును.

సాధన

దీనిలో 11 అక్షరములు కలవు. దీనిలో '4' వేర్వేరు అక్షరములు (R,S,T,N) రెండు ఒకే విధమైన అక్షరములు గల రెండు జతలు (PP,II) మరియు 3 ఒకేవిధమైన అక్షరములు గల ఒక జత (OOO) కలవు. క్రింది యివ్వబడిన పట్టిక, పైన వివరించిన విధంగా వచ్చు పదముల యొక్క సంయోగము సంఖ్య :

వరుస సంఖ్య	అక్షరముల ఎంపిక	ఎంపిక	అమర్చుట
1	5 విభిన్నమైనవి (R,S,T,N,P,I,O)	${}^7C_5$	${}^7C_5 \times 5! = 2520$
2	ఒకే విధమైన 3 అక్షరములు (OOO) కల్గిన ఒక జత, ఒకే విధమైన 2 అక్షరములు (PP,II) కల్గిన ఒక జత	${}^1C_1 \times {}^2C_1$	${}^1C_1 \times {}^2C_1 \times \frac{5!}{3! \times 2!} = 20$
3	ఒకేవిధమైన 3 అక్షరములు (OOO), కల్గిన ఒక జత, రెండు విభిన్నమైనది (R,S,T,N,P,I)	${}^1C_1 \times {}^6C_2$	${}^1C_1 \times {}^6C_2 \times \frac{5!}{3!} = 300$
4	ఒకే విధమైన రెండు అక్షరము (PP,II,OO) లు కల్గిన రెండు జతలు, ఒకటి విభిన్నం (R,S,T,N మరియు మిగిలిన ఒకే మాదిరైన రెండు అక్షరములు కల్గయున్న జతలనుండి)	${}^3C_2 \times {}^5C_1$	${}^3C_2 \times {}^5C_1 \times \frac{5!}{2! \times 2!} = 450$
5	ఒకే విధమైన రెండు అక్షరములు కల్గిన ఒక జత (PP,II,OO), 3 విభిన్నాలు (R,S,T,N మరియు మిగిలిన రెండు ఒకే విధమైన రెండు అక్షరముల నుండి)	${}^3C_1 \times {}^6C_3$	${}^3C_1 \times {}^6C_3 \times \frac{5!}{2!} = 3600$

కావలసిన మొత్తం అక్షర వరుస క్రమముల సంఖ్య

$$2520 + 20 + 300 + 450 + 3600 = 6890.$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 217 10-03-2023 12:07:27

ఉదాహరణ 4.59 m సమాంతర రేఖలు కల్గిన ఒక జత, మరొక n సమాంతర రేఖలు కల్గిన ఒక జతను మొదటి జతలో వున్న రేఖలకు సమాంతరం కాదు. ఖండించునపుడు అల్లిక నిర్మాణము ద్వారా ఎన్ని సమాంతర చతుర్భుజములను నిర్మించవచ్చును.

సాధన

m సమాంతర రేఖల జత నుండి 2 రేఖలను మరియు n సమాంతర రేఖల జత నుండి 2 రేఖలును తీసుకొని ఒక సమాంతర చతురస్రంను ఏర్పరచవచ్చును. అందువలన సమాంతర చతుర్భుజము ఏర్పడువిధానాల సంఖ్య ${}^{m}C_2 \times {}^{n}C_2$.

ఉదాహరణ 4.60 n భుజములు గల ఒక బహుభుజికి ఎన్ని వికర్ణములు కలవు.

సాధన

n భుజములు కల్గిన ఒక బహుభుజిలో n శీర్షాలు కలవు. బహుభుజి యొక్క ఏ రెండు శీర్షాలును కలిపినపుడు ఒక భుజము లేదా ఒక వికర్ణం వచ్చును n భుజాలు కల్గిన బహుభుజిలో ఒకే సమయంలో రెండు శీర్షాలును కలిపినపుడు ఏర్పడు రేఖా ఖండములు సంఖ్య ${}^{n}C_2 = \frac{n(n-1)}{2}$ n భుజాలు కల్గిన బహుభుజిలో గల వికర్ణముల సంఖ్య $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$

ప్రత్యేకంగా ఒక పంచభుజి మరియు సప్తభుజిలో వికర్ణముల సంఖ్య వరుసగా $\frac{5(5-3)}{2} = 5$ మరియు $\frac{7(7-3)}{2} = 14$.

అభ్యాసము 4.3

1. ${}^{n}C_{12} = {}^{n}C_9$ అయినపుడు, ${}^{21}C_n$ విలువను కనుగొనుము. ?

2. ${}^{15}C_{2r-1} = {}^{15}C_{2r+4}$ అయిన, r విలువను కనుగొనుము.

3. ${}^{n}P_r = 720$ మరియు ${}^{n}C_r = 120$ అయిన, n, r విలువను కనుగొనుము.

4. ${}^{15}C_3 + 2 \times {}^{15}C_4 + {}^{15}C_5 = {}^{17}C_5$ అని నిరూపించుము.

5. ${}^{35}C_5 + \sum_{r=0}^{4} {}^{(39-r)}C_4 = {}^{40}C_5$ ను నిరూపించుము.

6. ${}^{(n+1)}C_8 : {}^{(n-3)}P_4 = 57:16$ అయిన, n విలువను కనుగొనుము.

7. ${}^{2n}C_n = \frac{2^n \times 1 \times 3 \times ... \times (2n-1)}{n!}$ నిరూపించుము.

8. $1 \le r \le n$ అయినపుడు $n \times {}^{(n-1)}C_{r-1} = (n-r+1) \times {}^{n}C_{r-1}$ నిరూపించుము.

9. (i) ఒక కబడ్డీ కోచ్ వద్ద 14 మంది క్రీడాకారులు ఆడుటకు సిద్ధముగా ఉన్నారు, 7 మంది క్రీడాకారులు కల్గిన వేర్వేరు సమూహాములుగా ఎన్ని ఏర్పరచగలరు.

   (ii) ఒక పార్టీలో 15 మంది వ్యక్తులు కలరు. మరియు ఏ ఇద్దరు వ్యక్తులు మధ్య కరచాలనము (Hand shake) జరిగినది అనుకొంటే ఆ పార్టీలో ఎన్ని కరచాలనములు జరుగును.

   (iii) ఒక వృత్తం మీద 20 బిందువులు ద్వారా ఎన్ని జ్యా లను గీయవచ్చును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 218 10-03-2023 12:07:29

(iv) ఒక పార్కింగ్‌లో ఒక సంవత్సరమైన 100 పాత కార్లు నిలబడి వున్నాయి. ఆ కార్ల నుండి, కాలుష్య నివారణ యంత్రంము ద్వారా ఏ విధంగా పని చేస్తుందని పరీక్షించుటకు ఏదైన 5 కార్లను ఎంపిక చేయవచ్చును.

(v) 5 మంది అబ్బాయిలు, 4 మంది అమ్మాయిలు మరియు 2 నంపుంశకులు ద్వారా 3 అబ్బాయిలను, 2 అమ్మాయిలను మరియు 1 నంపుంశకములను ఎన్ని విధాలుగా ఎంపిక చేయవచ్చును.

10. క్రింద యివ్వబడిన సమితుల యొక్క ఉపసమితుల సంఖ్యను కనుగొనుము.

[సూచన : ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + ... + {}^nC_n = 2^n$]

(i) 4 మూలకాలు (ii) 5 మూలకాలు (iii) n మూలకాలు

11. ఒక సంస్థలో 25 మంది సభ్యులు కలరు.

(i) వీరిలో 3 అధికారులును ఎన్నివిధాలుగా ఎంపిక చేయవచ్చును.

(ii) వీరిలో ఒక అధ్యక్షుడు, ఉపాధ్యక్షుడు మరియు ఒక కార్యదర్శిలను ఎంపిక చేయవచ్చును.

12. ఒక సముహములో వున్న 10 వ్యక్తులలో 6 మందిని ఎంపిక చేయునపుడు వారిలో ఒక అధ్యక్షుడు మరియు ఒక సభాపతి వచ్చే విధంగా ఎన్ని విధాలుగా ఎంపిక చేయవచ్చును.

13. 12 విభిన్న పుస్తకముల నుండి 5 విభిన్న పుస్తకములను ఎంపిక చేయుటకు ఈ క్రింది నిబంధనల ప్రకారము ఎన్ని విధాలుగా ఎంపిక చేయవచ్చును.

(i) రెండు ముఖ్యమైన పుస్తకాలును ఎల్లప్పుడూ ఎంపిక చేయడమైనది.

(ii) రెండు ముఖ్యమైన పుస్తకాలును ఎల్లప్పుడూ ఎంపిక చేయబడదు.

14. 5 మంది ఉపాధ్యాయులు మరియు 20 మంది విద్యార్థులు కలరు. వీరిలో రెండు ఉపాద్యాయులు మరియు 3 విద్యార్థులును తీసుకొని ఒక సముహాన్ని ఏర్పరిచిరి. దీనిని ఎన్ని విధాలుగా చేయవచ్చును. క్రింద నిబంధన ప్రకారము వీరి నుండి ఎన్ని సముహాలును ఏర్పరచవచ్చును.

(i) ఆ సముహములో ఒక ప్రత్యేక ఉపాధ్యాయుడు వుండునట్లు

(ii) ఆ సముహములో ఒక ప్రత్యేక విద్యార్థి వుండునట్లు

15. ఒక పరీక్షలో 9 ప్రశ్నల నుండి 2 ప్రశ్నలుకు ఖచ్చిత సమాధానము యివ్వవలెను అను నిబంధనతో 5 ప్రశ్నలుకు సమాధానము యివ్వవలెను. ఎన్ని విధాలుగా ఆ ప్రశ్నలుకు విద్యార్థి జవాబు యివ్వగలడు.

16. 52 పేకముకకల నుండి ఒకేసారి 5 పేక ముక్కలను తీసినపుడు దానిలో ఖచ్చితంగా 3 ఎసెస్ (*aces*) లు రావడానికి సంయోగములును కనుగొనుము?

17. 7 మంది భారతీయులు మరియు 5 మంది అమెరికన్లు నుండి భారతీయుల గరిష్ఠంగా వుండే విధంగా 5 మంది సభ్యులుగా గల సమూహములను ఎన్ని విధాలుగా ఏర్పరచవచ్చును.

18. 8 మంది పురుషులు మరియు 4 స్త్రీలు నుండి 7 మంది కల్గిన ఒక సమూహామును ఏర్పరచబడినది. క్రిందయివ్వబడిన నిబంధనలు పూర్తి చేయువిధంగా ఎన్ని సముహములను ఏర్పరచవచ్చును.

(i) ఖచ్చితంగా 3 స్త్రీలు వుండు విధంగా

(ii) కనీసం 3 స్త్రీలు వుండే విధంగా

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 219 10-03-2023 12:07:29

(iii) గరిష్ఠంగా 3 స్త్రీలు వుండు విధంగా

19. ఒక వ్యక్తికి 4 మంది స్త్రీలు మరియు 3 మంది పురుషులు, 7 మంది బంధువులు కలరు. అతని భార్యకు 3 మంది స్త్రీలు మరియు 4 మంది పురుషులని 7 మంది బంధువులు కలరు. ఒక రాత్రి విందుకు 3 స్త్రీలు మరియు3 పురుషులు పిలిచినపుడు, పురుషుని బంధువులు 3 మంది మరియు వారి భార్య బంధువులు 3 మంది వచ్చునట్లు విందులో కలుసుకొనుటకు ఎన్ని విధాలుగా ఆహ్వానించవచ్చును?

20. ఒక పెట్టెలో 2 తెల్లబంతులు, 3 నల్లబంతులు మరియు 4 ఎరుపు బంతులు కలవు. పెట్టెలో నుండి 3 బంతులను ఎంపిక చేయునపుడు వాటిలో కనిష్ఠంగా ఒక నల్లబంతి వుండునట్లు ఎన్ని విధాలుగా ఎంపిక చేయవచ్చును.

21. EXAMINATION అనే పదంలో వున్న అక్షరాసులతో 4 అక్షరముల అక్షర వరుస క్రమమును ఎన్ని విధాలుగా ఏర్పరచవచ్చును.

22. ఏ మూడు బిందువులు ఒక రేఖపై వుండునట్లు ఒక తలం మీద 15 బిందువులను కలిపినపుడు ఎన్ని త్రిభుజమును ఏర్పరచవచ్చును?

23. 15 బింధువులలో 7 బిందువులు ఒక రేఖపైన మరియు మిగిలిన 8 బిందువులు మరొక సమాంతర రేఖపైన అమరివుంది, అయిన ఈ 15 బిందువులతో ఎన్ని త్రిభుజమును ఏర్పరచగలం.

24. ఒక తలంలో 11 బిందువులు కలవు. వీటిలో 4 బిందువులు తప్ప ఇతర మూడు బిందువులు ఒకే రేఖపై లేనియెడల, క్రింది వాటిని కనుగొనుము.

    (i) ఈ బిందువులలో ఒక జత బిందువులతో ఏర్పడు రేఖలు ఎన్ని?

    (ii) ఈ బిందువులను శీర్షాలు తీసుకొని ఎన్ని త్రిభుజాలను ఏర్పరచగలము.

25. 90 వికర్ణాలు కల్గిన ఒక బహుభుజిలో ఎన్ని భుజాలు కలవు?

4.6 Mathematical Induction (గణితాను గమనము)

మొదటి n ధన బేసి సంఖ్యల మొత్తంను తీసుకొనుము. అది $1, 3, 5, 7,..., 2n-1$ అగును. మొదటి బేసి సంఖ్య 1. దీని మొత్తం 1.మొదటి రెండు బేసిసంఖ్యలు 1 మరియు 3 దీని మొత్తం 4 దీని నుండి ఒక నమూనా ఏర్పడుచున్నది.

$$1 = 1$$

$$1 + 3 = 4$$

$$1 + 3 + 5 = 9$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 16$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$$

కుడివైపు వున్న $1, 4, 9, 16, 25,...$ అన్నీ ఖచ్చితమైన వర్గ సంఖ్యలగును. ఈ నమూనా నుంచి మొదటి n బేసి సంఖ్య సంఖ్యల మొత్తం n^2 కు సమానమగును. దీనిని $1+3+5+...+(2n-1) = n^2$ గానూ సూచించవచ్చును. అయిననూ ఇది ఊహించి చెపుట అగును. దీనిని నిరపించుటకు మనకు గణితాను గమనము నియములను ఉపయోగించుచున్నాను. గణితానుగమనము అనునది ఒక పద్ధతి లేదా గణిత

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 220 10-03-2023 12:07:29

ఫలితాలను నిరూపించు పద్ధతి అగును. లేదా పై రకమైన సిద్ధాంతములు. ఈ విధమైన ఊహాజనితంగా నిరూపించుపద్ధతి గణితాను గమన పద్ధతి అగును. ఒక నిర్దిష్ట ఫలితం యొక్క అన్నీ సాధ్యమైన సందర్భములను పరిశీలించి ఏర్పడు ఊహాజనితను అనుసరించి ఈ అనుగమన పద్ధతి కలదు. బీజగణితలోని ఫలితాలను నిరూపించుటకు ఇది సరైన పద్ధతి లేదా గణితం యొక్క ఇతర విభాగాలలో n ధనపూర్ణ సంఖ్యలో అమరిన ఫలితాలు లేదా సిద్ధాంతములను నిరూపించుటకు ఉపయోగపడుతుంది.

ఈ గణితాను గమన పద్ధతిని లెక్కలేని మెట్లు ఎక్కడంలో పోల్చవచ్చు.

మనం మెట్లుపైకి ఎక్కుటను ఋజువు చేయుటకు క్రింది యివ్వబడిన వాటిని నిరూపించుటకు సరిపోతుంది. .

a) మనము మొదటి మెట్టును ఎక్కవలెను.

b) ఒక నిర్దిష్టమెట్లును ఎక్కిన తర్వాత మెట్టును ఎక్కవలెను.

a మరియు b లను ఋజువు చేయుటకు అన్నీ మెట్లును ఎక్కుటను ఋజువు చేయవలెను. ఇదేవిధంగా ఈ పద్ధతిని గణితాను గమనము $P(n)$ గా నిరూపించుటకు ఉపయోగించిన అనుగమన పద్ధతిలో క్రింది ఇవ్వబడిన సోపానములు కలవు.

పటము 4.16

సోపానము 1 :	$n=1$ కి ప్రవచనము సత్యమని సరిచూచుట ఆ $P(1)$ సత్యమని సరిచూచుట. మెట్ల యొక్క మొదటి మెట్టును ఎక్కుటను పోల్చి దీనిని ఆరంభ సోపానము అందురు.
సోపానము 2:	$n=k$ కు సత్యముగా ఉండునపుడు $n=k+1$ కు ఈ ప్రవచనమును సరిచూచుట, ఇక్కడ k ఒక ధనపూర్ణసంఖ్య అగును. ఆ $P(k)$ సత్యమని తీసుకొని $P(k+1)$ ను సత్యమని నిరూపించవలెను. దీనిని అనుగమన సోపానము అందురు.
సోపానము 3 :	సోపానము 1 మరియు సోపానము 2 నిరూపించబడిన $P(n)$ అనునది అన్నీ ధనపూర్ణసంఖ్యలకు సత్యమని చెప్పవచ్చును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 221 10-03-2023 12:07:29

ఉదాహరణ 4.61 గణితానుగమన నియమము ప్రకారము అన్ని పూర్ణసంఖ్యలు. $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ను నిరూపించుట.

సాధన

$P(n) = 1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ ఇచ్చిన ప్రవచనములో $n=1$ ని ప్రతిక్షేపించగా

$P(1)=\frac{1(1+1)}{2}=1$ అందువలన $P(1)$ సత్యము

$n=1$ ప్రవచనము సత్యము అనుకొనుము. అప్పుడు

$n=k$ కి సత్యమని నిరూపించుట.

$$P(k)=1+2+3+...+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

$P(k+1)$ ని సత్యమని నిరూపించుట

$$P(k+1)=\underbrace{1+2+3+...+k}+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$P(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$P(k+1)$ సత్యమైనది.

$P(k+1)$ సత్యమైనది. $P(k)$ ను అనుసరించి గణితానుగమన నియమము ప్రకారము అన్నీ పూర్ణసంఖ్యలు $n\geq 1$ కు $P(k+1)$ చెల్లునట్లు $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$

ఉదాహరణ 4.62 మొదటి n ధన బేసి సంఖ్యల మొత్తం n^2 అని నిరూపించుము!

సాధన

$P(n) = 1+3+5+...+(2n-1)$ అనుకొనుము.

$P(1)=1=1^2$ సత్యము.

$n=k$ కి $P(k)=1+3+5+...+(2k-1)$ అనునది

సత్యమని అనుకొనుము. అప్పుడు $P(k)=k^2$ అగును.

$P(k+1)=(k+1)^2$ అని నిరూపించవలెను.

$$\begin{aligned}P(k+1) &= 1+3+5+...+(2(k+1)-1)\\ &= \underbrace{1+3+5+7+...+(2k-1)}+2k+1\\ &= P(k)+2k+1\\ &= k^2+2k+1=(k+1)^2\end{aligned}$$

$P(k+1)$ సత్యము అందువలన గణితానుగమన నియమాను ప్రకారము, అన్ని సహజసంఖ్యలకు $P(k)$ సత్యము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 222 10-03-2023 12:07:31

ఉదాహరణ 4.63 గణితానుగమన నియమం ప్రకారము అన్ని పూర్ణసంఖ్యల $n \geq 1$ కు $1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ను నిరూపించును.

సాధన

$P(n)\square = 1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ అనుకొనుము.

$n=1$ ను ప్రవచనములో ప్రతిక్షేపించగా

$$P(1) = \frac{1(1+1)(2(1)+1)}{6} = 1$$

అందువలన $P(1)$ సత్యమగును $n=1$ సత్యమగును. $n=k$ కు ప్రవచనము సత్యము అని అనుకొనిన

$$P(k) = 1^2+2^2+3^2+...+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$$

$P(k+1)$ సత్యమని నిరూపించుటకు

$$\begin{aligned} P(k+1) &= \underbrace{1^2+2^2+3^2+...+k^2}+(k+1)^2 \\ &= P(k)+(k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+(k+1)^2 \\ &= \frac{k(k+1)(2k+1)+6(k+1)^2}{6} \\ &= \frac{(k+1)(k(2k+1)+6(k+1))}{6} \\ &= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} \\ &= \frac{(k+1)[(k+2)(2k+3)]}{6} \\ &= \frac{(k+1)[((k+1)+1)(2(k+1)+1)]}{6} \end{aligned}$$

$P(k+1)$ సత్యముగా తెలుపుచున్నది. గణితానుగమన నియమము ప్రకారము $P(k)$ ను అనుసరించి $P(k+1)$ సత్యము అగును.

అన్ని $n \geq 1$ కు $1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

ఉదాహరణ 4.64 గణిత ప్రేరణలను ఉపయోగించి, అన్నీ సహజ సంఖ్యల n కు $\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ అని నిరూపించుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 223 10-03-2023 12:07:32

సాధన

$P(n)| = \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ గా తీసుకొనుము. .

$n=1$ విలువను ఈ ప్రవచనములో ప్రతిక్షేపించిన

$P(1)=\frac{1}{1.2}=\frac{1}{2}$

అందువలన $P(1)$ అనునది నిజము

$n=k$–ఈ ప్రవచనము సత్యము అని అనుకొనుము.

అప్పుడు, $P(k)=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$

ఇప్పుడు $P(k+1)$ అనునది నిజము అని చూపవలెను.

$$
\begin{aligned}
P(k+1) &= \underbrace{\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{k(k+1)}}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} \text{ అని తీసుకొనుము} \\
&= P(k)+\frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k}{(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{1}{(k+1)}\left(\frac{k}{1}+\frac{1}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{(k+1)}\left(\frac{k^2+2k+1}{k+2}\right) \\
&= \frac{1}{(k+1)}\left(\frac{(k+1)^2}{k+2}\right)=\frac{(k+1)}{(k+2)}
\end{aligned}
$$

అందువల్ల $P(k+1)$ అనునది నిజము.

$P(k)$ సత్యము అని తీసుకొని $P(k+1)$ నిజము అని నిరూపించబడినది.

అందువల్ల గణితానుగమన సూత్రము ద్వారా ఏదైనా సహజసంఖ్య n కు
$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

ఉదాహరణ 4.65: ఏదైనా సహజ సంఖ్య n కు $a>b$ అయిన a^n-b^n అనునది $a-b$ చే భాగించబడును అని నిరూపించుము.

సాధన

$P(n)| = a^n-b^n$ అనునది $a-b$ చే భాగించబడును.

$n=1$ అను విలువను ప్రవచనములో ప్రతిక్షేపించిన $P(1)=a-b$

ఇది $a-b$ చే భాగించబడును. అందువలన $P(1)$ అనునది నిజము $n=k$ కు ఆ ప్రవచనము నిజము అని అనుకొనుము.

అప్పుడు $P(k)=a^k-b^k$, అనునది $a-b$ చే భాగించబడును.

$P(k)=a^k-b^k, \lambda(a-b), \lambda\in\mathbb{N}$ అని మనము వ్రాయవచ్చును

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 224 10-03-2023 12:07:33

$$P(k+1) = a^{k+1} - b^{k+1}$$ అనునది $a-b$ చే భాగించబడును అని నిరూపించవలెను

$$\begin{aligned} P(k+1) &= a^{k+1} - b^{k+1} \\ &= a^{k+1} - ab^k + ab^k - b^{k+1} \\ &= a(a^k - b^k) + b^k(a-b) \\ &= a(\lambda(a-b)) + b^k(a-b) \\ &= (a-b)(a\lambda + b^k) \\ &= (a-b)\lambda_1, \ \lambda_1 = a\lambda + b^k, \lambda_1 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

అందువలన ఇది $a-b$ చే భాగించబడును.

ఇది $P(k+1)$ నిజమని సూచిస్తుంది. $P(k)$ నిజము అని తీసుకొని $P(k+1)$ నిజమని నిరూపించాము. అందువలన గణితాను గమన సూత్రము ప్రకారము అన్ని సహజ సంఖ్యలు n కు $a > b$ అయిన $a^n - b^n$ అనునది $a-b$ చే భాగించబడును.

ఉదాహరణ 4.66 $n \geq 1$ కు $3^{2n+2} - 8n - 9$ అనునది 8 చే భాగించబడును అని నిరూపించుము.

సాధన

$P(n)| = 3^{2n+2} - 8n - 9$, అనునది 8 చే భాగించును అని అనుకొనుము $n = 1$ విలువను ప్రవచనములో ప్రతిక్షేపించిన

$P(1) = 3^{2+2} - 8(1) - 9 = 64$ వచ్చును.

ఇది 8 చే భాగించబడును. అందువలన $P(1)$ నిజము.

$n = k$ కు ఈ ప్రవచనము నిజము అని తీసుకొనుము

అప్పుడు $P(k) = 3^{2k+2} - 8k - 9$ అనునది 8 చే భాగించబడును

$P(k) = 3^{2k+2} - 8k - 9 = 8k_1, k_1 \in \mathbb{N}$ మరియు అందువలన, $3^{2k+2} = 8k_1 + 8k + 9$ అని వ్రాయవచ్చును.

$P(k+1) = 3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9$ అనునది 8 చే భాగించబడును అని నిరూపించవలయును.

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9 \\ &= 3^2 3^{2k+2} - 8k - 8 - 9 \\ &= 3^2(8k_1 + 8k + 9) - 8k - 17 \\ &= 72k_1 + 72k + 81 - 8k - 17 = 72k_1 + 64k + 64 \\ &= 8(9k_1 + 8k + 1) \\ &= 8k_2, k_2 = 9k_1 + 8k + 1 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

$P(k+1)$ అనునది 8 చే భాగించబడును. కావున $P(k+1)$ అనునది నిజము. $P(k)$ నిజము అని తీసుకొని $P(k+1)$ నిజము అని నిరూపించితిమి. అందువలన గణితానుగమన సూత్రాల ప్రకారము అన్ని $n \geq 1$ కు $3^{2n+2} - 8n - 9$ అనునది 8 చే భాగించబడును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 225 10-03-2023 12:07:36

ఉదాహరణ 4.67 గణితానుగమన ఉపయోగించి $n \geq 2$ అని ఉన్న ఏ ఒక్క పూర్ణసంఖ్యలకు $3n^2 > (n+1)^2$ అని నిరూపించుము.

సాధన

$n \geq 2$ ని ఉండునపుడు $3n^2 > (n+1)^2$ అను ప్రవచనమును

$P(n)$ అని అనుకొనుము.

అందువలన మొదటి మెట్టు $n = 2$ అగును.

ఇప్పుడు $P(2) = 3 \times 2^2 = 12$ మరియు $3^2 = 9$ ఆవిధంగా $12 > 9$ అందువలన $P(2)$ అనునది నిజము

$n = k$– కు $P(n)$ నిజము అని అనుకొనుము.

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 3(k+1)^2 = 3k^2 + 6k + 3 \\ &= P(k) + 6k + 3 \\ &> (k+1)^2 + 6k + 3 \\ &= k^2 + 2k + 1 + 6k + 3 \\ &= k^2 + 8k + 4 \\ &= k^2 + 4k + 4 + 4k \\ &= (k+2)^2 + 4k \\ &> (k+2)^2, k > 0 \text{ అందువలన} \end{aligned}$$

కావున $P(k+1)$ అనునది నిజము

$P(k)$ అనునది నిజము అని తీసుకొని $P(k+1)$ నిజము అని నిరూపించితిమి.

అందువలన గణితానుగమన సూత్రము ప్రకారము అన్ని $n \geq 2$ కు $3n^2 > (n+1)^2$ కలదు.

ఉదాహరణ 4.68 గణిత ప్రేరణలను ఉపయోగించి ఏదైనా పూర్ణ సంఖ్యలకు $n \geq 2$, $3^n > n^2$ అని చూపుము.

సాధన

$n \geq 2$ కు $3^n > n^2$ అనునది $P(n)$ ప్రవచనముగా అనుకొనుము. అందువలన మొదటి మెట్టు $n = 2$ అగును. ఇప్పుడు $P(2) = 3^2 = 9$ మరియు $2^2 = 4$

ఆ విధముగా $9 > 4$ మనకు $P(2)$ అనునది నిజము $n = k$ కు $P(n)$ నిజము అని తీసుకొనుము.

అంటే $P(k) > k^2$

$$\begin{aligned} P(k+1) &= 3^{k+1} = 3 \times 3^k = 3 \times P(k) \\ &> 3k^2 \\ &> (k+1)^2 \end{aligned}$$

(ఉదాహరణము 4.67 నుండి అందువలన ఏదైనా పూర్ణాంకముకు $n \geq 2$, $3^n > n^2$)

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 226 10-03-2023 12:07:38

ఉదాహరణ 4.69 $n \in \mathbb{N}$ కు గణిత ప్రేరణ నియమము ప్రకారము

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + ... + \cos(\alpha+(n-1)\beta) = \cos\left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

నిరూపించుము.

సాధన

$$P(n) : = \cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + ... + \cos(\alpha+(n-1)\beta)$$

$$= \cos\left(\alpha + \frac{(n-1)\beta}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$ తీసుకొనుము.

$n = 1$ అని ప్రతిక్షేపించిన

$$P(1) = \cos(\alpha) = \frac{\cos(\alpha).\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

అందువలన $P(1)$ సత్యము $n = k$ కు $P(k)$ సత్యము అనుకొనుము.

$$\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + ... + \cos(\alpha+(k-1)\beta) = \cos\left(\alpha + \frac{(k-1)\beta}{2}\right) \times \frac{\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

$P(k+1)$ ను సత్యము అని నిరూపించుటకు

$$P(k+1) = \underbrace{\cos\alpha + \cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+2\beta) + ... + \cos(\alpha+(k-1)\beta)} + \cos(\alpha+k\beta)$$

$$P(k+1) = P(k) + \cos(\alpha+k\beta)$$

$$= \frac{\cos\left(\alpha + \frac{(k-1)\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)} + \cos(\alpha+k\beta)$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\cos\left(\alpha + \frac{(k-1)\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right) + \cos(\alpha+k\beta)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\cos\left(\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right) - \frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right) + \cos(\alpha+k\beta)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\left(\cos\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right) + \sin\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right) + \cos(\alpha+k\beta)\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[cos\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\beta}{2}\right)sin\left(\frac{k\beta}{2}\right) + sin\left(\frac{\beta}{2}\right)\left(sin\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)sin\left(\frac{k\beta}{2}\right) + cos(\alpha+k\beta)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\cos\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right) + \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2}\left(2\sin\left(\alpha + \frac{k\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right) + 2\cos(\alpha+k\beta)\right)\right]$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 227 10-03-2023 12:07:40

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\cos\left(a+\frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2}(\cos\alpha-\cos(\alpha+k\beta)+2cos(\alpha+k\beta))\right]$$

$$= \frac{1}{sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[cos\left(a+\frac{k\beta}{2}\right)cos\left(\frac{\beta}{2}\right)sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+\frac{sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2}(cos\alpha+cos(\alpha+k\beta))\right]$$

$$= \frac{1}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\cos\left(a+\frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)+\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}{2}\left(2\cos\left(\alpha+\frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{-k\beta}{2}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{\cos\left(a+\frac{k\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}\left[\sin\left(\frac{k\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\beta}{2}\right)+\sin\frac{\beta}{2}\cos\left(\frac{k\beta}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{\cos\left(a+\frac{k\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{(k+1)\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

అనగా,

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+...+\cos(\alpha+(k-1)\beta)+\cos(\alpha+k\beta)$$

$$= \cos\left(a+\frac{k\beta}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{(k+1)\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

అనగా $P(k+1)$ సత్యము అని తెలుపుచున్నది. గణితానుగమన నియమము ప్రకారము $P(k)$ నుండి $P(k+1)$, $n\in\mathbb{N}$ ను సత్యమని నిరూపించడమైనది.

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+...+\cos(\alpha+(n-1)\beta)=\cos\left(\alpha+\frac{(n-1)\beta}{2}\right)\times\frac{\sin\left(\frac{n\beta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

ఉదాహరణ 4.70 గణితానుగమన ఉపయోగించి $i^2=-1$ గా తీసుకొని ఏదైనా ఒక సహజ సంఖ్య n కు $(r(cos\theta+isin\theta))^n=r^n(cosn\theta+isinn\theta)$ అని చూపుము.

సాధన

$P(n)\square=(r(cos\theta+isin\theta))^n=r^n(cosn\theta+isinn\theta).$

ప్రవచనంలో $n=1$ ప్రతిక్షేపించిన మనం పొందునది

$P(1)=(r(cos\theta+isin\theta))^1=r(cos\theta+isin\theta)$

కావున $P(1)$ అనేది సత్యము. ఈ ప్రవచనము $n=k$ కు $P(k)$ సత్యము అనుకొనుము కావున

$(r(cos\theta+isin\theta))^k=r^k(cosk\theta+isink\theta)$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 228 10-03-2023 12:07:41

ఇప్పుడు $P(k+1)$ సత్యమని నిరూపించవలెను.

$$\begin{aligned} P(k+1) &= (r(cos\theta + isin\theta))^{k+1} \\ &= (r(cos\theta + isin\theta))^{k} \times r(cos\theta + isin\theta) \\ &= r^{k}(cosk\theta + isink\theta) \times r(cos\theta + isin\theta) \\ &= r^{k+1} \times ((cosk\theta cos\theta + i^{2} sink\theta sin\theta) + i(sink\theta cos\theta + cosk\theta sin\theta)) \\ &= r^{k+1} \times ((cosk\theta cos\theta - sink\theta sin\theta) + i(sink\theta cos\theta + cosk\theta sin\theta)) \\ &= r^{k+1} \times (cos(k+1)\theta + isin(k+1)\theta) \end{aligned}$$

కావున $P(k+1)$ అనేది సత్యము. $P(k)$ సత్యమని అనుకొని $P(k+1)$ సత్యమని నిరూపించినాము. గణితానుగమన నియమమునుబట్టి ఏదైనా ఒక సహజ సంఖ్య n కు $(r(cos\theta + isin\theta))^{n} = r^{n}(cosn\theta + isinn\theta)$.

సూచన : ఉదాహరణ 4.70 లో మనము నిరూపించినది సహజ సంఖ్యలలో డీమోర్గాన్ సిద్ధాంతము అవుతుంది. దీని గురించి ద్వితీయ సంవత్సరములో విపులముగా నేర్చుకొంటాము

అభ్యాసము 4.4

1. గణితాను గమన పద్ధతిలో $n \geq 1$ కు $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ అని నిరూపించుము.
2. గణితాను గమన పద్ధతిలో $n \geq 1$ కు $1^2 + 3^2 + 5^2 + ... + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$ అని నిరూపించుము.
3. శూన్యేతర మొదటి n సరిసంఖ్యల మొత్తము $n^2 + n$ అని నిరూపించుము.
4. గణితాను గమన పద్ధతిలో $n \geq 1$ కు $1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n.(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ అని నిరూపించుము.
5. గణితానుగమన నియమమును ఉపయోగించి $n \geq 2$ గా తీసుకొని ఏదైనా ఒక సహజ సంఖ్య $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)...\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$ అని నిరూపించుము.
6. గణితానుగమన నియమమును ఉపయోగించి $n \geq 2$ గా తీసుకొని ఏదైనా ఒక సహజ సంఖ్య $\frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + ... + \frac{1}{1+2+3+...+n} = \frac{n-1}{n+1}$ అని నిరూపించుము.
7. గణితానుగమన నియమమును ఉపయోగించి ఏదైనా ఒక సహజ సంఖ్య n కు $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + ... + \frac{1}{n.(n+1).(n+2)} = \frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ అని నిరూపించుము.
8. గణితానుగమన నియమమును ఉపయోగించి ఏదైనా ఒక సహజ సంఖ్య n కు $\frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \frac{1}{8.11} + ... + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)} = \frac{n}{6n+4}$ అని నిరూపించుము.
9. గణితానుగమన పద్ధతిలో నిరూపించుము. $1! + (2 \times 2!) + (3 \times 3!) + ... + (n \times n!) = (n+1)! - 1$
10. గణితానుగమన నియమమును ఉపయోగించి ఏదైనా ఒక సహజ సంఖ్య n కు $x^{2n} - y^{2n}$ అనేది $x +$ 1 తో భాగించునని నిరూపించుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 229 10-03-2023 12:07:43

11. గణితానుగమన నియమము ప్రకారము $n \geq 1$ కు $1^2+2^2+3^2+...+n^2 > \frac{n^3}{3}$ అని నిరూపించుము.

12. అనుగమనము ఉపయోగించి అన్ని సహజసంఖ్యలు n కు n^3-7n+3, 3 తో భాగించబడునని నిరూపించుము.

13. అనుగమనమును ఉపయోగించి అన్ని సహజసంఖ్యలు n కు $5^{n+1}+4\times 6^n$ ను 20తో భాగించగా శేషము 9 వచ్చునని నిరూపించుము.

14. అనుగమనమును ఉపయోగించి అన్ని సహజ సంఖ్యలు n కు $10^n+3\times 4^{n+2}+5$, 9 తో భాగించునని నిరూపించుము.

15. గణితానుగమనమును ఉపయోగించి క్రింది ప్రవచనాలను నిరూపించుము.

$$\sin(\alpha)+\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{2\pi}{6}\right)+...$$

$$+\sin\left(\alpha+\frac{(n-1)\pi}{6}\right)=\frac{\sin\left(\alpha+\frac{(n-1)\pi}{12}\right)\times\sin\left(\frac{n\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}$$

అభ్యాసము 4.5

LWEO3

సరైన సమాధానమును ఎన్నుకొనుము

1. 2,4,5,7 యొక్క అన్ని అంకెలునుపయోగించి ఏర్పడు నాలుగు అంకెల సంఖ్యలలో 10ల స్థానంలో వున్న అన్ని అంకెల మొత్తం.

   (1) 432 (2) 108 (3) 36 (4) 18

2. ఒక పరీక్షలో ప్రతి ప్రశ్నకు 5 ఎంపికలు గల 3 బహుళైచ్ఛిక ప్రశ్నలు కలవు. ఒక విద్యార్థి అన్ని ప్రశ్నలకు సమాధానము ఇచ్చుటకు విఫలమైన విధానాల సంఖ్య.

   (1) 125 (2) 124 (3) 64 (4) 63

3. 30 మంది విద్యార్థులు కల్గిన తరగతిలో గణితంలో మొదటి మరియు రెండవ, భౌతికశాస్త్రంలో మొదటి మరియు రెండవ రసాయన శాస్త్రములో మొదటి మరియు ఆంగ్లములో మొదటి బహుమతులు ఇవ్వు మొత్తం విధానాల సంఖ్య.

   (1) $30^4\times 29^2$ (2) $30^3\times 29^3$ (3) $30^2\times 29^4$ (4) 30×29^5

4. అన్ని అంకెలు బేసి సంఖ్యలుగా కల్గిన 5 అంకెల సంఖ్యలు ఎన్ని?

   (1) 25 (2) 5^5 (3) 5^6 (4) 625

5. 3 వ్రేళ్ళలో 4 ఉంగరములను వేసుకొను విధానాల సంఖ్య.

   (1) 4^3-1 (2) 3^4 (3) 68 (4) 64

6. ${}^{(n+5)}P_{(n+1)}=\left(\frac{11(n-1)}{2}\right){}^{(n+3)}P_n$ అయినపుడు, n–విలువ

   (1) 7 మరియు 11 (2) 6 మరియు 7 (3) 2 మరియు 11 (4) 2 మరియు 6

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 230 10-03-2023 12:07:45

7. r వరుస ధనపూర్ణాంకాల లబ్ధము దేనితో భాగించును.

(1) $r!$ (2) $(r-1)!$ (3) $(r+1)!$ (4) r^r

8. కనీసము ఒక అంకె పునారావృతమగునట్లు 5 అంకెల దూరవాణి సంఖ్య (Telephone Number) ల సంఖ్య.

(1) 90000 (2) 10000 (3) 30240 (4) 69760

9. ${}^{a^2-a}C_2 = {}^{a^2-a}C_4$ అయినపుడు a–విలువ

(1) 2 (2) 3 (3) 4 (4) 5

10. ఒక తలంలో 10 బిందువులు కలవు మరియు వాటిలో 4 బిందువులు ఏకరేఖీయ బిందువులు ఏదైన రెండు బిందువులును కలుపునపుడు వచ్చు సరళరేఖలు సంఖ్య

(1) 45 (2) 40 (3) 39 (4) 38

11. ఒక విందుకు 12 మందిలో 8 మందిని ఒక స్త్రీ ఆహ్వానించారు దీనిలో ఇద్దరు ఒకటిగా విందుకు రాకుండావుండిన వాళ్ళని ఆహ్వానించు విధానాల సంఖ్య.

(1) $2\times{}^{11}C_7+{}^{10}C_8$ (2) ${}^{11}C_7+{}^{10}C_8$ (3) ${}^{12}C_8-{}^{10}C_6$ (4) ${}^{10}C_6+2!$

12. 4 సమాంతర రేఖల సముదాయం మరియొక 3 సమాంతర రేఖల సముదాయంను ఖండించునపుడు ఏర్పడు సమాంతర చతుర్భుజముల సంఖ్య.

(1) 6 (2) 9 (3) 12 (4) 18

13. ఒక గదిలో వున్న ప్రతీ ఒక్కరూ ఇతరలతో కరచాలనము చేయుచున్నారు. 66 కరచాలనము సంభవించిన ఆ గదిలో వున్న వ్యక్తులు సంఖ్య.

(1) 11 (2) 12 (3) 10 (4) 6

14. 44 వికర్ణములు గల బహుభుజిలో గల భుజాలు సంఖ్య

(1) 4 (2) 4! (3) 11 (4) 22

15. ఒక తలంలో 10 రేఖలు గీచిన ఏ రెండు రేఖలు సమాంతరంగ లేకుండా మరియు ఏ మూడు రేఖలు అనుషక్తముగ లేకుండా గల ఖండన బిందువుల సంఖ్య

(1) 45 (2) 40 (3) 10! (4) 2^{10}

16. 12 బిందువులు గల ఒక తలంలో నాల్గు బిందువులు ఏకశాఖీయమైతే ఎన్ని త్రిభుజాలును ఏర్పరచవచ్చును.

(1) 110 (2) ${}^{10}C_3$ (3) 120 (4) 116

17. ${}^{2n}C_3 : {}^{n}C_3 = 11:1$ అయినపపుడు n విలువ

(1) 5 (2) 6 (3) 11 (4) 7

18. ${}^{(n-1)}C_r + {}^{(n-1)}C_{(r-1)}$ అనునది

(1) ${}^{(n+1)}C_r$ (2) ${}^{(n-1)}C_r$ (3) ${}^{n}C_r$ (4) ${}^{n}C_{r-1}$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 231 10-03-2023 12:07:46

19. 52 పేక ముక్కల నుండి 5 పేకముక్కలును ఎంపిక చేయునపుడు కనీసము ఒక రాజు వచ్చు విధానాల సంఖ్య.

(1) ${}^{52}C_5$ (2) ${}^{48}C_5$ (3) ${}^{52}C_5 + {}^{48}C_5$ (4) ${}^{52}C_5 - {}^{48}C_5$

20. ఒక చదరంగ బల్ల నందు గల దీర్ఘ చతురస్రాల సంఖ్య

(1) 81 (2) 9^9 (3) 1296 (4) 6561

21. 2 మరియు 3 అంకెలనుపయోగించి ఎన్ని 10 అంకెల సంఖ్యలను వ్రాయవచ్చును.

(1) ${}^{10}C_2 + {}^{9}C_2$ (2) 2^{10} (3) $2^{10} - 2$ (4) 10!

22. P_r అనేది ${}^rP_r$ అయిన $1 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + ... + nP_n$ యొక్క శ్రేణిల మొత్తం

(1) P_{n+1} (2) $P_{n+1} - 1$ (3) $P_{n-1} + 1$ (4) ${}^{(n+1)}P_{(n-1)}$

23. మొదటి n బేసి సహజ సంఖ్యల లబ్ధము

(1) ${}^{2n}C_n \times {}^nP_n$ (2) $\left(\frac{1}{2}\right)^n \times {}^{2n}C_n \times {}^nP_n$ (3) $\left(\frac{1}{4}\right)^n \times {}^{2n}C_n \times {}^{2n}P_n$ (4) ${}^nC_n \times {}^nP_n$

24. ${}^nC_4, {}^nC_5, {}^nC_6$ అనేవి అంకశ్రేఢిలో వున్న

(1) 14 (2) 11 (3) 9 (4) 5

25. $1 + 3 + 5 + 7 + ... + 17$

(1) 101 (2) 81 (3) 71 (4) 61

సారాంశము (Summary)

ఈ అధ్యాయంలో మనం పొందిన జ్ఞానము :

- మొదటి n సహజ సంఖ్యల లబ్ధము అనునది n సహజ సంఖ్యల క్రమ గణితములు అగును.
- ప్రతీ పూర్ణ సంఖ్య $n \geq 1$ కు $n! = n(n-1)!$
- n విభిన్న వస్తువులను అమర్చు విధానాల సంఖ్య $n!$
- n విభిన్న వస్తువుల నుండి r వస్తువులను క్రమపరుచు ప్రస్తారణల సంఖ్య ${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2)...(n-r+1)$
- n వస్తువులలో ఒకే విధంగా గల p_1 వస్తువులును మొదటి రకంగాను, ఒకేవిధంగా గల p_2 వస్తువులను ,... ఒకే విధంగాగల p_k వస్తువులును k వ రకంగాను మిగిలినవి వేర్వేరుగా గల వస్తువుల ప్రస్తారణల సంఖ్య $\frac{n!}{p_1!p_2!\cdots p_k!}$
- ప్రస్తారణలలో వరుస క్రమం ముఖ్యము సంయోగాలలో వరుస క్రమం ముఖ్యంకాదు.
- n వేర్వేరు వస్తువుల నుండి r వస్తువులును ఎంపిక చేయు సంయోగాల సంఖ్యను ${}^nC_r$ గా తీసుకొంటారు. ${}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$

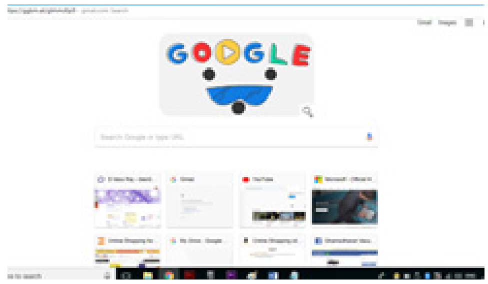
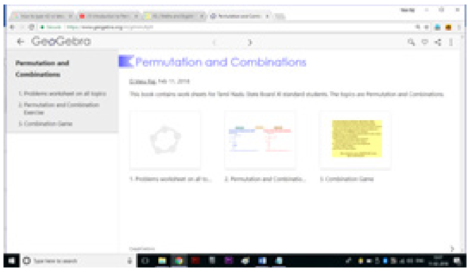
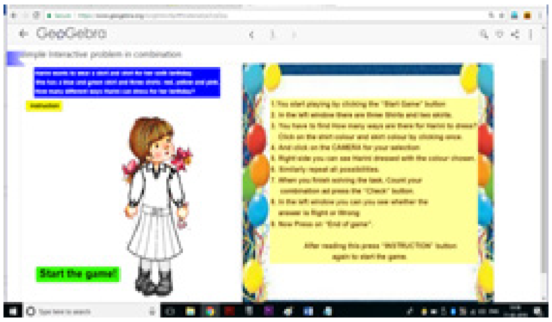
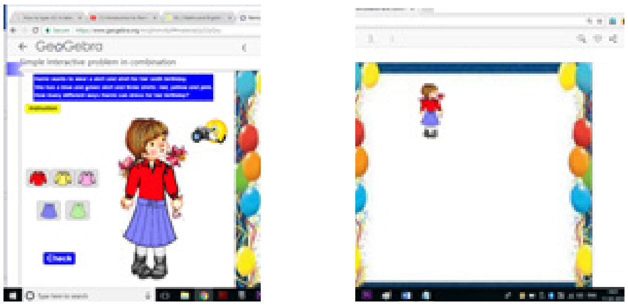
11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 232 10-03-2023 12:07:49

అంతరాల కృత్యము - 4 (అ)

సోపానము -1: బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్ చేయుము. URL లింక్‌ను ఈ క్రింది విధంగా టైపు చేయుము (లేదా) QR కోడ్ సంకేతమును స్కాన్ చేయుము. జియోజిబ్రా వర్క్‌షీట్ తెరపై "Permutations and Combination" కనపడును. మీరు వర్క్‌షీట్‌ను ఎంపిక చేయవచ్చు. దానిలో మీకు కావలసిన అభ్యాసములను ఎంపిక చేసి చూడుము. ఉదాహరణకు సంయోగము ఆట.

సోపానము -2: "Instruction Button" ను నొక్కి ఆడుకొనే పద్ధతిని తెలుసుకొని "Start Button" ను నొక్కి కొనసాగించుము.

సోపానము -3: ఇవ్వబడిన దుస్తుల రకములలో బాలికకు సరిపోయే దుస్తులను ఎంపిక చేసిన తర్వాత కెమెరాను నొక్కుము. అన్నీ ముగిసిన తర్వాత "Check Button" ను నొక్కి ఫలితమును సరిచూడుము.

సోపానము -1	సోపానము -2
	
సోపానము -3	**సోపానము -4**
	

మిగిలిన అభ్యాసములను చేసి ప్రస్తారణలు మరియు సంయోగములు గురించి తెలుసుకొనుము.

పటములు సూచికలు మాత్రమే

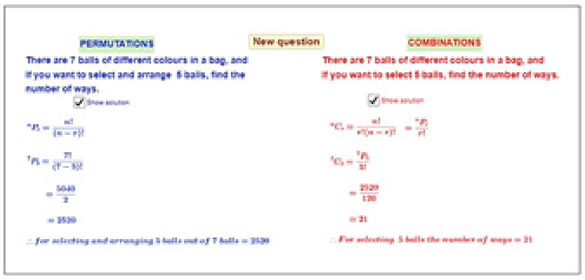
https://ggbm.at/gVnmcKp9

6B0AR

సంయోగత మరియు గణిత ప్రేరణలకు లింక్ బ్రౌస్ చేయుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 233 10-03-2023 12:07:50

అంతరోల కృత్యము - 4 (ఆ)



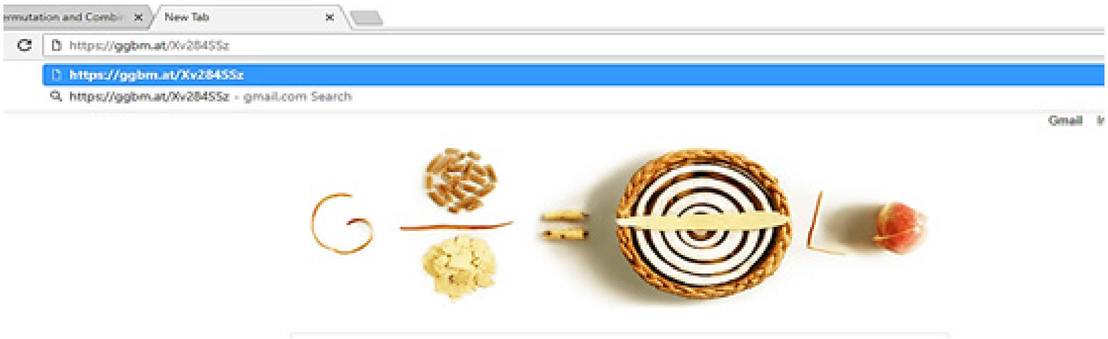
సోపానము 1: బ్రౌజర్‌ను Open చేసి URL లింక్‌ను టైపు చేయుము. (లేదా) QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము.

సోపానము 2: "Permutations and Combination" అనే వర్క్‌షీట్ తెరుచుకొనును. దానిలో మీకు అవసరమైన కృత్యములను ఓపెన్ చేసి చూడవచ్చును. ఇప్పుడు "Problems on Permutations and Combination" అనే కృత్యమును ఎంపిక చేయుము.

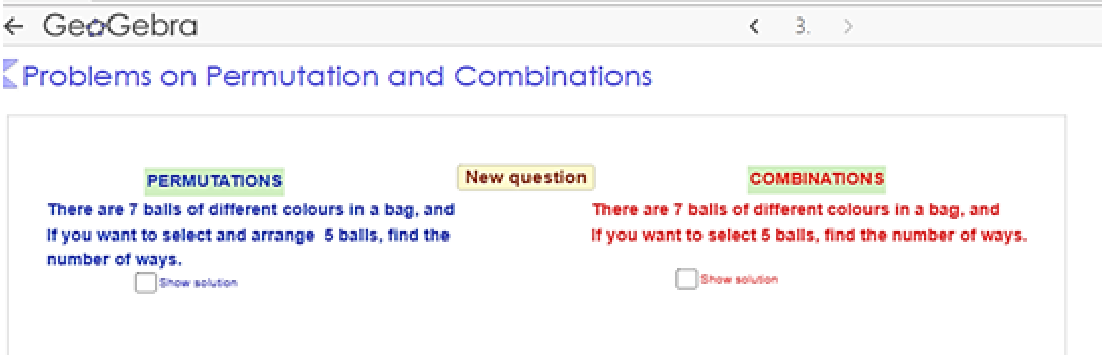
అభ్యాసము పేజిలో "New Problem" అనే "Button" ను నొక్కడం ద్వారా క్రొత్త ప్రశ్నలు కనబడును. మీరింతటి మీరే ఆ సమస్యల యొక్క సాధనను కనుగొనవలెను.

తర్వాత "Show Solution" అనే "Button" ను నొక్కన సమాధానములు దొరుకును, సమాధానములును సరిచూడుము. .

సోపానము-1



సోపానము-2



పటములు సూచికలు మాత్రమే

https://ggbm.at/gVnmcKp9

సంయోగత మరియు గణిత ప్రేరణలకు లింక్ బ్రౌస్ చేయుము.

BUZ07

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_4.indd 234 10-03-2023 12:07:50

అధ్యాయము **5**

ద్విపద సిద్ధాంతము, వరుసలు మరియు శ్రేణులు

"కొత్త మరియు అద్భుతమైన దుస్తులతో శాశ్వతమైన వసంతం వలె జీవితం నా ముందు నిలుస్తుంది."

- జోహన్ కార్ల్ ఫ్రెడరిక్ గాస్

5.1 పరిచయం (Introduction)

$(a+b)$ అనే ద్విపది యొక్క బీజ గణిత విస్తరణములో ప్రతి ధనపూర్ణాంక సంఖ్య n యొక్క ఘాతాంక విస్తరణను ద్విపద సిద్ధాంతం సులభతరం చేస్తున్నది. ఈ ద్విపద సిద్ధాంతము గణితము యొక్క అన్ని విభాగాలలో మరియు ఇతర విజ్ఞానశాస్త్రాలలో ఉపయోగపడుచున్నది. ఉదాహరణకు $(2x-7)^{23}$ విస్తరణలో x^{20} యొక్క గుణకమును ద్విపద సిద్ధాంతము ద్వారా సులభంగా కనుగొనవచ్చును. ఒక జాతీయ బ్యాంకు నందు కొంత ధనమును 8% చక్రవడ్డీ రేటున జమ చేసిన 10 సంవత్సరాల తరువాత ఎంత మెర్చూరిటీ ధనాన్ని పొందునో కనుగొనుటకు, లేదా మన దేశ జనాభా సంఖ్యను 15 సంవత్సరాల తరువాత కనుగొనుటకు, ఇప్పటి జనాభా మొత్తము మరియు వార్షిక జనాభా పెరుగుదల రేటు తెలుసుకొనుటకు ఈ ద్విపద సిద్ధాంతము ఉపయోగించి లెక్కించవచ్చును. $(a+b)^n, n\in\mathbb{N}$ ద్విపద విస్తరణలోని పదాల గుణకాలను ద్విపదగుణకాలు అందురు. యాదృచ్చిక ప్రయోగము నందు పరిమిత ఘటనలను తీసుకొనిన సంభావ్యతా ఘటనలను తెలుసుకొనుటలో ఈ ద్విపద సిద్ధాంతము ప్రముఖ పాత్రను వహించుచున్నది. మరియు ఈ సంభావ్యతలో గెలుపు లేదా ఓటమి అనునది మనకు లభించు ఫలితము అగును.

ఈ అధ్యాయంలో మనము ద్విపద సిద్ధాంతమును మరియు దాని యొక్క అనువర్తనాలను నేర్చుకొందాము. గ్రీకు గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు యూక్లిడ్ ద్విపద సిద్ధాంతము యొక్క ఘాతాంకం 2 కొరకు ఒక ప్రత్యేక సందర్భాన్ని కనుగొన్నారు. ఘాతాంకం 3 యొక్క ద్విపద సిద్ధాంతమును 6వ శతాబ్దములో భారతీయులు తెలుసుకొన్నారు. 1544 వ సంవత్సరంలో మైఖేల్ స్టీఫెల్ (జర్మన్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు) ద్విపద గుణకాలను పరిచయం చేసి $(1+x)^n$ ను $(1+x)^{n-1}$ యొక్క పదాలుగా వ్యక్తీకరించారు.

జోహన్ కార్ల్ ఫ్రెడరిక్ గాస్ (1777–1855)

జర్మన్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు "జోహన్ కార్ల్ ఫ్రెడరిక్ గాస్" అత్యంత ప్రసిద్ధిగాంచిన గణిత శాస్త్రజ్ఞులలో ఒకరుగా చరిత్రలో కలరు. ఇతనిని (గణితమునకు యువరాజు) (Prince of Mathematics) అని చాలామంది పేర్కొన్నారు. సంఖ్య గణితము, భౌతికశాస్త్రము, ఖగోళశాస్త్రము మొదలైన అనేక విభాగాలలో ఇతని పాత్ర దోహదపడుచున్నప్పటికీ గాస్‌కు సంఖ్యాగణితము ఇష్టమైనందువలన సంఖ్యాగణితము ను క్వీన్ ఆఫ్ మేధమేటిక్స్‌గా (గణితరాణి) పేర్కొన్నారు. ఇతనిని గురించిన ఒక చిన్న వృత్తాంతములో (కథలో) ఇతని పాఠశాల ఉపాధ్యాయుడు విద్యార్థులను పరీక్షించడానికి 1 నుంచి 100 వరకు గల సంఖ్యల మొత్తమును కొనుగొనుమనగా కొన్ని నిమిషాలలోనే గాస్ జవాబు 5050 అని చెప్పెను. చిన్న వాడైన గాస్ అంక వరుసల యొక్క మొత్తమును కనుగొనుటకు ఏ పద్ధతిని ఉపయోగించారో అనునది ఎవరికీ తెలియదు. వెయ్యి సంవత్సరాలకు పైగా (పురాణాలలో ఇతిహాసాలలో) గణిత సమస్యలకు సంబంధించిన వరుసలు మరియు శ్రేణులను అభివృద్ధి చేసారు. ఈ ప్రముఖ పురాణాలలో శ్రేణులను ఉపయోగించి చదరంగంను కనుగొనబడినది. ఇక్కడ గల చదరంగంలోని గడులు 1,2,4,8 .... అనే సంఖ్యలకు సంబందించబడినది (64వ గడి కు సంబంధించిన సంఖ్యను ఊహించుకొనుము) అంకశ్రేఢి మరియు గుణశ్రేఢిల అనువర్తనాలను నిజ జీవిత పరిస్థితులకు అన్వయించబడినది.

చిన్న తరగతిలలో మనము వరుసలు మరియు శ్రేణులను గురించి తెలుసుకొన్నాము. వరుసలు అనునది ఒక క్రమపద్ధతిలో సంఖ్యల యొక్క అమరిక అగును మరియు శ్రేణులు అనునది వరుసలలో గల పదముల మొత్తము అగును. $\sin\frac{9}{44}\pi, \log 43$ మరియు e^{20} అను వాటిని దాదాపుగా సమానమైన విలువలను ఈ అనంత శ్రేణులను ఉపయోగించి కనుగొనవచ్చును. అవకలన సమీకరణాలు మరియు విశ్లేషణల యందు ఈ వరుసక్రమములు ప్రముఖ పాత్ర వహించుచున్న. ఈ అధ్యాయములో వరుసలను మరియు శ్రేణులను గురించి మరింత తెలుసుకొందాము.

అభ్యసన లక్ష్యాలు (Learning objectives)

ఈ అధ్యాయాన్ని పూర్తి చేయడం ద్వారా విద్యార్థులు క్రింది సామర్థ్యాలను పొందుతారు

- ద్విపద సిద్ధాంతము, ద్విపద గుణకములు వాటి అనువర్తనాలను లెక్కించడం
- వరుస మరియు శ్రేణులను తెలుసుకోవడం
- అంకమధ్యమము, గుణమధ్యమము మరియు హరాత్మక మధ్యమములను లెక్కించడం
- వాస్తవ సంఖ్యలకు పరిమితశ్రేణి మరియు అనంతశ్రేణుల మొత్తమును లెక్కించడం
- అనంతశ్రేణులను ఉపయోగించి దూరదర్శినిల దూరాల మొత్తములను కనుగొనడానికి
- ఘాతశ్రేణులకు మరియు సంవర్గమాన శ్రేణులకు ద్విపదసిద్ధాంతమును అనువర్తించడం.

5.2 ద్విపద సిద్ధాంతము (Binomial Theorem)

బైసైకిల్, బైనాక్యులర్, బైనరీ మరియు మరెన్నో పదాలలో ముందు బై చేర్చడం వలన రెండు అను అర్థము వచ్చును. ద్విపద అనగా రెండు పదాలు కలిగినవి అని చెప్పవచ్చును. ఉదాహరణకు $(1+x),(x+y),(x^2+xy)$ మరియు $(2a+3b)$ లు కొన్ని ద్విపద విస్తరణలు.

5.2.1 ద్విపద గుణకములు (Binomial Coefficients)

అధ్యాయము 4 లో ${}^nC_r$ అను చిహ్నమును, దాని ఉపయోగించడంను గురించి తెలుసుకొన్నాం. ఇది

$$ {}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(r-1))}{r(r-1)(r-2)...1} = \frac{n!}{(n-r)!r!} \text{ గా} $$

సూచించబడును. ${}^nC_r$ అనునది $(1+x)^n$ లో x^r యొక్క గుణకము, మరియు $(a+b)^n$ లో a^rb^{n-r} యొక్క గుణకములు సమానంగా వుండడం వలన వీటిని ద్విపద గుణకములు అందురు. ${}^nC_r$ విలువలను సూత్రమును ఉపయోగించు కనుగొనవచ్చును. కాని దానికంటే సులభమైన మార్గంలో కనుగొనవచ్చును. (సూక్ష్మీకరించకుండా)

పాస్కల్ త్రిభుజము (Pascal Triangle)

పాస్కల్ త్రిభుజము అనునది ${}^nC_r$ విలువలను త్రిభుజాకారంలో అమర్చడం (కలిగివుండును) ఇందులో $(k+1)$ వ పదం కు ${}^kC_0, {}^kC_1, {}^kC_2, {}^kC_3, ..., {}^kC_k$ అను విలువలను కలిగి వుండును.

పాస్కల్ త్రిభుజము

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & {}^0C_0 & & & & \\
 & & & {}^1C_0 & & {}^1C_1 & & & \\
 & & {}^2C_0 & & {}^2C_1 & & {}^2C_2 & & \\
 & {}^3C_0 & & {}^3C_1 & & {}^3C_2 & & {}^3C_3 & \\
{}^4C_0 & & {}^4C_1 & & {}^4C_2 & & {}^4C_3 & & {}^4C_4 \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & &
\end{array}
\iff
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \\
\dots & & \dots & & \dots & & \dots & &
\end{array}
$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 236 14-05-2022 11:13:19

$(a+b)^0, (a+b)^1, (a+b)^2, (a+b)^3$ విస్తరణలను గుర్తుచేసుకొని మరియు ప్రతిపదము యొక్క గుణకాలను గమనించిన వాటి గుణకాల అమరిక ఒక నమూనాగా వుండును.

$(a+b)^0 = 1$	1
$(a+b)^1 = a+b$	1 1
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	1 3 3 1

పాస్కల్ త్రిభుజమును జాగ్రత్తగా గమనిస్తే ప్రతి వరుస 1 తో ప్రారంభమై 1 తో ముగియును మరియు ఇతర విలువలు దానిపైన గల రెండు సంఖ్యల మొత్తము అగును ఉదాహరణకు 3 అనునది దానికి పైన గల 1 మరియు 2 ల మొత్తం అగును. 10 అనునది దానిపైన గల వరుసలోని 4 మరియు 6 ల మొత్తం అగును.

$$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n b^0 + {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + \ldots {}^nC_r a^{n-r} b^r + \ldots + {}^nC_n a^0 b^n$$

అనునది $(a+b)^n$ యొక్క ద్విపద విస్తరణ, ఏదైనా $n \in \mathbb{N}$ కు $(a+b)^n$ ద్విపద విస్తరణను పాస్కల్ త్రిభుజమును ఉపయోగించి వ్రాయవచ్చును. ఉదాహరణకు పాస్కల్ త్రిభుజము నందు ఇంధన వరుసను ఉపయోగించి $(a+b)^4$ వరుస విస్తరణను ఆరవ వరుసను ఉపయోగించి $(a+b)^5$ వరుస విస్తరణలను వ్రాయవచ్చును. $(a+b)^5$ విస్తరణలో గుణకములు లేకుండా పదాలను

$$a^5, a^4b, a^3b^2, a^2b^3, ab^4, b^5$$

లో అమర్చవచ్చు. పాస్కల్ త్రిభుజము నందు ఆరవ వరుసను

1 5 10 10 5 1 గా అగును.

ఈ రెండింటినీ ఉపయోగించి $(a+b)^5 = a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$ గా వ్రాయవచ్చును.

భాగహారాలు, గుణకారాలు లేకుండా కూడికలను మాత్రమే ఉపయోగించి పాస్కల్ త్రిభుజం రూపొందించబడినది, కావున $(a+b)^n, n \in \mathbb{N}$ అను ద్విపద విస్తరణను ఏ విధమైన గుణకారాలను ఉపయోగించకుండా వ్రాయవచ్చును.

పైన పేర్కొన్న త్రిభుజాకార నమూనాను 17వ శతాబ్దమునకు చెందిన ఫ్రెంచ్ గణిత శాస్త్రజ్ఞుడు బ్లేజ్ పాస్కల్ కనుగొన్నారు. ఇతడు ఈ నిర్మాణాన్ని (నమూనాను) లక్షణాలను కనుగొని సరియైన విధంగా సంభావ్యతా సిద్ధాంతాల యందు ఉపయోగించాడు.

5.2.2 ధనపూర్ణాంక ఘాతము కొరకు ద్విపద సిద్ధాంతం (Binomial Theorem for Positive Integral Index)

ఇప్పుడు (ఎక్కువ) చాలా ప్రసిద్ధి చెందిన ద్విపద సిద్ధాంతంను నిరూపించబడును.

సిద్ధాంతము 5.1 (Binomial Theorem for Positive Integral Index): (ఏదేని ఒక ధనపూర్ణాంక సంఖ్య n అయితే

$$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n b^0 + {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + \ldots + {}^nC_r a^{n-r} b^r + \ldots + {}^nC_n a^0 b^n.$$

నిరూపణ: పై సిద్ధాంతమును గణితాను గమనము ద్వారా నిరూపించవచ్చును. n అనునది ఒక ధనపూర్ణాంక సంఖ్య $(a+b)^n = {}^nC_0 a^n b^0 + {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + \ldots + {}^nC_r a^{n-r} b^r + \ldots + {}^nC_n a^0 b^n$ నుండి ${}^1C_0 = 1$ మరియు ${}^1C_1 = 1$ కావున $P(1)$ నందు ఎడమచేతి వైపు $a^1b^0 + a^0b^1$ అగును. ఇది ఎడమచేతివైపు గల $(a+b)^1$ కు సమానమగును. అందువలన $P(1)$ నిజమగును. ఏదైనా ఒక ధనపూర్ణాంక సంఖ్య k కు $P(k)$ నిజము అనుకొనుము అనగా

$$(a+b)^k = {}^kC_0 a^k b^0 + {}^kC_1 a^{k-1} b^1 + \ldots + {}^kC_r a^{k-r} b^r + \ldots + {}^kC_k a^0 b^k$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 237 14-05-2022 11:13:21

$$
\begin{aligned}
(a+b)^{k+1} &= (a+b)(a+b)^k \\
&= (a+b)\left[{}^kC_0 a^k b^0 + {}^kC_1 a^{k-1} b^1 + \dots + {}^kC_r a^{k-r} b^r + \dots + {}^kC_k a^0 b^k\right] \\
&= \left[{}^kC_0 a^{k+1} b^0 + {}^kC_1 a^k b^1 + \dots + {}^kC_r a^{k-r+1} b^r + \dots + {}^kC_k a^1 b^k\right] \\
&\quad + \left[{}^kC_0 a^k b^1 + {}^kC_1 a^{k-1} b^2 + \dots + {}^kC_r a^{k-r} b^{r+1} + \dots + {}^kC_k a^0 b^{k+1}\right] \\
&= {}^kC_0 a^{k+1} b^0 + \left[{}^kC_1 + {}^kC_0\right] a^k b^1 + \dots + \left[{}^kC_r + {}^kC_{r-1}\right] a^{k-r+1} b^r \\
&\qquad + \dots + \left[{}^kC_k + {}^kC_{k-1}\right] a^1 b^k + {}^kC_k a^0 b^{k+1} \\
&\qquad {}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r \\
&= {}^{k+1}C_0 a^{k+1} b^0 + {}^{k+1}C_1 a^k b^1 + {}^{k+1}C_2 a^{k-1} b^2 + \dots + {}^{k+1}C_r a^{k-r+1} b^r \\
&\qquad + \dots + {}^{k+1}C_k a^1 b^k + {}^{k+1}C_{k+1} a^0 b^{k+1} \\
(a+b)^{k+1} &= {}^{k+1}C_0 a^{(k+1)} b^0 + {}^{k+1}C_1 a^{(k+1)-1} b^1 + {}^{k+1}C_2 a^{(k+1)-2} b^2 + \dots \\
&\qquad + {}^{k+1}C_r a^{(k+1)-r} b^r + \dots + {}^{k+1}C_k a^1 b^{(k+1)-1} + {}^{k+1}C_{k+1} a^0 b^{k+1}
\end{aligned}
$$

కావున $P(k)$ నిజమయినప్పుడు $P(k+1)$ కూడా నిజమగును. దీనివలన గణితాను గమనము పద్ధతి మూలంగా అన్ని ధనపూర్ణాంక సంఖ్యలకు $P(n)$ నిజము అని నిరూపించడమైనది.

$$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n b^0 + {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + \dots + {}^nC_r a^{n-r} b^r + \dots + {}^nC_n a^0 b^n, n \in \mathbb{N}$$

(i) $(a+b)^n$ విస్తరణలో $n \in \mathbb{N}$ ను ఈ విధంగా కూడా వ్రాయవచ్చును.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k a^{n-k} b^k \text{ లేదా } \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k a^k b^{n-k}$$

(ii) $(a+b)^n$ విస్తరణలో $n \in \mathbb{N}$ ఖచ్చితంగా $(n+1)$ పదాలు కలిగివుండును.

(iii) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k a^{n-k} b^k$ లో ఒక్కొక్క పదమునందు a యొక్క ఘాతములు 1 తగ్గును అదే సమయంలో b యొక్క ఘాతములు 1 ఒక్కొక్క పదము నందు పెరుగును ఏదైనప్పటికి a మరియు b ల యొక్క ఘాతముల మొత్తము n గా వుండును.

(iv) $(a+b)^n$ విస్తరణలో $(r+1)$ వ పదము, $n \in \mathbb{N}$ కు
$T_{r+1} = {}^nC_r a^{n-r} b^r, \; r = 0, 1, 2, \dots, n$.

(v) $(a+b)(a+b)\dots(a+b)$, లను n సార్లు గుణించగా b^r ను పొందడానికి n కారకాల నుండి r కారకాలను తీసుకొనవలెను. దీనిని ${}^nC_r$ విధాలుగా లెక్కించవచ్చును ఎందుకనగా మనకు ${}^nC_r$ అనునది $a^{n-r}b^r$ యొక్క గుణకము.

(vi) $(a+b)^n$ విస్తరణలో $n \in \mathbb{N}$ ప్రారంభంలో గల గుణకాల మధ్య సమానదూరము మరియు అంతిమంలో గల గుణకాల మధ్య సమాన దూరమునకు సమానమగును. నిజానికి ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$

(vii) $(a+b)^n$ విస్తరణలో $n \in \mathbb{N}$, n అనునది సరిసంఖ్య అయితే గరిష్ట గుణకము విలువ ${}^nC_{\frac{n}{2}}$ అగును మరియు n అనునది బేసిసంఖ్య అయితే గరిష్ట గుణకము విలువలు ${}^nC_{\frac{n-1}{2}}$ లేదా ${}^nC_{\frac{n+1}{2}}$ అగును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 238 14-05-2022 11:13:22

(viii) $(a+b)^n$ విస్తరణలో $n \in \mathbb{N}$, n అనునది సరిసంఖ్య అయితే మధ్యమ పదము విలువ $T_{\frac{n}{2}+1} = {}^nC_{\frac{n}{2}} a^{n-\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}}$ అనునది బేసిసంఖ్య అయితే రెండు మధ్యమ పదములు $T_{\frac{n-1}{2}+1}$ మరియు $T_{\frac{n+1}{2}+1}$.

5.3 ప్రత్యేక సందర్భాలలో ద్విపద సిద్ధాంతము (ద్విపద సిద్ధాంతం యొక్క ప్రత్యేక విధానాలు) (Particular Cases of Binomial Theorem)

(i) ద్విపద విస్తరణ $(a+b)^n$, $n \in \mathbb{N}$ నందు b స్థానంలో $(-b)$ ను మార్చడం వలన

$$(a-b)^n = {}^nC_0 a^n b^0 - {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 - \ldots$$
$$+ (-1)^r \, {}^nC_r a^{n-r} b^r + \ldots + (-1)^n \, {}^nC_n a^0 b^n$$

$(a-b)^n$ ద్విపద విస్తరణ యందు + మరియు – గుర్తులు ఒకదాని తరువాత ఒకటి రావడంను గమనించవచ్చును.

(ii) $(a+b)^n$ ద్విపద విస్తరణలో a కు బదులుగా 1 ను మరియు b కు బదులుగా x ను మార్చగా మనకు $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + \ldots + {}^nC_r x^r + \ldots + {}^nC_n x^n$ లభించును. ముఖ్యంగా $x = 1$ అయినప్పుడు ${}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \ldots + {}^nC_n = 2^n$

n మూలకములు గల సమితి X అయితే ${}^nC_r$ అనునది X లో గల ఉపసమితుల సంఖ్య ఖచ్చితంగా r మూలకాలను కలిగివుండును. ${}^nC_r$ నందు $r = 0, 1, 2, \ldots n$ లను కలపడం వలన మనము X నందు గల ఉపసమితులను పొందవచ్చును. కావున పైన గుర్తించిన వాటిని ఉపయోగించి n మూలకములు గల సమితుల యందు 2^n ఉపసమితులు కలిగివుండును

(iii) $(1-x)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 - \ldots + (-1)^r \, {}^nC_r x^r + \ldots + (-1)^n x^n$

ముఖ్యంగా, $x = 1$, అయినప్పుడు,

${}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \ldots = {}^nC_1 + {}^nC_3 + {}^nC_5 + \ldots = 2^{n-1}$.

ఉదాహరణ 5.1 $(2x+3)^5$ **ను విస్తరించుము.**

సాధన

$a = 2x$, $b = 3$ మరియు $n = 5$,

$$(2x+3)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4 3 + 10(2x)^3 3^2 + 10(2x)^2 3^3 + 5(2x)3^4 + 3^5$$
$$= 32x^5 + 240x^4 + 720x^3 + 1080x^2 + 810x + 243.$$

ఉదాహరణ 5.2 98^4 **ను గణించుము.**

సాధన

$a = 100$, $b = 2$ మరియు $n = 4$,

$$98^4 = (100-2)^4$$
$$= {}^4C_0 100^4 - {}^4C_1 100^3 2 + {}^4C_2 100^2 2^2 - {}^4C_3 100^1 2^3 + {}^4C_4 100^0 2^4$$
$$= 100000000 - 8000000 + 240000 - 3200 + 16$$
$$= 92236816.$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 239 14-05-2022 11:13:23

ఉదాహరణ 5.3 $(x+y)^6$ **విస్తరణ యందు మధ్యపదమును కనుగొనుము.**

సాధన

ఇచ్చట $n = 6$ ఇది ఒక సరిసంఖ్య కావున, $(x+y)^6$ విస్తరణలో గల మధ్యపదము x^3y^3 ను కలిగివుండును. మధ్యపదము ${}^6C_3x^3y^3$ విలువ $20x^3y^3$ కు సమానము..

ఉదాహరణ 5.4 $(x+y)^7$ **విస్తరణ యందు మధ్యపదాలను కనుగొనుము.**

సాధన

ఇచ్చట $n = 7$ ఇది ఒక బేసిసంఖ్య మధ్యపదాలు x^4y^3 మరియు x^3y^4 ను కలిగివుండును. అవి ${}^7C_3x^4y^3$ మరియు ${}^7C_4x^3y^4$ లు $35x^4y^3$ మరియు $35x^3y^4$ కు సమానం.

ఉదాహరణ 5.5 $(3+2x)^{10}$ **విస్తరణలో** x^6 **గుణకమును కనుగొనుము?**

సాధన

$a = 3$ మరియు $b = 2x$ తీసుకొనుము $(a+b)^{10}$ ద్విపద విస్తరణ నందు x^6 యొక్క గుణకము గల పదము $(2x)^6$ గా ఉండిన, x^6 యొక్క గుణకము విలువ

$$ {}^{10}C_6a^4b^6 = {}^{10}C_4a^4b^6 = \frac{10\times 9\times 8\times 7}{4\times 3\times 2\times 1}3^4(2x)^6 = 210\times 3^4\times 2^6x^6 \quad [\because {}^{10}C_6 = {}^{10}C_4] $$

కావున $(3+2x)^{10}$ విస్తరణలో x^6 –గుణకము విలువ $210\times 3^4 2^6$.

ఉదాహరణ 5.6 $(2-3x)^7$ **విస్తరణ యందు** x^3 **గుణకం కనుగొనుము**

సాధన

$(a+b)^7$ ద్విపద విస్తరణ యందు $a = 2$ మరియు $b = -3x$ గా తీసుకొనుము. x^3 విలువ $(-3x)^3$ పదము నందు ఉండును. కావున x^3 యొక్క గుణకము విలువ

$$ {}^7C_3a^4b^3 = \frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}2^4(-3x)^3 = 35\times 2^4\times(-3)^3x^3. $$

కావున, $(2-3x)^7$ విస్తరణలో x^3 యొక్క గుణకము $35\times 16\times(-27) = -15120$.

ఉదాహరణ 5.7 $(x+a)^n$ ద్విపద విస్తరణ యందు 2nd, 3rd మరియు 4th పదములు వరుసగా 240, 720 మరియు 1080.

సాధన

$T_2 = 240, T_3 = 720$ మరియు $T_4 = 1080$ ఇవ్వబడినవి

$$ T_2 = {}^nC_1x^{n-1}a = 240 \; . \; . \; . \; . \; . \; (1) $$

$$ T_3 = {}^nC_2x^{n-2}a^2 = 720 \; . \; . \; . \; . \; . \; (2) $$

$$ T_4 = {}^nC_3x^{n-3}a^3 = 1080 \; . \; . \; . \; . \; . \; (3) $$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 240 14-05-2022 11:13:25

(2) ను (1) తోనూ (3) ను (2) తోనూ భాగించిన, మనకు,

$$\frac{a}{x} = \frac{6}{n-1} \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

$$\frac{a}{x} = \frac{9}{2(n-2)} \; . \; . \; . \; . \; . \; (5)$$

(4) మరియు (5) ల నుండి, $\frac{6}{n-1} = \frac{9}{2(n-2)}$

$n = 5$, n విలువను (1) మరియు (4) నందు ప్రతిక్షేపించి, (1) ను (4) చేత భాగించిన, మనకు, $\frac{5x^4 a}{\frac{a}{x}} = \frac{240}{\frac{6}{4}}$ కావున, $5x^5 = 160$ మరియు $x = 2x$ విలువను (4)లో ప్రతిక్షేపించిన మనకు $a = 3$ లభించును.

ఉదాహరణ 5.8 $\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^4$ ను విస్తరించుము.

సాధన

$$\begin{aligned}\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^4 &= {}^4C_0(2x)^4\left(-\frac{1}{2x}\right)^0 + {}^4C_1(2x)^3\left(-\frac{1}{2x}\right)^1 + {}^4C_2(2x)^2\left(-\frac{1}{2x}\right)^2 \\ &\quad + {}^4C_3(2x)^1\left(-\frac{1}{2x}\right)^3 + {}^4C_4(2x)^0\left(-\frac{1}{2x}\right)^4 \\ &= (2x)^4 - 4(2x)^3\left(\frac{1}{2x}\right) + 6(2x)^2\left(\frac{1}{2x}\right)^2 - 4(2x)\left(\frac{1}{2x}\right)^3 + \left(\frac{1}{2x}\right)^4 \\ &= 16x^4 - 16x^2 + 6 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{16x^4}\end{aligned}$$

ఉదాహరణ 5.9 $\left(x^2 + \sqrt{1-x^2}\right)^5 + \left(x^2 - \sqrt{1-x^2}\right)^5$ ను విస్తరించుము

సాధన

$$\begin{aligned}\left(x^2 + \sqrt{1-x^2}\right)^5 &= {}^5C_0(x^2)^5\left(\sqrt{1-x^2}\right)^0 + {}^5C_1(x^2)^4\left(\sqrt{1-x^2}\right)^1 \\ &\quad + {}^5C_2(x^2)^3\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 + {}^5C_3(x^2)^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 \\ &\quad + {}^5C_4(x^2)^1\left(\sqrt{1-x^2}\right)^4 + {}^5C_5(x^2)^0\left(\sqrt{1-x^2}\right)^5 \\ &= x^{10} + 5x^8\sqrt{1-x^2} + 10x^6(1-x^2) + 10x^4(1-x^2)\sqrt{1-x^2} \\ &\quad + 5x^2(1-x^2)^2 + (1-x^2)^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(x^2 - \sqrt{1-x^2}\right)^5 &= {}^5C_0(x^2)^5\left(\sqrt{1-x^2}\right)^0 - {}^5C_1(x^2)^4\left(\sqrt{1-x^2}\right)^1 \\ &\quad + {}^5C_2(x^2)^3\left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 - {}^5C_3(x^2)^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3\end{aligned}$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 241 14-05-2022 11:13:26

$$+{}^{5}C_{4}(x^2)^1\left(\sqrt{1-x^2}\right)^4-{}^{5}C_{5}(x^2)^0\left(\sqrt{1-x^2}\right)^5$$

$$= x^{10}-5x^8\sqrt{1-x^2}+10x^6(1-x^2)-10x^4(1-x^2)\sqrt{1-x^2}$$

$$+5x^2(1-x^2)^2-(1-x^2)^2\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\left(x^2+\sqrt{1-x^2}\right)^5+\left(x^2-\sqrt{1-x^2}\right)^5 = 2\left[x^{10}+10x^6(1-x^2)+5x^2(1-x^2)^2\right]$$

$$= 2\left[x^{10}+10x^6-10x^8+5x^2(1-2x^2+x^4)\right]$$

$$= 2\left[x^{10}-10x^8+15x^6-10x^4+5x^2\right]$$

ఉదాహరణ 5.10 ప్రతి ధనపూర్ణాంక సంఖ్య n కు 6^n-5n ను 25 చే భాగించిన శేషము 1 అగును అని ద్విపద సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి నిరూపించుము..

సాధన

దీనిని నిరూపించడానికి $6^n-5n=25k+1$ తీసుకొనవలెను k అనునది ఒక పూర్ణాంక సంఖ్య అని నిరూపించిన చాలును.

కావున, $(1+x)^n={}^nC_0+{}^nC_1x+{}^nC_2x^2+...+{}^nC_{n-1}x^{n-1}+{}^nC_nx^n, n\in\mathbb{N}$

$x=5$ గా తీసుకొనిన మనకు $(1+5)^n={}^nC_0+{}^nC_1 5+{}^nC_2 5^2+...+{}^nC_{n-1}5^{n-1}+{}^nC_n 5^n$ లభించును.

పైన గల సమానత్వం నుంచి $6^n=1+5n+25\left({}^nC_2+{}^nC_3 5+...+{}^nC_n 5^{n-2}\right)$ గా మారును.

అందువలన, $6^n-5n=1+25\left({}^nC_2+{}^nC_3 5+...+{}^nC_n 5^{n-2}\right)=1+25k, k\in\mathbb{N}$

దీని నుంచి 6^n-5n ను 25 చే భాగించిన శేషము 1 అని నిరూపించవచ్చును. ఇది ప్రతి ధనపూర్ణసంఖ్య 'n' కు వర్తించును.

ఉదాహరణ 5.11 7^{400} సంఖ్య యందు చివరి రెండు అంకెల విలువను కనుగొనుము.

సాధన

$$7^{400}=(7^2)^{200}=(50-1)^{200}$$

$$={}^{200}C_0 50^{200}-{}^{200}C_1 50^{199}+...$$

$$+{}^{200}C_{198}50^2(-1)^{198}+{}^{200}C_{199}50(-1)^{199}+{}^{200}C_{200}(-1)^{200}$$

$$=50^2\left({}^{200}C_0 50^{198}-{}^{200}C_1 50^{197}+...+{}^{200}C_{198}(-1)^{198}\right)-200\times 50+1$$

కావున 50^2 మరియు 200 లు 100 చేత భాగింపబడును, చివరి రెండు అంకెలు 7^{400}

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 242 14-05-2022 11:13:30

అభ్యాసము 5.1

1. (i) $\left(2x^2-\frac{3}{x}\right)^3$ (ii) $\left(2x^2-3\sqrt{1-x^2}\right)^4+\left(2x^2+3\sqrt{1-x^2}\right)^4$ విస్తరించుము.

2. (i) 102^4 (ii) 99^4 (iii) 9^7 గణించుము

3. ద్విపద సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి క్రిందివాటిలో ఏది పెద్ద సంఖ్యనో అని సూచించుము. $(1.01)^{1000000}$, 10000

4. $\left(x^2+\frac{1}{x^3}\right)^{10}$ –విస్తరణలో x^{15} గుణకమును కనుగొనుము.

5. $\left(x^2-\frac{1}{x^3}\right)^6$ విస్తరణలో x^2 గుణకమును మరియు x^6 యొక్క గుణకమును కనుగొనుము.

6. $(1+x^3)^{50}\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^5$ –విస్తరణ యందు x^4 గుణకమును కనుగొనుము..

7. $\left(2x^3-\frac{1}{3x^2}\right)^5$ –నందు స్థిరపదమును కనుగొనుము.

8. 3^{600} –సంఖ్య నందు చివరి రెండు అంకెలను కనుగొనుము.

9. ద్విపద సిద్ధాంతంను ఉపయోగించి ప్రతి ధనపూర్ణాంక సంఖ్య n కు $9^{n+1}-8n-9$ ను 64 చే భాగించునని చూపుము..

10. n ఒక బేసి ధనపూర్ణాంక సంఖ్య అయితే $(x+y)^n$ విస్తరణ యందు గల మధ్య పదముల గుణకములు సమానం అని నిరూపించుము.

11. n ఒక ధన పూర్ణాంక సంఖ్య మరియు r అనునది ఋణాత్మకం కాని పూర్ణాంక సంఖ్య అయితే $(1+x)^n$ విస్తరణ యందు x^r మరియు x^{n-r} గుణకాలు సమానం అని నిరూపించుము.

12. n ఒక ధనపూర్ణాంక సంఖ్య a మరియు b లు విభిన్న పూర్ణాంక సంఖ్యలు అయితే a^n-b^n కు $a-b$ ఒక కారణాంకం అని నిరూపించుము. (సూచన : $a^n=(a-b+b)^n$ ను విస్తరించుము)

13. $(a+b)^n$ ద్విపద విస్తరణలో 4వ పదము గుణకము మరియు 13వ పదముల గుణకములు సమానము అయితే n విలువను కనుగొనుము.

14. $(a+x)^n$ ద్విపద విస్తరణ యందు గల మూడు వరుసలోని పదాలు 1:7:42 నిష్పత్తిలో గలవు అయితే n విలువను కనుగొనుము.

15. $(1+x)^n$ ద్విపద విస్తరణ యందు 5వ, 6వ, మరియు 7వ పదాలు గుణకములు అంకశ్రేఢి యందు గలవు. అన్ని n విలువలను కనుగొనుము (n విలువను కనుగొనుము).

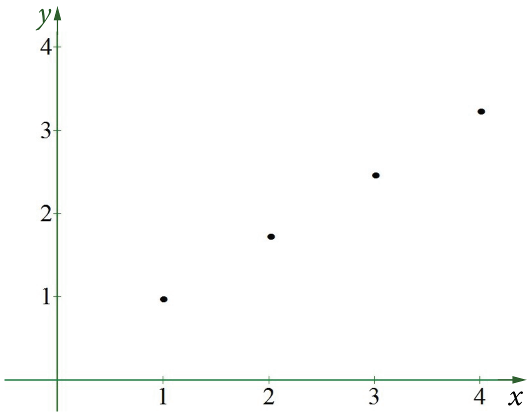
16. $C_0^2+C_1^2+C_2^2+\ldots+C_n^2=\frac{(2n)!}{(n!)^2}$ అని నిరూపించుము.

5.4 పరిమిత వరుసలు (Finite Sequences)

వరుసలు అనునది ప్రత్యేకమైన మూలకాల జాబితా అగును $a_1, a_2, \ldots$ అనునది సరళముగా ముందుకు సాగు క్రమములో గల సంఖ్యలు వరుసల ప్రమేయం యొక్క ప్రదేశముగా గల n మొదటి సహజ సంఖ్యలు లేదా $\mathbb{N}$ ఈ అధ్యాయములో పూర్తిగా మనము శ్రేణులకు సహజ సంఖ్యలను మాత్రమే తీసుకొనవలెను మరియు ఇది వరుసలను సూచించును. అంక వరుసలు మరియు గుణ వరుసలను అంకశ్రేఢి మరియు గుణశ్రేఢిలని కూడా చెప్పవచ్చును. వరుసలకు మరియు శ్రేణులకు గల ప్రాథమిక నిర్వచనాలను గురించి గుర్తు తెచ్చుకొందుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 243 14-05-2022 11:13:33

- X అనునది ఒక సమితి $n \in \mathbb{N}$ అయితే ఏదైనా ఒక ప్రమేయం $f:\{1,2,3,...,n\} \rightarrow X$, X అనునది పరిమితి వరుసలు అని అందురు. మరియు ఏదైనా ఒక ప్రమేయం $g:\mathbb{N} \rightarrow X$, X ను అనంత వరుసలు అందురు. f_n ప్రమేయం యొక్క విలువను n వద్ద a_n అని సూచించవచ్చును. మరియు ఆ వరుసలను స్వయంగా a_n అని సూచించవచ్చును. సమితి X అనునది వాస్తవ సంఖ్య సమితి అయిన ఆ వరుసలను సంఖ్యా వరుసలు లేదా వరుసల యొక్క వాస్తవ సంఖ్య వరుసలు అందురు.
- ప్రతి వరుసలను ప్రమేయంగా తీసుకొనవచ్చును కాని ప్రతి ప్రమేయము తప్పనిసరిగా వరుసలుగా ఉండనవసరం లేదు.
- అసమ సమితుల యందు మూలకము పునరావృత్తం కాదు. వరుసల యందు మాత్రము పునరావృతం కావచ్చును. వరుసల నందు అన్ని పదాలు సమానంగా వుండిన దానిని స్థిరవరుసలు అందురు.
- (a_n) అను వరుసలను దృశ్యమానం చేయడానికి ఉపయోగకరమైన మార్గమును గ్రాఫ్ నందు గుర్తించిన $\{(n,a_n):n \in \mathbb{N}\}$ అనునది వరుసల యొక్క వివరాలను తెలుపును.



படம் 5.1

5.4.1 అంక గణిత మరియు గుణశ్రేఢులు (Arithmetic and Geometric Progressions)

కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాలలో గల వరుసలను శ్రేఢులు అందురు ఇచ్చట వరుసలలోని పదాలు ఆరోహణ రూపంలో లేదా అవరోహణ రూపంలో వుండును.

అంకశ్రేఢి మరియు గుణశ్రేఢిలను గురించి చిన్నతరగతులలోని నిర్వచనాలను మరియు ఫలితాలను మనము గుర్తుకు తెచ్చుకొని చర్చించుకుందాము.

అంకశ్రేఢి (Arithmetic Progression)(AP)

- $a, a+d, a+2d, a+3d, ..., a+(n-1)d, a+nd, ...$ అను వరుస క్రమము యొక్క రూపమును అంకశ్రేఢి లేదా అంక వరుసలు అందురు. ప్రతిపదము (యొదటి పదం తప్ప మిగిలిన) ముందు పదమునకు ఒక స్థిరసంఖ్యను కలపడం వలన ఈ వరుసలను పొందవచ్చని మరోవిధంగా చెప్పవచ్చును. ఈ స్థిరసంఖ్య d ను సామాన్య వ్యత్యాసము (సామాన్య భేదము) అని a పదమును తొలిపదము లేదా మొదటి పదము అని అందురు.
- అంకశ్రేఢి యందు n వ పదము $T_n = a+(n-1)d$ అగును.
- $\sqrt{2}, \sqrt{2}+\sqrt{3}, \sqrt{2}+2\sqrt{3}, \sqrt{2}+3\sqrt{3}, ...$ మరియు $12, 9, 6, 3, \ldots$ ల అంక వరుసల యందు సామాన్యభేదము $\sqrt{3}$ మరియు -3 అగును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 244 14-05-2022 11:13:34

- 3,7,11 లు మూడు ప్రధాన సంఖ్యలు అంకశ్రేఢి నందు వుండడం గమనింపదగ్గ ఆసక్తికరమైనది.
- $n \in \mathbb{N}$, $T_n = an+b$, లో a, b అనునవి సాపేక్ష ప్రదానాలలో ఏర్పడు అంకశ్రేఢి అనంతమైన ప్రధాన సంఖ్యలతో పాటు మిశ్రమ సంఖ్యలను కలిగివుండును.

గుణశ్రేఢి (Geometric Progression) (GP)

- $a, ar, ar^2, ar^3, ..., ar^{n-1}, ar^n, ...$ అనురూపంలో గల వరుసలలో $a \neq 0$,. మరియు $r \neq 0$, గా వుండడమును గుణశ్రేఢి లేదా గుణ వరుసలు అందురు. వరుసలలోని ప్రతి పదమును ముందు పదమును ఒక స్థిర సంఖ్యతో గుణించడం వలన పొందవచ్చును. (మొదటి పదము తప్ప) అని వేరే విధంగా చెప్పవచ్చును. ఈ స్థిరసంఖ్య r ను సామాన్య నిష్పత్తి అని మరియు a పదంను తొలిపదము లేదా మొదటి పదము అందురు.
- గుణశ్రేఢి యందు n వ పదము $T_n = ar^{n-1}$ అగును.
- 1, 2, 4, 8, 16 .... మరియు $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 16, ...$ అను వరుసలు గుణశ్రేఢి యందు వుండి వాటి సామాన్య నిష్పత్త 2 మరియు $\sqrt{2}$ అగును.
- గుశ్రేఢి యందు గల ప్రతి పదమునకు ధనపూర్ణాంక సామాన్య నిష్పత్తిలో సంవర్గమానంగా తీసుకొనడం వలన అంకశ్రేఢిగా మారును $a, ar, ar^2, ...$ గుణశ్రేఢిలో $r > 0$ అందువలన $\log a, \log(ar), \log(ar^2), ...$ అనునది అంకశ్రేఢిగాను, సామాన్య వ్యత్యాసము $log\ r$ అగును.

c, c, c, . . ., $c \neq 0$ అను వరుసలు అంక వరుసలుగాను మరియు గుణవరుసలుగాను వుండడం ఆసక్తికరమైనది.

0, 0, 0, . . . అను ప్రత్యేక స్థిర వరుసలను పరిశీలించి తీసుకొనుము. ఇది ఒక అంకవరుసలు అని తెలుసుకొనవచ్చును. కాని దానిని ఒక గుణవరుసలుగా తీసుకొనిన మొదటిపదం a అనునది సున్నగా వుండును. దాని సామాన్య నిష్పత్తి r ను ఏమని చెప్పవచ్చును? r విలువను 1, 2 లేదా ఏదైనా ఇతర సంఖ్యగా తీసుకొనిన మనకు అదే వరుసలు 0, 0, 0, . . . గా లభించును. ఈ అనంత గుణ వరుసలలో సామాన్య నిష్పత్తి లెక్కించలేనిదిగా ఉన్నది. ఈ గందరగోళమును అధికమించడానికి గణితశాస్త్రజ్ఞులు గుణశ్రేఢి యందు గల వరుసల నందు $a \neq 0$ గా నిర్వచనం నందు తీసుకొన్నారు. (ఇది ఊహాత్మకమైనది)

5.4.2 అంకగుణ శ్రేఢి (Arithmetico- Geometric Progression) (AGP)

అంక మరియు గుణశ్రేఢులను కలపడం వలన ఏర్పడు ఒక క్రొత్త శ్రేఢిని అంకగుణశ్రేఢి అందురు. అంకశ్రేఢి, గుణశ్రేఢిలను AP మరియు GP అని సంక్షిప్తంగా వ్రాయవచ్చును. అదేవిధముగా అంక గుణశ్రేఢిని AGP అని సంక్షిప్తంగా వ్రాయవచ్చును. సంభావ్యతా సిద్ధాంతము లోని అనువర్తనాల విలువలను కనుగొనుటకు ఈ అంకగుణశ్రేఢులను ఉపయోగించెదరు.

నిర్వచనము 5.1

$a, (a+d)r, (a+2d)r^2, (a+3d)r^3, ..., (a+(n-1)d)r^{n-1}, (a+nd)r^n, ...$ అను రూపంలో గల క్రమములను అంక గుణశ్రేఢి లేదా అంక గుణక్రమము అని అందురు.

$AP: a, a+d, a+2d, ...$

$GP: 1, r, r^2, ...$ గా తీసుకొనిన

AGP అనునది $a, (a+d)r, (a+2d)r^2 ....$ అగును.

ఇచ్చట AGP లో a అనునది మొదటి పదము, d అనునది సామాన్య వ్యత్యాసము మరియు r అనునది సామాన్య నిష్పత్తి అగును. మనము $r = 1$ గా తీసుకొనిన AGP క్రమము AP గా మారును మరియు $d = 0$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 245 14-05-2022 11:13:34

తీసుకొనిన ఆ AGP క్రమము GP గా మారును అందువలన AGP కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాలలో అంకశ్రేఢి మరియు గుణశ్రేఢిలుగా మారును గణిత శాస్త్రములో సాధారణంగా అభ్యసించడానికి ఇది ఒక సరళమైన సందర్భముగా ఉన్నది.

AGP నందు n వ పదము $T_n = (a+(n-1)d)r^{n-1}$ గా ఉన్నదని మనము గమనించవచ్చును. అన్ని AP లు మరియు అన్ని GP లు AGP లలో కలవు.

ఉదాహరణకు AP లో 0, 1, 2, 3, 4, . . . మరియు GP లో

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$ గా కలిగిన AGP లో

$\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{8}, \ldots$ అగును.

క్రమము 4, 14, 40, 104, 256, 608 . . . అనునది కూడా AGP కు ఉదాహరణమగును. ఈ వరుసల నందు a=4, d=3, r=2.

5.4.3 హరాత్మకశ్రేఢి (Harmonic progression (HP))

ముఖ్యమైన కొన్ని వరుసలలో ఈ హరాత్మకశ్రేఢి ఒకటి. ఇది అంకశ్రేఢికి చాలా దగ్గర సంబంధమును కలిగియుండును. అందువలన హరాత్మకశ్రేఢిని చాలా విస్తృతముగా ఉపయోగించెదరు.

నిర్వచనము 5.2

$h_1, h_2, h_3, \ldots$ అను వరుసలను హరాత్మక వరుసలు లేదా హరాత్మక శ్రేఢి అని చెప్పవచ్చును. అయితే $\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \frac{1}{h_3}, \frac{1}{h_4}, \ldots$ అనునది అంకవరుసలు అగును.

ఇచ్చట గమనించవలసినది వరుసలు హరాత్మకశ్రేఢిలో ఉన్నట్లయితే వాటి విలోమములు అంకశ్రేఢిగా వుండును. కాని, అంకశ్రేఢి యొక్క విలోమములు అన్నింటినీ హరాత్మకశ్రేఢిలో కలవని చెప్పరాదు. నిజానికి అంక వరుసలులో సున్నను కలిగివుంటే దాని విలోమమునకు అర్థము లేదు. ఒకవేళ అంకశ్రేణిలో సున్న లేకున్న యడల వాటి విలోమములు హరాత్మకశ్రేఢిలో వుండును. కావున సాధారణ హరాత్మశ్రేఢి క్రిందిరూపంలో వుండును.

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a+d}, \frac{1}{a+2d}, \frac{1}{a+3d}, \ldots$$

ఒక భిన్నము నందు హారము సున్నగా లేకున్నయెడల $a+kd \neq 0$; ఏదైనా ఒక పూర్ణాంకము $k \geq 0$ కావున $\frac{-a}{d}$ అనునది పూర్ణసంఖ్యలుగా వుండవలెనని అవసరం లేదు. హరాత్మకశ్రేఢి సమస్యలను అంకశ్రేఢి సమస్యలుగా మార్చుకొని అంకశ్రేఢి పద్ధతిలో సూత్రములను ఉపయోగించి సాధించవచ్చును.

(i) క్రమము $\left(\frac{1}{n}\right) = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ అనునది హరాత్మక వరుసలు గ్రాఫు (రేఖాచిత్రము నందు) $\left\{\left(n, \frac{1}{n}\right): n \in \mathbb{N}\right\}$ మరియు దృశ్యమానంగా హరాత్మక వరుసలు $\left(\frac{1}{n}\right)$ అగును.

(ii) a, b, c లు *HP* హరాత్మకశ్రేఢిలో ఉండిన $b = \frac{2ac}{a+c}$

(iii) ఒక త్రిభుజములో గల మధ్యగత రేకలు అంకశ్రేఢిలో ఉండిన వాటి భుజములు హరాత్మకశ్రేఢిలో ఉండును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 246 14-05-2022 11:13:35

ఉదాహరణ 5.12 a, b, c లు HP లో వుండిన $\Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$ అనిచూపును a, b, c లు HP నందు కలవు అయితే $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$ లు అయినప్పుడు మాత్రమే HP లో వుండును. అని చూపుము

సాధన

a, b, c లు HP లో ఉండిన $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ లు AP లో వుండును.

అందువలన $\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ ల నుండి $ab - ac = ac - bc$. లభించును.

కావున $a(b-c) = c(a-b)$ దీని నుండి మనకు $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$ లభించును.

$\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$ అయితే $a(b-c) = c(a-b)$ అగును

ఇరువైపులా abc తో భాగించిన మనకు $\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$ లభించును.

అందువలన $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ లు AP లోనూ మరియు a, b, c లు HP లోనూ వుండును.

ఉదాహరణ 5.13 ఒక హరాత్మక శ్రేఢి యందు 5వ పదము మరియు 9వ పదములు $\frac{1}{19}$ మరియు $\frac{1}{35}$ అయితే ఆ వరుసక్రమములో 12వ పదమును కనుగొనుము.

సాధన

(h_n) అనునది హరాత్మకశ్రేఢి మరియు $a_n = \frac{1}{h_n}$ అగును అందువలన $a_5 = 19$ మరియు $a_9 = 35$

a_n అనునది అంకశ్రేఢిలో వుండిన మనకు $a + 4d = 19$ మరియు $a + 8d = 35$ లభించును. ఈ రెండు సమీకరణాలను సాధించగా మనకు $a = 3$ మరియు $d = 4$ లభించును.

$a_{12} = a + 11d = 47$.

అందువలన 12వ పదము హరాత్మకశ్రేఢి యందు $\frac{1}{47}$ అగును.

5.4.4 అంక, గుణ మరియు హరాత్మక మధ్యమము
(Arithmetic, Geometric and Harmonic Means)

మనకు సరాసరిలను గురించి తెలియను సరాసరిలో అనేక రకములు కలవు. అంకశ్రేఢి, గుణశ్రేఢి మరియు హరాత్మకశ్రేఢిలు అనునవి కూడా సరాసరులే. అంకమధ్యమము మరియు గుణ మధ్యమముల నిర్వచనాలను గురించి గుర్తు తెచ్చుకొనుము. ఇక్కడ పదాలు అంకశ్రేఢి లేదా గుణశ్రేఢిలో ఉండనవసరము లేదు.

అంకమధ్యమము మరియు గుణమధ్యమము (Arithmetic, Geometric and Harmonic Mean)

నిర్వచనము 5.3

n అనునది ఏదైనా ఒక ధనపూర్ణాంకముగా తీసుకొనుము. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ అనునది n సంఖ్యలు అయితే ఆ సంఖ్యలు $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$ ను అంకమధ్యమముల యొక్క సంఖ్యలు $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ అగును.

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ల విభిన్న సంఖ్యలుగాను మరియు ధనాత్మక సంఖ్యలుగా ఉండనవసరము లేదు. 14, 14, 17, 20, 15 సంఖ్యల అంకమధ్యమమును 16 అని నిర్వచనము నుండి సులభముగా గుర్తించవచ్చును. అంకమధ్యమము నిర్వచనంలో సంకలన స్థానములో గుణకారమును మరియు n తో భాగించబడు స్థానములో n వ మూలమును తీసుకోవడం వలన గుణమధ్యమము మనకు లభించును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 247 14-05-2022 11:13:36

నిర్వచనము 5.4

n అనునది ఏదైనా ధనపూర్ణాంక సంఖ్య అనుకొనుము. $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ అనునవి ఋణాత్మకం కాని సంఖ్యలు అయితే $\sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 ... a_n}$ ను $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ అనే సంఖ్యలకు గుణమధ్యమము అందురు.

ఇక్కడ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ సంఖ్యలు విభిన్నముగా ఉండనవసరం లేదు కాని అవి ఋణాత్మకం కాని సంఖ్యలుగా ఉండవలెను. 4, 6, 9 సంఖ్యల గుణమధ్యమము $\sqrt[3]{216} = 6$ అగును. ఈ మూడు సంఖ్యల అంకమధ్యమము $\frac{19}{3} = 6\frac{1}{3}$ అగును. దీని నుండి అంకమధ్యమము అనునది గుణమధ్యమము కంటే ఎక్కువగా వుండును అని ఈ సందర్భంలో చెప్పవచ్చును. ఇది అన్నివేళలలో నిజమగునా?

ఏదైనా n ఋణాత్మకం కాని సంఖ్యలకు అంకమాధ్యమము అనునది గుణమధ్యమము కంటే ఎక్కువగానూ లేదా సమాణము" అని నిరూపించవచ్చును. అనగా AM అనునది అంకమధ్యమమును, GM అనునది గుణమధ్యమమును సూచించిన $AM \geq GM$ అగును.

ఈ (అసమానత్వమును) అసమానతను నిరూపించుటకు $AM \geq GM$ లు రెండు ఋణాత్మకం కాని సంఖ్యలుగా వుండును.

సిద్ధాంతము 5.2

ఏదైనా రెండు ఋణాత్మకం కాని సంఖ్యలకు AM మరియు GM లు అంక మధ్యమము మరియు గుణమధ్యములు గా సూచించిన $AM \geq GM$ అగును. ఆ రెండు సంఖ్యలు సమానమయినప్పుడు మాత్రమే ఇది వర్తించును.

నిరూపణ :

a మరియు b లు ఏదైనా రెండు ఋణాత్మకం కాని సంఖ్యలు అనుకొనుము. కావున $AM = \frac{a+b}{2}$ మరియు $GM = \sqrt{ab}$ అగును. మనకు $(a+b)^2 - 4ab = (a-b)^2 \geq 0$ లభించును. అందువలన $(a+b)^2 - 4ab \geq 0$ దీని నుండి మనకు $(a+b) \geq 2\sqrt{ab}$ లభించును. కావున $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ అగును.

$AM \geq GM$

$(a+b)^2 - 4ab = 0$ అయినప్పుడు మాత్రమే సమానతను కలిగివుండును

$\Leftrightarrow (a-b)^2 = 0$ కు అయినప్పుడు మాత్రమే వర్తించును.

$\Leftrightarrow a = b$ అయినప్పుడు మాత్రమే $AM = GM$ అగును.

$AM \geq GM$ నకు రేఖాగణిత నిరూపణ :

a మరియు b అనునవి ఏదైనా రెండు ఋణాత్మకం కాని వాస్తవ సంఖ్యలు అనుకొనుము. ఈ సంఖ్యలలో కనీసము ఒక సంఖ్య సున్నగా అయితే GM విలువ సున్న అగును దీనిని నిరూపించనవసరము లేదు. $a > 0$ మరియు $b > 0$ అని అనుకొనుము. $a+b$ పొడవుగా గల AB అను సరళరేఖ ఖండమును గీచి AB ని వ్యాసముగా గల ఒక అర్థవృత్తమును గీయుము. M అనునది AB యొక్క మధ్యబిందువు అగును. అందువలన అర్థవృత్తము యొక్క కేంద్రము $AM = MB = \frac{a+b}{2}$ అవుతుంది.

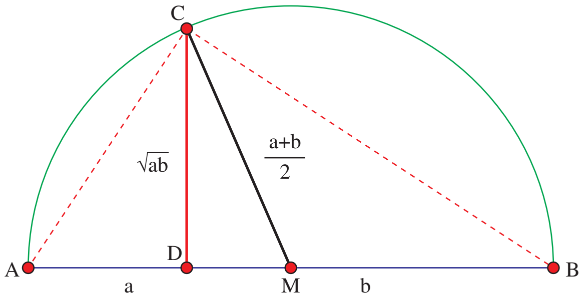
M అనునది AB యొక్క మధ్య బిందువు అయితే

$AM = MB = \frac{a+b}{2}$

అందువలన $\frac{a+b}{2}$ అనునది వృత్త వ్యాసార్థము అగును.

$AD = a$, $DB = b$ అగునట్లు D అనే బిందువును AB పైన తీసుకొనుము

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 248 14-05-2022 11:13:36



పటము 5.2

D గుండా AB కు లంబరేఖను గీయుము. ఇది అర్ధవృత్తమును C అనే బిందువు వద్ద ఖండించును. CA, CB మరియు CM అను రేఖలను గీయవలెను. M అనునది అర్ధవృత్తము కేంద్రము కావున $CM =$ వ్యాసార్ధము $= \dfrac{a+b}{2}$, $MD = \dfrac{a+b}{2} - a$ అగును.

ΔACD మరియు ΔCBD లు సరూప త్రిభుజలు కావున $\dfrac{CD}{AD} = \dfrac{BD}{CD}$ అగును. అందువలన $CD^2 = AD \times BD = ab$, $CD = \sqrt{ab}$.

(పైథాగరస్ సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి కూడా $CD = \sqrt{ab}$ అని నిరూపించవచ్చును) ఏదైనా ఒక అర్ధజ్యా యొక్క పొడవు. వ్యాసము కంటే తక్కువగాను లేదా సమానముగా ఉండును.

కావున $CD \le CM$ అనగా $\sqrt{ab} \le \dfrac{a+b}{2}$ కు $AM \ge GM$ అని అర్థము. అర్ధజ్యా పొడవు DC వ్యాసార్థమునకు సమానమైతే D=M అవుతుంది. a=b <=> AM=GM సమానతను కలిగివుండును.

ఫలితము 5.1

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ అనునది అంకశ్రేఢిలో ఉన్నట్లయితే ప్రతిపదము a_k $(k > 1)$ నకు అంకమధ్యమము యొక్క ముందుపదము a_{k-1} గాను, మరియు దాని తరువాత పదము a_{k+1} గాను వుండును.

నిరూపణ :

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ లో మొదటి పదము a గాను, మరియు సామాన్య వ్యత్యాసము d గాను గల అంకశ్రేఢిని తీసుకొనిన

$a_k = a + (k-1)d, a_{k-1} = a + (k-2)d$ మరియు $a_{k+1} = a + kd$ అగును.

అందువలన $\dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2} = \dfrac{a + (k-2)d + a + kd}{2} = \dfrac{2a + (2k-2)d}{2} = a + (k-1)d = a_k$ అగును.

a_{k-1} మరియు a_{k+1} అంకమధ్యమము a_k అగును.

ఫలితము 5.2 : $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ అనునది గుణశ్రేడిలో ఉన్నట్లయితే ప్రతి పదము $a_k (k > 1)$ నకు, గుణశ్రేడి యొక్క ముందుపదము గుణశ్రేడిని a_{k-1} గా మరియు a_{k+1} తరువాత పదముగాను ఉండును.

నిరూపణ : $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ లో మొదటిపదము a గాను మరియు సామాన్యనిష్పత్తి r గాను గల గుణశ్రేఢిని తీసుకొనిన $a_k = ar^{k-1}, a_{k-1} = ar^{k-2}$ మరియు $a_{k+1} = ar^k$.

అందువలన $\sqrt{a_{k-1}a_{k+1}} = \sqrt{ar^{k-2}ar^k} = \sqrt{a^2 r^{2k-2}} = ar^{k-1} = a_k$.

$\therefore$ a_{k-1} మరియు a_{k+1} గుణమధ్యమము a_k అగును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 249 14-05-2022 11:13:37

ఉదాహరణ 5.14 $4, A_1, A_2, ..., A_7, 7$ అను వరుసక్రమములు అంకశ్రేఢిలో ఉండిన $A_1, A_2, ..., A_7$ అను 7 సంఖ్యలను కనుగొనుము మరియు $12, G_1, G_2, G_3, G_4, \frac{3}{8}$ అను వరుసక్రమములు గుణశ్రేఢిలో ఉండిన G_1, G_2, G_3, G_4 అను 4 సంఖ్యలను కనుగొనుము.

సాధన

$a = 4$ మరియు $4 + 8d = 7$ దీని నుండి $d = \frac{3}{8}$ లభించును. కావున మనకు కావలసిన 7 సంఖ్యలు $4\frac{3}{8}, 4\frac{6}{8}, 5\frac{1}{8}, 5\frac{4}{8}, 5\frac{7}{8}, 6\frac{2}{8}, 6\frac{5}{8}$ అగును.

$a = 12$ మరియు $ar^5 = \frac{3}{8}$ అందువలన మనకు $r^5 = \frac{1}{32}$ లభించును. కావున $r = \frac{1}{2}$ అగును. అందువలన కావలసిన సంఖ్యలు $6, 3, 1\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ అగును.

ఉదాహరణ 5.15 ఒక గుణశ్రేఢి యందు గల 4వ పదము, 5వ పదము, మరియు 6వ పదముల లబ్దము 4096 మరియు 5వ పదము, 6వ పదము మరియు 7వ పదముల లబ్దము 32768 అయితే ఆ గుణశ్రేఢి యందు గల మొదటి 8 పదముల మొత్తమును కనుగొనుము.

సాధన

$a, ar, ar^2, ...$ అనునవి గుణశ్రేఢి ధర్మాలను (లక్షణాలను) కలిగి వుండును అనుకొనుము.

4వ పదము, 5వ పదము మరియు 6వ పదాలు ar^3, ar^4 మరియు ar^5 వాటి లబ్దము విలువ a^3r^{12}

అందువలన $a^3r^{12} = 4096$ అదేవిధంగా $a^3r^{15} = 32768$

$\frac{a^3r^{15}}{a^3r^{12}} = \frac{32768}{4096}$ అందువలన $r^3 = 8$, దీని నుండి $r = 2$ అగును.

$a^3r^{12} = 4096$ దీని నుండి మనకు $a^3 = 1 \Rightarrow a = 1$ అగును.

మొదటి 8 పదముల మొత్తము $\frac{a(1-r^8)}{1-r} = \frac{1-2^8}{1-2} = 255$. అగును.

హరాత్మక మధ్యమము (Harmonic Mean)

హరాత్మక మధ్యమము అనగా ఇవ్వబడిన ధనాత్మక సంఖ్యల విలోమముల యొక్క అంకమధ్యమముల విలోమములు అగును. అనగా $h_1, h_2, ..., h_n$ లు ధనాత్మక సంఖ్యలు అయితే వాటి విలోమములు $\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, ..., \frac{1}{h_n}$ అగును.

అంకమధ్యమముల విలోమము $\frac{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + ... + \frac{1}{h_n}}{n}$ అగును.

ఈ అంకమధ్యమముల విలోమము అనునది $h_1, h_2, ..., h_n$ సంఖ్యల హరాత్మక మధ్యమము $\frac{n}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + ... + \frac{1}{h_n}}$ అగును.

నిర్వచనము 5.5

$\{h_1, h_2, ..., h_n\}$ అను ధనాత్మక సంఖ్యా సమితుల హరాత్మకమధ్యమమును

$\frac{n}{\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + ... + \frac{1}{h_n}}$ గా నిర్వచింపవచ్చును.

ప్రత్యేకముగా, a మరియు b అను రెండు ధనాత్మక సంఖ్యల హరాత్మక మధ్యమము $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$ అగును. అని చూపవలెను.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 250 14-05-2022 11:13:38

"ఏదైన n ధనాత్మక సంఖ్యాసమితులకు , గుణమాధ్యమము విలువ హరాత్మక మధ్యమము కంటె ఎక్కువగా లేదా సమానముగా వుండును" అని నిరూపించుటకు $GM \geq HM$ అగును అని చూపవలెను.

ఏదైనా రెండు ఋణాత్మకం కాని సంఖ్యలకు అసమానత $GM \geq HM$ అని నిరూపించవలెను.

సిద్ధాంతము 5.3

రెండు ఋణాత్మకం కాని సంఖ్యలకు GM మరియు HM అనునవి గుణమధ్యమము మరియు హరాత్మక మధ్యమములుగా సూచించిన, $GM \geq HM$ అగును. ఆ రెండు సంఖ్యలు సమానమైనప్పుడు మాత్రమే (సమానమగును) సమానత్వమగును.

నిరూపణ : a మరియు b లు ఏవైనా రెండు ధనసంఖ్యలు అనుకొనుము.

$$GM = \sqrt{ab} \text{ మరియు } HM = \frac{2ab}{a+b}$$

$$\begin{aligned} GM - HM &= \sqrt{ab} - \frac{2ab}{a+b} \\ &= \frac{\sqrt{ab}(a+b) - 2ab}{a+b} \\ &= \frac{\sqrt{ab}((a+b) - 2\sqrt{ab})}{a+b} \\ &= \frac{\sqrt{ab}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{a+b} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

అందువలన, $GM - HM \geq 0$ అగును, దీని నుండి $GM \geq HM$

$AM \geq GM$ అని ఇంతకుముందు మనము నిరూపించడమైనది. ఇప్పుడు $GM \geq HM$ అని నిరూపించబడినది. ఈ రెండింటినీ కలపడం వలన మనకు ముఖ్యమైన అసమానత్వము $AM \geq GM \geq HM$ లభించును.

ఫలితము 5.3 : ఏదైనా రెండు ధనాత్మక సంఖ్యలకు, ముందు మధ్యమములు AM, GM మరియు HM లు గుణశ్రేఢి యందు ఉండును.

నిరూపణ a మరియు b లు ఏవైనా రెండు ధనాత్మక వాస్తవ సంఖ్యలు అనుకొనుము.

$$AM = \frac{a+b}{2}, \; GM = \sqrt{ab} \text{ మరియు } HM = \frac{2ab}{a+b}.$$

$$AM \times HM = \left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{2ab}{a+b}\right) = ab = (\sqrt{ab})^2 = GM^2$$

అనగా $AM \times HM = GM^2$ దీని నుండి AM, GM మరియు HM లు గుణశ్రేఢి యందు కలవు.

క్రింది ఫలితాలను గమనింపవచ్చును.

- b అనునది a మరియు c ల అంకమధ్యమము అయితే a,b,c లు అంకశ్రేఢిలో వుండును.
- b అనునది a మరియు c ల గుణమధ్యమము అయితే a,b,c లు గుణశ్రేఢిలో వుండును.
- b అనునది a మరియు c ల హరాత్మకమధ్యమము అయితే a,b,c లు హరాత్మకశ్రేఢిలో వుండును.

ఒక వాహనము గంటకు x km వేగముతో కొంతదూరమునకు ప్రయాణించి మరియు అదేదూరమునకు తిరిగి y km గంటకు వేగముతో చేరిన, ఆ వాహనము యొక్క మొత్తము ప్రయాణించిన సరాసరి వేగము

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 251 14-05-2022 11:13:39

హరాత్మక మధ్యమముల పురోగమన మరియు తిరోగమన వేగమగును. వాస్తవదూరము d అయితే పురోగమరన కాలము $\dfrac{d}{x}$ అగును మరియు తిరోగమన కాలం $\dfrac{d}{y}$ అగును.

అందువలన సరాసరి వేగము, $\dfrac{2d}{\frac{d}{x}+\frac{d}{y}} = \dfrac{2xy}{x+y}$ అగును.

ఉదాహరణకు గంటకు $60km$ వేగముతో ఒక వాహనము ప్రయాణించుచున్నది. కొంతదూరమునకు ప్రయాణించి మరియు $40km$ గంటకు వేగములో తిరిగి అదే దూరమును చేరిన ఆ వాహనం యొక్క మొత్తము ప్రయాణము సరాసరి వేగము 60 మరియు 40 లు హరాత్మకమధ్యమము అగును. అనగా $\dfrac{2\times 60\times 40}{60+40} = 48$ km/h అగును.

అభ్యాసము 5.2

1. క్రింద ఇవ్వబడిన వరుసలోని n వ పదములకు మొదటి 6 పదములను వ్రాయుము. మరియు వీటిని అంకశ్రేఢి, గుణశ్రేఢి, అంకగుణశ్రేఢి, హరాత్మకశ్రేఢి మరియు ఏదీకాదు – అని ఏ శ్రేఢికి చెందునో వర్గీకరింపుము.

   (i) $\dfrac{1}{2^{n+1}}$ (ii) $\dfrac{(n+1)(n+2)}{(n+3)(n+4)}$ (iii) $4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ (iv) $\dfrac{(-1)^n}{n}$ (v) $\dfrac{2n+3}{3n+4}$ (vi) 2018 (vii) $\dfrac{3n-2}{3^{n-1}}$

2. n వ పదము a_n గా గల శ్రేణుల యొక్క మొదటి 6 పదాలను క్రింది వాటికి కనుగొనుము.

   (i) $a_n = \begin{cases} n+1; & n \text{ ఒక బేసి సంఖ్య అయితే} \\ n; & n \text{ ఒక సరి సంఖ్య అయితే} \end{cases}$

   (ii) $a_n = \begin{cases} 1 & ; n = 1 \text{ అయితే} \\ 2 & ; n = 2 \text{ అయితే} \\ a_{n-1} + a_{n-2} & ; n > 2 \text{ అయితే} \end{cases}$

   (iii) $a_n = \begin{cases} n & ; n\ 1,\ 2, \text{ లేదా } 3 \text{ అయితే} \\ a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3} & ; n > 3 \text{ అయితే} \end{cases}$

3. క్రింది వాటి n వ పదమును వ్రాయుము.

   (i) 2, 2, 4, 4, 6, 6, . . .

   (ii) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}, \dfrac{5}{6}, \ldots$

   (iii) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{5}{6}, \dfrac{7}{8}, \dfrac{9}{10}, \ldots$

   (iv) 6, 10, 4, 12, 2, 14, 0, 16, −2, . . .

4. గుణశ్రేఢి యందు గల మూడు ఆరోహణ సంఖ్యల లబ్ధము 5832 మనము రెండవ సంఖ్యకు 6ను మరియు మూడవ సంఖ్యకు 9ను కూడిన ఫలిత సంఖ్యలు అంకశ్రేఢిలోనికి మారును దీని నుండి గుణశ్రేఢిలో ల సంఖ్యలను కనుగొనుము.

5. $\dfrac{3}{1^2 2^2}, \dfrac{5}{2^2 3^2}, \dfrac{7}{3^2 4^2}, \ldots$ అను వరుసలలో రెండు పదముల వ్యత్యాసమును అనుసరించి n వ పదమును వ్రాయుము.

6. t_k అనునది గుణశ్రేఢి యందు k వ పదము అయితే t_{n-k}, t_n, t_{n+k} కూడా గుణశ్రేఢి రూపంలో ప్రతిధనపూర్ణ సంఖ్యకు వర్తించునని చూపుము.

7. a,b,c లు గుణశ్రేఢిలో కలవు మరియు $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ అయితే x,y,z లు అంకశ్రేఢి యందు కలవని చూపుము.

8. అంక మధ్యమంలో గల రెండు సంఖ్యలు, గుణమధ్యమంలో గల సంఖ్యల కంటే 10 ఎక్కువ మరియు హరాత్మక మధ్యమంలో గల సంఖ్యల కంటే 16 ఎక్కువైతే ఆ సంఖ్యలను కనుగొనుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 252 14-05-2022 11:13:40

9. $(q-r)x^2+(r-p)x+p-q=0$ సమీకరణం యొక్క మూలములు సమానమైతే p, q, మరియు r లు అంకశ్రేఢి యందు గలవని చూపుము.

10. a,b,c లు వరుసగా p వ q వ మరియు r వ పదములు గుణశ్రేఢిలో కలవు. అయితే, $(q-r)\log a+(r-p)\log b+(p-q)\log c=0$ అనిచూపుము.

5.5 పరిమిత శ్రేణులు (Finite Series)

సంఖ్య వరుసల పదాల మొత్తము శ్రేణులు అని చెప్పవచ్చును. పరిమిత సంఖ్య వరుసల పదాల మొత్తము పరిమితశ్రేణిలు అగును. (a_n) అనునది ఒక సంఖ్య వరుసలు అయితే $a_1+a_2+...+a_n$ అనునది ఒక పరిమితిశ్రేణులు అగును. $a_1+a_2+...+a_n$ ను $\sum_{k=1}^{n} a_k$ గా సూచించవచ్చును. కొన్ని సమయాలలో సమస్యములను ఆధరంగా చేసుకొని పరిశీలించడానికి మరియు సరళముగా శ్రేణులను $a_0+a_1+a_2+...$ గా తీసుకొన వచ్చును. ఇందులో a_0 ను మొదటి పదముగా తీసుకొనవలెను.

5.5.1 అంకశ్రేఢి గుణశ్రేఢి మరిము అంక గుణశ్రేడుల మొత్తము (Sum of Arithmetic, Geometric and Arithmetico-Geometric Progressions)

ముందు తరగతులలో కొన్ని పదాల మొత్తాలకు, n పదాల మొత్తమునకు అంకశ్రేఢి మరియు గుణశ్రేఢిలను గూర్చి అధ్యాయనము చేసినాము. వాటిని మనము తిరిగి గుర్తుకు తెచ్చుకుందాము.

అంకశ్రేఢి మరిము గుణశ్రేఢిల మొత్తము (Sum of Arithmetic and Geometric Progressions)

- శ్రేణులలో గల పదాల అంక వరుసలు వుండినట్లయితే ఆ శ్రేణులను అంకశ్రేణులు అంటారు. శ్రేణులలో గల పదాలు గుణ వరుసల వుండినట్లయితే ఆ శ్రేణులలో గుణశ్రేణులు అంటారు.

- $(a+(n-1)d)$ అంక వరుసలలో గల మొదటి n పదముల మొత్తము $S_n = na+\frac{(n-1)n}{2}d = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$ గా అగును.

- గుణశ్రేడి వరుసల (ar^{n-1}) లో గల మొదటి n పదముల మొత్తము $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ $r=1$ అయిన ఆ క్రమము స్థిరవరుసలు $a,a,a,...$ మరియు మొదటి n పదముల మొత్తము స్పష్టముగా na అగును. కావున $r\neq 1$ అయితే $1+r+r^2+...+r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$ అగును.

అంక – గుణశ్రేఢుల మొత్తము (Sum of Arithmetico–Geometric Progressions)

- శ్రేణుల యందు గల పదాలు అంక గుణ వరుసలలో వుండినట్లుయితే ఆ శ్రేణులను అంక–గుణశ్రేఢులు. అందురు.

- అంక గుణశ్రేణుల వరుసలు $((a+(n-1)d)r^{n-1})$ గా కలిగిన శ్రేణులకు మొదటి n పదాల మొత్తము $S_n = \frac{a-(a+(n-1)d)r^n}{1-r}+dr\left(\frac{1-r^{n-1}}{(1-r)^2}\right)$, $r\neq 1$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 253 14-05-2022 11:13:41

ఉదాహరణ 5.16 $1+\frac{6}{7}+\frac{11}{49}+\frac{16}{343}+\ldots$ శ్రేడికి n పదముల వరకు మొత్తమును కనుగొనుము

సాధన

ఇక్కడ, $a=1, d=5$ మరియు $r=\frac{1}{7}$.

$$S_n = \frac{a-(a+(n-1)d)r^n}{1-r}+dr\left(\frac{1-r^{n-1}}{(1-r)^2}\right)$$

$$= \frac{1-(1+5(n-1))\left(\frac{1}{7}\right)^n}{1-\frac{1}{7}}+5\times\frac{1}{7}\left(\frac{\left(1-\frac{1}{7}\right)^{n-1}}{\left(1-\frac{1}{7}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{1-\frac{5n-4}{7^n}}{\frac{6}{7}}+\frac{\frac{5}{7}(7^{n-1}-1)}{7^{n-1}\left(\frac{6}{7}\right)^2}$$

$$= \frac{7^n-5n+4}{7^{n-1}6}+\frac{5(7^{n-1}-1)}{7^{n-2}36}$$

5.5.2 పరిమిత శ్రేణుల నుండి దూరదర్శిని మొత్తము; (Telescopic Summation for Finite Series)

పరిమిత లేదా అనంత శ్రేణుల పదాల మొత్తమును కనుగొనుటకు సాధారణంగా ఉపయోగించు పద్ధతిని దూరదర్శిని దూరల మొత్తము అగును. ఈ పద్ధతులో ఇవ్వబడిన శ్రేణుల n పదాల మొత్తమును రెండు పదాలలో చూపవచ్చును. సాదారణముగా మొదటిపదం మరియు చివరి పదమును తప్ప మిగిలిన పదాలను ఒకదానికొకటి రద్దు చేయబడును. (రద్దు చేసుకొనును.) మధ్యపదాలను తొలగించిన తరువాత చాలా దూరములో గల చివరిపదమును, చాలా దగ్గరగా గల మొదటి పదమును తీసుకొనవలెను అందువలన ఈ విధామును దూరదర్శినిల దూరాల మొత్తము అందురు.

ఉదాహరణ 5.17 $\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots$ శ్రేణుల యందు మొదటి n పదముల మొత్తమును కనుగానుము.

సాధన

t_k అనునది ఇవ్వబడిన శ్రేణులయందు k వ పదమును సూచించిన, ఇవ్వబడిన శ్రేణులలో $t_k=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ k వ పదమును విజయవంతముగా . వ్రాయడానికి రెండు శ్రేధుల వ్యత్యాసముగాను, సాంకేతిక విధానంలో ఉపయోగించి పరిష్కరించివచ్చును మనకు.

+

$$t_k=\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k-1}}{(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})(\sqrt{k}-\sqrt{k+1})}=\frac{\sqrt{k}-\sqrt{k+1}}{k-(k+1)}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}$$

అందువలన, $t_1+t_2+\ldots+t_n=(\sqrt{2}-\sqrt{1})+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\ldots+(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sqrt{n+1}-1$

ఉదాహరణ 5.18 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ –కనుగొనుము.

సాధన

t_k అనునది ఇవ్వబడిన శ్రేణలయందు k వ పదమును సూచించిన, $t_k=\frac{1}{k(k+1)}$.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 254 14-05-2022 11:13:41

పాక్షిక ప్రమేయాలను ఉపయోగించిన, మనకు $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$.

అందువలన,

$$t_1+t_2+...+t_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+...+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

అభ్యాసము 5.3

1. ఒక అంకశ్రేఢి యందు మొదటి 10 పదాల మొత్తము 52 గాను, మరియు మొదటి 15 పదాల మొత్తము 77 ల నుండి మొదటి 20 పదాల మొత్తమును కనుగొనువు.

2. $\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+...$ అను శ్రేణుల యందు మొదటి 17 పదాల మొత్తంను కనుగోనుము.

3. క్రింది శ్రేణుల మొదటి n పదముల మొత్తమును లెక్కించండి?

   (i) 8+88+888+8888+...　　　　(ii) 6 + 66 + 666 + 6666 + ...

4. $1+(1+4)+(1+4+4^2)+(1+4+4^2+4^3)+...$ నందు మొదటి n పదముల మొత్తమును లెక్కించండి.

5. $1, \frac{4}{3}, \frac{7}{9}, \frac{10}{27}, ...$ అను క్రమము నందు సాధారణ పదము మరియు n పదముల మొత్తమును కనుగొనుము.

6. $\sqrt{3}+\sqrt{75}+\sqrt{243}+...$ అను శ్రేణుల n పదాల మొత్తం $435\sqrt{3}$ అయితే దాని n విలువను కనుగొనుము.

7. ఒక అంకశ్రేఢి లో $(m+n)$ వ పదము మరియు $(m-n)$ వ పదముల మొత్తం విలువ అనునది m వ పదమునకు రెండు రెట్లుగా ఉండును అని చూపుము.

8. ఒక వ్యక్తి ₹3250 మొత్తంను తిరిగిచెల్లిండానికి మొదటి నెలలో ₹20 గాను మరియు ప్రతి నెలా ₹15 చొప్పున పెంచుతూ పోయిన ఆ వ్యక్తి ఎంతకాలమునకు మొత్తమును తీర్చునో కనుగొనుము? (చెల్లించునో)

9. ఒక పందెములో 20 బంతులను, ఒక్కొక్కటి 4 మీ దూరములో ఒకే రేఖలో ఉంచబడినవి. మొదటి బంతికి, ప్రారంభబిందువునకు మధ్యగల దూరము 24మీ. ఒక ఆటగాడు ఒకే సమయములో ఒక బంతి ప్రకారము అన్నింటిని ప్రారంభమునకు చేర్చుటకు ఎంత దూరము పరిగెత్తవలెను.

10. ఒక బాక్టీరియా కల్చర్ నందు ప్రతి గంటకు, బాక్టీరియాల సంఖ్య రెట్టింపు అగును. సాధారణంగా 30 బాక్టీరియాలు ఉనప్పుడు, రెండవ గంట ముగింపులో ఎన్ని బాక్టీరియాలుండును, మరియు 4వ , n వ గంట ముగింపులో ఎన్ని బాక్టీరియాలుండును.

11. ఒక బ్యాంకులో ₹500 జమచేయబడినది. 10% చక్రవడ్డీ ప్రకారము, 10 సంవత్సరాలలో ఎంత మొత్తమగును.

12. ఒక నగరములో వైరస్ వ్యాధి వలన కలిగిన అనారోగ్య లోపము వలన సాధారణ జీవితమునకు ఆటంకమయినది. ప్రతి రోజు వైరస్ వ్యాప్తి గుణశ్రేఢిలో మొదటి రోజుకన్నా రెట్టింపగును. మొదటిరోజు వాటి సంఖ్య 5 అయిన ఎన్నిరోజులకి 1,50,000 యూనిట్లను చేరుకొనును.

5.5.3 కొన్ని ప్రత్యేక పరిమిత శ్రేణులు (Some Special Finite Series)

ఈ అభ్యాసములో మనము *AP*, *GP* లేదా ఏదైనా ప్రత్యేక శ్రేణులు యొక్క పరిమితి పదాల మొత్తంను కనుగొనుటకు కొన్ని ముఖ్యమైన సూత్రములను ఇవ్వబడినది.

1. మొదటి n సహజ సంఖ్యల మొత్తము

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

దీనిని *AP* గా భావించి మొత్తమును కనుగొనవలెను.

2. మొదటి n సహజ సంఖ్యల వర్గాల మొత్తము

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+...+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

[$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ ఈ సూత్రమును ఉపయోగించి ఈ ఫలితమును ఋజవుచేయవచ్చును.

3. మొదటి n సహజ సంఖ్యల ఘనాల మొత్తము

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+...+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

[$k^4-(k-1)^4=(4k^3-6k^2+4k-1)$ సూత్రంను ఉపయోగించి ఈ ఫలితమును ఋజవుచేయవచ్చును.

పై మూడు ఫలితమును క్రింది తరగతులలో నిరూపించబడినవి అని గమనించవలెను.

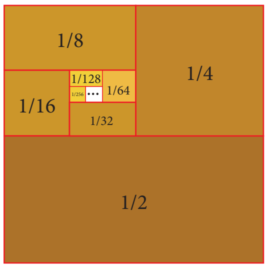
5.6 అనంత వరుస మరియు శ్రేణులు (Infinite Sequences and Series)

నిర్ణీత వాస్తవ సంఖ్య మొత్తము అనునది వాస్తవ సంఖ్యల స్వభావమును ఆధారంగా సమగ్రంగా నిర్వచింపబడినది. కాని అనంత వరుసలను గురించి తెలుసుకోవడాకి మనము అభిసరణ అను భావమును తీసుకొనవలెను. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+...$ అను అనంత శ్రేణులను తీసుకొనుము. ఇందులో ఒక్కొక్క పదము ధనాత్మంగా వుండును. దీనికి ప్రత్యేక సంఖ్య కలిగిన విలువలను ఇచ్చుటకు వీలగునా ? మొదటి సంధర్భంలో అది కచ్చితంగా లేదా వీలకానిదిగా వుండును. ఈ శ్రేణుల మొత్తము ప్రత్యేక విలువల వైపు కొద్ది కొద్దిగా చేరుటను మనము చూడవచ్చును.

పై విషయములను ఒక ఆసక్తిగల గణనత్ ప్రారంభించెదము. *A*, *B* అను రెండు పళ్ళెములను తీసుకొనెదము. *A* పళ్ళెములో ఒక పూర్తి కేకును, *B* పళ్ళెములో ఖాళీగాను వుంచువలెను. *A* పళ్ళెములో గల కేకును ఖచ్చితముగా సమభాగంగా విభజించి ఒక భాగలను *B* పళ్ళెములో వుంచువలెను. అధే విధముగా మళ్ళీ *A* పళ్ళెము లోని కేకును సగభాగం గా విభజించి ఒక భాగమును *B* పళ్ళెములో వుంచవలెను. ఇదే విధంగా కొనసాగించడం వలన *A* మరియు *B* పళ్ళెములో చివరకు ఎంత కేకు వుండును? ఈ ప్రక్రియను క్రింది వరుసలలో చూపబడినది

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 256 14-05-2022 11:13:42

స్థానము	పళ్ళెము A	పళ్ళెము B
0	1	0
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}$
5	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}$
...	...	...
n	$\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}...+\frac{1}{2^n}$
...	...	...



పటము 5.3

పై విధముగా విభజించడం వలన పళ్ళెము A లో చివరకు ఏమీ ఉండదు (మిగలదు) కాని B పళ్ళెములో పూర్తి కేకు వుండును. మరో విధముగా నిర్వచించిన A పళ్ళెము నందు గల కేకు విలువ O మరియు B పళ్ళెము లో గల కేకు విలువ *1* అగును.

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}...$$

O విలువ వైపుకు చేరును మరియు

$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}, ...$ 1 విలువ వైపుకు చేరును లేదా సమముగా అగును.

అనగా, $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+...$ యొక్క విలువ 1 అగును.

ఈ భాగములో మనము ముగింపు మరియు వెళను అను పదాలను ఏ పద్ధతిలో ఉపయోగించారు అని మరియు ఇదేవిధంగా అనంతమైన సంఖ్యల మొత్తంను కనుగొనులను గురించి తెలుసుకుందాము.

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}...$ సున్న వైపుకు "వెళ్ళను" అని చెప్పవచ్చును. అదే విధముగా

$1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \frac{1}{100000}, ...$ సున్నవైపుకు వెళ్ళను అని చెప్పవచ్చును.

(a_n) అనునది ఒక వరుసలు మరియు a అనునది ఒక సంఖ్య. ఇవ్వబడిన ఏదైనా (చిన్న) తక్కువ ధనాత్మక సంఖ్యకు, ఏదో ఒక స్థానములో a_n, a కు మధ్య గల దూరము కంటే ఆ సంఖ్య తక్కువగా వుండిన a_n అనునది a ను చేరుటకు n అనునది అనంతం వైపుకు చేరును అని చెప్పవచ్చును.

సాంకేతిక పదాలలో చెప్పవలెనన్న $a_n \to a$ అగుటకు $n \to \infty$ అగును. మరొవిధంగా a_n అనునది పరిధుల సంధర్భాలలో a_n ను చేరును లేదా a_n యొక్క పరిధి a అయిన $n \to \infty$ అగును. వరుసక్రమము a_n అనునది a కు అనుసంధానమైనది అనిచెప్పవచ్చును. దీనిని సూక్ష్మంగా $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ అని వ్రాయవచ్చును.

అధే సమయంలో 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1 ... అను వరుసలలో ఏదో ఒక సంఖ్యను చేరును అని చెప్పలేము. మరోవిధంగా ఏ పరిధి నందు ఈ వరుసలు అనుసంధానం కాదు అని చెప్పవచ్చును. అందువలన ఈ వరుసలకు పరిధిలు లేవు. కాని ఈ వరున ఒక పరిధి కంటె ఎక్కువ గా అనుసంధానం కాదు అని నిరూపించవచ్చును. అనగా ఒక వరసల పరిధి నందు అనుసంధానమైన అది ఏకైకముగా వుండవలెను.

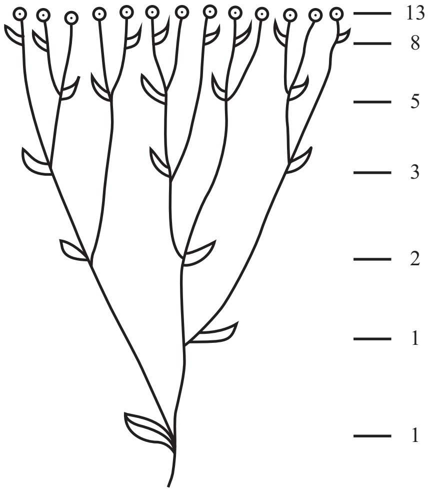
11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 257 14-05-2022 11:13:43

5.6.1 ఫిబోనాచీ వరుసలు (Fibonacci Sequence)

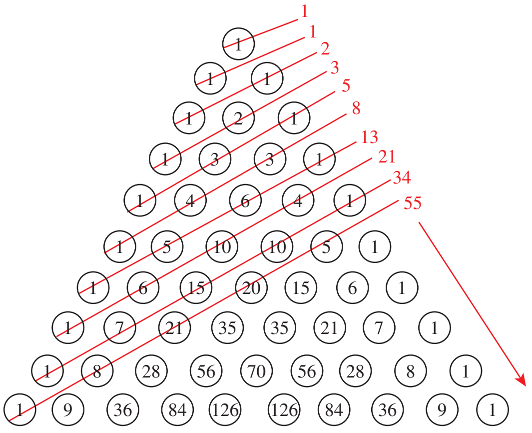
ఫిబోనాచీ వరుస క్రమము అనునది మొదటి రెండు సంఖ్యలు 1, 1 గాను, తరువాత రెండు సంఖ్యలు ముందు గల రెండు సంఖ్యల మొత్తము కల్గిన ఒక సంఖ్య యొక్క క్రమము అగును. ఇది $1,1,2,3,5,8,13,21,34,...$ గా వెళ్ళను. దీని సూత్రము $x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, n \geq 3$ మరియు $x_1 = 1,\ x_2 = 1$ అగును. ఫిబోనాచీ అను గణిత శాస్త్రవేత్త పేరు మీదుగా ఈ క్రమమును ఫిబోనాచీ వరుసలు అనిపిలువబడుచున్నది. ఇది లియోనార్డో ఫిసానో లేదా లియోనార్డోఫీసా అని పిలువబడును. ఫిబోనాచీ వరుసలు 1202 లో మొట్టమొదట "లిబర్ అభాసి" అను పుస్తకంలో పరిచయం చేయబడింది. ఫినాస్ నగరంలో వ్యాపారి కుమారుడైన ఫిబోనాచీ అనేక ప్రదేశాలకు ప్రయాణించి విరివిరిగా వ్యాపారం చేసెను. వర్తక వ్యాపారులకు గణితము చాలా ముఖ్యమైనది కావున ఫిబోనాచీ తన చిన్న వయస్సులోనే సంఖ్యలపైన ఎక్కువ ఆసక్తిని పెంచుకొనెను. హిందు - అరబిక్ సంఖ్యామానములో అతడు మొట్టమొదటి సంఖ్యలను గూర్చి అభిప్రాయం ఏర్పడినది ఫిబోనాచీ ఉత్తర ఆఫ్రికాలో ఉన్నప్పుడు ఈ సంఖ్యలను గురించి తెలుసుకొనెను. లిబర్ అభాసి పుస్తకం ముద్రణ చేయడంకు ముందు లాటిన్ మాట్లాడే ప్రపంచానికి దశాంశ సంఖ్యామనమును పరిచయం లేకున్నది. ఇతడు రేఖాగణితమును, వ్యాపారగణితము మరియు కరణీయ సంఖ్యలను గురించి అనేక పుస్తకాలను వ్రాసినాడు. ఇతడు "సున్న" అనే భావనను ఏర్పరచడంలో పాలు పంచుకొన్నాడు.

n	=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14 . . .
x_n	=	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377 . . .

ఉదాహరణకు 8వ పదము అనునది 6వ పదము మరియు 7వ పదముల మొత్తము అగును. అందువలన $x_8 = 8 + 13 = 21$



పటము 5.4



పటము 5.5

ఫిబోనాచీ వరుసలు నందు ఆసక్తికరమైన సమూనాను చూడవచ్చును.

గమనింపదగినవి

(i) ప్రతి మూడవ సంఖ్య విలువ మూడవ పదము యొక్క (గుణకము) గుణిజము. $(t_3 = 2)$

(ii) ప్రతి నాలుగువ సంఖ్య విలువ నాలుగవ పదము యొక్క గుణిజము $(t_4 = 3)$

(iii) ప్రతి ఐదవ సంఖ్య విలువ ఐదవ పదము యొక్క గుణిజము. $(t_5 = 5)$

(iv) కావున ప్రతి n వ సంఖ్య విలువ n వ పదము యొక్క గుణిజము

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 258 14-05-2022 11:13:43

అనంతశ్రేణుల (Infinite Series):

(a_n) అనునది అనంత క్రమముల సంఖ్యలయితే $a_1 + a_2 + \ldots$ ను అధికారికంగా అనంతశ్రేణులు అని వ్యక్తపరచవచ్చును. దీనిని $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ తో సూచిస్తారు. ఈ విభాగము యొక్క ప్రారంభములో మనము అనంతశ్రేణులను $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ చూపబడినది.

అందువలన దాని మొత్తము 1 అగును (కేకు సమస్యలో) నిజముగా కేకు సమస్య నందు ఒక్కోక్క స్థాయి నుంచి ఇంకొక్క స్థాయిలో B పళ్ళెము నందు గల కేకు క్రింది క్రమములో వుండును.

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}, \ldots$$

క్రమములో n వ పదము విలువ , $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}$ అగును.

ఈ విలువ $\frac{2^n-1}{2^n}$. కు సమానము s_n అనునది మొత్తముగా సూచించిన , $\lim_{n\to\infty} s_n = 1$ అగును.

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots$ 1కి సమానము. 1 అనునది మొత్తము సూచించిన.

మొత్తమును కనుగొనుటకు ఇది ఒక కారణము కావున $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\cdot \ldots\ldots 1$ అగును.

అనంతమైన సంఖ్యల మొత్తమును మనము నిర్వచించవచ్చును. (a_n) అనునదివాస్తవ సంఖ్యల వరుసలు మరియు $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ గా తీసుకొనుము. ఈ వరుసలు a_n నకు పరిధి s అయిన a_n ను కూడవచ్చును అని అర్థము మరియు మొత్తము s అగును దీనిని $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = s$ అని వ్రాయవచ్చును. అందువలన

ఈ శ్రేణి 's' కు చెందినదిగా నిర్ధారించవచ్చును.

నిర్వచనము 5.6 : $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, అను శ్రేణులు వాస్తవ సంఖ్యలు గా తీసుకొనుము మరియు $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, n \in \mathbb{N}$.

ఈ క్రమము (s_n) ను పాక్షిక వరున మొత్తము, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ అందురు మరియు $\lim_{n\to\infty} s_n = s$ అయితే ఆ శ్రేణులు అనుసంధాన శ్రేణులు అందురు మరియు s ను శ్రేణులు మొత్తము అందురు.

మనము $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ గా వ్రాయచ్చును. కొన్ని ఉదాహరణలకు శ్రేణులు $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ అనుసందానము కాదు ఎందుకంటే పాక్షక క్రమముల మొత్తము $1, 0, 1, 0, 1, \ldots$ అనుసంధానము కాదు.

భీజ గణిత నియమాలను పరిమిత శ్రేణుల నుండి అనంతశ్రేణులకు గుడ్డిగా మార్చలేము. కావున $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} = 1-1+1-1+\ldots$ అయితే $S = 1-1+1-1+\ldots$ లేదా $S = 0$ లేదా 1 లేదా $\frac{1}{2}$

$S = (1-1)+(1-1)+\ldots,\ S = 1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots$ లేదా.

$1-S = 1-(+1-1+1-1+\ldots = S)$ అగును.

శ్రేణులు $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$, $x = \frac{1}{2}$ అయితే అనుసందానమగును. ఇక్కడ $x = 2$ అయితే అనుసంధానము కాదు.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 259 14-05-2022 11:13:44

దీని నుండి $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ అను సమశ్రేణులు x యొక్క కొన్ని విలువలకు అనుసంధానం అగును. మరియు కొన్ని విలువలకు అనుసంధానం కాదు. x యొక్క ఏ విలువలకు ఈ శ్రేణులు అనుసంధానం అగునో అను సమస్యలను కనుగొనుటకు ఈ పుస్తకము యొక్క పరిధికి మించినది. అయినప్పటికీ మిగిలిన అధ్యాయములో మనము కొన్ని శ్రేణులకు x– యొక్క సుమారు విలువలను అనుసంధానాలు మరియు అనుసంధానమైనప్పుడు శ్రేణుల మొత్తములను ఇవ్వబడినది.

5.6.2 అనంత గుణశ్రేణులు (Infinite Geometric Series)

శ్రేణులు $\sum x^n$ ను గుణశ్రేణులు లేదా గుణశ్రేఢి అందురు. $\sum_{n=0}^{\infty} x^n, x \neq 1$ శ్రేణితో ప్రారంభమగును.

$s_n = x_0 + x_1 + ... + x_n$ అయితే $s_n = \frac{1-x^n}{1-x}$, అగును. x^n విలువ 0 ను చేరిన $|x| < 1$ అగును.

- $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ అన్ని వాస్తవ సంఖ్యల కు అనుసంధానం అగుటకు $|x| < 1$ మరియు మొత్తము విలువ $\frac{1}{1-x}$ అనగా అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలను x తృప్తిపరచుటకు $|x| < 1$ అగును.

  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$

- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ అన్ని వాస్తవ సంఖ్యల x కు అనుసంధానమగుటకు $|x| < 1$ మరియు మొత్తము విలువ $\frac{1}{1+x}$ అగును. అనగా అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలను x తృప్తి పరచుటకు $|x| < 1$ అగును. $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$

- $\sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n$ కొరకు ప్రతి వాస్తవ సంఖ్య x కు అనుసంధానమగుటకు $|x| < \frac{1}{2}$ మరియు మొత్తము విలువ $\frac{1}{1-2x}$ అగును. అనగా ప్రతి వాస్తవ సంఖ్యలు x ను $|x| < \frac{1}{2}$ తృప్తిపరచును $\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + ...$

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ అనుసంధానం కొరకు ప్రతివాస్తవ సంఖ్య x మరియు మొత్తము విలువ e^x అగును. అనగా $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$ వాస్తవ సంఖ్య

- $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x$ అనుసంధానమునకు $x = 0$ మాత్రమే అగును. కొన్ని ప్రత్యేక శ్రేణులను గురించి చర్చించుకొందాం.

అనుసందానం కొరకు ఆ శ్రేణులను ఊహించుకొని కొన్ని సమస్యలను సాధించవచ్చును.

5.6.3 అనంత అంక – గుణశ్రేణులు. (Infinite Arithmetico- Geometric Series)

- అనంత అంక – గుణశ్రేణుల మొత్తమునకు $\Sigma((a+(n-1)d))r^{n-1}$ ఇవ్వబడిన $S = \lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-r} + \frac{dr}{(1-r)^2}; -1 < r < 1$ అగును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 260 14-05-2022 11:13:45

ఉదాహరణ 5.19 $1+\frac{4}{5}+\frac{7}{25}+\frac{10}{125}+...$ –మొత్తం కనుగొనుము.

సాధన

$a=1$, $d=3$ మరియు $r=\frac{1}{5}$.

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}+\frac{dr}{(1-r)^2}$$

$$= \frac{1}{1-\frac{1}{5}}+\frac{3\times\frac{1}{5}}{\left(1-\frac{1}{5}\right)^2}$$

$$= \frac{5}{4}+\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{25}{16}\right)$$

$$= \frac{35}{16}$$

5.6.4 అనంతశ్రేణుల కొరకు దూరదర్శిని మొత్తము (Telescopic Summation for Infinite Series)

5.5.2 లో చూపిన విధంగా ఒక పరిమిత శ్రేణులను ఉపయోగించి దూరదర్శిని మొత్తమును కనుగొన్నాము. అదే పద్ధతిలో అనంతశ్రేణులకు అనువర్తించును.

ఉదాహరణ 5.20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6}$ కనుగొనుము.

సాధన

ఇవ్వబడిన శ్రేణి యందు n వ పదము a_n అనుకొనిన $a_n=\frac{1}{n^2+5n+6}$ పాక్షిక భిన్నాలను ఉపయోగించిన మనకు $a_n=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}$ లభించును.

ఈ శ్రేణిలో మొదటి n పదాల మొత్తము s_n

$$s_n=a_1+a_2+...+a_n=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+...+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}$$

$\frac{1}{n+3}$ అయితే n అనునది అనంతం వైపుకు వెళ్ళును. కావున $\frac{1}{n+3}$ శూన్యం వైపు వెళ్ళును. అందువలన $\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\to\frac{1}{3}$ మరోవిధంగా $s_n\to\frac{1}{3}$ అందువలన $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+5n+6}=\frac{1}{3}$ అగును.

5.6.5 ద్విపద శ్రేణులు : (Binomial Series)

గుణశ్రేణి యందు గల కొన్ని శ్రేణులను గమనించిన $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+...$, x కు తగిన విలువలు $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-...$ మరియు $\frac{1}{1-2x}=1+2x+4x^2+...$, అందువలన $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$ మరియు $\frac{1}{1-2x}$ వాటిని $(1-x)^{-1}$, $(1+x)^{-1}$ మరియు $(1-2x)^{-1}$ గా కూడా వ్రాయవచ్చును. దీని వలన $(1+x),(1-x)...$ వాటికి ఘాతాంకాలు తక్కువ సంఖ్యగా కావడానికి వీలగును. అందువలన ఘాతాంకములు ఋణాత్మకం లేదా ధనాత్మకం, పూర్ణాంక సంఖ్య లేదా కరణీయ సంఖ్యలగును. $(1+x)$ కు అకరణీయ ఘాతములను కూడా మనము చూడవచ్చును. ధనాత్మక పూర్ణాంక ఘాతములకు ఈ ద్విపద సిద్ధాంతమును మనము ఇదివరకే నిరూపించినాము (సిద్ధాంతము 5.1) ఇప్పుడు కరణీయ ఘాతములకు ఈ ద్విపద సిద్ధాంతంను కనుగొనవలెను.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 261 14-05-2022 11:13:47

అకరణీయ ఘాతాంకములకు ద్విపద సిద్ధాంతం

సిద్ధాంతము 5.4 (అకరణీయ ఘాతాంకములకు ద్విపద సిద్ధాంతం)

ఏ దైన ఒక అకరణీయ సంఖ్య $(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+...$ అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలు x కు $|x|<1$ తృప్తిపరచును. దీనిని నిరూపించులకు ఉన్నత గణిత భావనలను కలిగి వున్నందవలన ఈ సిద్ధాంతమును రుజువు లేకుండా తీసుకొని కొన్ని ప్రత్యేక సందర్భాలలో కొన్ని సమస్యలను కనుగొనవచ్చును. ఈ సిద్ధాంతములో

1. x స్థానములో (బదులుగా) $-x$ ను తీసుకొనిన మనకు

$$(1-x)^n = 1-nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+... \qquad (|x|<1)$$

2. n యొక్క స్థానములో $-n$ ను తీసుకొనిన మనకు,

$$(1+x)^{-n} = 1+(-n)x+\frac{(-n)(-n-1)}{2!}x^2-\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)}{3!}x^3+...$$

అందువలన,

$$(1+x)^{-n} = 1-nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3+... \qquad (|x|<1)$$

3. x–మరియు n–స్థానాలలో స్థానాలలో $-x$ మరియు $-n$ లను తీసుకొనిన,

$$(1-x)^{-n} = 1+nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^3+... \qquad (|x|<1)$$

మనము స్పష్టముగా తెలునుకొనడానికి సిద్ధాంతము నందు n అను అకరణీయ సంఖ్యను తీసుకొన్నప్పటికీ, n వ స్థానములో ఆలోచించకుండా సాదారణమైన అకరణీయ సంఖ్యలను ఉపయోగించవచ్చును. కావున $\frac{p}{q}$ అను అకరణీయ సంఖ్యను తీసుకొవడం వలన మనకు

$$(1+x)^{\frac{p}{q}} = 1+\frac{p}{q}x+\frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\frac{p}{q}\left(\frac{p}{q}-1\right)\left(\frac{p}{q}-2\right)}{3!}x^3+...$$

$$= 1+\frac{p}{q}x+\frac{p(p-q)}{q^2 2!}x^2+\frac{p(p-q)(p-2q)}{q^3 3!}x^3+... \qquad (|x|<1)$$

$$(1-x)^{\frac{p}{q}} = 1-\frac{p}{q}x+\frac{p(p-q)}{q^2 2!}x^2-\frac{p(p-q)(p-2q)}{q^3 3!}x^3+... \qquad (|x|<1)$$

$(1+x)^n$ ను లెక్కించడానికి ఏదైనా సుత్రమును ఇచ్చినప్పటికీ, కొన్ని సంఖ్యా సమస్యలను త్వరగా (లెక్కించడానికి) పరిష్కరించడానికి నేరుగా కొన్ని విసరణలు వ్రాయవలెను. ఆ విధముగా ప్రతి విసరణ గుణకాలను పరిశీలించిన సమస్యలను సాధించడానికి చాలా సులభముగా వుండును.

వాటిలో కొన్నింటిని జాబితాలో చేర్చుతాము.

1. $(1+x)^{-1} = 1-x+x^2-x^3+...$
2. $(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+x^3+...$
3. $(1-x)^{-2} = 1+2x+3x^2+4x^3+5x^4+6x^5+...$
4. $(1+x)^{-2} = 1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-6x^5+...$

పై అన్ని విస్తరణలు $|x|<1$ అయినప్పుడు మాత్రమే వీలగును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 262 14-05-2022 11:13:47

ఉదాహరణ 5.21 $(1+x)^{\frac{2}{3}}$ విస్తరణ యందు మొదటి నాలుగు పదములను విస్తరించుము $|x|<1$

సాధన

ఇచ్చుట, $n=\frac{2}{3}$

$$\frac{n(n-1)}{2!} = \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)}{2!} = \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)}{2} = \frac{-1}{9}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}-1\right)\left(\frac{2}{3}-2\right)}{3!} = \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{-1}{3}\right)\left(\frac{-4}{3}\right)}{6} = \frac{4}{81}$$

ఈ విధముగా, $(1+x)^{\frac{2}{3}} = 1+\frac{2}{3}x-\frac{1}{9}x^2+\frac{4}{81}x^3+...$

ఉదాహరణ 5.22 $\frac{1}{(1+3x)^2}$ ను x ఘతములుగా విస్తరించుము

సాధన

$3x=y$ గా తీసుకొనిన $\frac{1}{(1+3x)^2}=\frac{1}{(1+y)^2}$ ఇప్పుడు $\frac{1}{(1+y)^2}$ ను y ఘతములుగా గల ద్విపదసిద్ధాంత ఇప్పుడు $\frac{1}{(1+y)^2}$ ను ద్వీపద సిద్ధాంతమును ఉపయోగించి y ఘాతములుగా విస్తరించవలెను.

y స్థానము నందు $3x$ ను ప్రతిక్షేపించిన మనకు $\frac{1}{(1+3x)^2}$ అభించును. $|x|<\frac{1}{3}$ లో.

$$\frac{1}{(1+3x)^2} = (1+3x)^{-2}$$

$$= 1-2(3x)+\frac{2(2+1)}{2!}(3x)^2-\frac{2(2+1)(2+2)}{3!}(3x)^3 + \frac{2(2+1)(2+2)(2+3)}{4!}(3x)^4-...$$

$$\frac{1}{(1+3x)^2} = 1-6x+27x^2-108x^3+405x^4-...,\ |x|<\frac{1}{3}$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 263 14-05-2022 11:13:48

ఉదాహరణ 5.23 $\frac{1}{(3+2x)^2}$ ను x యొక్క ఘాతములుగా విస్తరించుము.

సాధన

$(1+x)^{-2}$ అను విస్తరణనుపయోగించవలెనని స్పష్టమగుచున్నది.

కావున $(3+2x)$ $3\left(1+\frac{2x}{3}\right)$ అయితే విస్తరణకు వీలగును.

$$\frac{1}{(3+2x)^2} = \frac{1}{3^2\left(1+\frac{2x}{3}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{9}\left(1+\frac{2x}{3}\right)^{-2}$$

$$= \frac{1}{9}(1+y)^{-2} \qquad \left(\frac{2x}{3}=y\right)$$

$$= \frac{1}{9}(1-2y+3y^2-4y^3+5y^4-\ldots), |y|<1$$

$$= \frac{1}{9}\left(1-2\left(\frac{2x}{3}\right)+3\left(\frac{2x}{3}\right)^2-4\left(\frac{2x}{3}\right)^3+5\left(\frac{2x}{3}\right)^4-\ldots\right), \left|\frac{2x}{3}\right|<1$$

$$= \frac{1}{9}\left(1-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}x^2-\frac{32}{27}x^3+\frac{80}{81}x^4-\ldots\right), |x|<\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{(3+2x)^2} = \frac{1}{9}-\frac{4}{27}x+\frac{4}{27}x^2-\frac{32}{243}x^3+\frac{80}{729}x^4-\ldots, |x|<\frac{3}{2} \quad |x|<\frac{3}{2}$$

వర్గమూలము, ఘనమూలము మరియు ఇతర ధనాత్మ సంఖ్యల మూలములను ఈ ద్విపద సిద్ధాంతములను ఉపయోగించి వాటి విలువలను మనము కనుగొనవచ్చును. అలాంటి ఒక సమస్యను చూద్దాం.

ఉదాహరణ 5.24 $\sqrt[3]{65}$ విలువ కనుగొనుము.

సాధన

$$|x|<1, (1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots$$

$$\sqrt[3]{65} = 65^{\frac{1}{3}}$$

$$= (64+1)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 64^{\frac{1}{3}}\left(1+\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 4\left(1+\frac{1}{64}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 4\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{1}{64}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\times\left(\frac{1}{64}\right)^2+\ldots\right)$$

$$= 4+\frac{1}{48}-4\times\frac{1}{9}\times\frac{1}{64}\times\frac{1}{64}+\ldots$$

$$= 4+\frac{1}{48}-\frac{1}{9216}+\ldots \text{ అనునది మనకుతెలియును.}$$

$$\approx 4+0.02 \quad \left(\frac{1}{9216}+\ldots \text{ చాలా స్వల్పం కావున}\right)$$

$$\sqrt[3]{65} = 4.02 \text{ (దాదాపుగా)}$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 264 14-05-2022 11:13:49

ఉదాహరణ 5.25 $\sqrt[3]{x^3+7}-\sqrt[3]{x^3+4}$ విలువ దాదాపుగా $\frac{1}{x^2}$ కు సమానం అని నిరూపించుము. ఇక్కడ x అనునది అతి పెద్దది.

సాధన

$$\sqrt[3]{x^3+7} = (x^3+7)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left[x^3\left(1+\frac{7}{x^3}\right)\right]^{\frac{1}{3}} \quad (x \text{ అతిపెద్దది } \left|\frac{7}{x^3}\right|<1)$$
$$= x\left(1+\frac{7}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= x\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{7}{x^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{7}{x^3}\right)^2+\ldots\right)$$
$$= x\left(1+\frac{7}{3}\times\frac{1}{x^3}-\frac{49}{9}\times\frac{1}{x^6}+\ldots\right)$$
$$= x+\frac{7}{3}\times\frac{1}{x^2}-\frac{49}{9}\times\frac{1}{x^5}+\ldots$$
$$\sqrt[3]{x^3+4} = (x^3+4)^{\frac{1}{3}}$$
$$= \left[x^3\left(1+\frac{4}{x^3}\right)\right]^{\frac{1}{3}} \quad (x \text{ అతిపెద్దది } \left|\frac{4}{x^3}\right|<1)$$
$$= x\left(1+\frac{4}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}$$
$$= x\left(1+\frac{1}{3}\times\frac{4}{x^3}+\frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\left(\frac{4}{x^3}\right)^2+\ldots\right)$$
$$= x\left(1+\frac{4}{3}\times\frac{1}{x^3}-\frac{16}{9}\times\frac{1}{x^6}+\ldots\right)$$
$$= x+\frac{4}{3}\times\frac{1}{x^2}-\frac{16}{9}\times\frac{1}{x^5}+\ldots$$

x అనునది పెద్దసంఖ్య కావున $\frac{1}{x}$ విలువ చాలా చిన్నది అందువలన $\frac{1}{x}$ యొక్క పెద్ద ఘాతముల విలువ చాలా స్వల్పము.

అందువలన $\sqrt[3]{x^3+7}=x+\frac{7}{3}\times\frac{1}{x^2}$ మరియు $\sqrt[3]{x^3+4}=x+\frac{4}{3}\times\frac{1}{x^2}$

$\sqrt[3]{x^3+7}-\sqrt[3]{x^3+4} = \left(x+\frac{7}{3}\times\frac{1}{x^2}\right)-\left(x+\frac{4}{3}\times\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{x^2}$ అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలకు ద్విపద సిద్ధాంతము.

ఉదాహరణకు $n=\sqrt{2}$ అయినప్పుడు మనకు.,

$$(1+x)^{\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{2!}x^2+\frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-2)}{3!}x^3+\ldots|x|<1.$$

5.6.6 ఘాత శ్రేణులు (Exponential Series)

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ అను శ్రేణిని ఘాతశ్రేణి అందురు. x యొక్క అన్ని విలువలకు వర్తిస్తుందని చూపవచ్చును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 265 14-05-2022 11:13:50

ఏదైనా వాస్తవ సంఖ్య x కు $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ ఇక్కడ $e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ...$ మనకు

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... \qquad (5.1)$$

x యొక్క అన్ని విలువలకు, x కు బదులుగా x ను తీసుకొనిన (5.1) నందు

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ... \qquad (5.2)$$

$$\frac{1}{e} = e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - ...$$

5.1 మరియు 5.2 ల నుండి మనకు

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ... \text{ మరియు } \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...$$ ప్రత్యేకంగా

$$\frac{e + e^{-1}}{2} = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + ... \text{ మరియు } \frac{e - e^{-1}}{2} = \frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + ...$$

x కు బదులుగా $2x$ ను (5.1) నందు తీసుకొనిన మనకు

$$e^{2x} = 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^4}{4!} + ...$$

సూక్ష్మీకరించగా మనకు ,

$$e^{2x} = 1 + \frac{2x}{1!} + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \frac{16x^4}{4!} + ...$$ లభించును.

5.6.7 సంవర్గమాన శ్రేణులు (Logarithmic Series)

శ్రేణులు $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$ ను సంవర్గమానశ్రేణులు అందురు. ఈ శ్రేణులు x యొక్క అన్ని విలువలకు వర్తించును, $|x| < 1$ ను తృప్తిపరచును. ఈ శ్రేణులు $x = 1$ కూడా అనువర్తించును. x యొక్క అన్ని విలువలకు $|x| < 1$ శ్రేణులు మొత్తము విలువ $\log(1+x)$ అందువలన $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$ x యొక్క అన్ని విలువలను $|x| < 1$ తృప్తిపరుచును.

x కు బదులుగా $-x$ ను తీసుకొనిన మనకు

$\log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - ...$ x యొక్క అన్ని విలువలను $|x| < 1$ తృప్తిపరుచును ఇప్పుడు

$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \log(1+x) - \log(1-x)$ దీనిని ఉపయోగించడం వలన మనకు

$$\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...\right].$$

ఒక వేళ మనకు $\log(1+2x)$ శ్రేణులు కావలసిన, మనకు $2x$ కు బదులుగా y ను తీసుకొనిన

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + ...$$

y యొక్క అన్ని విలువలను $|y| < 1$ తృప్తిపరచును. కాని $|y| < 1$ అయితే $|2x| < 1$ మరియు అందువలన $|x| < \frac{1}{2}$ కావున $|x| < \frac{1}{2}$ అయితే తరువాత $\log(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \frac{(2x)^4}{4} + ...$

అందువలన $\log(1+2x) = 2x - \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} - \frac{16x^4}{4} + ...$ యొక్క అన్ని విలువలకు $|x| < \frac{1}{2}$ తృప్తి పరచును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 266 14-05-2022 11:13:51

అభ్యాసము 5.4

1. x యొక్క ఆరోహణ ఘాతములను విస్తరించుము మరియు ఇవ్వబడిన ద్విపద విస్తరణ మూలంగా x పై నిబంధనలు వ్యవస్థితమా అని కనుగొనుము.

   (i) $\dfrac{1}{5+x}$ (ii) $\dfrac{2}{(3+4x)^2}$

   (iii) $(5+x^2)^{\frac{2}{3}}$ (iv) $(x+2)^{-\frac{2}{3}}$

2. $\sqrt[3]{1001}$ కు సుమారు విలువను కనుగొనుము (రెండు దశాంశ స్థానాలను)

3. x అనునది తగినంత పెద్దదైనప్పుడు $\sqrt[3]{x^3+6}-\sqrt[3]{x^3+3}$ విలువ సుమారు గా $\dfrac{1}{x^2}$ కు సమానం అని చూపుము..

4. x అనునది చాలా చిన్నదైనప్పుడు $\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$ విలువ దాదాపుగా $1-x+\dfrac{x^2}{2}$ కు సమానం అనిచూపుము.

5. ఘాతాంక శ్రేణుల యొక్క 6 పదాలను వ్రాయుము

   (i) e^{5x} (ii) e^{-2x} (iii) $e^{\frac{1}{2}x}$

6. సంవర్గమాన శ్రేణుల యొక్క 4 పదాలను వ్రాయుము. ఆ విస్తరణలు ఏ అవధి వద్ద వ్యవస్థితమగునని చూపుము.

   (i) $\log(1+4x)$ (ii) $\log(1-2x)$ (iii) $\log\left(\dfrac{1+3x}{1-3x}\right)$ (iv) $\log\left(\dfrac{1-2x}{1+2x}\right)$

7. $y=x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^4}{4}+...$ అయితే, $x=y-\dfrac{y^2}{2!}+\dfrac{y^3}{3!}-\dfrac{y^4}{4!}+...$ అని చూపుము

8. p లేక q లతో పోల్చినప్పుడు $p-q$ అనునది చాలా తక్కువైతే $\sqrt[n]{\dfrac{p}{q}}\simeq\dfrac{(n+1)p+(n-1)q}{(n-1)p+(n+1)q}$ అని చూపుము. దీని నుండి $\sqrt[8]{\dfrac{15}{16}}$ విలువను కనుగొనుము.

9. $\dfrac{3-4x+x^2}{e^{2x}}$ –విస్తరణ యందు x^4 యొక్క గుణకమును కనుగొనుము.

10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1}{9^{n-1}}+\frac{1}{9^{2n-1}}\right)$ విలువను కనుగొనుము.

అభ్యాసము 5.5

సరియైన సమాధానమును ఎన్నుకొనుము

1. $2+4+6+...+2n$ –యొక్క విలువ

   (1) $\dfrac{n(n-1)}{2}$ (2) $\dfrac{n(n+1)}{2}$ (3) $\dfrac{2n(2n+1)}{2}$ (4) $n(n+1)$

2. $(2+2x)^{10}$ విస్తరణలో x^6 –యొక్క గుణకము విలువ.

   (1) $^{10}C_6$ (2) 2^6 (3) $^{10}C_6 2^6$ (4) $^{10}C_6 2^{10}$

3. $(2x+3y)^{20}$ లో x^8y^{12} –యొక్క గుణకము విలువ

   (1) 0 (2) $2^8 3^{12}$ (3) $2^8 3^{12}+2^{12}3^8$ (4) $^{20}C_8 2^8 3^{12}$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 267 14-05-2022 11:13:53

4. r యొక్క అన్ని విలువలకు ${}^{n}C_{10} > {}^{n}C_{r}$ అయితే n విలువ

(1) 10 (2) 21 (3) 19 (4) 20

5. a అనునది అంకమధ్యమము మరియు g అనునది గుణమధ్యమముగా గల రెండు సంఖ్యలయితే

(1) $a \le g$ (2) $a \ge g$ (3) $a = g$ (4) $a > g$

6. $(1+x^2)^2(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + x^{n+4}$ మరియు a_0, a_1, a_2 లు అంకశ్రేఢిలో ఉండిన n విలువ

(1) 1 (2) 5 (3) 2 (4) 4

7. $a, 8, b$ లు అంకశ్రేఢిలోనూ, $a, 4, b$ లు గుణశ్రేఢిలోను మరియు a, x, b లు HP లో ఉండినట్లయితే x విలువ

(1) 2 (2) 1 (3) 4 (4) 16

8. వరుసక్రమము $\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}+2\sqrt{2}}, ...$ అనునది ఒక (రూపం ఒక)

(1) AP (2) GP (3) HP (4) AGP

9. రెండు ధనాత్మక సంఖ్యల AM మరియు GM లు 16, 8 అయితే వాటి HM విలువ

(1) 10 (2) 6 (3) 5 (4) 4

10. సామాన్య వ్యత్యాసము d గా గల అంకశ్రేఢి యందు n పదముల మొత్తం S_n అయిన $S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2}$ విలువ

(1) d (2) 2d (3) 4d (4) d^2

11. 38^{15} ను 13 చే భాగించిన లభించు శేషము విలువ

(1) 12 (2) 1 (3) 11 (4) 5

12. 1, 2, 4, 7, 11, . . . అను వరుస క్రమము నందు n వ పదము

(1) n^3+3n^2+2n (2) n^3-3n^2+3n (3) $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ (4) $\frac{n^2-n+2}{2}$

13. $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + ...$ అను శ్రేణుల యందు మొదటి n పదాల మొత్తము

(1) $\sqrt{2n+1}$ (2) $\frac{\sqrt{2n+1}}{2}$ (3) $\sqrt{2n+1}-1$ (4) $\frac{\sqrt{2n+1}-1}{2}$

14. $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16}, ...$ అను వరుస క్రమము నందు n వ పదము

(1) $2^n - n - 1$ (2) $1 - 2^{-n}$ (3) $2^{-n} + n - 1$ (4) 2^{n-1}

15. $\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32} + ...$ అనుశ్రేణియందు మొదటి n పదాల మొత్తము

(1) $\frac{n(n+1)}{2}$ (2) $2n(n+1)$ (3) $\frac{n(n+1)}{2}$ (4) 1

16. $\frac{1}{2} + \frac{7}{4} + \frac{13}{8} + \frac{19}{16} + ...$ అను శ్రేణి విలువ

(1) 14 (2) 7 (3) 4 (4) 6

17. ఒక అనంత గుణశ్రేఢి యొక్క మొత్తము విలువ 18 మరియు మొదటి పదము 6 అయితే సామాన్య నిష్పత్తి విలువ

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{3}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{3}{4}$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 268 14-05-2022 11:13:54

18. e^{-2x} శ్రేణి యందు x^5 యొక్క గుణకము విలువ

(1) $\frac{2}{3}$ (2) $\frac{3}{2}$ (3) $\frac{-4}{15}$ (4) $\frac{4}{15}$

19. $\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{6!}+...$ యొక్క విలువ

(1) $\frac{e^2+1}{2e}$ (2) $\frac{(e+1)^2}{2e}$ (3) $\frac{(e-1)^2}{2e}$ (4) $\frac{e^2-1}{2e}$

20. $1-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^3+...$ యొక్క విలువ

(1) $\log\left(\frac{5}{3}\right)$ (2) $\frac{3}{2}\log\left(\frac{5}{3}\right)$ (3) $\frac{5}{3}\log\left(\frac{5}{3}\right)$ (4) $\frac{2}{3}\log\left(\frac{2}{3}\right)$

సారాంశము (Summary)

ఈ అధ్యాయములో మనము తెలుసుకొన్న విషయములు

- ద్విపద సిద్ధాంతము నందు $n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n b^0 + {}^nC_1 a^{n-1} b^1 + ... + {}^nC_n a^0 b^n$$

- ${}^nC_0 + {}^nC_1 + ... + {}^nC_n = 2^n$
- ${}^nC_1 + {}^nC_3 + + {}^nC_5 ... += {}^nC_0 + {}^nC_2 + + {}^nC_4 ... += 2^{n-1}$
- $AM \geq GM \geq HM$
- అంకశ్రేఢి యందు n వ పదము $T_n = a+(n-1)d$
- గుణశ్రేఢి యందు n వ పదము $T_n = ar^{n-1}$
- అంకగుణశ్రేఢి యందు n వ పదము $T_n = (a+(n-1)d)r^{n-1}$
- a మరియు b లు ఏదైనా ధనపూర్ణాంక సంఖ్యలకు $AM = \frac{a+b}{2}, GM = \sqrt{ab}, HM = \frac{2ab}{a+b}$
- అంకశ్రేఢి యందు మొదటి n పదముల మొత్తము $S_n = \frac{n}{2}(2a+(n-1)d)$
- గుణశ్రేఢి యందు మొదటి n పదముల మొత్తము $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r \neq 1$
- అంకగుణశ్రేఢి యందు మొదటి n పదముల మొత్తము .
  $S_n = \frac{a-(a+(n-1)d)r^n}{1-r} + dr\left(\frac{1-r^{n-1}}{(1-r)^2}\right), r \neq 1$
- $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$

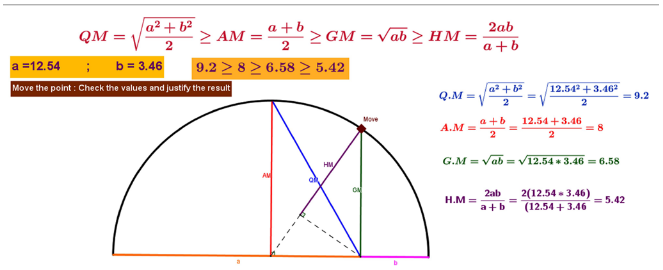
11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 269 14-05-2022 11:13:56

- $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- ఫిబోనాచీ క్రమము 1,1,2,3,5,...
- అకరణీయ ఘాతాంకములకు ద్విపద సిద్ధాంతము
  $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + ...$ అన్ని వాస్తవ సంఖ్యలకు x కు $|x| < 1$ తృప్తిపరచును.
- $(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + ...$
- $(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$
- $(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + ...$
- $(1+x)^{-2} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + 5x^4 - 6x^5 + ...$
- $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + ...$
- $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - ...$
- $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + ...$ మరియు $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...$
- $log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$ అన్ని విలువలకు $|x| < 1$ x తృప్తిపరచును
- $log(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - ...$ అన్ని విలువలను $|x| < 1$ x తృప్తి పరచును
- $log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ...\right]$ అన్ని విలువలను $|x| < 1$ x తృప్తిపరచును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 270 14-05-2022 11:13:56

అంతర్జాల కృత్యము – 5 (అ)

ఆశించే ఫలితాలు



మెట్టు – 1

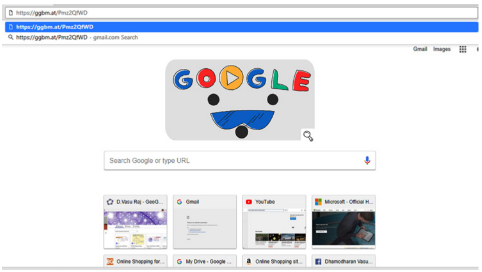
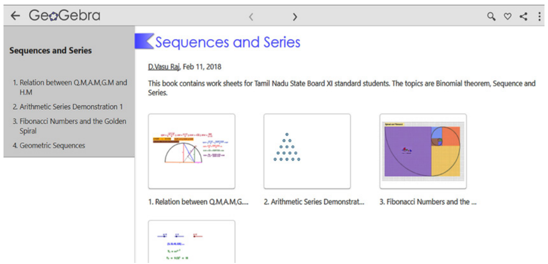
బ్రౌసర్‌ని ఓపెన్ చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన URL లింక్‌ను టైప్ చేయుము. (లేక) QR కోడ్‌ని స్కాన్ చేయుము.

మెట్టు – 2

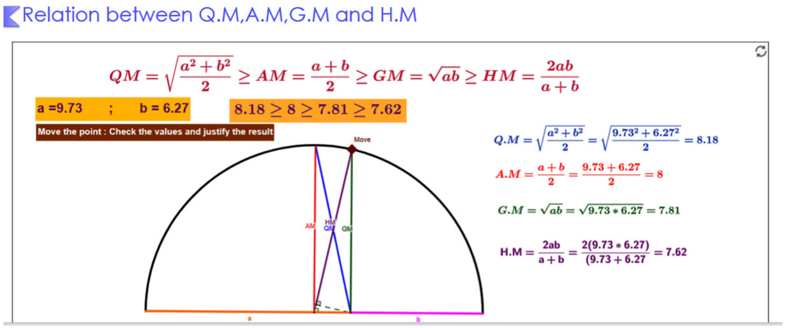
శ్రేణులు మరియు వరుసలు వర్క్‌బుక్ ఓపెన్ అగును. అనేక వర్క్‌షీట్‌లు ఈ వర్క్‌బుక్ నందు ఇవ్వబడినవి. " Q.M,A.M,G.M మరియు H.M లకు మధ్యగల సంబంధము" అను వర్క్‌షీట్‌ను ఎంపిక చేసుకొనుము.

మెట్టు – 3

చలన విలువలు కలిగిన a మరియు b యొక్క అంకమధ్యమ సూత్రము ఉండును. Move నామము గల బిందువు వద్దకు వెళ్ళుము. a మరియు b కి తగిన విధముగా అంకమధ్య విలువ మారును.

సోపానము–1	సోపానము–2
	

సోపానము–3



రేఖలను AM, QM, GM మరియు HM గా గుర్తించే సమీకరణమును కనుగొనుటకు ఇది సరియైన సమయము. స్పష్టమైన అవగాహణ కొరకు ఇతర వర్క్‌షీట్‌లను ప్రయత్నించుము.

*పటములు సూచికలు మాత్రమే

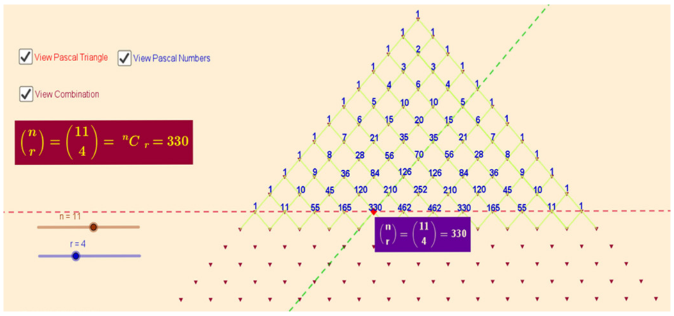
వరుసలు మరియు శ్రేణులు అను లింక్‌ను బ్రౌస్‌చేయుము. https://ggbm.at/Pmz2QfWD

6A8NQ

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 271 14-05-2022 11:13:57

ఆశించే ఫలితాలు

అంతర్జాల కృత్యము – 5 (ఆ)

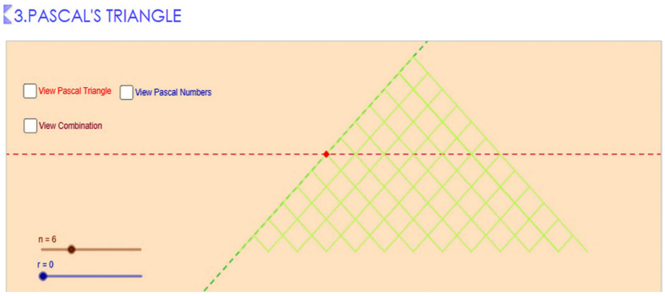
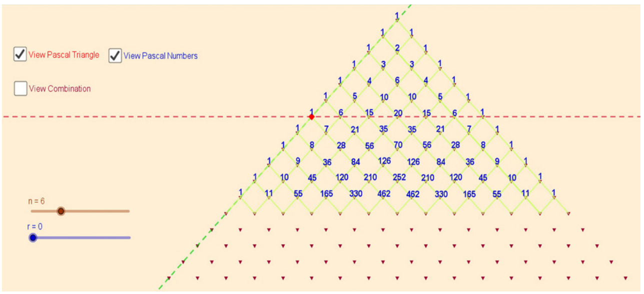


మెట్టు – 1

బ్రౌసర్‌ని ఓపెన్ చేసి మరియు క్రింద ఇవ్వబడిన URL లింక్‌ను టైప్ చేయుము. (లేక) QR కోడ్‌ని స్కాన్ చేయుము. “PASCALSTRIANGLE” అను జియోజీబ్రా వర్క్‌షీట్ వస్తుంది. పాస్కల్ త్రిభుజ అమరికను చూడగలరు. “ViewPascalTriangle”,“ViewPascal’sNumbers” మరియు “ViewCombination” అను చెక్‌బాక్స్‌లుండును.

మెట్టు – 2

“ViewPascal’sNumbers” ని క్లిక్ చేసి మరియు “n” మరియు “r” స్లైడ్లను జరపండి. ఎర్రరంగు బిందువు, సంఖ్యల మీద కదులును. ఏదైన ఒక సంఖ్యని వదలివేయుము మరియు “ViewCalculation” ని క్లిక్ చేసి అమరికను గమనించుము. ఇప్పుడు పాస్కల్ సంఖ్యలను గణనముతో పోల్చి చూడుము.

సోపానము–1

సోపానము–2


*పటములు సూచికలు మాత్రమే

వరుసలు మరియు శ్రేణులు అను లింక్‌ను బ్రౌస్‌చేయుము. https://ggbm.at/QNga4HQd కోడ్ QR ని స్కాన్ చేయుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_5.indd 272 14-05-2022 11:13:58

అధ్యాయము **6**

ద్విపరిమాణ నిరూపక రేఖాగణితం

" నా యొక్క శక్తులు సాధారణమైనవి. నా యొక్క అనువర్తనాలు మాత్రమే నాకు విజయంను అందించును"

– సర్ ఐజక్ న్యూటన్

DT5W6

6.1 పరిచయము

రేనే డిస్కార్టస్
1596-1650 CE

ఫ్రాంకోయిస్ లియట్ (1540–1603) క్రమబద్ధమైన బీజగణిత సంజ్ఞలను పరిచయం చేసెను మరియు సమీకరణాల సిద్ధాంతమునకు వానిని సమర్పించెను. జ్యామితీయ బిందుపథముల యొక్క ఫ్రాంకోయిస్ వియట్ భీజగణిత అధ్యయమును స్వీకరించిరి. రేనే డిస్కార్టస్ మరియు ఫియర్ డే ఫెర్మాట్ అను ఇద్దరు ఫ్రెంచ్ గణిత శాస్త్రవేత్తలు మరియు తత్త్వవేత్తలు 1630లో నిరూపక రేఖా గణితంకు వేర్వేరుగా పునాదులు వేశారు. డెస్కార్టస్ నిరూపక రేఖాగణితంను "బీజగణిత సూత్రాలను దృశ్యీకరించుట ద్వారా" స్థాపించెను. మరియు నిరూపక వ్యవస్థను "ఒక తలంలోని బిందువులను స్థానీకరించు ఒక పరికరంగా" అభివృద్ధి పరిచెను. బీజగణితమము మరియు జ్యామితికి మధ్య గల అంతరంను అనుసంధానించుట ఇతని యొక్క ముఖ్యమైన సాధన. బీజగణితం ఆధారంగా, జ్యామితీయ ఆకారాల ఉపయోగం ద్వారా బీజగణిత సమీకరణాలు ఏ విధంగా వ్యక్తపరచబడును మరియు వివరించబడును అను దానిని ఈయన విపులంగా వివరించెను. నిరూపక రేఖా గణితం అనునది డెసార్ఠస్ మరియు ఫెర్మట్‌ల గొప్ప ఆవిష్కరణ. ఈయన జ్ఞాపకార్థం ఈయన పేరుతో నిరూపక రేఖాగణితంకు ప్రత్యామ్నాయ పదంగా కార్టీజియన్ రేఖాగణితంను వాడుతారు.

17వ శతాబద్ధం తరువాత గణితం స్వచ్ఛమైన (*pure*) మరియు అనువర్తిత గణితములుగా రెండు దశలలో అభివృద్ధి చెందినది. ఒక సరళరేఖలో చలనంలో వున్న వస్తువు యొక్క అధ్యయనము అనునది 17వ శతాబ్దంలో అనువర్తిత గణితంలో మొదలుగా అధ్యయనము చేసిన వానిలో ఒకటి. వ్యావారము,అర్థశాస్త్రము,వి జ్ఞానసాంఘికశాస్త్రము, భౌతికశాస్త్రము మరియు వైద్యశాస్త్రము వంటి రంగాల యొక్క అధ్యయనంలో సరళరేఖా రేఖాచిత్రముల యొక్క ఉపయోగము వైవిద్యమైనది.జ్యామితి యొక్క పునాదులలో పొట్టిరేఖ యొక్క సమస్య ప్రదాన మరియు చారిత్రాత్మకమైన ముఖ్యమైన పాత్రను పోషించును.

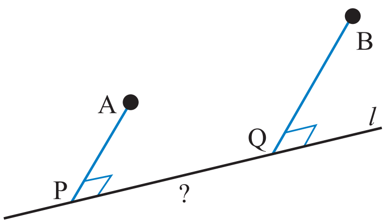
ఇవ్వబడిన ఒక నిజజీవిత సమ్యస్యను గణితభాషను ఉపయోగించి సూత్రకరించడం మన యొక్క మొదటి పని. గణితనమునాను నిర్మించడంలో చాలా సాంకేతికతలను ఉపయోగిస్తాము. ఇవ్వబడిన ఒక సమాచార సముదాయంనుండి రేఖీయ సమీకరణాలు (నమునాలు) ఏ విధంగా నిర్మిస్తారో మనము చూడబోతున్నాము మరియు సరైన గణిత టెక్నిక్‌లను ఉపయోగించి సాధించుట కూడ చూడబోతున్నాము. క్రిందివ్వబడిన కొన్ని నిజజీవిత సరళసమస్యలను గమనిస్తాము;

నిజజీవిత పరిస్థితి 6.1 ఒక విద్యార్థి తన ఇంటి నుంచి గంటకు 6 కి.మీ చొప్పున సరాసరి వేగంతో నడిచినచో అతను తనయొక్క పాఠశాలను పాఠశాల ప్రారంభునకు పదినిముషాల ముందు చేరుతాడు. గంటకు 4 కి.మీ ను చొప్పున సరాసరి వేగంలో అతను నడిచినచో అతను పాఠశాలకు 5 నిముషాలు ఆలస్యంగా చేరతాడు. అతను ప్రతిరోజు ఉదయం 8.00 వద్ద పాఠశాలకు నడవడం ప్రారంభినమా (i) ఇంటికి మరియు పాఠశాలకు

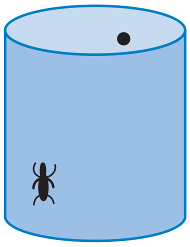
11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 273 14-05-2022 11:23:09

మధ్యగల దూరము (ii) పాఠశాలకు సరైన సమయు. చేరుటకు కనీస సరాసరి వేగము మరియు తీసుకొను సమయము (iii) పాఠశాల ప్రారంభసమయం (iv) అతని యొక్క నడకమార్గము యొక్క సరళరేఖల జతలను (రెండు సరళరేఖల సంయుక్త సమకరణం) ఏవిధంగా కనుగొంటారు.

నిజజీవిత పరిస్థితి 6.2 A మరియు B అను రెండు గ్రామాలకు మెరుగైన విద్యుత్ సరఫరా చేయుటకు ఒక క్రొత్త విద్యుచ్ఛక్తి సరఫరా ఉపకేంద్రంను నెలకొల్పుటకు ప్రభుత్వము నిర్ణయించిందని అనుకోవాలి. ఉపకేంద్రం l రేఖపై ఉండవలెను రేఖపై l పై గల P మరియు Q లంబ పాదముల నుండి గ్రమాలు A మరియు B కు గలదూరాలు వరుసగా 3 కి.మీ. మరియు 5 కి.మీ. మరియు P మరియు Q ల మధ్య దూరం 6 కి.మీ. ఈ రెండు గ్రామాలను విద్యుత్ కేంద్రం నుండి కలపడానికి కావలసిన అతితక్కువ తీగ పోడవును ఏ విధంగా గణిస్తాము (లేదా గ్రామాలను అలాగే విద్యుత్ కేంద్రాలను కలిపే రోడ్లు) మరియు విద్యుత్ కేంద్రం నుండి రెండు గ్రామాలను కలిపే తీగ మార్గంను (రోడ్లను) సమీకరణాలను ఏ విధంగా కనుగొంటాము.



పటము 6.1


పటము 6.2

నిజజీవిత పరిస్థితి 6.3 పరిధి 24 సెం.మీ మరియు 10 సెం.మీ ఎత్తు గల ఒక బోలు స్థూపాకార పాత్రను తీసుకొందాము. ఒక చీమ పాత్రకు వెలుపల అడుగుభాగము నుండి 4 సెం.మీ ఎత్తున గలదు దీనికి ఎదురుగా పాత్ర లోపలి భాగంలో పై నుంచి 3 సెం.మీ దిగువన ఒక తేనె చుక్క గలదు. ఆ చీమ తేనెచుక్కను పొందుటకు పోవలసిన కనిష్ఠ దూరము ఎంత? ఈ చీమ పోవలసిన మార్గము యొక్క సమీకరణం ఏమి? ఇచ్చుట చీమ మరియు తేనె చుక్క స్థానాలను ప్రక్క పటం ద్వారా వివరించబడినది.

నిజజీవిత పరిస్థితి 6.4 ఒక నిర్దిష్టరకం కాంపాక్ట్ డిస్క్ ఒకదాని వెల ₹8 గా వున్నప్పుడు 22000 యూనిట్లు అవసరమగును. ఒక యూనిట్ ధర ₹30 లేదా అంతకన్నా ఎక్కువగా ఉన్నప్పుడు వినియోగదారుడు డిస్క్‌ను కొనడు. అదేవిధంగా తయారీదారుడు ఒక డిస్క్ ధర ₹6 లేదా అంతకన్నా తక్కువగా వున్నప్పుడు దానిని అమ్మకం చేయడు. ఏదేమైన ఒకవేళ ఒక డిస్క్ ధర ₹14 వున్నచో తయారీదారుడు 24000 యూనిట్లు సరఫర చేయగలదు. డిమాండ్ పరిమాణము మరియు సరిఫరా పరిమాణములు ధరకు రేఖీయంగా అనుపాతంలో వున్నట్లు ఊహించుకొందాం. (i) డిమాండ్ సమీకరణం (ii) మార్కెట్ యొక్క (iii) పరిమాణం మరియు ధర సమత్యుత (iv) ఒక యూనిట్ ధర ₹ 10 గా వున్నప్పుడు డిమాండు మరియు సరఫరా పరిమాణం ఏ విధంగా కనుగొంటారు.

పైన సూచించిన ప్రతి సమస్యలో గల సరళరేఖ యొక్క సమీకరణం, ప్రత్యేక సందర్భం యొక్క పరిష్కారములను సాధించుటకు మాత్రమే కాక, దీని ద్వారా చాలా సమాచారమును పొందడానికి మనకు ఉపయోగబడును. సరళరేఖలు యొక్క భావనలను ఉపయోగించుట ద్వారా ఈ రకమైన సమస్యలను సాధించుటకు మనము ప్రయత్నిస్తాము. సరళరేఖలను అవగాహన చేసుకొనుటకు, దీని యొక్క కొన్ని ప్రధాన భావనలు మనకు తెలిసియుండవలెను. వాటిని మనము విపులంగా చర్చిస్తాము.

అభ్యాసన లక్ష్యాలు (Learning objectives)

ఈ అధ్యాయము పూర్తగునప్పుడు విద్యార్థులు క్రింది వాటిని తెలుసుకొని ఉండాలని ఆశిస్తాము

- ఒక సరళరేఖ యొక్క సమీకరణాల వివిధ రూపాలు
- ఇవ్వబడిన రెండు రేఖలు సమాంతరాల లేదా లంబములా తెలుసుకొనుట
- ఇవ్వబడిన రేఖ నుండి ఇవ్వబడిన ఒక బిందువుకు గల దూరము మరియు రెండు సమాంతర రేఖల మధ్యదూరంను గణించుట
- ఇవ్వబడిన ఒక నియమంకు సరళరేఖల కుటుంబంను కనుగొనుట
- సరళ రేఖ యగ్మ యొక్క సంయుక్త సమీకరణం కనుగొనుట. వాని మధ్య కొణం మరియు కొణ సమద్వి ఖండన రేఖలను కనుగొనుట.

6.2 ఒక బిందువు యొక్క బిందుపథం (Locus of a point)

నిర్వచనం 6.1
ఒక బిందువు **(a point)** అనునది ఒక ఖచ్చిత స్థానము లేదా ఒక తలము ఉపరితలంపై స్థానము.

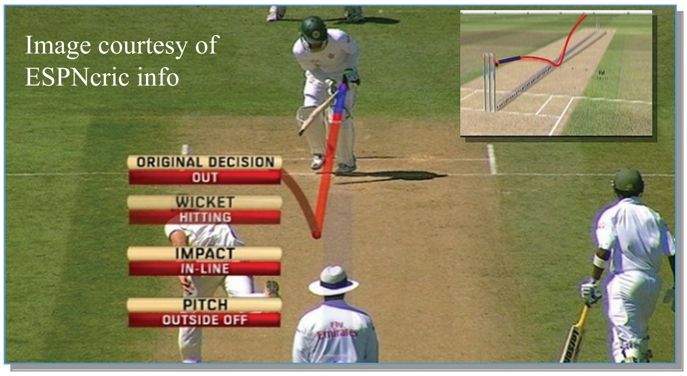
ఒక బిందువు (a point) అనునది ఒక వస్తువు కాదు కాని ఒక స్థానము అని అవగాహన చేసుకొనుట ముఖ్యమైనది. మనము ఒక బిందువు యొక్క స్థానంను ఒక డాట్ (a dot) గుర్తించుటచే సూచిస్తాము. నిరూపక రేఖాగణిత తలంలో బిందువులను నిరూపక్షాల వ్యవస్థ దృష్ట్యా (x, y) అను వాస్తవ సంఖ్యల క్రమయుగ్మాలుగా నిర్వచిస్తారు.

సాధారణంగా, క్షితిజ సమాంతర రేఖను x -అక్షమని, మరియు x - అక్షమునకు క్షితిజ లంబంగా గల రేఖను y-అక్షమని అంటారు. ఈ రెండు అక్షాల ఖండన బిందువును మూలబిందువు (ఆది బిందువు) అంటారు. తలంలో ఏదేని ఒక బిందువు P ను (x, y) అను సంఖ్యల ఏకైక క్రమయుగ్మాలతో స్థానీకరిస్తాము. ఇచ్చట x అనునది బిందువు P మరియు y-అక్షంనకు మధ్య గల దూరంను సూచించును. x రుణాత్మకమైన ఇది y-అక్షంనకు ఎడమవైపున ఉంటుందని, y రుణాత్మకమైన ఇది x-అక్షంనకు దిగువన ఉంటుందని గమనించగలరు. కొన్ని అనువర్తనాలలో x మరియు y అక్షరాలకు బదులుగా వేరే అక్షరాలను ఉపయోగిస్తాము మరియు క్షితిజ సమాంతర మరియు లంబ దిశలలో విభిన్న స్కేలును ఎన్నుకుంటారు.

నిర్వచనం 6.2
నిర్దిష్ట నియమాలనుసరించి ఒక కదిలే బిందు మార్గమును ఆ బిందువు యొక్క బిందు పథము (locus) అంటారు. ప్రత్యామ్నాయంగా, ఒక జ్యామితీయ న్యాయంననుసరించి ఒక బిందువు కదిలినపుడు దాని యొక్క మార్గమును బిందుపథము (locus) అంటారు. locus యొక్క బహువచనం loci అగును.

క్రింది దృష్టాంతంలు, బిందుపథముల యొక్క కొన్ని సందర్భములను మరియు విభిన్న ఉపయోగాలను సూచించును.

దృష్టాంతం 6.1: క్రికెట్‌లో ఒక బౌలర్ బంతిని విసిరినప్పుడు ఆ బంతి పయనించిన మార్గమును ఆ బంతి యొక్క బిందుపథము అగును. బ్యాట్స్‌మన్ మరియు ఫీల్డర్‌లకు మధ్య లెగ్ బిఫోర్ వికెట్ (LBW) నిర్ణయాలలో వివాదం తలెత్తినప్పుడు, మూడవ అంపైర్ ద్వారా ప్లేయర్స్ అడిగిన రివ్యూకు ఆ బంతి యొక్క బిందుపథం ద్వారా వివాదంను పరిష్కరిస్తారు. బ్యాట్స్‌మన్ కాలు ద్వారా బంతి మార్గమును ముందుకు ప్రాజెక్టు చేసి, బంతి స్టంప్స్‌ను డీ కొట్టునా లేదా చూస్తారు. మూడవ అంపైరును సంప్రదించి సాంప్రదాయ స్లోమోషన్ లేదా హ్యాక్-ఐ ద్వారా నిర్ణయమును తీసుకొంటారు. ఈ పద్ధతి ప్రస్తుతం అంతర్జాతీయ క్రికెట్‌లో పాటిస్తున్నారు.
https://www.hawkeyeinnovations.com/sports

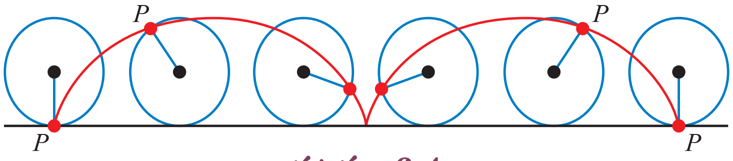


పటము 6.3

దృష్టాంతం 6.2 ఒక వృత్తాకార చక్రం యొక్క రిమ్ (చట్రం) (పరిధి) మీద P బిందువు గలదని అనుకొందాం. ఈ చక్రమును ఒక సరళరేఖ వెంబడి ప్రక్కకు జారకుండ త్రిప్పినప్పుడు రిమ్‌పై గ P బిందువు యొక్క బిందుపథం పటంలో చూపబడినది P బిందువు యొక్క మార్గమును సైక్లాయిడ్ (చక్రజము) అంటారు. (వృత్తం లోపల ఒక

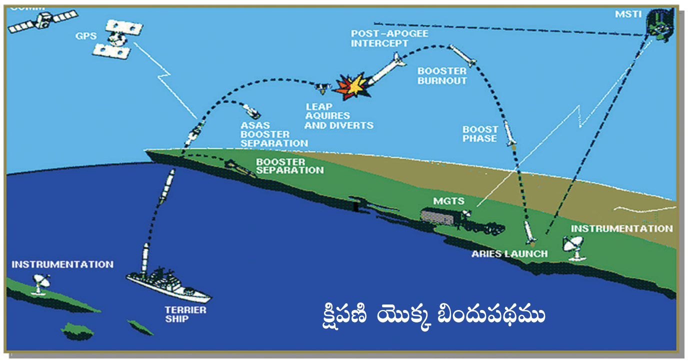
11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 275
14-05-2022 11:23:10

బిందువు తీసుకొని మీ అంతట మీరే ప్రయత్నించండి. ఈ వక్రము యొక్క పేరును *www.mathworld.wolfram.com/cyloid* వెబ్‌సైట్‌లో కనుగొనండి *www.gogebra.org/b/bd2ADu2I*



పటము 6.4

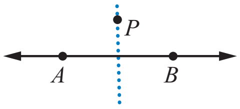
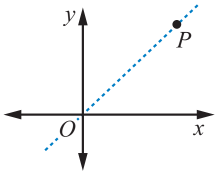
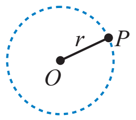
దృష్టాంతం 6.3 దాడి చేయుటకు ఆర్మీషిప్ నుండి ఒక క్షిపణిని ప్రయోగించారు మరియు మరొక క్షిపణిని భూమిపై నుండి దానిని ఢీకొట్టుటకు ప్రయోగించబడినది. పటంలో క్షిపణుల బిందుపథములు చూపబడినది.



పటము 6.5

చాలా యుద్ధాలలో క్షిపణి యొక్క బిందు పథమునకు ఒక ముఖ్యమైన పాత్రగలదు. గల్ఫ్ యుద్ధంలో (2 ఆగస్టు 1990 – 28 ఫిబ్రవరి 1991), ఇరాక్ స్కూడ్ క్షిపణులతో ఇజ్రాయిల్ పట్టణములపై దాడిచేశారు. ఇజ్రాయిల్ ప్యాట్రియట్ క్షిపణులను ఉపయోగించి శత్రువుల క్షిపణులను పడగొట్టారు. ఒక ఉపగ్రహము లేదా ఒక అంతరిక్ష నౌకను విజయవంతంగా ప్రయోగించడానికి మార్గమును నిర్ధారించే ప్రక్రియ అంతరిక్ష పరిశోధనలో ఒక ముఖ్యమైన పాత్ర అగును.

ఒక సమీకరణంలోని x మరియు y అను రెండు చరరాశులు, x మరియు y యొక్క చాలా అనంత వాస్తవ విలువల జతలను సాధారణంగా సంతృప్తిపరుచును. ఇటువంటి ప్రతిజతను సమీకరణం యొక్క వాస్తవ సాధన అగును. సమీకరణం యొక్క ప్రతి వాస్తవ సాధనకు త యొక్క రేఖాచిత్రంను కలిగి వుంటుంది. ఇటువంటి అన్ని రేఖాచిత్రాల సేకరణను దత్త సమీకరణం యొక్క బిందుపథము అంటారు.
క్రింది పట్టిక గణితం లోని కొన్ని ముఖ్యమైన బిందుబథములను సూచించును.

ఇచ్చిన షరత్తు ప్రకారం ఒక కదిలే బిందువు P	**రేఖాచిత్రం**	**మార్గం యొక్క పేరు**
ఒక బిందువు P స్థిర బిందువులు A మరియు B ల నుండి సమానదూరంలో ఉండునట్లు కదులుతున్నది.	 **పటము 6.6**	AB రేఖాఖండము యొక్క లంబ సమద్వి ఖండనరేఖ
ఒక బిఇందువు P స్థిరరేఖలు Ox మరియు Oy ల నుండి సమానదూరంలో ఉండునట్లు కదులుతున్నది.	 **పటము 6.7**	$\angle xOy$ కోణము యొక్క కోణ సమద్విఖండన రేఖ
ఒక బిందువు P ఒక స్థిరబిందువు O నుండి సమాన దూరంలో కదులుతున్నది.	 **పటము 6.8**	వృత్తము

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 276
14-05-2022 11:23:12

ఇప్పుడు మనము బిందువుల యొక్క బిందుపథమును కనుగొను పద్ధతులను చర్చిస్తాము. ఈ బిందు పథసమీకరణం అనునది పథముపై ఖచ్చితంగా అమరివున్న అన్ని బిందువుల నిరూపకాల మధ్య సంబంధంను తెలియచేయును.

ఒక బిందువు యొక్క బిందు పథ సమీకరణం కనుగొను విధానంము

(i) ఒక బిందువు P యొక్క బిందుపథ సమీకరణం కనుగొనుటకు మనము P కు (h, k) అను నిరూపకాలను కేటాయించవలెను.

(ii) ఇచ్చిన నియమాలను తెలిసిన పరిమాణాలు మరియు తెలియని పరిమితుల పదములలో సమీకరణములుగా వ్యక్తపరచవలెను.

(iii) ఫలిత సమీకరణంలో h, k మరియు తెలిసిన పరిమాణాలు మాత్రమే వుండునట్లు పరామితులను తొలగించవలెను.

(iv) ఫలిత సమీకరణంలో h ను x చే, k ను y చే స్థాన మార్పు చేయవలెను. ఈ ఫలిత సమీకరణమే p బిందువు యొక్క బిందుపథ సమీకరణం అగును.

ఉదాహరణ 6.1 x అక్షము మరియు y అక్షమునకు సమానదూరంలో చలించు బిందువు యొక్క బిందుపథమును కనుగొనుము.

సాధన

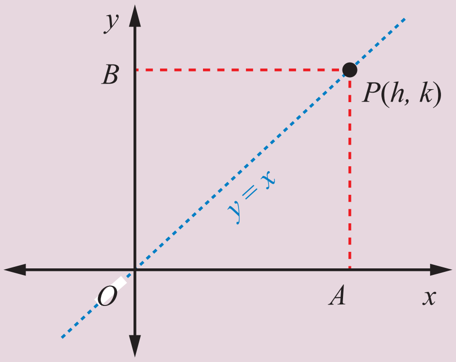
$P(h,k)$ బిందుపథముపై ఒక బిందువు అనుకొందాం.

ఈ బిందువు P నుండి x అక్షము మరియు y అక్షముల నుండి గీచిన లంబ పాదములు వరుసగా A మరియు B అనుకొందాము.

కావున P అనునది $(OA, OB) = (BP, AP) = (h,k)$ అగును.

ఇవ్వబడినది $AP = BP$

$$\Rightarrow k = h$$



పటము 6.9

$h = x$ మరియు $k = y$ లచే ప్రతిక్షేపించుట ద్వారా h మరియు k లను స్థానమార్పు చేయుము. P బిందుపథము $y = x$ అనునది మూల బిందువు గుండా పోవు ఒక రేఖ అగును.

ఉదాహరణ 6.2 $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ బిందువు చలించు పథమును కనుగొనుము ఇచ్చట $t \neq 0$ ఒక పరామితి మరియు c ఒక స్థిరాంకము.

సాధన

బిందుపథముపై ఒక బిందువు $P(h,k)$ అనుకొందాము. ఇచ్చిన సమాచారము నుండి $h = ct$ మరియు $k = \frac{c}{t}$ అగును. t ను తొలగించుటకు ఈ రెండు సమీకరణాల లబ్దమును తీసుకొందాము.

$$(h)(k) = (ct)\left(\frac{c}{t}\right) \Rightarrow hk = c^2$$

కావున, కావాలసిన బిందుపథము $xy = c^2$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 277 14-05-2022 11:23:12

ఉదాహరణ 6.3 $A(1,0)$ మరియు $B(5,0)$ అను రెండు స్థిరబిందువుల నుండి సమానదూరంలో చలించు ఒక బిందువు P యొక్క బిందుపథంను కనుగొనుము.

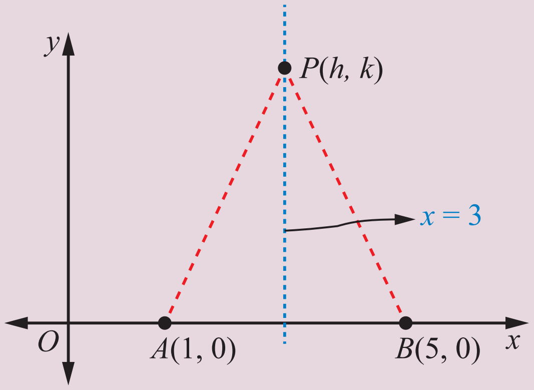
సాధన

$A(1,0)$ మరియు $B(5,0)$ అని ఇవ్వబడినది.
కావలసిన బిందుపథముపై $P(h,k)$ ఏదేని ఒక బిందువు అనుకొందాము. ఇచ్చిన సమాచారము నుండి $AP = BP$ అని మనకు లభించును.

అనగా

$$\sqrt{(h-1)^2+(k-0)^2} = \sqrt{(h-5)^2+(k-0)^2}$$

$$\Rightarrow \quad h = 3$$



పటము 6.10

కావున P యొక్క బిందుపథము $x = 3$ అగును. ఇది $P(h,k)$ $y-$ అక్షమునకు సమాంతరంగా గల ఒక సరళరేఖ అగును.

ఉదాహరణ 6.4 θ ఒక పరామితి. నిరూపకాలు $(a\sec\theta,\ b\tan\theta)$ అను గల ఒక చలించు బిందువు యొక్క బిందుపథ సమీకరణంను కనుగొనుము.

సాధన

కావాలసిన పథముపై గల ఏదేని ఒక బిందువు $P(h,k)$ అనుకొందాం. ఇచ్చిక సమాచారం ప్రకారం మనకు క్రింది సమీకరణాలు లభించును.

$$h = a\sec\theta \text{ మరియు } k = b\tan\theta$$

$$\Rightarrow \frac{h}{a} = \sec\theta \text{ ,మరియు } \frac{k}{b} = \tan\theta$$

θ పరామితిని తొలగించుటకు వర్గము చేసి మరియు తీసివేయవలెను, మనకు లభించునది

$$\left(\frac{h}{a}\right)^2 - \left(\frac{k}{b}\right)^2 = \sec^2\theta - \tan^2\theta$$

$$\left(\frac{h}{a}\right)^2 - \left(\frac{k}{b}\right)^2 = 1.$$

కావున ఇచ్చిన బిందువు యొక్క బిందుపథము $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ అగును.

https://www.geogebra.org/geometry

పరామితులను త్రికోణమితీయాల రూపంలో ఇచ్చినప్పుడు θ ను తొలగించుటకు త్రికోణమితీయ సర్వసమీకరణంలను ఉపయోగించి ప్రయత్నించుము.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1, \quad \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1, \quad \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

ఉదాహరణ 6.5 ఒక నిలువ ఖడ్డీ పొడవు 6 యూనిట్లు దీని చివరలు A మరియు B లు ఎల్లప్పుడు వరుసగా x మరియు y అక్షాలపై జారును. O- ఆది బిందువైనచో ΔOAB యొక్క గురుత్వకేంద్రము యొక్క బిందుపథమును కనుగొనుము.

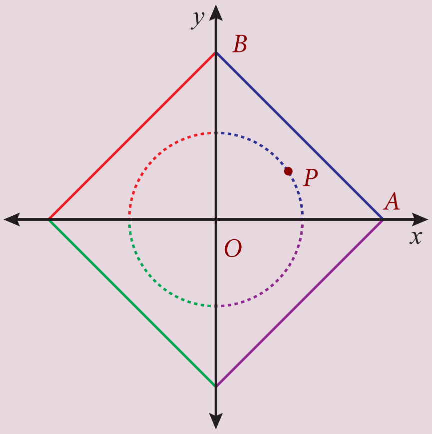
11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 278 14-05-2022 11:23:14

సాధన

$P(h,k)$ అనునది కావాలసిన బిందుపథముపై ఏదేని ఒక బిందువును ఎంచుకొనుము

O, A మరియు B బిందువుల నిరూపకాలు వరుసగా $(0,\ 0)$, $(a,0)$ మరియు $(0,\ b)$ అనుకొందాము.

A మరియు B బిందువులు చలన బిందువులని గమనించుము.



పటము 6.11

హా $\Delta\, OAB$యొక్కగురుత్వకేంద్రము $\left(\dfrac{0+a+0}{3},\dfrac{0+0+b}{3}\right)=(h,k)$.

$$\frac{a}{3}=h \Rightarrow a=3h,\ \frac{b}{3}=k \Rightarrow b=3k$$

లంబకోణ ΔBOA నుంచి

$$OA^2+OB^2 = AB^2$$

$$(3h)^2+(3k)^2 = (6)^2 \quad \Rightarrow\ h^2+k^2=4$$

$P(h,k)$ యొక్క బిందుపథము $x^2+y^2=4$. వృత్తము అగును.

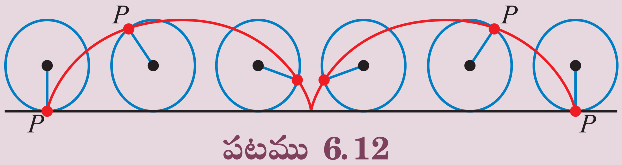
ఉదాహరణ 6.6 θ ఒక పరామితి $(a(\theta-\sin\theta),\ a(1-\cos\theta))$ అను నిరూపకాలుగా గల చలన బిందువు యొక్క బిందు పథ సమీకరణం కనుగొనుము.

సాధన

కావాలసిన బిందుపథముపై $P(h,k)$ ఏదేని ఒక బిందువు అనుకొనుము. ఇచ్చిన సమాచారము ప్రకారము మనకు లభించునది.

$$h = a(\theta-\sin\theta) \qquad (6.1)$$

$$k = a(1-\cos\theta) \qquad (6.2)$$



పటము 6.12

(6.2) సమీకరణం నుండి θ మరియు $\sin\theta$ విలువలను మనము కనుకొంటాము.

$$k = a(1-\cos\theta)$$

$$\cos\theta=\frac{a-k}{a} \Rightarrow \theta=\cos^{-1}\left(\frac{a-k}{a}\right) \text{ మరియు } \sin\theta=\frac{\sqrt{2ak-k^2}}{a}$$

(6.1) లో పై విలువలను ప్రతిక్షేపించగా మనకు లభించునవి,

$$h = a\cos^{-1}\left(\frac{a-k}{a}\right)-\sqrt{2ak-k^2}$$

యొక్క బిందుపథము,

$$x = a\cos^{-1}\left(\frac{a-y}{a}\right)-\sqrt{2ay-y^2} \qquad (6.3)$$

https://www.geogebra.org/b/bd2ADu2I#material/zCKMj8kE

పైన ఇవ్వబడిన పరామితి రూపమును కార్టీజియన్ రూపంగా మార్పు చేసినప్పటికి, కొన్ని సందర్భాలలో పరామితీయ రూపము కార్టీజియన్ రూపము కన్న ఎక్కువ ఉపయోగకరంగా ఉంటుంది.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 279 14-05-2022 11:23:22

అభ్యాసము 6.1

1. P - అను ఒక చలన బిందువు నిరూపకాలు క్రిందివ్వబడినది. యొక్క అన్ని విలువలకు P యొక్క బిందుపథమును కనుగొనుము.
   (i) $(9\cos\alpha, 9\sin\alpha)$ (ii) $(9\cos\alpha, 6\sin\alpha)$
2. (i) x- అక్షమునుండి రెండు యూనిట్లు (ii) y అక్షము నుండి మూడు యూనిట్లు స్థిరదూరంలో చలించు ఒక బిందువు P - యొక్క బిందుపథమును కనుగొనుము.
3. θ ఒక పరామితి. $x = a\cos^3\theta, y = a\sin^3\theta$ అను నిరూపకాలుగా గల ఒక చలన బిందువు యొక్క బిందుపథ సమీకరణంను కనుగొనుము.
4. $x^2 - 5x + ky = 0$ యొక్క బిందుపథముపై $P(-3,1)$ మరియు $Q(2,b)$ లు వున్నచో k మరియు b యొక్క విలువలను కనుకొనుము.
5. 8 యూనిట్లు పొడవు గల ఒక నిలువ ఖడ్డీ యొక్క చివరలు A మరియు B లు ఎల్లప్పుడు వరుసగా x మరియు y అక్షాలపై జారుతున్నచో AB రేఖా బంధం యొక్క మధ్యబిందువు యొక్క బిందుపథమును కనుగొనుము.
6. $(3,5)$ $(1,-1)$ బిందువుల నుండి ఒక బిందువుకు గల దూరముల వర్గముల మొత్తము 20కు సమానమైనచో ఆ బిందువు యొక్క బింధుపథమును కనుగొనుము.
7. $A(1,-6)$ మరియు $B(4,-2)$ బిందువులను కలిసే రేఖాఖండము AB, P వద్ద లంబకోణము చేసినచో P- బిందువు యొక్క బిందుపథ సమీకరణంను కనుగొనుము.
8. O ఆది బిందువు మరియు $y^2 = 4x$, R ఒక చలరాశి అయినచో OR రేఖాఖండం యొక్క మధ్యబిందువు యొక్క బిందుపథ సమీకరణంను కనుగొనుము.
9. ఒక చలన బిందువు P నిరూపకాలు $\left(\frac{a}{2}(\operatorname{cosec}\theta + \sin\theta), \frac{b}{2}(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)\right)$ ఇచ్చుట θ ఒక చలపరామితి P యొక్క బిందుపథ సమీకరణం $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ అని చూపుము.
10. $P(2,-7)$ అనునది ఇవ్వబడిన ఒక బిందువు మరియు $2x^2 + 9y^2 = 18$ పై Q ఒక బిందువు అయినచో PQ యొక్క మధ్యబిందువు యొక్క బిందుపద సమీకరణములను కనుగొనుము.
11. x అక్షముపై R ఏదేని ఒక బిందువు మరియు y అక్షముపై Q ఏదేని ఒక బిందువు మరియు RQ పై $RP = b, PQ = a$ తో P ఒక చల బిందువు అయినచో P యొక్క బిందుపద సమీకరణంను కనుగొనుము.
12. ఒక ΔPQR యొక్క శీర్షాలు $P(6,2)$ మరియు $Q(-2,1)$ మరియు R. $y = x^2 - 3x + 4$ బిందుపథముపై R ఒక బిందువైనచో ΔPQR యొక్క గురుత్వ కేంద్రము యొక్క బిందుపద సమీకరణంను కనుగొనుము.
13. $x^2 + y^2 + 4x - 3y + 7 = 0$ బిందుపథముపై Q ఒక బిందువు. O ఆది బిందువు OQ రేఖాఖండమును బాహ్యంగా 3:4 నిష్పత్తిలో విభజించు బిందువు P యొక్క బిందుపద సమీకరణంను కనుగొనుము.
14. x-అక్షము నుండి 3 యూనిట్లు మరియు $P(5,1)$ బిందువు నుండి 5 యూనిట్లు దూరంలో వున్న బిందువు యొక్క బిందుపదముపై బిందువులను కనుగొనుము.
15. $(4,0)$ మరియు $(-4, 0)$ బిందువుల నుండి ఒక చలన బిందువుకు గల దూరముల మొత్తము ఎల్పప్పుడు 10 యూనిట్లు. ఈ చలన బిందువు యొక్క బిందుపద సమీకరణాలను కనుగొనుము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 280 14-05-2022 11:23:23

6.3 సరళరేఖలు (Straight Lines)

ప్రాథమిక బీజగణిత న్యాయాలను ఉపయోగించి ఏకఘాతీయ సమీకరణాలను అనేక విభిన్నరూపాలలో మార్చి వ్రాయగలము. ఈ సమీకరణాలను తరుచుగా సరళరేఖా సమీకరణాలుగా సూచిస్తారు.

ఏకఘాతీయ సమీకరణం యొక్క సాధారణ రూపమును క్రింది విధంగా వ్రాయవచ్చును.

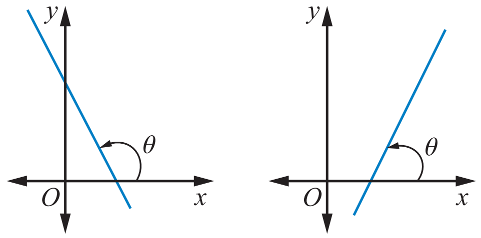
$$ax + by + c = 0 \qquad (6.4)$$

ఇచ్చట a మరియు b లు రెండునూ సున్నకు సమానం కాదు. ఏకఘాతీయం (*Linear*) అను పేరు, అటువంటి సమీకరణాల సాధనల సమితి ఒక తలంలో ఏర్పరచు ఒక సరళరేఖ యొక్క వాస్తవికతను నుండి వచ్చినది. ఈ అధ్యాయములో రేఖ అనగా సరళరేఖ అని ప్రత్యేకించి నిర్వచనంలో వరకు మనకు భావించవలెను.

ఒక రేఖా సమీకరణంను ఒక రూపం నుండి మరొక రూపమునకు బీజగణిత మ్యానిపులేషన్ ద్వారా మార్పుచేసి వ్రాయుటకు చాలా పద్ధతులు గలదు. ఈ రూపాలకు సాధారణంగా ఆ రూపాలను వ్రాయుటకు అవసరమగు రేఖ యొక్క సమాచార (దత్తాంశము) రకము ద్వారా నామీకరణం చేస్తారు. బిందువులు వాలు మరియు అంతరఖండాలు అనునవి కొన్ని ముఖ్యమైన దత్తాంశములు.

6.3.1 వాలు మరియు వాలు కోణములకు మధ్యగల సంబంధము (The relationship between the angle of inclination and slope)

నిర్వచనం 6.3
ఒక సరళరేఖ యొక్క వాలుకోణము θ అది అనునది ఒక రేఖ x- అక్షముతో అపసవ్యదిశలో (ధనాత్మకదిశ) చేయు కోణము అగును.



పటము 6.13

నిర్వచనం 6.4
ఒక సరళరేఖ యొక్క వాలు లేదా గ్రేడియంట్ అనునది "దిశ మరియు ఏటవాలుతనము"లను కొలుచు ఒక సంఖ్య అగును.

x మరియు y అక్షాలును కలిగిన తలంలోని ఒక రేఖ వాలు సాధారణంగా m అను అక్షరంచే సూచిస్తారు. క్రిందివ్వబడిన విధంగా చాలా పద్ధతులలో దీనిని కొలుస్తారు:

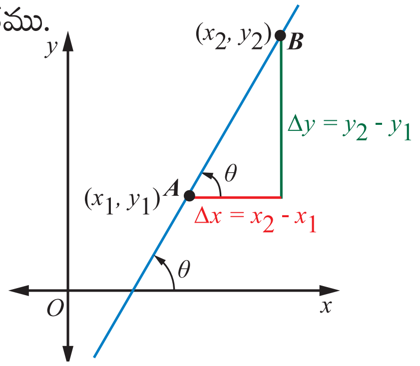
(i) ఒక రేఖ x-అక్షముతో అపసవ్యదిశలో చేయుకొణము θ అయినచో వాలు

$$m = \tan\theta$$

θ, $\frac{\pi}{2}$ అయినప్పుడు $\Longrightarrow$ $m = \tan\frac{\pi}{2}$ అనునది అనిర్వచితము.

(ii) (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) అను రెండు బిందువులు $x_2 \neq x_1$ అయినప్పుడు వాలు అనేది y నిరూపకంలోని మార్పును x నిరూపకంలోని మార్పును x నిరూపకంలోని సదృశ మార్పుతో భాగించుట అగును. దీనిని క్రింది సమీకరణం ద్వారా వివరించబడినది.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{క్షితిజలంబ మార్పు}}{\text{క్షితిజ సమాంతరమార్పు}}$$



పటము 6.14

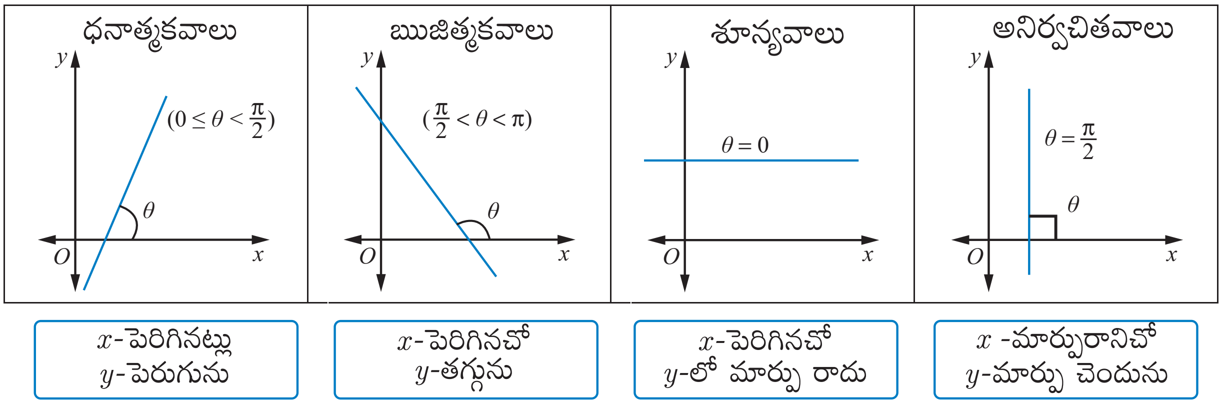
11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 281 14-05-2022 11:23:23

(iii) ఏక ఘాతీయ సమీకరణం యొక్క సాధారణ రూపము $ax+by+c=0$ ఇచ్చినప్పుడు ఆ రేఖ యొక్క వలు

$$m=-\frac{a}{b},\ b\neq 0$$

$b=0$ అయినపుడు m అనిర్వచితము.

ఒక రేఖ యొక్క వాలు ఒక ధనాత్మకము లేదా ఋణాత్మకము లేదా శూన్యము లేదా అనిర్వచితంగా క్రిందివిధంగా సూపినట్లు ఉండవచ్చును.



పటము 6.15

నిర్వచనం 6.5

ఒక తలంలో మూడు లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ బిందువులు ఒకే సరళరేఖ పై వున్నచో వానిని సరేఖీయాలు అంటారు.

A, B మరియు C అనునవి ఒక తలంలో ఏదేని మూడు బిందువులు అనుకొంటాము AB వాలు BC వాలుకు (లేదా AC) సమానమైనచో అవి సరేఖీయాలు.

6.3.2 ఒక రేఖ యొక్క అంతర ఖండాలు (Intercepts of a Line)

నిర్వచనం 6.6

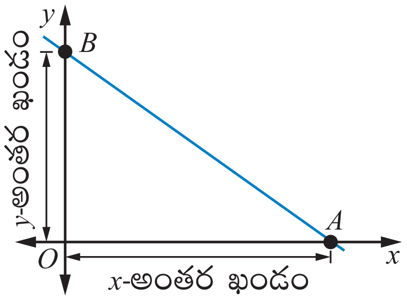
ఒక రేఖ యొక్క అంతరఖండంఅనేది ఆరేఖ x - అక్షం లేదా y -అక్షం ను ఖండించే బిందువు అగును.

ఎక్కడైతే y - విలువ శూన్యం అగునో అది x - అంతర ఖండ బిందువు, మరియు ఎక్కడైతే x విలువ శూన్యం అగునో అది y అంతర ఖండ బిందువు అగును. అందువల్ల ఒక రేఖ యొక్క అంతరఖండలు అనే అబిందువులు ఎకుడైతే క్షితిజ సమాంతర మరియు నిలువు అక్షాలను ఖండించును లెదా దాటును. అందు వలన స్పష్టంగా.

(i) y - అక్షం యొక్క సమీకరణం $x=0$

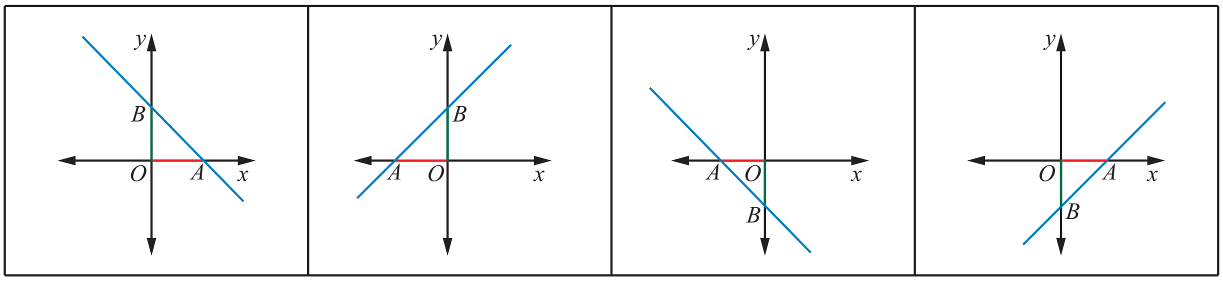
(ii) x - అక్షం యొక్క సమీకరణం $y=0$ పటం లో OA అనేది పటంలో OA అనేది x - అంతర ఖండం మరియు OB అనేది y - అంతర ఖండం అగును.

x మరియు y అంతర ఖండాల యొక్క వివిధ రూపాలు



పటము 6.16

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 282 14-05-2022 11:23:24



x-అంతర ఖండంధానాత్మకం y -అంతర ఖండంధానాత్మకం	x-అంతర ఖండంఋణాత్మకం y-అంతర ఖండంధానాత్మకం	x-అంతర ఖండంధానాత్మకం y-అంతర ఖండంఋణాత్మకం	x-అంతర ఖండంధానాత్మకం y-అంతర ఖండంఋణాత్మకం

పటము 6.17

బిందువు, వాలు మరియు అంతరఖండాల గురించి నిర్వచనలు మరియు వివరణాత్మక సమాచారాన్ని నేర్చుకొన్నాము. ఈ సమాచారాన్ని ఉపయోగించి, సరళరేఖ యొఖ్య సమికరణం యొక్క వివిధ రూపాలను గుర్తుచేసుకొందాం.

6.3.3 సరళ రేఖ సమీకరణం యొక్క వివిధ రూపాలు (Different forms of a straight line)

ఒక సరళ రేఖ సమీకరణాన్ని ఏకైకంగా నిర్ధారించడానికి రెండు నియమలు సరిపోతాయి. వాలు, అంతరఖండాలు మరియు బిందువుల నుండి ఏదైనా రెండు సమాచరాల సంయోగంను ఉపయోగించి మనం ఇప్పుడు క్రింది విధంగా సరళరేఖల యొక్క వివిధరకాల రూపాలను ఏర్పరచవచ్చును.

(i) వాలు మరియు అంతరఖండ రూపం

(ii) బిందువు మరియు వాలు రూపం

(iii) రెండు బిందువుల రూపం

(iv) అంతరఖండాలరూపం మరియు మరో రెండు ప్రత్యేక రకాలు

(v) అభిలంబ రూపం

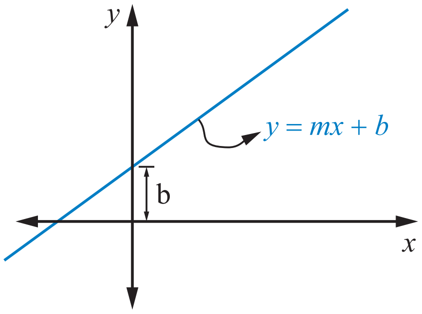
(vi) పరామితీయ రూపము

ఒక ప్రమేయభావదలను పయోగించి రెండు పరియాణాల మధ్య సంబందాన్ని వివరించే ఒక ముఖ్యమైన మార్గాన్ని మనము ఇప్పుడు చూస్తాము.

(i) వాలు మరియు అంతరఖండరూపం (Slope-Intercept form)

అనుపాత రేఖీయ ప్రమేయములను $y = mx$ రూపంలో వ్రాయవచ్చును. ఇక్కడ సరళ రేఖ యొక్క వాలు m అనుపాతరహిత రేఖీమప్రమేయమును క్రింది రూపంలో వ్రాయవచ్చును.

$$y = mx + b,\ b \neq 0 \qquad (6.5)$$



పటము 6.18

దీనిని ఒక సరళరేఖీ యొక్క వాలు అంతరఖండరూపం అంటారు. ఎందుకనగా వాలు m మరియు y అంతరఖండం b అగును.

(i) $b = 0$ మరియు $m \neq 0$ అయిన, సరళ రేఖ మూలబిందువు గుండాపోవును మరియు దీని సమీకరణం $y = mx$

(ii) $b = 0$ మరియు $m = 0$ అయిన సరళ రేఖ x-అక్షంతో ఏకీ భవించును మరియు దీని సమీకరణం $y = 0$

(iii) $b \neq 0$ మరియు $m = 0$ అయిన సరళ రేఖ x-అక్షంకు సమాంతరంగా ఉండును మరియు దీని సమీకరణం $y = b$.

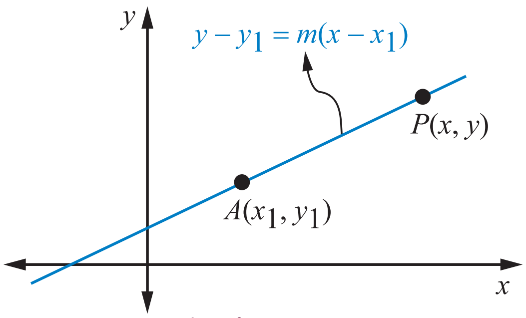
11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 283 14-05-2022 11:23:24

(ii) బిందు వాలు రూపం (Point and Slope form)

m అనేది సరళరేఖ యొక్క వాలు మరియు సరళరేఖ పై ఏదైన ఒక బిందువు $A(x_1, y_1)$ అనుకొందాం. దీని సరళ రేఖ పై A - కాకుండా మరోక బిందువు $P(x, y)$ అనుకొందాం $A(x_1, y_1)$ మరియు $P(x, y)$ బిందువులను కలుపు రేఖ వాలు

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1) \qquad (6.6)$$



పటము 6.19

దీనిని బిందువు వాలు రూపం అంటారు.

y - అక్షనికి సమాంతర రేఖల వాలు (m) అనిర్వచితం కాదు కామన $A(x_1, y_1)$ గుండా పోతూ y - అక్షమునకు సమాంతరంగా గల ఒక రేఖ సమీకరణం బిందు వాలు రూప సమీకరణంను ఇవ్వదు. అయినప్పరికి ఇది ఎటువంటి ఇబ్బంది, కలిగించదు. ఎందుకనగా ఇటువంటి రేఖల పై గల ప్రతి బిందువు అబ్సిస్సా x నిరూపణ x_1 కావున ఇట్టి రేఖల సమీకరణం $x = x_1$ అగును.

(iii) రెండు బిందువుల రూపం (Two-points form)

ఒక సరళ రేఖ పై ఏదేని రెండు బిందువులు (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) నందు $x_2 \neq x_1$ మరియు $y_2 \neq y_1$ అయిన వాలు $m = \dfrac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$

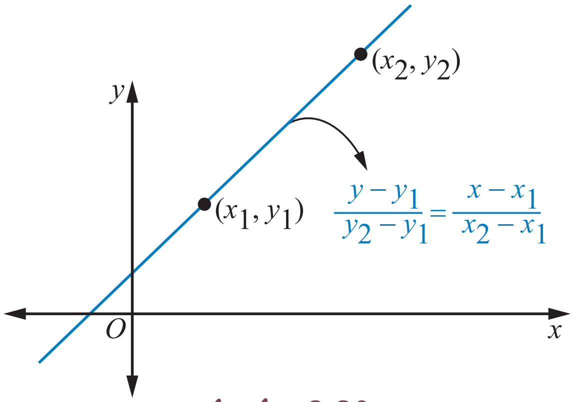
బిందువు వాలు రూపం సమీకరణాన్ని ఉపయోగించగా, మనకు లభించునది

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

పై సమీకరణానం ను మార్చి వ్రాయగా; మనకు అభించునది

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (6.7)$$

ఈ సమీకరణాన్ని రెండు బిందువుల రూపం అంటారు.



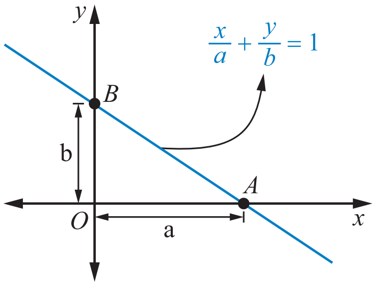
పటము 6.20

రెండు బిందువుల రూపాన్ని నిర్ధారక రూపంలో కూడ క్రింది విధంగా సూచించవచ్చును.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

(iv) అంతరఖండ రూపం (Intercept Form)

ఒక సరళరేయొక్క x అక్షము మరియు y -అక్షము అంతరఖండము తెలిసినపుడు అంతరఖండాలను ఉపయోగించి సరళరేఖ సమీకరణం కనుగొనవచ్చును. x -అంతరఖండం $OA = a$ మరియు y -అంతరఖండం $OB = b$ మరియు మరియు లు శూన్యేతనాలు అయిన $A(a, 0)$, $B(0, b)$ బిందువుల గుండా పోపు రేఖ



పటము 6.21

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 284 14-05-2022 11:23:26

$$\frac{y-0}{b-0}=\frac{x-a}{0-a}$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad (6.8)$$

పై సమికరణాన్ని అంతరఖండ రూపం అంటారు.

మూలబిందువు గుండ పోవురేఖలు లేదా క్షితిజసమింతర a లేద b క్షితిజలంబం లేదా శూన్యేతర నియములు పాటించని రేఖలను ఈ రూపంలో సూచించలేము.

ఈ రూపాన్ని చాలా సందర్భాబలలో రేఖ యొక్క గ్రాఫ్‌ను సులభంగా గీయుటకు ఉపయోగిస్తారు.

(v) అభిలంబ రూపం (Normal Form)

ఒక రేఖ యొక్క అంతరఖండాలు A మరియు B అనుకొందాం మూలబిందువు నుండి సరళరేఖ AB కి గిచిన అభిలంబం OP యొక్క పోడవు p అనుకొందాము. ఇది అక్షంలో చేయక్నొం α అయిన

లంబకోణ ΔOPA లో $\frac{OP}{OA}=\cos\alpha$ మరియు

లంబకోణ ΔOPB, $\frac{OP}{OB}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$

$$\Rightarrow \frac{1}{OA}=\frac{\cos\alpha}{p}$$

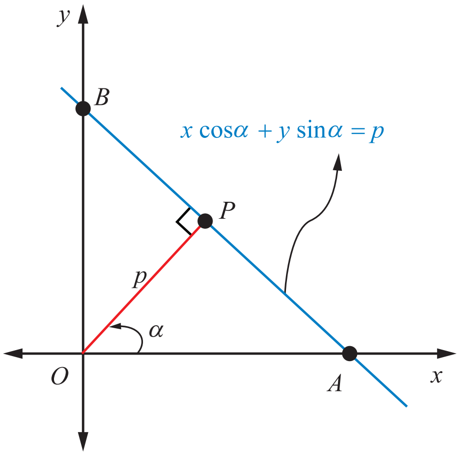
మరియు $\frac{1}{OB}=\frac{\sin\alpha}{p}$

పై సమాచారం ను అంతరఖండరూపంలో ఉపయోగించిన.

$$\frac{x}{OA}+\frac{y}{OB}=1$$

$$\frac{x\cos\alpha}{p}+\frac{y\sin\alpha}{p}=1$$

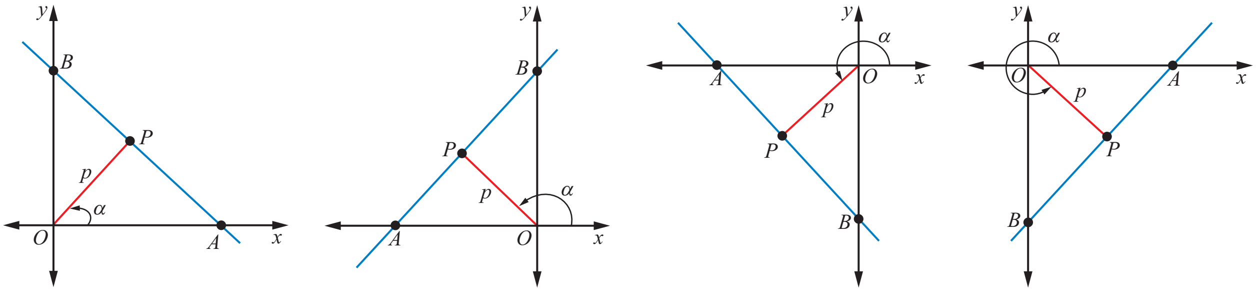
$$\Rightarrow x\cos\alpha+y\sin\alpha=p \qquad (6.9)$$



పటము 6.22

దీనినే సమీకరణం యొక్క అభిలంబ రూపం అంటారు.

ఒక సరళరేఖ పై అన్ని స్థానాల వద్ద p ధనాత్మకం మరియు x - అక్షంయొక్క ధనదిశ ఎల్లప్పుడు కొలచినట్లు α అయితే ఈ సమీకరణం పటంలో చూపిన ప్రతి సందర్భమును పాటించును.



పటము 6.23

(vi) పరామితియ రూపము (Parametric Form)

ఒక సరళ రేఖ యొక్క పరామితీయ సమీకరణరూపం క్రింది విధంగా ఉంటుంది

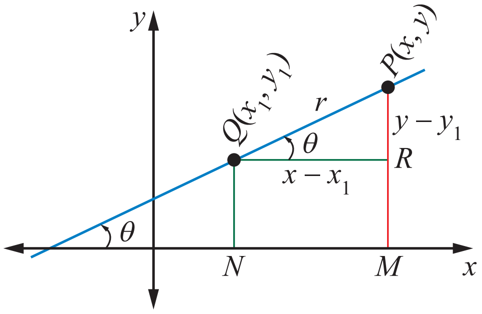
$$x=ar+x_1 \quad \text{మరియు} \quad y=br+y_1$$

ఇక్కడ a, b స్థిరాంకాలు r అనేది పరామితి అగును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 285 14-05-2022 11:23:26

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=r\ ,\ \ (a\neq 0,\ b\neq 0)$$

x-అక్షంతో θ కోణం చేస్తూ $Q(x_1, y_1)$ బిందువు గుండా పోయే సరళ రేఖ సమీకరణం గలదని అనుకొందాము. Q నుండి r దూరంలో ఒక సరళరేఖ పై $P(x, y)$ ఏదైన బిందువు అనుకొందాము. x - అక్షంనకు Q మరియు P లకు గియబడన లంబలు వరుసగా QN మరియు PM అనుకొందాం మరిచు $QR \perp PM$ కు ..... లంబము.



పటము 6.24

లంబకోణ ΔQRP నుంచి

$$x-x_1=QR=PQ\cos\theta=r\cos\theta$$

$$\text{అందువల, } \frac{x-x_1}{\cos\theta}=r \qquad (6.10)$$

ఇదేవిధంగా, $y-y_1=RP=QP\sin\theta=r\sin\theta$

$$\Rightarrow \frac{y-y_1}{\sin\theta}=r \qquad (6.11)$$

(6.10) మరియు (6.11) నుంచి మనకు లభించునది.

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r \qquad (6.12)$$

ఇక్కడ r పరామితి అనగా (x, y) బిందువు నుండి సరళ రేఖ పై ఏదైన బిందువు (x_1, y_1) లమధ్య దూరం. దీనినే సౌష్ఠవ రూపం లేదా పరామితిమరూపం అంటారు.

సరళ రేఖ పై గల ప్రతి బిందువుకు నిరూపకాలను r గా వ్రాయవచ్చును. బిందువు యొక్క నిరూపకాలు r విలువపై ఆధారపడునని. అనిస్పష్టమగుచున్నది. కావున r చరరాశిని పరామితి అంటారు. పరావంతం కావున సమీకరణాలు $x=x_1+r\cos\theta$, $y=y_1+r\sin\theta$ లను సరళరేఖ యొక్క సౌష్ఠవ సమీకరణం అందురు. ఇచ్చిన బిందువు యొక్క ఒక వైపున రేఖ పై గల అన్ని బిందువుల r యొక్క విలువ ధూనాత్మకం మరియు దీని విలువ ఇచ్చిన బిందువుకు మరొక వైపున రేఖ పై గల అన్ని బిందువులకు బలణాత్మకం అగును.

(vii) సరళ రేఖ యొక్క సాదారణ రూపం (General form)

$ax+by+c=0$ ఇక్కడ a, b మరియు c లు శూన్యేతరలు.

ఇచ్చిన సమాచారంకు అనుగునంగా సరళరేఖ సమీకరణాలను క్రింది పట్టిక లో ఇవ్వబడినది.

వ.స	ఇచ్చినసమాచారం	సరళరేఖయొక్క సమికరణం
(i)	వాలు (m) మరియు y−అంతరఖండం (b)	$y=mx+b$
(ii)	వాలు (m) మరియు బిందువు (x_1, y_1)	$y-y_1=m(x-x_1)$
(iii)	రెండు బిందువు (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2)	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 286 14-05-2022 11:23:28

(iv)	x -అంతరఖండం (a) మరియు y -అంతరఖండం (b)	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
(v)	అభిలంబం పొడవు (p) కోణం (α)	$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$
(vi)	r–పరామితి సౌష్ఠవ సమికరణంరూపం	$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r$
(vii)	సాధారణ సమికరణం	$ax+by+c=0$

మనకు రెండు చరరాశుల పరిమాణాలు ఉన్నట్లతే, అప్పుడు ప్రతి ఒక దానిని చరరాశి ద్వారా సూచించవచ్చును. ఒక చరరాశి యొక్క మార్పు రేటు ను మరొక చరరాశి దష్ట్యా స్థిరంగా ఉన్నట్లుయితే వాటి మధ్య గల సంబంధం రేఖీయం అగును.

రేఖీయ సమికరణంలో ఒకటి స్వతంత్ర్యంగా మరొకటి ఆధారపడనదిగా ఎన్నుకోవడం భౌతిక వాస్తవికతను.లేదా అనుకూలమైన కల్పనను సూచించవచ్చును. స్వతంత్ర్య చరరాశిను క్షితిజ సమాంతర అక్షం x-పై క్షితిజ లంబాక్షం y- అక్షం పై ఆధారపడిచరరాశిను గుర్తిసారు. కావున x విలువ ఎల్లప్పుడు. స్వతంత్ర్యంగాను, y విలువ వాని యొక్క x విలువ పై ఆధారపడి ఉంటుంది.

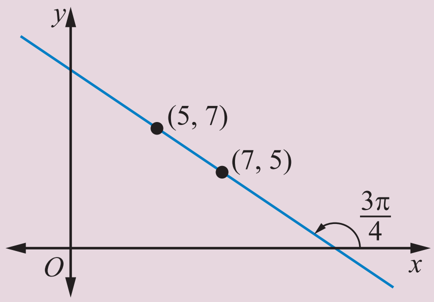
రెండు అక్షాల పై సంఖ్య ఒకే విధంగా ఉండవలసిన అవసరంలేదు. సిజానికి అనేక అను వర్తనలలో వేర్వేరు పరిమాణాలు x మరియు y చే సూచిస్తారు. ఉదాహరణకు, x అమ్మిన మొబైల్ పోన్‌ల సంఖ్యను సూచించిన మరియు అమ్మికల ఫలితంగా వచ్చే మొత్తం అదాయాన్ని y సూచిస్తుంది. ఇటువంటి సందర్భాలలో వేర్వేరు పరిమాణాలను సూచించడానికి వేర్వేరు సంఖ్య ఎన్నుకొనడం చాలా అవసరం. ఏదేమైన, ద్విపరిమాణ నిరూపకక్షాల వ్యవస్థ యొక్క మూలబిందువు వద్ద ఈ రెండింటి సంఖ్యా పేరలు యొక్క శూన్యము ఏకీభవించును.

ఇచ్చిన సమాచారం నుండి, సరళరేఖల యొక్క భావనలను ఉపయోగించి సమస్యను పరిష్కరించడానికి, పైన ఇచ్చిన ఆ సమికరణాలలో సరైన ఒక దాన్ని మనం ఎంచుకోవలి.

ఉదాహరణ 6.7 $(5, 7)$ మరియు $(7, 5)$ బిందువుల గుండా పోవు సరళరేఖ వాలును కనుగొనండి. దీని తో బాటు ఈ సరళరేఖ x-అక్షంతో దనదిశలో చేయు కోణంను కనుగొనండి.

సాధన

$(5, 7)$ మరియు $(7, 5)$ లను (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) వరుసగా అనుకొందాం x - అక్షంతో ధనదిశలో ఈ సరళరేఖ చేయు కోణం θ అనుకొనిన.



పటము **6.25**

సరళరేఖ యొక్క వాలు $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{5-7}{7-5}=-1$

$m=\tan\theta$ అని మనకు తెలును

అది $\tan\theta=-1 \Rightarrow \theta=\frac{3\pi}{4}$ లేదా 135°

వాలు మరియు ఈ సరళరేఖ x- అక్షంలో ధనదిశలో చేయు కోణాలు వరుసగా

$m=-1$ మరియు $\theta=\frac{3\pi}{4}$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 287 14-05-2022 11:23:29

ఉదాహరణ 6.8 y-అక్షంకు ఋణదిశలో అంతరఖండం 5 చేస్తూ మరియు x-అక్షంతో $150°$ కోణం చేయు సరళ రేఖాసమీకరణం కనుగొండి.

సాధన

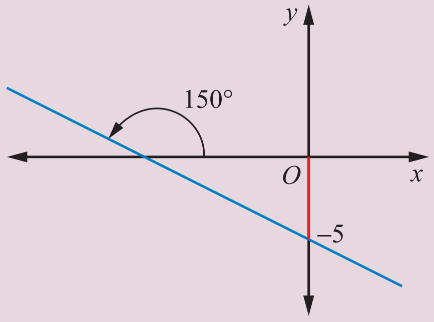
దత్తాంశం నుంచి y-అంతర ఖండ ఋణవిలువ 5, అది $b = -5$ మరియు $\theta = 150°$

$$m = tan\ 150° = tan\ (180 - 30) = -tan\ 30 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

వాలు మరియు అంతరఖండరూపంలో సమికరణం $y = mx + b$

అది, $$y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x - 5$$

$$x + \sqrt{3}y + 5\sqrt{3} = 0$$



పటము 6.26

ఉదాహరణ 6.9 $\left(0, -\frac{3}{2}\right), (1, -1)$ మరియు $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ లు సరేఖీ బిందువులు అని చూపండి.

సాధన

$\left(0, -\frac{3}{2}\right), (1, -1)$ మరియు $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$ లను వరుసగా A, B మరియు C అనుకొందాము.

$$AB \text{ -యొక్క వాలు } = \frac{-1 + \frac{3}{2}}{1 - 0} = \frac{1}{2}$$

$$BC \text{ -యొక్క వాలు } = \frac{-\frac{1}{2} + 1}{2 - 1} = \frac{1}{2}$$

AB యొక్క వాలు, BC యొక్క వాలుకు సమానం. కావున $A, B,$ మరియు C లు ఒకే సరళరేఖ పై ఉండును.

ఒక చరరాశి యొక్క మార్పు రేటు మరొక స్థిరంగా ఈ స్థిర మార్పు రేటు నే వాలుగా తీసుకో (వేగం, స్థిరమైన పెరుగుదల లేదా స్థిరమైన తరగుదలలాగా) సరళరేఖ సమికరణలు కూడ నిరూపక్షాల నిర్వచనం పై ఆధారపడును. వాస్తవ ప్రపంచ సమస్యలలో సమీకరణాలు తప్పుసరిగా ఒకేలా ఉండునవసరం లేదు. కాని మార్గం మరియు దూరం ఎల్లప్పుడూ ఒకే విధంగా ఉండువలెను.

ఉదాహరణ 6.10 పాక్ జల సంధిపై 2065 మీ పోడవు గల పాంబన్ సముద్రవంతెన అను రైలు వంతెను నిర్మించారు. ఈ వంతెన ద్వీపనగరమైన రామేశ్వరంను భారత ప్రధానభూభాగంలోని మండపంను కలుపుతుంది. ఏ కరతి వేగం 12.5 మీ/సె గా మాత్యమే వంతెనను పరిమితం చేస్తారు. మండపం నుండి వంతెన యొక్క ప్రవేశ స్థానం వద్ద 560 మీటర్ల పొడవు గల రైలు ప్రారంబమైతే

(i) రైలు యొక్క చలన సమీకరణంను కనుగొనండి

(ii) ఇంజను ఎప్పుడు ద్వీపాన్ని తాకుతుంది.

(iii) రైలు చివరి పెట్టె వంతెన యొక్క ప్రవేశ స్థానాన్ని ఎప్పుడు దాటుతుంది.

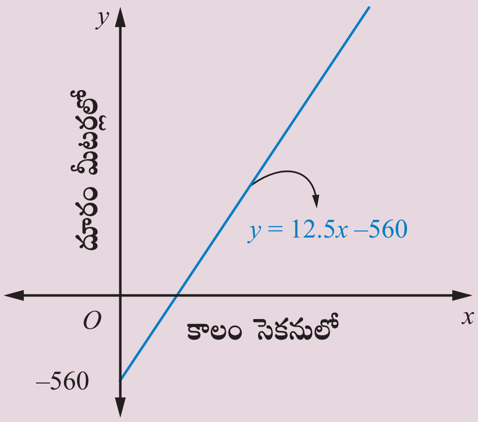
(iv) వంతెనను దాటడానికి రైలు తీసుకునే సమయం ఎంత ?

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 288 14-05-2022 11:23:29

సాధన

x -అక్షంపై కాలం సెకనులో, y-అక్షం పై దూరం మీటర్లలో తీసుకొందాము. ఇంజను మూల బిందువు O వద్ద ఉన్నదని అనుకొందాము. రైలు యొక్క పొడవు 560 m, ఋణ y-అంతరఖండ అగును. కదిలే రైలు యొక్క వాలు ఏకరీతి వేగం 12.5 మీ/సె అగును.

$$(\text{వేగం}=\frac{\text{దూరం}}{\text{కాలం}})$$



పటము 6.27

వాలు మరియు y-అంతరఖండం ఇవ్వబడినదికావున సరళరేఖ సమికరణం

$$y = mx + b \qquad (6.13)$$

(i) రైలు యొక్క చలన సమికరణం.

$$m = 12.5 \text{ మరియు } b = -560$$

$$y = 12.5x - 560$$

(ii) ఇంజిను వంతన యొక్క మరోకవైపును తాకుటకు తీసుకొనుమయము

$$y = 2065 \text{ మరియు } b = 0$$

$$2065 = 12.5x$$

$$x = 165.2 \text{ సెకనులు.}$$

(iii) $y = 0$, అయినప్పుడు, రైలు యొక్క చివరి పెట్టె వంతెన ప్రారంబ స్థానాన్ని దాటుతుంది.

$$0 = 12.5x - 560$$

$$x = 44.8 \text{ సెకనులు}$$

(iv) $y = 2065$, అయినప్పుడు, వంతెన యొక్క మరొకచివరను దాటుటు రైలు తీసు కొనేసమయం.

$$2065 = 12.5x - 560$$

$$x = 210 \text{ సెకనులు}$$

(ఇంకొకరు రైలు యొక్క చివరను మూలబిందులవుగా తీసుకొని సరళ రేఖ యొక్క సమికరణన్ని కనుగొనవచ్చు. ఇది పై సమికరణంలో ఒకే విధంగా ఉండున వసరంలేదు. కాని రైలు మార్గం దూరం, సమయం మొదలైనవి ఒకే విదంగా ఉండవలెను. దీనిని (పయత్నించండి)

ఉదాహరణ 6.11 y-అంతరఖండం 7 చేస్తూ మరియు y-అక్షంకు సరళరేఖమధ్యగల కోణం 30° గా ఉండు సరళరేఖ సమీకరణాన్ని కనుగొనండి.

సాధన

y అక్షంతో 30° కోణము చేయు రెండు సరళరేఖలు కలవు.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 289 14-05-2022 11:23:29

పటం నుండి రెండు సరళరేఖలు x-అక్షంతో 60° మరియు 120° కోణ

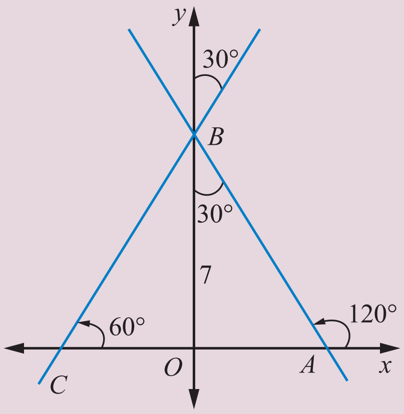
m_1 అనేది $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$ అనుకొనిన మరియు

m_2 అనేది $\tan 120^\circ = \tan(180^\circ - 60^\circ) = -\tan\ 60^\circ = -\sqrt{3}$

$m_1 = \sqrt{3}$, $m_2 = -\sqrt{3}$ మరియు $b = 7$

సరళరేఖ యొక్క సమికరణాలు $y = m_1 x + b$ మరియు $y = m_2 x + b$

$y = \sqrt{3}\,x + 7$ మరియు $y = -\sqrt{3}\,x + 7$



పటము 6.28

రెండు బిందువులు ఇచ్చినప్పుడు ఒకరు రెండు బిందువుల రూపాన్ని లేదా బిందువు వాలు రూపాన్ని తీసుకొనవచ్చు. అదేవిధంగా రెండు అంతరఖండలు ఇచ్చినప్పుడు. ఒకరు అంతరఖండ రూపాన్ని ఉపయోగించవచ్చున లేదా రెండు బిందువుల రూపాన్ని ఉపయోగించవచ్చు. క్రింది ఉదాహరణ అధ్యయం V లో శ్రేఢులు మరియు శ్రేణులు భావనలను ఉపయోగించి ఈ సమస్యలను సాదించబడినది. ఇప్పుడు ఇక్కడ మనము సరళరేఖ భావనలను ఉనయోగించి ఈ సమస్యలను సాధిస్తాం.

ఉదాహరణ 6.12 ఒక అంక శ్రేఢి యొక్క 7 వ పదం 30 మరియు పదవ వపద్ద 21

(i) $A.P.$ యొక్క మొదటి పదంను కనుగొనండి.

(ii) $A.P.$ లో ఏ పదమునున్న అగును. (వ్యవస్థితమయినచో)

(iii) సరళరేఖ వాలుకు మరియు $A.P.$ యొక్క సామాన్య భేదానికి గల సంబంధాన్ని కనుగొనండి.

సాధన

అంక శ్రేఢి స్థిరమైన పెరుగుదల లేదా తరుగుదల కలిగి ఉండును కావున ఇది ఒక సరళప్రమేయం x అక్షం పై పదముల సంఖ్యను మరియు y అక్షం పై పదముల విలువ ను తీసుకొండాము.

$(7, 30)$ మరియు $(10, 21)$ అను వరుసగా (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) అనుకొందాం.

సమీకరణం $y - y_1 = m(x - x_1)$ ను ఉపయోగించిన మనకు అభించునది.

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

$$y - 30 = \left(\frac{21 - 30}{10 - 7}\right)(x - 7)$$

$$y = -3x + 51 \qquad (6.14)$$

(i) $x = 1, 2,$ మరియు 3ను సమీకరణం (6.14) లో ప్రతిక్షపించిన .. మనకు A.P. యొక్క మొదటి మూడ పదాలు 48, 45 మరియు 42 గా లభించును.

(ii) $y = 0$ సమికరణం (6.14) లో ప్రతిక్షేపించిన.

$$0 = -3x + 51 \Rightarrow x = 17$$

అనగా అంకశ్రేణిలో 17వ పదం శూన్యం అగును.

(iii) స్పష్టంగా సరళరేఖ యొక్క వాలు -3 అనేది అంకశ్రేదిలో సాయాన్యబేదంకు సమానం అగును. ఈ ఉదాహరణ నుండి. సరళరేఖ యొక్క వాలు అంకశ్రేణిలో సామాన్యం భేదంకు సమానం (దీనిని నిరూపించటనికి ప్రషత్నించండి)

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 290 14-05-2022 11:23:30

ఉదాహరణ 6.13

ఒక నిర్ధిష్టరకపు కాంపాక్ట్‌డిస్క్ యొక్క ఒక యూనిట్ దర ₹8 అయిన 22,000 యూనిట్లు డిమాండు గలదు. ఒక యూనిటి ధర ₹30 లేదా అంతకంటే ఎక్కువైన వినియోగదారుడు డిస్క్‌ను కొనుగోలు చేయడు. అలాగే ఒక యూనిట్‌ధర ₹6 లేదా అంతకంటే తక్కువ ఉంటే తయారీదారుడు ఏ డిస్క్‌ను మార్కెట్ (అమ్మకం) చేయడు ధర ₹14 అయిన తయారీదారుడు 24,000 యూనిట్లును సరఫరా చేయబడు డిమాండ్ పరిమాణం మరియు సరఫరా పరిమాణంలు ధరకు రేఖీయాగా అనుపాతంలో ఉంటుందని ఊహించుకొందాము.

(ii) డిమాండ్ సమికరణం

(ii) సరఫరా సమికరణం

(iii) మార్కెట్ సమతుల్యత పరిమాణం మరియు ధర

(iv) ధర ₹10 అయితే డిమాండ్ మరియు సరఫరా పరిమాణం కనుగొనండి.

సాధన

x - అక్షం పై యూనిట్ల సంఖ్యను వేళ్లలోను y - అక్షం పై వాటి ధరలను రూపాయలలో తీసుకొందాము.

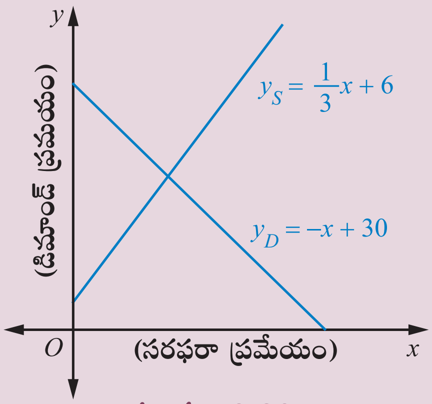
(i) డిమాండ్ ప్రమేయంకొరకు

(22,8) మరియు (0,30) వరుసగా (x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) గా తీసుకొందాం

రెండు బిందువుల రూపం. ఉపయోగించిన మవము పొందు డిమాండ్ ప్రమయం,

$$\frac{y-8}{30-8} = \frac{x-22}{0-22}$$

$$\Rightarrow \quad y_D = -x+30$$



పటము 6.29

(ii) సరపరా ప్రమేయంకొరకు.

(x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) లను వరుసగా (0, 6) మరియు (24,14) అనుకొందాం

రెండు బిందువుల రూపం ఉపయోగించి మనం పొందు సరఫరా ప్రమయం,

$$\frac{y-6}{14-6} = \frac{x-0}{24-0}$$

$$\Rightarrow \quad y_S = \frac{1}{3}x+6$$

(iii) మార్కెట్ సమతుల్యత వద్ద సరఫరా మరియు డిమాండ్ సమికరం.

అది, $y_D = y_S$

$$-x+30 = \frac{1}{3}x+6$$

$$\Rightarrow \quad x = 18 \text{ మరియు } y = 12$$

మార్కెట్ సమతుల్యత ధర ₹12 మరియు , పరిమాణం. 18,000 యూనిట్లు అగును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 291 14-05-2022 11:23:31

(iv) ధర $y = 10$ అయిన మార్కెట్ డిమాండ్ ప్రమేయం $\Rightarrow$ $y_D = -x + 30$ నుండిమనము పొందునది $x = 20$ అనగా డిమాండ్ 20,000 యూనిట్లు అగును.

ఇదే విధంగా సరఫరాప్రమేయం

$\Rightarrow y_S = \frac{1}{3}x + 6$, నుండి $x = 12$ మనము పొందుతాము.

సరఫరా 12,000 యూనిట్లు అగును.

ఉదాహరణ 6.14

$(-1, 1)$ బిందువుల ద్వారా పోతూ రెండు నిరూపక్షక్షాలతో సమాన అంతరఖండాలు చేస్తూ వ్యతి రేఖ గుర్తులు కలిగిన సరళరేఖ సమికరణాన్ని కనుగొనండి.

సాధన

అక్షాలనుండి అంతరఖండంల పొడవులు a మరియు $-a$ అనుకొందాం ఈ రూపం యొక్క సరళరేఖ సమీకరణం

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{a} = 1$$

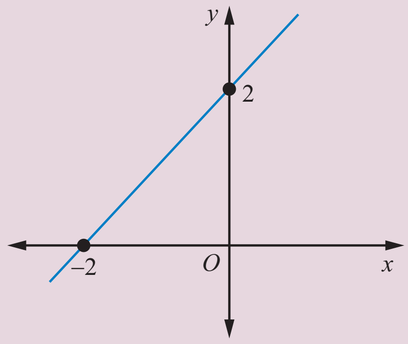
$$\Rightarrow \quad x - y = a$$

ఇది $(-1, 1)$ బిందువుల గుండాపోవును

$$(-1) - (1) = a \Rightarrow a = -2$$

సరళరేఖ సమీకరణం

$$x - y + 2 = 0$$



పటము 6.30

ఉదాహరణ 6.15

$(9, 4)$ గుండా పోతూ, వాలు ఋణాత్మకంగా గల సరళరేఖ L ధన నిరూపకాక్షలను P మరియు Q వద్ద ఖండించిన L చలిస్తూఉంటే $|OP|+|OQ|$ యొక్క కనిష్ఠవిలువను కనుగొనండి. ఇక్కడ O మూలబిందువు.

సాధన

L రేఖ వాలు m అనుకొందాం ఇది $(9, 4)$ గుండా పోవు ను కావున సరళరేఖ సమీకరణం

$$y - 4 = m(x-9). \quad (m < 0)$$

P మరియు Q బిందువులు వరుసగా $\left(9 - \frac{4}{m}, 0\right)$ మరియు $(0, 4-9m)$

$$(m<0)\ |OP|+|OQ| = \left|9 - \frac{4}{m}\right| + |4 - 9m|$$

$$= \left|9 + \frac{4}{k}\right| + |4 + 9k| \quad (\because m < 0,\ m = -k, k > 0 \text{ తీసుకొనిన})$$

$$= \left(9 + \frac{4}{k}\right) + (4 + 9k) \quad (\because \text{అన్ని పదాలు ధనాత్మకం})$$

$$= (4 + 9) + \left(\frac{4}{k} + 9k\right)$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 292 14-05-2022 11:23:32

$$\geq \; 13+2\sqrt{\frac{4}{k}\times 9k} \qquad (\text{అంకమధ్యయం} \geq \text{ గుణమధ్యము})$$

$$|OP|+|OQ| \geq 25$$

అందువలన $|OP|+|OQ|$ సంపూర్ణ కనిష్ఠవిలువ 25.

ఉదాహరణ 6.16 మూలబిందువు నుండి ఒక సరళరేఖ గీచిన లంబం పొడవు 12 మరియు x - అక్షం ధనదిశలో చేయు కోణం 150° అయిన సరళరేఖ సమీకరణం కనుగొనండి.

సాధన

ఇక్కడ $p=12$ మరియు $\alpha=150^\circ$ కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణరూపం.

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$$

అది,

$$x\cos 150^\circ + y\sin 150^\circ = 12$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{3}x - y + 24 = 0$$

ఉదాహరణ 6.17 నిరూపక అక్షాలతో ఒక రేఖ ద్వారా ఏర్పడిన (త్రిభుజం యొక్క వైశాల్యం, 36 చదరపు యూనిట్లు. మూలబిందువు నుండి సరళరేఖకు గిచిన లంబం ధన x అక్షంతో చేయు కోణం 45° అయిన సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనండి.

సాధన

మూలబిందువు నుండి సరళరేఖల గీచిన లంబం పొడవు P అనుకొందాం.

x అక్షతో లంబం చేయుకోణం 45

కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణ రూపం

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$$

$$\Rightarrow \quad x\cos 45^\circ + y\sin 45^\circ = p$$

$$x+y = \sqrt{2}p$$

$A(\sqrt{2}p, 0)$ మరియు $B(0, \sqrt{2}p)$ బిందువుల వద్ద ఈ సమీకరణం నిరూపకక్షలను ఖండించును.

$$\Delta OAB \text{ -వైశాల్యం} = \frac{1}{2}\times\sqrt{2}p\times\sqrt{2}p = 36$$

$$\Rightarrow \quad p = 6 \; (p \text{ ధనాత్మకం})$$

అందువలన కావలసిన సరళరేఖ సమీకరణం

$$x+y = 6\sqrt{2}$$

ఉదాహరణ 6.18 ధన x అక్షంలో 60° కోణం చేస్తూ మరియు (4,7) బిందునుండి $x-y+3=0$ రేఖ వెంబడి $5\sqrt{2}$ యూనిట్లు దూరంలో గల సరళరేఖ సమీకరణం కనుగొనండి.

సాధన

$x-y+3=0$ సరళరేఖ యొక్క వీంపుకోణం 45° మరియు (4,7) బిందువు రేఖ పై కలదు.

సొష్ఠవరూపం ఉపయోగించిన

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} = r$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 293 14-05-2022 11:23:33

పై సమీకరణంను ఈ విధంగా వ్రాసిన

$$\frac{x-4}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{y-7}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \pm 5\sqrt{2}$$

((4,7) యొక్క ఇరువైపులా దూరం $r = \pm 5\sqrt{2}$)

అది, $x-4 = y-7 \;\; = \pm 5$

$(4,7)$ బిందువుకు ఇరువైపులా $5\sqrt{2}$ దూరం లో సరళరేఖ పై గలబిందువులు. $(4+5, 7+5)$ మరియు $(4-5, 7-5)$.

సరళరేఖ పై గల బిందువుల (9, 12) మరియు (–1, 2) ఇచ్చినవాలు

$$m = \tan 60^{\circ} = \sqrt{3}$$

కావుక వాలు మరియు బిందురూపం ఉపయోగించి కావలసిన సమికరణం,

$\sqrt{3}x - y + (12 - 9\sqrt{3}) = 0$ మరియు

$\sqrt{3}x - y + (2 + \sqrt{3}) = 0$

6.3.4 సాదారణరూపం నుండి మరొక రూపంకు మార్చడం

$Ax + By + C = 0$ ఇక్కడ A, B మరియు C లు వాస్తవ సంఖ్యలు మరియు A మరియు B ఏకకాలంలో సున్నకు సమానం కాదు. సాదారణ రూపం నుండి వేరొక రూపానికి A, B మరియు C పరంగా వ్యక్తీకరించవచ్చు.

(i) వాలు మరియు అంతరఖండ రూపం $(\mathbf{B \neq 0})$ ఇచ్చిన సమీకరణంను ఈ విధంగా వ్రాసిన

$y = -\dfrac{A}{B}x - \dfrac{C}{B}$ $\Rightarrow$ వాలు $m = \dfrac{-A}{B}$ మరియు అంతరఖండం $= -\dfrac{C}{B}$

(ii) అంతరఖండరూపం ఇచ్చిన సమికరణంను ఈ విధంగా వ్రాసిన.

$$\frac{x}{\left(-\frac{C}{A}\right)}+\frac{y}{\left(-\frac{C}{B}\right)} = 1$$

(A, B మరియు C లు శూన్యేతరం)

అంతరఖండ రూపంతో పోల్చగా x అంతర ఖండం $(a) = \dfrac{-C}{A}$, మరియు y అంతర ఖండం $(b) = \dfrac{-C}{B}$

(iii) అభిలంబ రూపం :

ఇక్కడ $Ax + By + C = 0$ మరియు A, B లు సున్నకు సమానం కాదు.

$$\frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}x + \frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}y = \frac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$ తో పోల్చగా.

ఇక్కడ $\cos\alpha = \dfrac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin\alpha = \dfrac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ మరియు $p = \dfrac{|C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 294 14-05-2022 11:23:34

ఉదాహరణ 6.19

$\sqrt{3}x-y+4=0$ సమీకరణాన్ని క్రింది సర్వసమాన రూపాలలో వ్యక్తపరుచుము.

(ii) వాలు మరియు అంతరఖండరూపం

(iii) అంతరఖండ రూపం

(iv) అభిలంబ రూపం.

సాధన

(i) వాలు మరియు అంతరఖండ రూపం

ఇచ్చినది $\sqrt{3}x-y+4=0$

$$\Rightarrow \quad y = \sqrt{3}x+4 \qquad (6.15)$$

పై సమీకరణంను $y=mx+b$ తో పోల్చగా

$=\sqrt{3}$ మరియు y అంతరఖండం $=4$

(ii) అంతరఖండ రూపం

$$\sqrt{3}x - y + 4 = 0$$

$$\sqrt{3}x - y = -4$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-\sqrt{3}}{4}x+\frac{y}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{\left(-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)}+\frac{y}{4} = 1 \qquad (6.16)$$

పై సమీకరణాన్ని $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$తో పోల్చగా

x - అంతరఖండం $=-\frac{4}{\sqrt{3}}$, మరియు y - అంతరఖండం $=4$

(iii) అభిలంబరూపం

$$\sqrt{3}x-y+4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad (-\sqrt{3})x+y = 4 \qquad (6.17)$$

పై సమీకరణంను $Ax + By + C = 0$ తో పోల్చగా

$A=-\sqrt{3}$ మరియరు $B=1 \quad \therefore \sqrt{A^2+B^2}=2$

అందువలన పై సమీకరణంలో 2 తో భాగించగా మనము పొందునది

$$\Rightarrow \quad -\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y=2 \qquad (6.18)$$

పై సమికరణంలో $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ తో పోల్చగా. మనం తిసుకొంటే

$\cos\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$, $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ మరియు $p=2$.

$\Rightarrow \quad \alpha = 150^\circ = \frac{5\pi}{6}$ మరియు అభిలంబం పొడవు $p=2$

అభిలంబరూపం

$$x\cos\frac{5\pi}{6}+y\sin\frac{5\pi}{6}=2.$$

ఇచ్చిన సమీకరణాలను కావలసిన సమీకరణ రూపం లో మార్చడానికి, కొన్నిసార్లు, ఇలాంటి పదాల గుణకాల యొక్క అనులోమానుపాతంలో ధర్మాలను ఉపయోగించడం మరింత సౌకర్యవంతంగా ఉంటుంది.

ఉదాహరణ 6.20

$\sqrt{3}x+y+4=0$ ని అభిలంబ రూపంలో కి వ్రాయండి

సాధన

$x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ కావలసిన రూపం

ఇచ్చిన రూపం $(-\sqrt{3})x-y=4$ $\quad(\because p$ ఎల్లప్పుడు ధనాత్మకం)

రెండు ఒకే సమీకరణాన్ని సూచిస్తాయి కాబట్టి గుణకాలు అనులోమానుపాతంలో ఉంటాయి.

$$\frac{\cos\alpha}{-\sqrt{3}}=\frac{\sin\alpha}{-1}=\frac{p}{4}$$

$$\frac{\cos\alpha}{-\sqrt{3}}=\frac{\sin\alpha}{-1}=\frac{p}{4}=\frac{\sqrt{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}}{\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}}=\frac{1}{2}$$

$$\cos\alpha=\frac{-\sqrt{3}}{2},\ \sin\alpha=\frac{-1}{2} \text{ మరియు } p=\frac{4}{2}$$

$$\alpha=210^\circ=\frac{7\pi}{6} \text{ మరియు } p=2$$

కాంపోనెండో మరియు డివిడెండో లో, ఒక పదంను వర్గం చేసినచో దానిని వర్గమూలం చేయవలెను,

$x\cos\frac{7\pi}{6}+y\sin\frac{7\pi}{6}=2$ సమీకరణం యొక్క అభిలంబరూపం.

వక్ర ఉపరితలం పై రెండు బిందువుల మధ్య మార్గాన్ని కనుగొనడం చాలా కష్టం. ఏదేమైనా, వక్ర ఉపరితలంను చదును చేసినచో స్థూపం యొక్క ఉపరితలం పై ఒక మార్గం యొక్క పొడవు మారదు. క్రింది సమస్యకోసం, బోలు స్థూపాన్ని కత్తిరించి దీర్ఘచతురస్రంలోకి మార్చడం ద్వారా. ఒకే ప్రతిబింబం చీమల మార్గాన్ని నిర్ణయించడానికి అనుమతిస్తుంది.

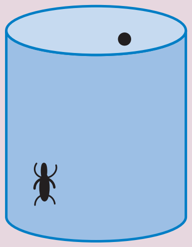
ఉదాహరణ 6.21

24 సెం.మీ చుట్టుకొలత మరియు 10 సెం.మీ ఎత్తుగల ఒక బోలు స్థూపాకార పాత్రకలదు. ఒక చీమ పాత్ర విలుపల దిగువ నుంచి 4 సెం.మీ ఎత్తులో కలదు. దీనికి ఎదురుగా పాత్రలోపల భగం లో పై నుంచి 3 సెం.మీ దిగువన తేని చుక్క ఉంది.

(i) తేని చుక్కను చేరుకోవడనికి చీమకదలవలసిన కనిష్ఠ దూరం ఏమిటి ?

(ii) చీమ తీసుకున్న మార్గం యొక్క సమీకరణం ఏంటి?

(iii) చీమ స్థూపంలో పలకి ఎక్కడ ప్రవేశించును? ఇక్కడ గల పటంలో చీమ మరియు తేని చుక్క స్థానాలు సూచించ బడినది ?



పటము 6.31

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 296 14-05-2022 11:23:36

సాధన

బోలుస్థూపాన్ని కత్తిరించి దీనిని దీర్ఘచతురస్రంగా మార్చగా మరియు దీని యొక్క ఏకైక ప్రతిబింబం పటంలో చూపినట్లు చీమయొక్క మార్గంను కనుగొనుటకు మనల్నిఅనుమతించును. ఆధార రేఖ x అక్షంగాను సెం.మీ A గుండా పోవు లంబరేఖ ను (చీమయొక్క ప్రారంభ స్థానం) y అక్షం గా తీసుకొందాం. ను తేని చుక్క స్థానం గా మరియు H ను చీమ పాత్ర లోనికి ప్రవేశించే స్థానంగా ఇచ్చిన దత్తాంశం నుండి.

$A(x_1, y_1)$ మరయు $H(x_2, y_2)$ లను వరుసగా $(0, 4)$ మరయు $(12, 13)$ గా తీసుకొందాం..

(i) A -మరియు, H -మధ్య కనిష్ఠ దూరం

$$AH = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{12^2 + 9^2} = 15$$

చీమ తేని చుక్కను చేరడాడానికి 15 సెం.మీ వెళ్ళవలెను.

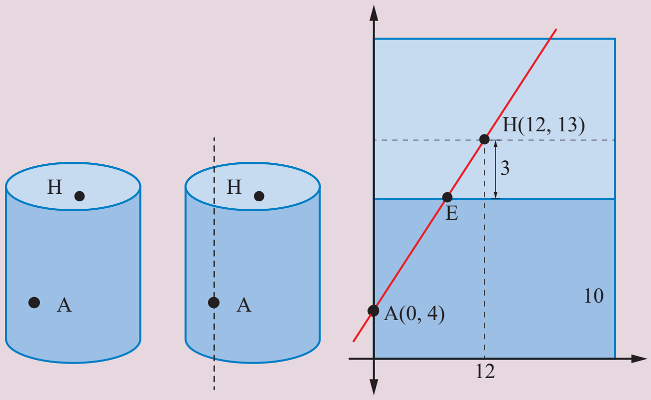
(ii) AH మార్గం యొక్క సమీకరణం,

$$\frac{y-4}{13-4} = \frac{x-0}{12-0}$$

$$\Rightarrow \quad y = 0.75x + 4 \qquad (6.19)$$

(iii) ప్రవేశ బిందువు E -$y = 10 \Rightarrow x = 8$

$$\Rightarrow \quad \text{E} = (8, 10) \text{ వద్ద.}$$



పటము 6.32

మూల బిందువును వేర్వేరు స్థానాలలో తీసుకొనిన, వేర్వేరు సమికరణ రూపాలు పొందుతాము. కాని మార్గం మరియు దూరం లు పైవలె ఒకే విధంగా ఉంటుంది.

అభ్యాసము 6.2

1. క్రింద యివ్వబడిన వివరాలుకు $(1, 1)$ బిందువు గుండాపోవు సరళరేఖ సమీకరణమును వ్రాయుము.

   (i) y అంతరఖండం (-4) తో

   (ii) వాలు 3 తో

   (iii) $(-2, 3)$ అను బిందువు

   (iv) మూలబిందువు నుండి పోవు ఒక లంబం x అక్షంతో 60° కోణం చేయు సరళరేఖ.

2. అక్షాల మధ్య గల ఒక రేఖా ఖండం యొక్క మధ్యబిందువు $p(r, c)$ అయిన $\frac{x}{r} + \frac{y}{c} = 2$ అని చూపండి.

3. $(1, 5)$ బిందువుల గుండా పోతూ నిరూపకక్షలను 3:10 నిష్పత్తిలో విభజించు సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగోనండి.

4. అక్షాల పై a మరియు b అను అంతరఖండాలు చేయు రేఖకు మూలబిందువు నుండి లంబంపోడవు p అయిన $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ అని చూపండ.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 297 14-05-2022 11:23:36

5. సాదారణ నీటి యొక్క మరుగు స్థానం $100^\circ C$ లేదా $212^\circ F$ మరియు ఘణీభవ్య స్థానం $0^\circ C$ లేదా $32^\circ F$ (i) C మరియు F మధ్య సంబందాన్ని కనుగొనండి (ii) $98.6^\circ F$ కు C- విలువ (iii) $38^\circ C$ కు F విలువ కనుగొనండి.

6. P స్థానం నుంచి ఒక వస్తువును స్థిరవేగంతో లక్ష్యంను ఢీకొట్టుటకు ప్రయోగించబడినది. 15 సెకనులు వద్ద వస్తువు లక్ష్యం నుంచి 1400 మీటర్ల దూరంలో మరియు 18 సెకనులు వద్ద 800 మీటర్ల దూరంలో కలదు. (i) లక్ష్యంనుంచి స్థానంకు మధ్యగల దూరం (ii) 15 సెకనులో ఆ వస్తువు ప్రయాణించిన దూరం (iii) అక్ష్యంను ఢీకొట్టటకు తీసుకోను సమయాలను కనుగొనండి.

7. ఒకనగరజనాభా 2005 మరియు 2010 వ సంవత్సరలో వరుసగా 1,35,000 మరియు 1,45,000, 2015 వ సంవత్సరంలో సుమారుగా ఎంత జనాభా ఉంటుందో కనుగొనండి. (జనాభా పెరుగుదల స్థిరగా ఉంటుందని అనుకొనుము)

8. మూలబిందువునుండి సరళరేఖకు గీయబడిన అంబం x అక్షంతో 30° కోణం చేస్తూ మరియు దాని పొడవు 12 అయిన సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనండి.

9. అంతరఖండాల మొత్తం 1 మరియు (8,3) బిందువుల గుండా పోవు సరళరేఖ సమీకరణం కనుగొనండి.

10. (i) వాలు భావన (ii) సరళరేఖనుపయోగించి (iii) ఏ దైన మరొకపద్దతి నుపయోగించి $(1,3)$, $(2,1)$ మరియు, $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ లు సరేఖీయమని చూపుము

11. $A(1, 2)$బిందువు గుండా పోతు వాలు $\frac{5}{12}$ గా గల సరళ రేఖ A బిందువు నుండి 13 యూనిట్ల దూరంలో గల బిందువును కనుగొనండి.

12. 150 మీటర్ల పొడవుగల ఒక రైలు 12.5 మీ./సె స్థిరవేగంతో కదులుతున్నది.
   (i) రైలు యొక్క చలన సమీకరణం కనుగొనండి
   (ii) స్థంబందాటుటకు తీసుకొను సమయంను
   (iii) 850 మీ పోడవు గల రైలు వంతెనను దాటుటకు తీసుకొను. సమయంను కనుగొనుము.

13. సీలింగులో గల ఒక కొక్కి నుండి ఒక స్ప్రింగ్ వ్రేలడదీయ బడినది. ఈ స్ప్రింగును సాగదీయుటకు దానికి వివిధ బరువులను అను సంధానం చేసి ప్రతిసారి స్ప్రింగు మొత్తం పొడవును కొలిచి క్రింది పట్టికలో చూపబడినది,

బరువు (kg)	2	4	5	8
పోడవు (cm)	3	4	4.5	6

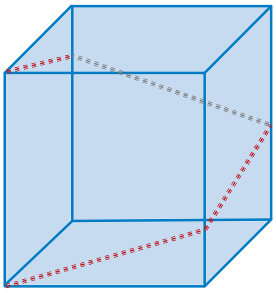
   (i) ఈ ఫలాతాలను సూచించు ఒక గ్రాఫ్‌ను గేయము.
   (ii) స్ప్రింగు పోడవుకు, దానికి వ్రేలాడదీసినబరువుకు సంబంధించు సమీకరణంను కనుగోనుమ?
   (iii) స్ప్రింగు యొక్క వాస్తవ పొడవు ఎంత?
   (iv) స్ప్రింగు 9 సెం.మీ సాగదీయుటకు దానికి అనుసందానం చేయవలసిన బరువు ఎంత?
   (v) 6 కి.గ్రా బరువును స్ప్రింగుకు వ్రేలాడదీసినప్పుడు స్ప్రింగు పొడవు ఎంత?

14. ఒక కుటుంబం 14.2 కి.గ్రా బరువు గల ద్రవీకృత పెట్రోలియం వాయువు (LPG) ను ఉపయోగిస్తారు. (15.3 కి.గ్రా బరువు గల ఖాళీ సిలిండర్‌తో బాటు పూర్తి బరువు 29.5 కి.గ్రా) దీనిని స్థిర రేటుతో ఉపయోగించిన 24 రోజుల వరకు వచ్చును. వెంటనే కొత్త సిలిండర్ మార్చవలెను.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 298 14-05-2022 11:23:37

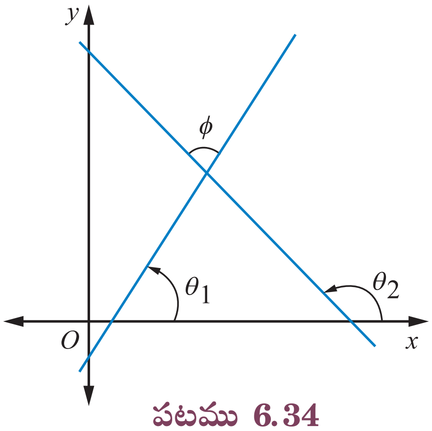
సిలిండరులోని వాయు పరిమాణంను రోజులతో సంబంధంను తెలుపు సమీకరణం కనుగొనుము? మొదటి 96 రోజులకు గ్రాఫ్ గీయండి.

15. ఒక దుకాణ సముదాయం 800×800×720 యూనిట్ల పరిమాణంలో దీర్ఘఘనం ఆకారంలో కలదు. దీనికి పటంలో చూపిన చుక్కల గీత ద్వారా ఒక ఎస్కలేటర్ సౌకర్యంను కలిపించవలసిన అవసరం గలదు.
    (i) ఎస్కలేటర్ యొక్క కనిష్ఠ మొత్తం పొడవును
    (ii) ఎస్కలేటర్ దాని దిశను మార్చే ఎత్తును.
    (iii) మలుపుల వద్ద ఎస్కలేటర్ యొక్క విలువలను కనుగొనండి.


పటం 6.33

6.4 రెండు సరళరేఖల మధ్య కోణం (Angle between two straight lines)

ఒక తలంలో రెండు సరళరేఖలు సమాంతరంగాను లేదా ఏకీభవించుట లేదా ఖండించుకొనునట్లు ఉంటాయి. సాధారణంగా రెండు సరళరేఖలు ఖండించుకొనిన ఖండన బిందువు వద్ద రెండు కోణాలు ఏర్పడును. ఒక కోణం (అల్పకోణం) మరియు మరొక కోణం (అధిక కోణం) లేదా సమాన రెండు కోణాలునొకదానికొకటి సంపూరకాలు (మొత్తం 180° కి సమానం) నిర్వచనం ప్రకారం “రెండు సరళ రేఖల మధ్య కోణం అని మనము చెప్పినప్పుడు రెండు రేఖల మధ్య గల అల్పకోణం మని మనకు అర్థమగును.



పటము 6.34

$y = m_1 x + c_1$ మరియు $y = m_2 x + c_2$ అనునవి

రెండు సరళరేఖా సమీకరణాలు మరియు x - అక్షంతో θ_1 మరియు θ_2 కోణం చేయును. అని అనుకొందాం.

$m_1 = \tan\theta_1$ మరియు

$m_2 = \tan\theta_2$ అయిన.

ఈ రెండు సరళ రేఖల మధ్య కోణం ϕ (ఫై) అయిన

$$\phi = \theta_2 - \theta_1 \Rightarrow \tan\phi = \tan(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\Rightarrow \tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

$\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$ ధనాత్మకం అయిన ϕ అనేది అల్పకోణం అగును, ఋణాత్మకం అయిన ϕ అధిక కోణం అగును. అందువలన అల్పకోణం ϕ అనేది $\tan^{-1}\left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|$ అగును.

6.4.1 సమాంతర రేఖలకు నియమాలు (Condition for parallel lines)

ఒకే తలంలో ఖండించుకొని రేఖలను సమాంతర రేఖలు అంటారు.

$$y = m_1 x + c_1 \text{ మరియు } y = m_2 x + c_2$$

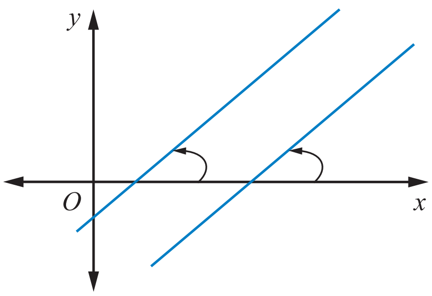
రెండు సరళ రేఖల సమీకరణాలు $y = m_1 x + c_1$ మరియు $y = m_2 x + c_2$ అనుకొనుము. రెండు రేఖలు సమాంతరం కావున వాటి మధ్య కోణం సున్న లేదా π (ఫై) రేఖలమధ్య కోణం ϕ (ఫై) అయిన $\phi = 0$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 299 14-05-2022 11:23:38

$\Rightarrow \tan\phi = 0$

$\Rightarrow \dfrac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} = 0 \Rightarrow m_2 - m_1 = 0 \Rightarrow m_2 = m_1$

సమాంతర రేఖల వాలులు సమానం అగును. రెండు నిలువరేఖలు కాని రేఖల (*non-vertical*) వాలు సమానం అయిన అవి సమాంతరాలు. అన్ని నిలువరేఖలు సమాంతరాలు.



పటము 6.35

రెండు సరళరేఖల సాధారణ రూపాలు $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ మరియు $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ అయిన రేఖలు సమాంతరాలు కావడానికి నియమం

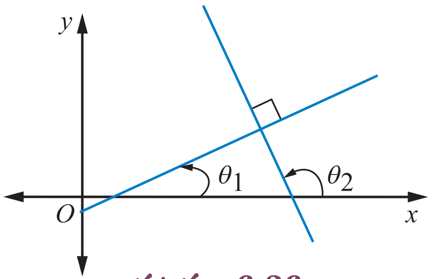
$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \text{ లేదా } a_1b_2 = a_2b_1$$

(i) $ax + by + c = 0$ సరళరేఖకు సమాంతరంగా గల సరళరేఖల రూపం $ax + by = k$

(ii) $ax + by + c = 0$ సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉంటూ (x_1, y_1) బిందువు గుండా పోవు రేఖ సమీకరణం $ax + by = ax_1 + by_1$

6.4.2 లంబరేఖలకు నియమం (Condition for perpendicular lines)

$y = m_1x + c_1$ మరియు $y = m_2x + c_2$ రేఖలు లంబంగా ఉన్న వాటి మధ్య కోణం $\frac{\pi}{2}$ రేఖల మధ్యకోణం ϕ అయిన



పటము 6.36

$$\tan\phi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \Rightarrow \cot\phi = \frac{1 + m_2 m_1}{m_2 - m_1}$$

$$\cot\frac{\pi}{2} = \frac{1 + m_2 m_1}{m_2 - m_1} \Rightarrow 1 + m_1 m_2 = 0$$

$$\Rightarrow m_1 m_2 = -1$$

రెండు సరళరేఖల సాధారణ రూపాలు $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ మరియు $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ అయిన రేఖలు లంబంగా ఉండడానికి నియమాలు $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

(i) $ax + by + c = 0$ రేఖకు లంబంగా గల రేఖ రూపం $bx - ay = k$

(ii) $ax + by + c = 0$ రేఖకు లంబంగా ఉంటూ (x_1, y_1) బిందువు ద్వారా పోవు కావలసిన రేఖ సమీకరణం $bx - ay = bx_1 - ay_1$

రేఖల యొక్క రూపము	సమాంతరంగా ఉండడానికి నియమం	లంబంగా ఉండడానికి నియమం
$y = m_1x + c_1$ మరియు $y = m_2x + c_2$	$m_2 = m_1$	$m_1 m_2 = -1$
$a_1x + b_1y + c_1 = 0$ మరియు $a_2x + b_2y + c_2 = 0$	$a_1b_2 = a_2b_1$	$a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

ముఖ్య గమనిక : $m_1 m_2 = -1$ అయిన రెండు రేఖలు లంబంగా ఉంటుంది. కాని వాటి విపర్యం అసత్యం. ఎందుకనగా రేఖలు అక్షాలకు సమాంతరంగా ఉండి రేఖలు లంబంగా ఉన్ననూ ఈ ఫలితంను అనువర్తించలేము.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 300 14-05-2022 11:23:40

6.4.3 ఒక సరళరేఖ దృష్ట్యా ఒక బిందువు యొక్క స్థానం (Position of a point with respect to a straight line)

ఏదేని రేఖ $ax+by+c=0$ $(c \neq 0)$ మొత్తం తలంను రెండు భాగాలుగా విభజిస్తుంది.

(i) ఒక భాగం మూలబిందువును కలిగి ఉండే దానిని మూలబిందువు వైపు రేఖ అని పిలుస్తారు.

(ii) మరొక భాగం మూల బిందువును కలిగి ఉండదు దానిని మూలబిందువు వైపు కాని రేఖ అని పిలుస్తారు.

$P(x_1, y_1)$ బిందువు అనునది $ax+by+c=0$, $(c \neq 0)$, అను రేఖ యొక్క మూల బిందువు వైపు లేదా మూలబిందువు లేని వైపు ఉంటుంది అని అనుట ax_1+by_1+c మరియు c ల యొక్క ఒకే గుర్తు లేదా వ్యతిరేఖ గుర్తులను అనుసరించి ఉంటుంది.

$c>0$ అయితే $P(x_1, y_1)$ అనునది $ax+by+c=0$ అను రేఖ యొక్క మూల బిందువు వైపు లేదా మూలబిందువు లేని వైపు ఉంటుందని అనుట ax_1+by_1+c యొక్క ధనాత్మకం లేదా ఋణాత్మకం అనుసరించి ఉంటుంది.

$a_1x+b_1y+c_1=0$ మరియు $a_2x+b_2y+c_2=0$ సమీకరణాలను $c_1>0$ మరియు $c_2>0$ అగునట్లు పున:అమర్చి వ్రాసిన తరువాత మరియు

(i) $a_1a_2+b_1b_2<0$ అయితే మధ్యకోణం అల్పకోణం

(ii) $a_1a_2+b_1b_2>0$ అయితే మధ్యకోణం అధికకోణం

6.4.4 దూరపు సూత్రాలు (Distance Formulae)

(i) రెండు బిందువులు

(ii) ఒక బిందువుకు ఒక రేఖకు

(iii) రెండుసమాంతరరేఖలకుమధ్యదూరాలనుకనుగొనడానికిమనముసూత్రాలనుఅభివృద్ధిపరుస్తాము.

(i) (x_1, y_1), (x_2, y_2) రెండు బిందువుల మధ్య దూరం సూత్రం.

$$D=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

పై సూత్రాన్ని క్రింది తరగతిలోనే నిరూపించుము.

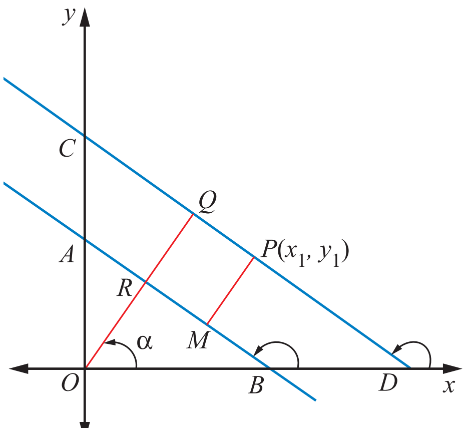
(ii) $P(x_1, y_1)$ బిందువు నుండి రేఖ $ax+by+c=0$ కు గల మధ్య దూరం $\left|\dfrac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$.

నిరూపణ

ఇక్కడ రేఖ AB

$$ax+by+c=0 \qquad (6.20)$$

ఇచ్చిన బిందువు $P(x_1, y_1)$ అనుకొందాము.



పటము 6.37

P గుండా AB కి సమాంతరంగా CD రేఖను గీయండి మరియు $P(x_1, y_1)$ నుండి AB కి ఒక లంబం గీయగా అది M వద్ద కలిగిస్తుంది. అదేవిధంగా మూలబిందువు నుండి AB కి లంబం గీయగా అది R వద్ద కలియును మరియు CD కి Q వద్ద కలుస్తుంది.

$\angle BOR=\alpha$ అనుకొనిన

AB రేఖ యొక్క అభిలంబ రూపము

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p,\ (p=OR) \qquad (6.21)$$

(6.20) మరియు (6.21) సమీకరణాలు ఒకే సమీకరణంను సూచించును కావున వాటి సజాత గుణకాల అనులోమానుపాతంలో ఉంటుంది.

$$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\sin\alpha}{b} = \frac{p}{-c} \Rightarrow \frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\sin\alpha}{b} = \frac{p}{-c} = \frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}}{\pm\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\pm a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{\pm b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{మరియు} \quad p = \frac{\mp c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

CD యొక్క అభిలంబ రేఖ సమీకరణం $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p'$, $(p' = OQ)$ 6.22)

$P(x_1, y_1)$ గుండాపోవున, కావున (6.22) $\Rightarrow$ $x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha = p'$

కావలసిన దూరం $= |PM| = |QR| = |OQ - OR| = |p' - p|$

$$= |(x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha) - p|$$

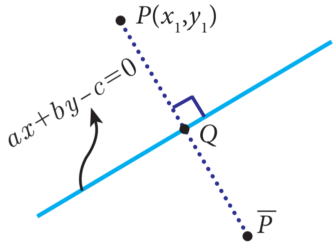
$$= \left|\pm\frac{ax_1}{\sqrt{a^2+b^2}} \pm \frac{by_1}{\sqrt{a^2+b^2}} \pm \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| = \left|\pm\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

కావలసిన దూరం $= \left|\frac{ax_1+by_1+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$

(iii) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ మరియు $a_1x + b_1y + c_2 = 0$ అను రెండు సమాంతర రేఖల మధ్య దూరం $D = \frac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ (పై ఫలితాన్ని ఉపయోగించి $P(x_1, y_1)$ బదులు మూలబిందువును తీసుకొని నిరూపించవచ్చు)

- $P(x_1, y_1)$ బిందువు నుంచి రేఖ $ax + by + c = 0$ పై Q కు సమీప బిందువు (లంబపాదం) యొక్క నిరూపకాలు క్రింది రూపం నుంచి కనుగొనవచ్చును.

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = -\frac{(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$$ సౌష్ఠవరూపం ఉపయోగించి (6.23)



పటము 6.38

- $ax + by + c = 0$ దృష్ట్యా $P(x_1, y_1)$ బిందువు యొక్క ప్రతిబింబ నిరూపకాలు

$$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = -\frac{2(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2} \quad (6.24)$$ ద్వారా పొందవచ్చును.

ఉదాహరణ 6.22 (1, 2) బిందువు గుండా పోతూ $3x + 4y = 7$ రేఖకు సమాంతర రేఖ మరియు లంబ రేఖల సమీకరణాలను కనుగొనండి.

సాధన

$3x + 4y = 7$ రేఖ యొక్క ..... సమాంతర రేఖ రూపం $3x + 4y = 3x_1 + 4y_1$, (1, 2) అనుకొనిన

$$\Rightarrow 3x + 4y = 3(1) + 4(2)$$

$$3x + 4y = 11$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 302 14-05-2022 11:23:43

$3x + 4y = 7$ రేఖకు లంబరేఖా రూపం

$$4x - 3y = 4x_1 - 3y_1$$

ఇక్కడ $(x_1, y_1) = (1, 2)$

$$\Rightarrow 4x - 3y = 4(1) - 3(2)$$

$$4x - 3y = -2$$

సమాంతర మరియు లంబరేఖలు వరుసగా

$$3x + 4y = 11$$

$$4x - 3y = -2$$

ఉదాహరణ 6.23

(i) (5,4) మరియు (2,0) రెండు బిందువుల మధ్య దూరం,

(ii) (1,2) బిందువు నుండి $5x + 12y - 3 = 0$ రేఖకు మధ్యదూరం,

(iii) $3x + 4y = 12$ మరియు $6x + 8y + 1 = 0$ రెండు సమాంతరరేఖలమధ్య దూరంను కనుగొనండి

సాధన

(i) $(x_1, y_1) = (5, 4)$ మరియు $(x_2, y_2) = (2, 0)$ రెండు బిందువుల మధ్య దూరం

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$= \sqrt{3^2 + 4^2}$$

$$D = = 5$$

(ii) ఒక బిందువు (x_1, y_1) మరియు ఒక రేఖ $ax + by + c = 0$ ల మధ్య దూరం

$$D = \left| \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

(1 , 2) మరియు $5x + 12y - 3 = 0$ రెండు సమంతర రేఖలమధ్య దూరం

$$D = \left| \frac{5(1) + 12(2) - 3}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \right| = 2$$

(iii) $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ మరియు $a_1x + b_1y + c_2 = 0$ రెండు రేఖలమధ్య దూరం

$$D = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

ఇచ్చిన రేఖలను ఈ విధంగా వ్రాసుకొనిన $3x + 4y - 12 = 0$ మరియు $3x + 4y + \frac{1}{2} = 0$

ఇక్కడ, $a_1 = 3,\ b_1 = 4,\ c_1 = -12,\ c_2 = \frac{1}{2}$

$$D = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \left| \frac{-12 - \frac{1}{2}}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \frac{25}{2 \times 5} = 2.5 \text{ యూనిట్లు.}$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 303 14-05-2022 11:23:44

ఉదాహరణ 6.24 మూలబిందువు $2x+y=5$ రేఖ పై సమీపబిందువును. కనుగొనండి

సాధన

$2x+y=5$ రేఖ పై మూలబిందువునుంచి గల లంబపాదమే కావలసిన బిందువు.

మూలబిందువు ద్వారా పోతూ ఇచ్చిన రేఖల గల లంబరేఖ $x-2y=0$.

$2x+y=5$ మరియు $x-2y=0$ సమికరణాలను సాదించగా $x=2,\ y=1$ లబించును.

మూలబిందువు నుంచి సరళ రేఖ పై గల సమీపబిందువు $(2, 1)$ అగును.

మరొక పద్ధతి

6.2.3 సూత్రం ఉపయోగించి

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}=-\frac{(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$$

$$\frac{x-0}{2}=\frac{y-0}{1}=-\frac{(2(0)+1(0)-5)}{2^2+1^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{y}{1}=1 \Rightarrow (2, 1)$$

ఉదాహరణ 6.25 $3x+4y+2=0$ మరియు $5x+12y-5=0$ రేఖలమధ్య గల అల్ప కోణం ను సమద్విఖండనచేయు సమికరణంను కనుగొనండి.

సాధన

మొదట, రెండు సమీకరణంలోని స్థిరపదాలను ధనాత్మకం గా మార్చవలెను. ఇచ్చిన సమీకరణాల కోణ సమద్విఖండ.

$$\frac{3x+4y+2}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm\frac{-5x-12y+5}{\sqrt{5^2+12^2}}$$ (చలన బిందువు రేఖల నుంచి సమాన దూరంలో ఉంటుంది)

$a_1a_2+b_1b_2=-15-48<0$, కావున రేఖల మధ్యగల అల్పకొణంను సమద్వి ఖండన చేయు సమీకరణం $\frac{3x+4y+2}{5}=+\frac{(-5x-12y+5)}{13} \Rightarrow 64x+112y+1=0$

ఉదాహరణ 6.26 $4x+3y-12=0$ రేఖ నుండి 2 యూనిట్ల దూరంలో $x+y=5$ రేఖ పై గల బిందువులను కనుగొనండి.

సాధన

సరళరేఖ $x+y=5$ పై గల బిందువు $x=t,\ y=5-t$ $(t, 5-t)$ బిందువు నుండి $4x+3y-12=0$ రేఖకు మధ్యదూరం రెండు యూనిట్లైన

$$\therefore \frac{4(t)+3(5-t)-12}{\sqrt{4^2+3^2}}=2$$

$$\Rightarrow \frac{|t+3|}{5}=2$$

$$\Rightarrow t+3=\pm 10 \Rightarrow t=-13,\ t=7$$

బిందువులు $(-13, 18)$ మరియు $(7, -2)$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 304 14-05-2022 11:23:45

ఉదాహరణ 6.27 ఒక సరళరేఖ ఒక స్థిర బిందువు $A(6, 8)$ గుండ పోవుచున్నది దీనికి మూలబిందువు నుంచి గీచిన లంబపాధం యొక్క బిందు పథంను కనుగొనండి.

సాధన

$(x_1, y_1) = (6, 8)$ అనుకొనిన మరియు $P(h,k)$ కావలసిన బిందు పథం పై ఒక బిందువు.

స్థిరబిందువు (x_1, y_1) గుండా పోవు సరళరేఖల కుటుంబం. యొక్క సమీకరణాలు

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y - 8 = m(x - 6) \qquad (6.25)$$

(6.25) రేఖకు OP లంబంగా ఉన్నది కావున

$$m \times \left(\frac{k-0}{h-0}\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad m = -\frac{h}{k}$$

(6.25) పై $P(h,k)$ ఉన్నది కావున $k - 8 = -\frac{h}{k}(h-6)$

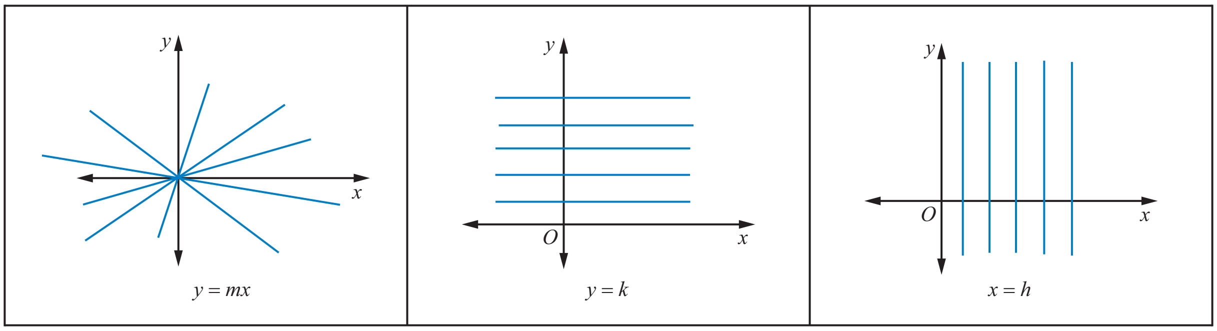
$$\Rightarrow k(k-8) = -h(h-6) \Rightarrow h^2 + k^2 - 6h - 8k = 0$$

$P(h,k)$ యొక్క $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

ఈ ఫలితం. ఒక అర్ధవృత్తంలో కోణం లంబకోణం అను వాస్తవికత నుండి చూపబడినది.

6.4.5 సరళరేఖల కుటుంబం (Family of Lines)

ఒక ప్రత్యేకమైన నియమాన్ని పాటించే అన్ని రేఖలను ఒక సరళరేఖల కుటుంబం అంటారు. క్రింది ఉదాహరణ సరళరేఖా కుటుంబలను చూపును (ఇక్కడ m, h మరియు k లు చరస్థిరాంకాలు)



పటము 6.39

$ax + by + c = 0$ ఒక సరళ రేఖ యొక్క సమీకరణం మూడు చర స్థిరాంకాలను కలిగి ఉన్నట్లు అనిపిస్తుంది. కాని నిజానికి, కాని నిజానికి, అది ఆవిధంగా కాదు. b తో భాగించగా (a ఏదైతే శూన్యతరం) మనకు క్రింది విధంగా లభించును.

$\frac{a}{b}x + y + \frac{c}{b} = 0$ దీనిని ఇలా వ్రాయవచ్చు.

$Ax + y + C = 0$ ఇక్కడ $A = \frac{a}{b}$, $C = \frac{c}{b}$.

పై సమీకరణాన్ని వాలు అంతర ఖండ రూపంలో వ్రాయవచ్చు.

ఒక సరళరేఖ యొక్క సమీకరణం రెండు చరస్థిరాంకాలను కలిగి ఉంటుంది. మరియు ఈ స్థిరాంకాల సంఖ్య మరింత తగ్గింపుకు వీలుకాదు. అందువలన, ప్రతి సరళరేఖ సమీకరణం రెండు చరస్థిరాంకాలను కలిగి ఉంటుంది. తత్ఫలితముగా, ఒక సరళరేఖ యొక్క సమీకరణంను ఏకైకంగా గుర్తించుటకు రెండు నియమాలు అవసరమగును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 305 14-05-2022 11:23:46

ఒక నియమము రెండు చరస్థిరాంకాల మధ్య రేఖీయ సంబంధాన్ని ఇచ్చును మరియు ప్రతి చర స్థిరాంకం మరొక దానిని గుర్తిస్తుంది. అందువలన, ఒక నియమంను సంతృప్తిపరచే సరళరేఖలు ఒక ఏక చరస్థిరాంకంను కలిగి ఉంటుంది. ఇటువంటి రేఖల వ్యవస్థను ఏక పరామితి కుటుంబ రేఖలు అంటారు. మరియు తెలియని చర స్థిరాంకాన్ని పరామితి అంటారు.

$y = mx + b$ ఉపయోగించి మూడురకాల సరళరేఖల కుటుంబాలను గురించి ఇప్పుడు చర్చింస్తాము. మొదటి రెండు రకాలు ఏకపరామితి కుటుంబంలు మరియు మూడవది ద్వి పరామితి కుటుంబాలు.

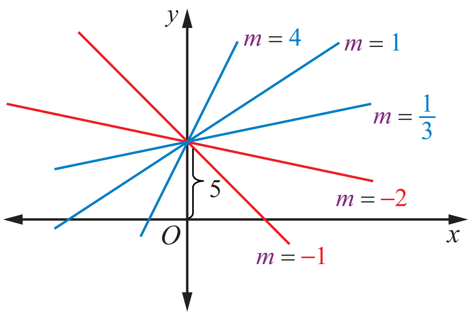
(i) m చరస్థిరాంకం అయిన మరియు b స్థిరమైన స్థిరాంకం.

(ii) b చరస్థిరాంకమైన మరియు m స్థిరమైన స్థిరాంకం.

(iii) m మరియు b లు రెండు చరస్థిరాంకాలు.

6.4.6 ఏక పరామితి కుటుంబాలు (One Parameter families)

(i) m చరస్థిరాంకమైన మరియు b ఒక స్థిరమైన స్థిరాంకం



పటము 6.40

m ను చరస్థిరాంకంగా మరియు $b = 5$ అను b ఒక స్థిరమైన స్థిరాంకంగా తీసుకొని $y = mx + b$ రేఖను సరళరేఖల యొక్క కుటుంబం సమీకరణాలను కనుగొంటాము. అందువలన ఈ సమీకరణం m యొక్క వివిధ వాస్తవ విలువలకు y అంతర ఖండం 5 యూనిట్లతో ఒక సరళరేఖల యొక్క ఒక కుటుంబంను సూచించును. ఈ కుటుంబం యొక్క కొన్ని సభ్యులను పటంలో చూపబడినది. ఉదాహరణకు ఈ పటంలో వాలు m విలువలు $-1, -2, \frac{1}{3}, 1$ మరియు 4 గా తీసుకొనును.

ఉదాహరణ 6.28 $y = mx + 2$ సరళరేఖ యొక్క కుటుంబంలోని సరళరేఖ సమీకరణాలను కనుగొనండి. ఇచ్చట m మరియు $2x + 3y = 10$ తో రేఖల ఖండన బిందువు యొక్క x-నిరూపకం పూర్ణసంఖ్యలు

సాధన

$y = mx + 2$ సరళరేఖ కుటుంబంలోని సరళరేఖల సమీకరణాలను కనుగొనుటకు m పరామితి యొక్క విలువ గుర్తించాలి.

$2x + 3y = 10$ మరియు $y = mx + 2$ సరళరేఖల ఖండన బిందువు

$$\left(\frac{4}{3m+2}, \frac{10m+4}{3m+2}\right)$$

x-నిరూపక విలువలు పూర్ణాసంఖ్యలు మరియు m వాలుగా ఇవ్వబడినది.

$\frac{4}{3m+2}$ అనేది ఒక పూర్ణాసంఖ్య $\Rightarrow$ 4 యొక్క ఒక భాజకం $3m + 2$ $(\pm 1, \pm 2$ మరియు $\pm 4)$

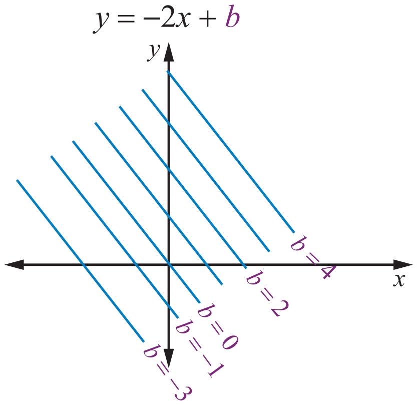
$3m + 2 = \pm 1,\ 3m + 2 = \pm 2,\ 3m + 2 = \pm 4$ ఇక్కడ m ఒక పూర్ణ సంఖ్య

సాధించగా పొందునది $m = \{-2, -1, 0\}$

సమీకరణాలు $y = -2x + 2, y = -x + 2$ మరియు $y = 2$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 306 14-05-2022 11:23:47

(ii) b చరస్థిరాంకమైన m ఒక స్థిరమైన స్థిరాంకం.



పటము 6.41

పైన చర్చించినట్లు b చరస్థిరాంకం మరియు m ఒక స్థిరమైన స్థిరాంకం అది $m = -2$ తీసుకొనిన $y = mx + b$ సమీకరణం $y = -2x + b$ గా మారును b యొక్క వివిధ వాస్తవ విలువలకు -2 వాలుతో సరళరేఖల యొక్క ఒక కుటుంబంను పొందవీలగును. ఈ కుటుంబం యొక్క కొన్ని సభ్యులను పటంలో చూపబడినది. ఉదాహరణకు $-3, -1, 0, 1, 2, 3$ మరియు 4 విలువలను b తీసుకొనుటను పటంలో చూపబడినది.

సమాంతర రేఖల యొక్క కుటుంబం మరియు లంబరేఖల కుటుంబం అను రెండు ప్రత్యేక సందర్భాలు క్రిందివ్వబడినది.

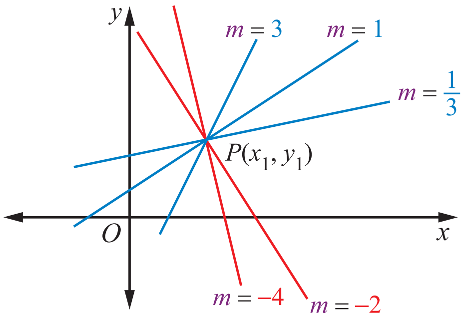
సమాంతర రేఖల యొక్క కుటుంబం : $ax + by + c = 0$ కు సమాంతర రేఖల కుటుంబం $ax + by + \lambda = 0$ రూపంలో ఉండును. λ (లాంబ్డా) యొక్క వివిధ విలువలకు $ax + by + c = 0$ కు వివిధ సమాంతర రేఖలను పొందవచ్చును.

లంబరేఖల కుటుంబం: $ax + by + c = 0$ కు లంబంగా గల రేఖలు $bx - ay + \lambda = 0$ రూపంలో వుండును λ యొక్క వేర్వేరు విలువలకు $ax + by + c = 0$ కు లంబరేఖలను పొందవచ్చును.

6.4.7 రెండు పరామితుల కుటుంబంలు (Two parameters families)

(iii) m మరియు b రెండునూ చరస్థిరాంకాలైన

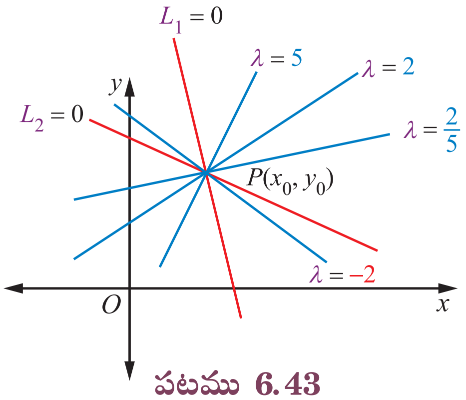
$y = mx+b$ లో m మరియు b లు రెండూనూ చరస్థిరాంకాలు (గ్రాఫ్‌లో ఈ కుటుంబాలని చూడలేము. కాని కొన్ని $y - y_1 = m(x - x_1)$ వంటి సందర్భాలలో m యొక్క వివిధ వాస్తవ విలువలను సరళరేఖ ఒక కుటుంబంను చూడవీలగును. $-2, -4, \frac{1}{3}, 1$ మరియు 3 లను m తీసుకొనిన రేఖలు పటంలో చూపినట్లు నిలువ రేఖ $x = x_1$ తప్ప (x_1, y_1) స్థిర బిందువుగుండా పోవు రేఖలగును.



పటము 6.42

6.4.8 ఇచ్చిన రెండు సరళరేఖల ఖండన బిందువు ద్వారా పోవు సరళరేఖ యొక్క కుటుంబ సమీకరణం (The family of equation of straight lines through the point of intersection of the two given lines)

$L_1 = a_1x + b_1y + c_1 = 0$ మరియు $L_2 = a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ఇవ్వబడిన రెండు సరళరేఖలు. పై రేఖల ఖండన బిందువు ద్వారా పోవు సరళరేఖ యొక్క కుటుంబ సమీకరణం $L_1 + \lambda L_2 = 0$ ఇక్కడ పరామితి. λ యొక్క వివిధ వాస్తవ విలువలకు వివిధ సమీకరణాలును మనము పొందుతాము.



పటము 6.43

ఉదాహరణ 6.29 $3x + 2y + 5 = 0$ మరియు $3x - 4y + 6 = 0$ సరళరేఖల ఖండన బిందువు మరియు $(1, 1)$ బిందువు ద్వారా పోవు సరళరేఖ యొక్క సమీకరణం కనుగొనండి.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 307 14-05-2022 11:23:48

సాధన

రెండు సరళరేఖల ఖండన బిందువు ద్వారా పోవు సరళరేఖ యొక్క కుటుంబ సమీకరణ రూపం $(a_1x+b_1y+c_1)+\lambda(a_2x+b_2y+c_2)=0$.

అది, $(3x+2y+5)+\lambda(3x-4y+6)=0$

కావలసిన సరళరేఖ $(1, 1)$ బిందువు ద్వారా పోవున కావున పై సమీకరణాన్ని తృప్తిపరచును.

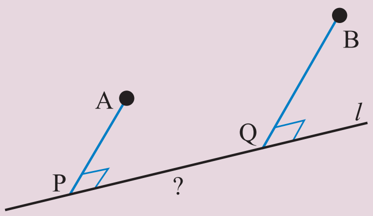
అందువలన, $\{3+2(1)+5\}+\lambda\{3(1)-4(1)+6\}=0 \Rightarrow \lambda=-2$

పై సమీకరణంలో $\lambda=-2$ ని ప్రతిక్షేపంచగా కావలసిన సమీకరణం $3x-10y+7=0$

(రెండు బిందువుల రూపాన్ని ఉపయోగించి పై సమస్యను సరి చూడండి)

ఉదాహరణ 6.30

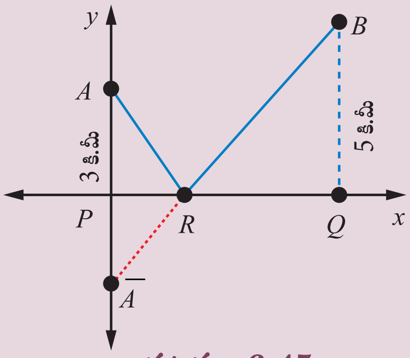
A మరియు B అనే రెండు గ్రామాలకు మెరుగైన విద్యుసరఫరాను అందించడానికి క్రొత్త విద్యుచ్ఛక్తి ఉపకేంద్రాలను నిర్మించాలని ప్రభుత్వం నిర్ణయించింది. l అనే రేఖపై ఉపకేంద్రం ఉన్నదని అనుకొనుము. సరళరేఖ l పై గల P మరియు Q ల లంబపాదాలు నుండి A మరియు B గ్రామాలకు గల దూరాలు వరుసగా 3 కి.మీ మరియు 5 కి.మీ. P మరియు Q ల మధ్యదూరం 6 కి.మీ. (i) రెండు గ్రామాలను అనుసందానించే తీగ యొక్క కనిష్ఠ పొడవు ఎంత? (ii) రెండు గ్రామాలకు విద్యుత్ కేంద్రం కలిపి తీగ యొక్క సమీకరణం కనుగొనండి. (ఈ సమస్యను సాధించు విధానంను ప్రతిబింబ సూత్రంలతో సంయోగమైన జ్ఞానమును ఉపయోగించుటను అనుమతిస్తుంది.)



పటము 6.44

సాధన

మన సౌకర్యవంతంగా PQ ను x -అక్షంగా PA ను y - అక్షంగా మరియు P ని మూలబిందువుగా తీసుకొందాం. (సంప్రదాయ మూలబిందువు O కి బదులు) అందువలన $P(0, 0), A(0, 3)$ మరియు $B(6, 5)$ నిరూపకాలు. x - అక్షం వెంబడి A యొక్క ప్రతిబింబం $\bar{A}$ అయిన $\bar{A}$ అనేది $(0, -3)$. x - అక్షంకు $\bar{A}B$ రేఖల ఖండన బిందువు కావలసిన బిందువు R అగును.



పటము 6.45

AR మరియు BR లు తీగయొక్క మార్గం (రహదారి)

తీగయొక్క కనిష్ఠ పొడవు $AR+BR=\bar{A}R+RB=\bar{A}B = \sqrt{(6-0)^2+(5+3)^2} = 10$ కి.మీ

$\bar{A}B$ యొక్క సమీకరణం $y-(-3)=\left(\frac{5-(-3)}{6-0}\right)(x-0)$

$$4x-3y=9$$

$y=0$ అయిన $R\left(\frac{9}{4},0\right)$ అగును.

P నుంచి 2.25 కి.మీ దూరంలో ఉపకేంద్రం ఉండవలెను.

RA యొక్క సమీకరణం $4x+3y=9$

తీగ పొడవు (రహదారి) యొక్క సమీకరణం RA మరియు RB లు

$4x+3y=9$ మరియు $4x-3y=9$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 308 14-05-2022 11:23:48

ఉదాహరణ 6.31 ఒక అద్దెకారు సంస్థ మొదటి 1.8 కిలోమీటరుకు స్థిరంగా ₹25 చార్జీచేయును మరియు ప్రతి అదనపు కిలోమీటర్లుకు రూ॥ 12 వసూలు చేసిన ప్రమాణానికి అమ్యే ఖర్చు ను కనుగొనండి.

సాధన

1.8 కిలోమీటరు వరకు స్థిర అద్ది ₹25 కాబట్టి దీని సమీకరణం

$$y = 25, \quad 0 \le x \le 1.8 \qquad (6.26)$$

1.8 కిలోమీటరు తరువాత ప్రతి కిలోమీటరు ₹12 కాబట్టి దాని సమీకరణం.

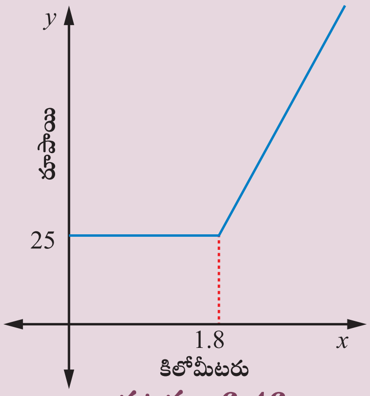
$$y = 25 + 12(x - 1.8), \; x > 1.8 \qquad (6.27)$$

(6.26) మరియు (6.27) యొక్క సంయుక్త సమీకరణం.

$$y = \begin{cases} 25, & 0 \le x \le 1.8 \\ 25 + 12(x - 1.8) & x > 1.8 \end{cases} \qquad (6.28)$$

$x = 15$ అయినప్పుడు (6.27) ప్రకారం 15 కిలోమీటరు అగుఖర్చు.

$$y = 25 + 12(15 - 1.8) = 183.40.$$



పటము 6.46

కాల్ టాక్సీని బుక్ చేసుకోవడానికి మీరుమీ మొబైల్ ఫోన్ నుంచి కనెక్ట్ అయితే, టాక్సీ సేవ ఉన్నంతవరకు మీరు ఎక్కడ ఉన్నా మీ ప్రాంతంలో అందుబాటులో ఉన్న మొదటి క్యాబ్‌కు స్వయంచాలకంగా కనెక్ట్ అవుతుంది. మన ఉనికి గుర్తించుటకు మరియు నావిగేట్ చేయడానికి ఏరకమైన నిరూపకవ్యవస్థ ఉపయోగపడుతుంది?

www.mapbox.com

ఉదాహరణ 6.32 (3, 0) మరియు (5, 2) రెండు బిందువులనా కలిపే సరళరేఖ (3, 0) బిందువు వెంబడి అపసవ్యదిశలో 15° కోణం భ్రమిపచేసిన సరళరేఖ యొక్క క్రొత్త స్థానం యొక్క సమీకరణంను కనుగొనండి.

సాధన

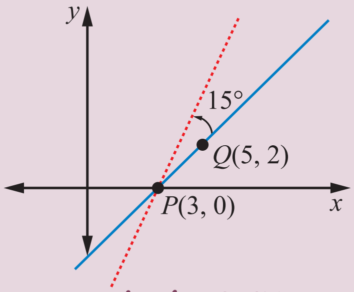
ఇచ్చిన బిందువులు $P(3, 0)$ మరియు $Q(5, 2)$ అనుకొనిన.

$$PQ \text{ యొక్క వాలు } = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{2-0}{5-3} = 1$$

సరళరేఖ యొక్క వింపుకోణం $PQ = \tan^{-1}(1)$

$$= \frac{\pi}{4} \text{ పటం } 45^\circ$$



పటము 6.47

క్రొత్త స్థానంలో సరళరే యొక్క వాలు.

$$m = tan(45^\circ + 15^\circ) = tan\,60^\circ = \sqrt{3}$$

$\sqrt{3}$ వాలు తో (3, 0) బిందువు ద్వారా పోవుసరళ రేఖ సమీకరణం

$$y - 0 = \sqrt{3}(x - 3)$$

$$\sqrt{3}x - y - 3\sqrt{3} = 0$$

అభ్యాసము 6.3

1. $3x+2y+9=0$ మరియు $12x+8y-15=0$ అను రెండు రేఖలు సమాంతర రేఖలని చూపండి.

2. $5x-4y+3=0$ సరళరేఖకు సమాంతరంగా మరియు x అంతరఖండం 3 గా గల సరళరేఖ సమీవరణం కనుగొనండి.

3. $4x+3y+4=0$ రేఖకు (i) $(-2, 4)$ (ii) $(7, -3)$ బిందువులకు మధ్య గల దూరంను కనుగొనుము.

4. (i) $x+3y-4=0$ సమాంతరంగా
   (ii) $3x+4y=6$ కు లంబంగా $(1, -1)$ ద్వారా పోవు రేఖల సమీకరణాలను వ్రాయుము.

5. రాంబస్ యొక్క ఒక శీర్షం $(-4, 7)$ మరియు ఒక కర్ణం యొక్క సమీకరణ $5x-y+7=0$ అయితే రెండు కర్ణం యొక్క సమీకరణంను కనుగొనండి.

6. $4x-y+3=0$ మరియు $5x+2y+7=0$ సరళరేఖలఖండన బిందువు గుండ పోతూ (i) $(-1, 2)$ బిందువు గుండా పోవు (ii) $x-y+5=0$ కు సమాంతరంగా ఉండే (iii) $x-2y+1=0$ కులంబంగా ఉండే రేఖల సమీకరణాలను కనుగొనుము.

7. $(1,-1)$ బిందువు నుండి ఒక యూనిట్ దూరంలో మరియు $12x+5y+2=0$ సరళరేఖకు సమాంతరంగా ఉండే రెండు సరళ రేఖల సమీకరణాలను కనుగొనండి.

8. $(2, 1)$ బిందువు నుంచి 4 యూనిట్ దూరంలో మరియు $3x+4y-6=0$ సరళ రేఖకు లంబంగా గల సరళరేఖ సమీకరణంను కనుగొనండి.

9. $2x+3y=10$ సరళరేఖను సమాంతరంగాను మరియు అక్షాల పై చేయు అంతర ఖండాల మొత్తం 15గా గల సరళరేఖ సమీకకరణంను కనుగొనండి.

10. $(-10,-2)$ బిందువు నుండి $x+y-2=0$ సరళరేఖకు గల లంబం పొడవు మరియు లంబపాద నిరూపకాలను కనుగొనండి.

11. $x\sec\theta + y\operatorname{cosec}\theta = 2a$ మరియు $x\cos\theta - y\sin\theta = a\cos 2\theta$ సరళరేఖలకు మూల బిందువు నుంచి లంబాల పొడవులు p_1 మరియు p_2 అయిన $p_1^2+p_2^2=a^2$ అని నిరూపించండి.

12. క్రిందివ్వబడిన సమాంతర రేఖల మధ్య దూరం కనుగొనండి .
    (i) $12x+5y=7$ మరియు $12x+5y+7=0$
    (ii) $3x-4y+5=0$ మరియు $6x-8y-15=0$

13. $3x+4y-12=0$ కు (i) లంబంగా (ii) సమాంతరంగా సరళరేఖల కుటుంబంను కనుగొనుము.

14. $A(2, 0)$ మరియు $B(3, 1)$ రెండు బిందువులను కలుపు సరళరేఖ A బిందువు వెంబడి అపసవ్యదిలో 15° కోణంతో భ్రమణం ద్వారా పొందిన కొత్త సరళరేఖ యొక్క సమీకరణంను కనుగొనండి.

15. $(1, 2)$ బిందువు నుంచి వచ్చే కాంతి కిరణం x అక్షం మీద ఉన్న బిందువు A పై వద్ద ప్రతిబింబిస్తుంది. మరియు ఇది $(5,3)$ బిందువు ద్వారా వెళ్లితే A నిరూపకాలను కనుగొనండి.

16. $5x=y+7$ రేఖకు లంబంగా గీచిన రేఖ, నిరూపక అక్షాలతో ఏర్పడు త్రిభుజం యొక్క వైశాల్య 10 చదరపు యూనిట్లు అయిన ఆ సరళరేఖ యొక్క సమీకరణం కనుగొనండి.

17. $x+2y-9=0$ సరళరేఖ వెంబడి బిందువు $(-2, 3)$ యొక్క బింబాన్ని కనుగొనండి.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 310 14-05-2022 11:23:50

18. ఒక ఫోటోకాపి స్టోర్‌లో మొదటి 10 కాపీలకు ప్రతి కాపీకి ₹1.50 చార్చి చేస్తుంది. 10 కాపీల తరువాత ప్రతి కాపీకి ₹1 చార్చి చేయును. కాపీల సంఖ్యను x అది, కాపీలకు అయిన మొత్తం చార్చిని y అని తీసుకొనిన (i) 0 నుంచి 50 కాపీలు x వెళ్ళిన చార్చి యొక్క గ్రాఫ్ గీయండి. (ii) 40 కాపీల తయారికి అగు ఖర్చు ఎంత?

19. $y = 5x + b$ సరళరేఖ యొక్క కుటుంబంలోని కనీసం రెండు సరళరేఖా సమీకరణాలను కనుగొనండి. ఇచ్చుట b మరియు $3x - 4y = 6$ తో రేఖలఖండన బిందువు యొక్క x నిరూపకలు పూర్ణసంఖ్యలు.

20. $y = mx - 3$ సరళరేఖ యొక్క కుటుంబంలోని సరళరేఖసమీకరణాలను కనుగొనండి ఇచ్చుట m మరియు $x - y = 6$ తో రేఖల ఖండన బిందువు యొక్క x నిరూపకలు పూర్ణసంఖ్యలు.

6.5 సరళరేఖాయుగ్మాలు (Pair of Straight lines)

రెండు లేదా అంతకన్నా ఎక్కువ సరళరేఖల సమీకరణాలను కలిపి x మరియు y లోని తరగతి ఒకటికన్న ఎక్కువ ఉండునట్లు ఒక సమీకరణంగా వ్యక్తిపరవచ్చు ఒక రేఖీయసమీకరణం ఒక సరళ రేఖను సూచిన్తుందనియనం చూస్తున్నం రెండు రేఖీయ సమీకరణాల లబ్దం రెండు సరళరేఖలను సూచిస్తుంది. అదే సరళరేఖయుగ్మం మనం x మరియు y లో ద్విఘాతా సమీకరణాలుగా అభ్యసిస్తాము.

$L_1 \equiv a_1x + b_1y + c_1 = 0$ మరియు $L_2 \equiv a_2x + b_2y + c_2 = 0$ రెండు సరళరేఖల విడివిడి సమీకరణాలు అనుకొనుము. $P(x_1, y_1)$ బిందువు L_1 పై ఉన్నట్లైతే $L_1 = 0$ ను తృప్తి పరచును. అదేవిధంగా $P(x_1, y_1)$ L_2 పై ఉన్నట్లైతే $L_2 = 0$. $P(x_1, y_1)$ బిందువు పైన లేదా $L_1 = 0$ పైన $L_2 = 0$ ఉన్నట్లు అయితే $P(x_1, y_1)$, $(L_1)(L_2) = 0$ సమీకరణం తృప్తి పరచును మరియు $L_1 . L_2 = 0$ ను వేరొక బిందువు తృప్తిపరచదు. అందువలన $L_1 . L_2 = 0$ $L_1 = 0$ మరియు $L_2 = 0$ అను సరళరేఖయుగ్మలు ను సూచిస్తుంది

ఉదాహరణకు. రెండు సమీకరణంను తీసుకొనుము.

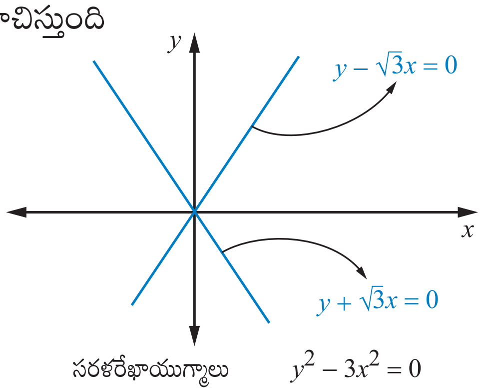
$$y + \sqrt{3}x = 0 \text{ మరియు } y - \sqrt{3}x = 0.$$

పై రెండు సమీకరణాలు ములబిందువు ద్వారా పోతూ $-\sqrt{3}$ మరియు $\sqrt{3}$ వరుస వాలులుగా గల రెండు సరళరేఖలు ను సూచిస్తుంది.

పై సమీకరణాలను కలుపగా , మనం పొందునది.

$$(y + \sqrt{3}x)(y - \sqrt{3}x) = 0$$

$$\Rightarrow y^2 - 3x^2 = 0 \text{ సరళరేఖయుగ్మాలు సూచిస్తుంది}$$



పటము 6.48

6.5.1 మూలబిందువు ద్వారా పోవు సరళరేఖయుగ్మములు (Pair of lines passing through the origin)

ఈ యుగ్మంలోని మనం మొదట సాధారణ పరిస్థితిని పరిశీలిస్తాయి. రెండు సరళరేఖలు మూలబిందువు ద్వారా పోవును. కావున వాటి సమీకరణాలను ఈ విధంగా వ్రాయవచ్చు

$$y - m_1x = 0$$

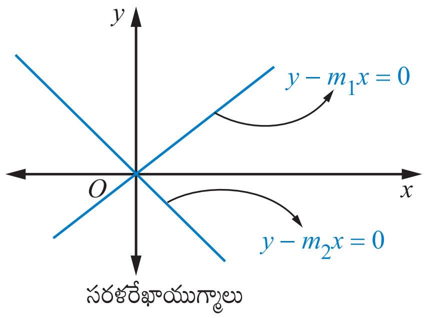
$$y - m_2x = 0$$

ఈ రెండు సరళరేఖలను కలపగా

$$(y - m_1x)(y - m_2x) = 0 \qquad (6.29)$$

$$y^2 - (m_1 + m_2)xy + m_1m_2x^2 = 0$$

పై సమీకరణం ములబిందువు ద్వారా పోతూ వాలు m_1 మరియు m_2 గా గల సరళరేఖయుగ్మం యొక్క సాధారణ సమీకరణంగా పరిగణించవచ్చు.



పటము 6.49

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 311 14-05-2022 11:23:51

$ax^2+2hxy+by^2=0$ అనేది తరగతి 2 గా గల ఒక సమఘాతయసమీకరణం. దీని యందు ప్రతి పదం తరగతి 2

సమఘాత సమీకరణస్వభావం రేఖలు మూలబిందువు ద్వారా పోవునా అని మనకు చెప్పును.

ఉదాహరణ 6.33 $5x^2+6xy+y^2=0$ సమీకరణాలను వేరుచేయండి.

సాధన

$5x^2+6xy+y^2=0$ సమీకరణాలను కారణాంకపరచగా

$$\begin{aligned} 5x^2+5xy+xy+y^2 &= 0 \\ 5x(x+y)+y(x+y) &= 0 \\ (5x+y)(x+y) &= 0 \end{aligned}$$

కావున రేఖలు $5x+y=0$, మరియు $x+y=0$ అగును,

మరొక పద్ధతి: ఇచ్చినది సమఘాత సమీకరణం కావున. ఇచ్చిన సమీకరణం

$5x^2+6xy+y^2=0$ ను x^2 తో భాగించగా

మనము పొందునది $5+6\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^2=0$

$\frac{y}{x}=m$ ప్రతిక్షేపించగా (సమఘితసమీకరణం కు రేఖల యొక్క వాలు)

పై సమీకరణం $m^2+6m+5=0$ గా మాపన.

కారణాంక పరచగా $(m+1)(m+5)=0$

$\Rightarrow \quad m=-1, m=-5$

$\Rightarrow \quad \frac{y}{x}=-1, \frac{y}{x}=-5$

సరళరేఖలు $x+y=0,\ 5x+y=0$

ఉదాహరణ 6.34 $2x^2+2xy+y^2=0$ సమీకరణాలను వేరుచేయుట ద్వారా సరళరేఖలు వ్యవస్థితమయినా, వాటిని కనుగొనుము.

సాధన

ఇచ్చిన సమీకరణం సమఘాతీయ సమీకరణం కావున $2x^2+2xy+y^2=0$ సమీకరణంను x^2 తో భాగించి మరియు $\frac{y}{x}=m$ ని ప్రతిక్షేపించిగా, మనకు లభించునది.

$m^2+2m+2=0$

ఇక్కడ, m (వాలు) విలువ వాస్తవ సంఖ్య కాదు $(\because \Delta=B^2-4AC=4-8=-4<0)$ కావున

m (వాలు) యొక్క విలువల వాస్తవాలు కాదు (సంకిర్ణ సంఖ్యలు)అందువలన యుగ్మమీకరణం $2x^2+2xy+y^2=0$ తో ఏ రేఖ వ్యవస్థితంకాదు.

కొని సంధర్భాలో ఈ సమీకరణం కల్పిత రేఖలను సూచిస్తుందని చెప్పవచ్చు. మొత్తం తలంలో $(0, 0)$ మాత్రమే ఈ సమీకరణాన్ని తృప్తిపరచును.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 312 14-05-2022 11:23:52

6.5.2 సరళరేఖ యుగ్మల మధ్య కోణం (Angle between pair of straight lines)

మూలబిందువు గుండాపోవు సరళరేఖయుగ్మ సమీకరణం క్రింది విధంగా తీసుకొందాం.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \qquad (6.30)$$

ఈ రెండు సరళరేఖల యొక్క వాలులు m_1 మరియు m_2 అనుకొనుము.

(6.30) ని x^2 తో భాగించి మరియు $\frac{y}{x} = m$ ని ప్రతిక్షేపించగా, మనకుల భించునది

$bm^2 + 2hm + a = 0$ ని పొందవచ్చు.

m లో ద్విఘాత సమీకరణం దీనికి m_1 మరియు m_2 లు మూలాలు.

$$m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b} \text{ మరియు } m_1 m_2 = \frac{a}{b}$$

రెండు రేఖలమధ్య కోణం θ అయిన

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right|$$

$$= \left|\frac{\sqrt{(m_1+m_2)^2 - 4m_1 m_2}}{1 + m_2 m_1}\right|$$

$$= \left|\frac{\sqrt{\left(\frac{-2h}{b}\right)^2 - 4\frac{a}{b}}}{1 + \frac{a}{b}}\right|$$

$$\tan\theta = \left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b}\right|$$

$$\theta = \tan^{-1}\left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b}\right|$$

ఈ సూత్రం యొక్క పర్యవసానంగా, మనం క్రింది వాటిని నిర్ధారించవచ్చు.

1. m_1 మరియు m_2 లు వాస్తవాలు మరియు విభిన్నాలు అయిన $h^2 - ab > 0$. అయితే ఆ రేఖలు వాస్తవాలు మరియు విభిన్నాలు

2. m_1 మరియు m_2 వ వాస్తవాలు మరియు సమానము అనగా $h^2 - ab = 0$ అయితే ఆ రేఖలు వాస్తవాలు మరియు ఏకీభవించును.

3. m_1 మరియు m_2 లు వాస్తవాలు కానిచో అనగా $h^2 - ab < 0$ అయితే ఆ రేఖలు వాస్తవాలు కాదు. (కల్పితాలు)

$\tan\theta = 0$ అనగా $h^2 - ab = 0$ అయిన

(6.30). తో సూచించబడిన సరళరేఖలు సమీంతరాలు (రెండునూ ములబిందువు ద్వారా పోవును. కావున అది ఏకీభవన రేఖలు) $\cot\theta = 0$ అయిన లంబంగా ఉండును అనగా $a+b = 0$

సరళరేఖలయుగ్మం	సమాంతరంకు నియమం	లంబంకునియమం
$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$	$h^2 - ab = 0$	$a + b = 0$

ఉదాహరణ 6.35 $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ సరళరేఖలయుగ్మంకు లంబంగా మరియు మూలబిందువు ద్వారా పోవు సరళరేఖలయుగ్మం సమీకరణం కనుగొనండి.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 313

14-05-2022 11:23:53

సాధన

వాలు m_1 మరియు m_2 గాగల రెండు రేఖలు

$y - m_1 x = 0$ మరియు $(y - m_2 x) = 0$ (6.31) అనుకొందాం.

ఈ రెండు రేఖల సంయుగ్మసమీకరణం

$$(y - m_1 x)(y - m_2 x) = 0$$

$$y^2 - (m_1 + m_2)xy + m_1 m_2 x^2 = 0 \quad (6.32)$$

ఇచ్చినది, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ (6.33)

అందువలన, $m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b}$ మరియు $m_1 m_2 = \frac{a}{b}$ (6.34)

(6.31) కి లంబరేఖలు

$$y + \frac{1}{m_1}x = 0 \text{ మరియు } y + \frac{1}{m_2}x = 0$$

రెండు రేఖల సంయుగ్మ సమీకరణం

$$(m_1 y + x)(m_2 y + x) = 0$$

$$m_1 m_2 y^2 + (m_1 + m_2)xy + x^2 = 0$$

(6.34) – ని ఉపయోగించగా

$$\frac{a}{b}y^2 - \frac{2h}{b}xy + x^2 = 0$$

కావలసిన సమీకరణం $ay^2 - 2hxy + bx^2 = 0$ (6.35)

6.5.3 $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ సరళరేఖల మధ్యకోణల సమద్విఖండన రేఖల సమీకరణం (Equation of the angle bisectors of pair of straight lines):

$y - m_1 x = 0$ మరియు $y - m_2 x = 0$ రెండు సరళరేఖల సమీకరణం అనుకొనిన

$$m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b} \text{ మరియు } m_1 m_2 = \frac{a}{b}$$

సమద్విఖండన యొక్క సమీకరణం అనునది ఒక బిందువు నుండి ఈ రెండు సరళరేఖలకు గీచిన లంబాలు సమానము అగు బిందుపథం అవుతుందని మనకు తెలుసు.

సమద్విఖండనలము యొక్క బిందు పథ పై $P(p,q)$ ఏదైన బిందువు అనుకొందాం.

$y - m_1 x = 0$ సరళరేఖకు $P(p, q)$ నుంచి గీచిన లంబం $y - m_2 x = 0$ సరళరేఖకు $P(p, q)$ నుంచి లంబం సమానం కావున.

$$\pm\frac{q - m_1 p}{\sqrt{1 + m_1^2}} = \pm\frac{q - m_2 p}{\sqrt{1 + m_2^2}}$$

$$(q - m_1 p)^2(1 + m_2^2) = (q - m_2 p)^2(1 + m_1^2)$$

సూక్ష్మీకరించగా మనకు లభించునది.

$$p^2 - q^2 = 2pq\left(\frac{1 - m_1 m_2}{m_1 + m_2}\right) \Rightarrow p^2 - q^2 = 2pq\left(\frac{1 - \frac{a}{b}}{-\frac{2h}{b}}\right)$$

అది $$\frac{p^2 - q^2}{a - b} = \frac{pq}{h}$$

$\therefore$ $P(p, q)$ -యొక్క బిందుపథం, $$\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h} \quad (6.36)$$

ఉదాహరణ 6.36 $x^2-4xy+y^2=0$, **x + y = 3 సరళరేఖలు ఒక సమబాహు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయని చూపండి.**

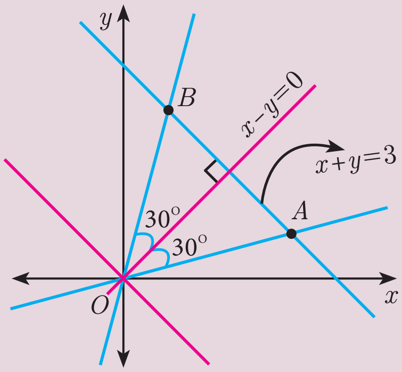
సాధన

సరళరేఖ $x+y=3$ సరళరేఖయుగ్మం $x^2-4xy+y^2=0$ ని A మరియు B వద్ద ఖండించును.

$x^2-4xy+y^2=0$ రేఖలమధ్య కోణం

$$\tan\theta = \left|\frac{2\sqrt{h^2-ab}}{a+b}\right| = \frac{2\sqrt{4-1}}{2} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad \angle AOB = \theta = \tan^{-1}\sqrt{3} = 60^\circ$$



పటము 6.50

ΔAOB కోణసమద్విఖండన రేఖలు

$$\frac{x^2-y^2}{a-b} = \frac{xy}{h}$$

$$\Rightarrow \quad x^2\text{-}y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x+y)(x-y)=0$$

$$\Rightarrow \quad x+y=0 \text{ మరియు } x-y=0$$

కొణ సమద్విఖండన రేఖలు $x-y=0$ అనునది AB ద్వారా పోవు ఇచ్చినరేఖలకు లంబం అది, $x+y=3$ ΔOAB ఒక సమద్విబాహు త్రిభుజం

$\Rightarrow \quad \angle ABO = \angle BAO = 60^\circ$,

అందువలన ఇచ్చిన సరళరేఖలు ఒక సమబాహుత్రిభుజం ను ఏర్పరచును.

ఉదాహరణ 6.37 $x^2-2cxy-y^2=0$ మరియు $x^2-2dxy-y^2=0$ లద్వారా సరళరేఖలయుగ్మలను ప్రతి యుగ్మం మరొక యుగ్మం మధ్య గల కోణంనకు సమద్విఖండన చేయునట్లు సూచించిన $cd=-1$ అని నిరూపించండి.

సాధన

ఇచ్చిన సరలరేఖలయుగ్మలు

$$x^2-2cxy-y^2 = 0 \qquad (6.37)$$

$$x^2-2dxy-y^2 = 0 \qquad (6.38)$$

(6.37) యొక్క కోణసమద్విఖండన రేఖల సమీకరణం.

$$\frac{x^2-y^2}{2} = \frac{xy}{-c}$$

$$cx^2+2xy-cy^2 = 0 \qquad (6.39)$$

(6.37) యొక్క కోణ సమద్విఖండన (6.38) అని ఇవ్వబడినది కావున సమీకరణాలు

$$x^2-2dxy-y^2 = 0$$

$$cx^2+2xy-cy^2 = 0 \text{ అనునది}$$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 315 14-05-2022 11:23:55

(6.37) యొక్క కోణ సమద్విఖండన లాగా ఒకే సమీకరణాను సూచించును. పై రెండు సమీకరణాలో ని సజాతి పదాలను పోల్చగా

$$\frac{1}{c} = \frac{-2d}{2} = \frac{-1}{-c}$$

$$\Rightarrow \quad cd = -1$$

6.5.4 సరళరేఖలయుగ్మం యొక్క సాధారణరూపం (General form of pair of straight lines)

$l_1x + m_1y + n_1 = 0$ మరియు $l_2x + m_2y + n_2 = 0$ అను రెండు చరసరళరేఖలును తీసుకొందాం రెండు సరళరెఖల సంయుక్త సమీకరణం

$$(l_1x + m_1y + n_1)(l_2x + m_2y + n_2) = 0$$

పై రెండు కారణాంకాలను ఒకదానికొకటి గుణించిన, క్రింది సూచించిన రూపంలో మిక్కిలి సరైన ఒక సరళరేఖల యుగ్మం యొక్క సాధారణ సమీకరణం మనకు లభించును.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad (6.40)$$

పై సమీకరణం రెండవ తరగతి, అసమఘాత సమీకరణం అగును.

$$a = l_1l_2 \qquad 2g = l_1n_2 + l_2n_1$$

$$b = m_1m_2 \qquad 2f = m_1n_2 + m_2n_1$$

$$c = n_1n_2 \qquad 2h = l_1m_2 + l_2m_1$$

(6.40) సమీకరణం యొక్క రూపం ఎల్లప్పుడు సరళరేఖయుగ్మలను సూచిస్తుంది. దీనిని $l_1x + m_1y + n_1 = 0$ మరియు $l_2x + m_2y + n_2 = 0$ రూపంలోని కారణాంకాలుగా కారణంకపరుచుట వీలగును.

రెండవ తరగతి సాదారణ రూపం $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ సరళరేఖలయుగ్మంను సూచించును.

x లోని ఒక ద్విఘాతం వలె సరళరేఖలయుగ్మం $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ సమీకరణంను క్రమపరుచగా, మనము పొందునది.

$$ax^2 + 2(hy + g)x + (by^2 + 2fy + c) = 0$$

$$x = \frac{-(hy+g) \pm \sqrt{(hy+g)^2 - a(by^2 + 2fy + c)}}{a}$$

$$ax + hy + g = \pm\sqrt{(hy+g)^2 - a(by^2 + 2fy + c)}$$

అది, $$ax + hy + g = \pm\sqrt{(h^2 - ab)y^2 + 2(gh - af)y + g^2 - ac}$$

పైన గల ప్రతి సమీకరణాలు ఒక సరళరేను సూచించును కావున అది x మరియు y లో మొదటి తరగతి అగును. కావున రాడికల్ గుర్తు క్రింది గల సమాసం ఖచ్చిత వర్గమగును మరియు దానికొరకు నియమము.

$$4(gh - af)^2 - 4(h^2 - ab)(g^2 - ac) = 0 \qquad (\because \Delta = B^2 - 4AC = 0)$$

సూక్షేకరించే a తో భాగించగా

మనం పొందునది $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ లేదా

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 316 14-05-2022 11:23:56

$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix} = 0$ (నిర్ధారకం యొక్క విస్తరణను తరువాత అధ్యాయంలో అభ్యసిస్తాము,)

నిరూపణ లేకుండా ఫలితాలు

(i) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ సమీకరణం సూచించే సరళరేఖలు సమాంతరాలు.

$\frac{a}{h} = \frac{h}{b} = \frac{g}{f}$ లేదా $bg^2 = af^2$ అయిన

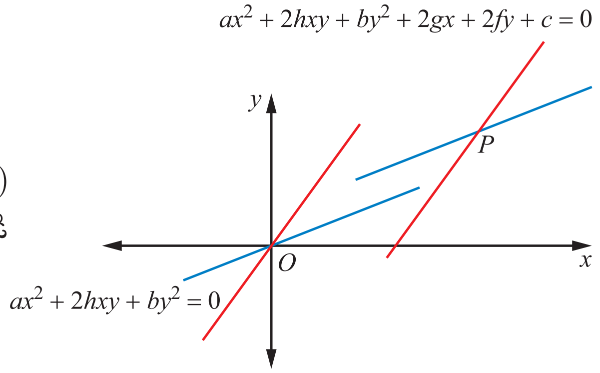
(ii) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ఒక జత సమాంతరరేఖలను సూచించిన వాటి మధ్య దూరం $2\sqrt{\frac{(g^2 - ac)}{a(a+b)}}$ లేదా $2\sqrt{\frac{(f^2 - bc)}{b(a+b)}}$

సరళరేఖలయుగ్మం యొక్క సమీకరణాల మధ్య సంబంధం (The relation between the equations of pair of straight lines)

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0 \quad (6.41)$$

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad (6.42)$$

పై సరళరేఖలయుగ్మలు (6.41) మరియు (6.42) లవాలులు వాటి x^2, xy మరియు y^2 గుణకాల పై ఆధారపడి ఉండును.



పటము 6.51

(i) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ సమీకరణం సరళరేఖలయుగ్మలను సూచించినా $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ మూల బిందువు ద్వార పోవు సరళరేఖలయుగ్మము సూచించును ఇది మొదటి జతకు సమాంతరాలు. (6.41) యొక్క ఖండన బిందువు (0, 0) మరియు (6.42) యొక్క ఖండనబిందువు $P\left(\frac{hf - bg}{ab - h^2}, \frac{gh - af}{ab - h^2}\right)$.

(ii) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ సమీకరణంచే సూచించబడు సరళరేఖల మధ్య కోణం θ అయితే ఇది $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ చేసూచించబడు రెండు సరళ రేఖల మధ్య కోణం వలె ఒకే విలువను కలిగి ఉంటుంది.

అందువలన $\theta = \tan^{-1}\left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b}\right|$

(iii) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ సమీకరణంచే సూచించబడు రెండు సరళరేఖలు లంబకోణంలో ఉన్నట్టయితే $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ చేసూచించబడు రెండు రేఖలు కూడ లంబకోణంలో ఉంటుంది మరియు నియమం $a + b = 0$ అగును.

ఉదాహరణ 6.38 $\lambda x^2 - 10xy + 12y^2 + 5x - 16y - 3 = 0$ సమీకరణం సరళరేఖలయుగ్మంను సూచించిన (i) λ యొక్క విలువను మరియు ఈ రేఖల యొక్క విడి సమీకరణాలను (ii) సరళరేఖల ఖండన బిందువు (iii) రేఖలమధ్యకోణం లను కనుగొనండి.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 317 14-05-2022 11:23:57

సాధన

(i) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ సాదారణ సమీకరణం

ఇచ్చిన సమీకరణం $\lambda x^2 - 10xy + 12y^2 + 5x - 16y - 3 = 0$

రెండవ తరగతి యొక్క సాదారణ సమీకరణంలో ఇవ్వబడిన నమీకరణంను పోల్చగా

$$a = \lambda,\ b = 12,\ c = -3,\ h = -5,\ g = \frac{5}{2},\ f = -8$$

సరళరేఖాయుగ్మం యొక్క నియమాన్ని అనువర్తించగా

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$$

$$,\quad \lambda(12)(-3) + 2(-8)\left(\frac{5}{2}\right)(-5) - \lambda(-8)^2 - 12\left(\frac{5}{2}\right)^2 - (-3)(-5)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad -36\lambda + 200 - 64\lambda - 75 + 75 = 0 = \lambda = 2$$

సమీకరణం $2x^2 - 10xy + 12y^2 + 5x - 16y - 3 = 0.$

పై సమీకరణం నుంచి రెండవ తరగతి పదాలను మొదట కారణాంకపరచగా మనం పొందునది

$$2x^2 - 10xy + 12y^2 \equiv (x - 2y)(2x - 6y)$$

$$2x^2 - 10xy + 12y^2 + 5x - 16y - 3 \equiv (x - 2y + c_1)(2x - 6y + c_2)$$

సజాత పదాలను సమానం చేయుగా మనకు అభించునది

$$2c_1 + c_2 = 5,\quad 3c_1 + c_2 = 8,\quad c_1 c_2 = -3$$

మొదటి రెండు సమీకరణాలను సాధించగా పొందునది.

$$c_1 = 3,\ c_2 = -1$$

ఈ రేఖల యొక్క విడి సమీకరణాలు

$x - 2y + 3 = 0$ మరియు $2x - 6y - 1 = 0$

(ii) రెండు సరళరెఖ యొక్క సమీకరణాతను సాధించగా సరళరేఖల యొక్క ఖండన బిందువున పొందవచ్చు. $(x,\ y) = \left(-10, -\frac{7}{2}\right)$ $\left[\left(\frac{hf - bg}{ab - h^2}, \frac{gh - af}{ab - h^2}\right)\right.$ సూత్రంఉపయోగించి$\left.\right]$

(iii) సరళరేఖల మధ్యకోణం

$$\tan\theta = \left|\frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|$$

$$= \left|\frac{2\sqrt{25 - 24}}{2 + 12}\right| = \frac{1}{7}$$

కావున, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 318 14-05-2022 11:23:58

ఉదాహరణ 6.39 ఒక విద్యార్థి తన ఇంటి నుంచి పాఠశాలకు సగటున గంటకు 6 కిమీ వేగంతో నడిచినచో పాఠశాల ప్రారంభానికి పది నిమిషాల ముందు పాఠశాలకు చేరుకుంటాడు అతని యొక్క సగటు వేగం గంటకు 4 కి.మీ అయిన అతను అతని యొక్క పాఠశాలకు 5 నిమిషాలు ఆలస్యంగా చేరుకుంటాడు. అతను ప్రతిరోజు 8.00 A.M వద్ద పాఠశాలకు నడవడం ప్రారంభిస్తే (i) ఇంటికి పాఠశాలకు మధ్యగల దూరం (ii) పాఠశాలకు సరైన సమయంకు చేరుకోవడానికి కనిష్ఠ సగటు వేగం మరియు పాఠశాలకు చేరుకోవడానాకి తీసుకొను సమయం (iii) పాఠశాలగేటును మూసేసమయంను (iv) విద్యార్థినడిచే మార్గం యొక్క సరళరేఖలయుగ్మ సమీసరణంను కనుగొనండి.

సాధన

x - అక్షంను కాలంగంటలో మరియు y - అక్షంను దూరం కిలోమీటర్లలో తీసుకొంటాం ఇవ్వబడిన సమాచారం నుండి మనకు గలది

$$y = 6\left(x - \frac{10}{60}\right) \Rightarrow y = 6x - 1 \qquad (6.43)$$

$$y = 4\left(x + \frac{5}{60}\right) \Rightarrow y = 4x + \frac{1}{3} \qquad (6.44)$$

పై రెండు సమీకరణాలను సాధించగా మనకులభించునది $(x,y) = \left(\frac{2}{3}, 3\right)$

$x = \frac{2}{3}$ గంటలు $= 40$ నిమిషాలు, $y = 3$ కి.మీ.

(i) ఇంటికి పాఠశాలకు మద్య దూరం 3 కి.మీ

(ii) సరైనసమయునకు పాఠశాలకు చేరుకోవడానికి పట్టు కనిష్ఠ సగటు వేగం

$= \frac{60}{40} \times 3 = 4.5$ కి.మీ. / గంట

మరియు పట్టు సమయం $\frac{2}{3}$ గంటలు లేదా 40 నిమిషాలు.

(iii) 8.40 A.M కు. పాఠశాల గేట్లు మూయబడును

(iv) పాఠశాలకు నడిచేమార్గం యొక్క సరళరేఖయుగ్మం

$$(6x - y - 1)\left(4x - y + \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$72x^2 - 30xy + 3y^2 - 6x + 2y - 1 = 0 \qquad (6.45)$$

https://www.geogebra.org/graphing, ఉపయోగించి గ్రాఫ్ గీయండి *https://www.geogebra.org/m/fhS6HUtP*

ఉదాహరణ 6.40 $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ యొక్క సరళ రేఖలలో ఒకటి $px + qy = 0$ కు లంబంగా ఉంటే $ap^2 + 2hpq + bq^2 = 0$ అని చూపండి.

సాధన

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ సరళరేఖలయుగ్మం యొక్క వాలులు m_1 మరియు m_2 మరియు $px + qy = 0$ యొక్క వాలు m అనుకొందాము.

అందువలన, $m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b}$, $m_1 m_2 = \frac{a}{b}$ మరియు $m = -\frac{p}{q}$

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ యొక్క సరళరేఖలలో ఒకటి $px + qy = 0$ లంబంగా ఉన్నదికావున

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 319 14-05-2022 11:23:59

$$mm_1 = -1 \text{ లేదా } mm_2 = -1$$
$$\Rightarrow (mm_1 + 1) = 0 \text{ లేదా } (mm_2 + 1) = 0$$
$$\Rightarrow (mm_1 + 1)(mm_2 + 1) = 0$$
$$\Rightarrow (m_1 m_2) m^2 + (m_1 + m_2) m + 1 = 0$$
$$\Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)\left(-\frac{p}{q}\right)^2 + \left(-\frac{2h}{b}\right)\left(-\frac{p}{q}\right) + 1 = 0$$
$$\Rightarrow ap^2 + 2hpq + bq^2 = 0$$

మూలబిందువు ద్వారా పోవు సరళరేఖయుగ్మం రెండువ తరగతి సమఘాతీయ సమీకరణం అగును.

ఉదాహరణ 6.41 $3x - 2y + 2 = 0$ మరియు $3x^2 + 5xy - 2y^2 + 4x + 5y = 0$ లఖండన బిందువులను మూలబిందువును కలిపే సరళరేఖలు లంబంగా ఉంటుందని చూపండి.

సాధన

మూలబిందువు మరియు ఇచ్చిన సమీకరణల ఖండనబిందువులను కలిపే సరళరేఖలు అనునది రెండవ తరగతి సమఘాతియ సమీకరణం.

క్రింది సోపానాలు $3x - 2y + 2 = 0$ తో $3x^2 + 5xy - 2y^2 + 4x + 5y = 0$ ని సమఘాతీయం చేయు మార్గంను చూపును.

$$3x^2 + 5xy - 2y^2 + (4x + 5y)(1) = 0 \text{ మరియు } \frac{(3x - 2y)}{-2} = 1$$
$$3x^2 + 5xy - 2y^2 + (4x + 5y)\left(\frac{3x - 2y}{-2}\right) = 0$$
$$(-2)(3x^2 + 5xy - 2y^2) + (4x + 5y)(3x - 2y) = 0$$

సూక్ష్మీరించగా పొందునది.

$$2x^2 - xy - 2y^2 = 0 \Rightarrow a = 2; b = -2 \Rightarrow a + b = 0$$

x^2 మరియు y^2 యొక్క గణకాలమొత్తం శూన్యం కావున ఈ సరళ రేఖలు లంబంగా ఉంటాయి.

అభ్యాసము 6.4

1. $x - 2y - 3 = 0$ మరియు $x + y + 5 = 0$ విడివిడి సమీకరణాల యొక్క సంయుక్త సమీకరణంను కనుగొనండి.
2. $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x - 3y - 4 = 0$ ఒక సమాంతర రేఖలజతను సూచించునని చూపండి.
3. $2x^2 + 3xy - 2y^2 + 3x + y + 1 = 0$ ఒక లంబరేఖల జతను సూచించదనని చూపండి..
4. ఖండనరేఖతజతనుసూచించును అవి మరియు వాటి మధ్య కోణం $\tan^{-1}(5)$ అని చూపుము.
5. $y = x$ అనే సరళరేఖతో α కోణం చేస్తు, మూలబిందువు ద్వారా పొవు సరళరేఖలసమీకరణం $x^2 - 2xy \sec 2\alpha + y^2 = 0$ అని నిరూపించండి.
6. $2x - 3y + 1 = 0$ మరియు $5x + y - 3 = 0$ రేఖలకు లంబంగాను మరియు $(1,3)$ బిందువుల ద్వారా పోవు సరళరేఖలయుగ్మాల సమీకరణం కనుగొనండి.
7. క్రింది సరళరేఖలయుగ్మాల యొక్క సమీకరణాలను వేరుచేయండి.
   (i) $3x^2 + 2xy - y^2 = 0$ (ii) $6(x-1)^2 + 5(x-1)(y-2) - 4(y-2)^2 = 0$
   (iii) $2x^2 - xy - 3y^2 - 6x + 19y - 20 = 0$
8. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ రేఖాయుగ్మంలో రేఖలలో ఒక దాని వాలు రెండోదాని వాలుకు రెట్టింపయితే $8h^2 = 9ab$ అని చూపండి.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 320 14-05-2022 11:24:00

9. $ax^2+2hxy+by^2=0$ రేఖాయుగ్మంలో రేఖలలో ఒక దాని వాలు రెండోదాని వాలుకు రెట్లు అయిన $3h^2=4ab$ అని చూపండి.

10. $x^2-4xy+y^2=0$ సరళ రేఖాయుగ్మం మరియు PQ రేఖతో ΔOPQ ఏర్పడినా PQ సమీకరణం $x+y-2=0$ సమీకరణం మూలబిందువు O నుంచి ΔOPQ గీచిన మధ్యగత రేఖా సమీకరణంను కనుగొనండి,

11. క్రింది సమీకరణం లంబరేఖల జతను సూచింన p మరియు q విలువను కనుగొనండి. $6x^2+5xy-py^2+7x+qy-5=0$.

12. క్రింది సమీకరణం సరళ రేఖలయ్యుంన సూచించిన k విలువను కనుగొనము. సరళరేఖలు సమాంతరాల లేదా ఖండించు కొనునా లని కనుగొనండి. $12x^2+7xy-12y^2-x+7y+k=0$.

13. $12x^2+2kxy+2y^2+11x-5y+2=0$ సమీకరణం రెండు సరళరేఖలను సూచించిన k విలువను కనుగొనండి.

14. $9x^2-24xy+16y^2-12x+16y-12=0$ సమీకరణం ఒక జత సమాంతరేఖలను సూచించును అని చూపండి మరిము వాటి మధ్య దూరంను కనుగొనండి.

15. $4x^2+4xy+y^2-6x-3y-4=0$ సమీకరణం ఒక సమాంతరేఖల జతను సూచిస్తుంది లని చూపండి. వాటిమధ్య దూరంను కనుగొనండి.

16. $ax^2+2hxy+by^2=0$ సూచించే సరళరేఖలలో ఒక సరళరెఖ నిరూపకాక్షాల మధ్య కోణాన్ని సమద్విఖండన చేస్తే $(a+b)^2=4h^2$ అనీ చూపండి.

17. $x^2-2kxy-y^2=0$ సరళరేఖయుగ్మం $x^2-2lxy-y^2=0$ సరళరేఖలయుగ్మల మధ్య గల కోణనుసద్విఖండంన చేసినట్లయితే రెండవదిగా గల జతను కూడ సమద్విఖండన చేయునని చూపుము.

18. $3x-2y-1=0$ మరియు $3x^2+5xy-3y^2+2x+3y=0$ ఖండన బిందువులను మూలబిందువు కలిపే సరళరేఖలు లంబంగా ఉంటుందని నిరూపించుము.

T5WBR

అభ్యాసము 6.5

సరైన సమాధానమును ఎన్నుకొనుము

1. y అక్షంనుంచి ఒక బిందువుకు గల దూరం మూలబిందువు నుంచి దానాకి గల దూరంలో సగము. ఈ బిందువు యొక్క బిందు పథమీకరణం.

   (1) $x^2+3y^2=0$ (2) $x^2-3y^2=0$ (3) $3x^2+y^2=0$ (4) $3x^2-y^2=0$

2. $(at^2, 2at)$ యొక్క బిందు పథం సమీకరణం క్రింది వినిలో ఏది

   (1) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (2) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (3) $x^2+y^2=a^2$ (4) $y^2=4ax$

3. క్రింది బిందువులలో ఏది $3x^2+3y^2-8x-12y+17=0$ యొక్క బిందు పథం పై కలదు.

   (1) (0,0) (2) $(-2,3)$ (3) $(1,2)$ (4) $(0,-1)$

4. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{25}=k$ బిందు పథంపై $(8,-5)$ ఉంటే k విలువ

   (1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3

5. (2, 3) మరియు $(-1, 4)$ బిందువును కలువు సరళరేఖ (α,β) బిందువు ద్వారా వెళ్ళినట్లైతే

   (1) $\alpha+2\beta=7$ (2) $3\alpha+\beta=9$ (3) $\alpha+3\beta=11$ (4) $3\alpha+\beta=11$

6. $3x-y=-5$ రేఖతో 45° కి కోణం చే సరళరేఖ వాలు

   (1) $1,-1$ (2) $\frac{1}{2},-2$ (3) $1,\frac{1}{2}$ (4) $2,-\frac{1}{2}$

7. నిరూపఅక్షలతో I పాదం లో $4+2\sqrt{2}$ చుట్టుకొలతగల సమద్విబాహు త్రిభుజంను ఏర్పరచు సరళరేఖ సమీకరణం

(1) $x+y+2=0$ (2) $x+y-2=0$ (3) $x+y-\sqrt{2}=0$ (4) $x+y+\sqrt{2}=0$

8. ఒక చుతుర్భుజం యొక్క నాలుగు శీర్షాలు (–2, 4), (–1, 2), (1,2) మరియు (2, 4) వరుసగా క్రమంలో తీసుకొనిన (–1, 2) శీర్షంగుండా పోవుచూ చరుర్భుజన్ని. రెండు సమానవైశాల్యాలుగా విడగొట్టు సరళరేఖ సమీకరణం,

(1) $x + 1 = 0$ (2) $x + y = 1$ (3) $x + y + 3 = 0$ (4) $x - y + 3 = 0$

9. (1, 2) మరియు (3, 4) లను కలిపై రేఖాఖండము యొక్క లంబసమద్విఖండనరేఖ నిరూపక్షాలలో చేయు అంతరఖండాలు

(1) 5, –5 (2) 5 , 5 (3) 5, 3 (4) 5, –4

10. వాలు 2 మరియు మూలబిందువు నుంచి లంబం పోడవు $\sqrt{5}$ కు సమానమైన సరళరేఖ సమీకరణం

(1) $x-2y=\sqrt{5}$ (2) $2x-y=\sqrt{5}$ (3) $2x-y=5$ (4) $x-2y-5=0$

11. $5x-y=0$ రేఖలంబంగా ఉన్న రేఖ నిరూపక అక్షాలతో త్రిభుజాన్ని ఏర్పరచిను. త్రిభుజవైశాల్యం 5 చదరపు యూనిట్లు అయిన సమీకరణ

(1) $x+5y\pm5\sqrt{2}=0$ (2) $x-5y\pm5\sqrt{2}=0$

(3) $5x+y\pm5\sqrt{2}=0$ (4) $5x-y\pm5\sqrt{2}=0$

12. $x-y+5=0$ రేఖ కు లంబంగా y అక్షంమొక్క ఖండనబిందువుగుండా పోవు సరళరేఖ సమీకరణం

(1) $x-y-5=0$ (2) $x+y-5=0$ (3) $x+y+5=0$ (4) $x+y+10=0$

13. ఒక సమబాహుత్రిభుజం యొక్క శీర్షం (2, 3) కు ఎదురుగాఉన్న ఆధారం యొక్క సమీకరణం $x + y = 2$ అయిన భుజం యొక్క పొడవు.

(1) $\sqrt{\frac{3}{2}}$ (2) 6 (3) $\sqrt{6}$ (4) $3\sqrt{2}$

14. p మరియు q $(p+2q)x+(p-3q)y = p-q$ సరళరేఖ క్రింది బిందువులలో ఏబిందువుగుండా పోవును

(1) $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ (2) $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5}\right)$ (3) $\left(\frac{3}{5},\frac{3}{5}\right)$ (4) $\left(\frac{2}{5},\frac{3}{5}\right)$

15. (1, 2) మరియు (3, 4) బిందువుల నుండి $2x-3y=5$ రేఖ పై సమాన దూరంలో గలబిందువు.

(1) (7, 3) (2) (4, 1) (3) (1, –1) (4) (–2, 3)

16. $y=-x$ రేఖలో (2, 3) బిందువు యొక్క ప్రతిబింబం

(1) (–3, –2) (2) (–3, 2) (3) (–2, –3) (4) (3, 2)

17. $\frac{x}{3}-\frac{y}{4}=1$ సరళరేఖకు మూలబిందువునుంచి గల పోడవు

(1) $\frac{11}{5}$ (2) $\frac{5}{12}$ (3) $\frac{12}{5}$ (4) $\frac{5}{7}$

18. (1, 3) బిందువు గుండా పోతూ $2x-3y+1=0$ కులంబముగా గల సరళరేఖ యొక్క y అంతరఖండం

(1) $\frac{3}{2}$ (2) $\frac{9}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{2}{9}$

19. $x+(2k-7)y+3=0$ మరియు $3kx+9y-5=0$ అనే రెండు సరళరేఖలు లంబంగా ఉంటే k విలువ

(1) $k=3$ (2) $k=\frac{1}{3}$ (3) $k=\frac{2}{3}$ (4) $k=\frac{3}{2}$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 322 14-05-2022 11:24:04

20. చతురస్రం యొక్క ఒక శీర్షం మూలబిందువు వద్ద ఉన్నట్లైతే మరియు $4x+3y-20=0$ సరళ రేఖ వెంబడి ఒక భుజం ఉంటే చతురస్రం యొక్క వైశాల్యం

(1) 20 చదరపు యూనిట్లు (2) 16 చదరపు యూనిట్లు

(3) 25 చదరపు యూనిట్లు (4) 4 చదరపు యూనిట్లు

21. $6x^2+41xy-7y^2=0$ సమీకరణం సూచించు రేఖలు x – అక్షంతో α మరియు β కోణంచేస్తే $\tan\alpha\tan\beta =$

(1) $-\frac{6}{7}$ (2) $\frac{6}{7}$ (3) $-\frac{7}{6}$ (4) $\frac{7}{6}$

22. $x^2-4y^2=0$ మరియు $x=a$ సరళరేఖలతో ఏర్పడు త్రిభుజవైశాల్యం

(1) $2a^2$ (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ (3) $\frac{1}{2}a^2$ (4) $\frac{2}{\sqrt{3}}a^2$

23. $6x^2-xy+4cy^2=0$ చే సూచించురేఖలలో ఒకటి $3x+4y=0$ అయిన c విలువ

(1) –3 (2) –1 (3) 3 (4) 1

24. $x^2-xy-6y^2=0$ సరళరేఖలతో ఏర్పడు అల్పకోణం θ అయిన $\frac{2\cos\theta+3\sin\theta}{4\sin\theta+5\cos\theta}$

(1) 1 (2) $-\frac{1}{9}$ (3) $\frac{5}{9}$ (4) $\frac{1}{9}$

25. $x^2+2xy\cot\theta-y^2=0$ చే సూచించు లేఖలలో ఒక దాని సమీకరణం

(1) $x-y\cot\theta=0$ (2) $x+y\tan\theta=0$

(3) $x\cos\theta+y(\sin\theta+1)=0$ (4) $x\sin\theta+y(\cos\theta+1)=0$

సారంశము (Summary)

ఇవ్వబడిన సమాచరం అనుగుణంగా సరళరేఖయొక్క రకాలు.

వ.స	ఇచ్చిన సమాచారం	సరళరేఖ యొక్క సమీకరణం
(i)	వాలు (m) మరియు y - అంతరఖండం (b)	$y=mx+b$
(ii)	వాలు (m) మరియు బిందువు (x_1,y_1)	$y-y_1=m(x-x_1)$
(iii)	రెండు బిందువులు (x_1,y_1) మరియు (x_2,y_2)	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$
(iv)	x-అంతరఖండ (a) మరియు y - అంతరఖండం (b)	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
(v)	అబిలంబం పోడవు (p) కోణం (α)	$x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$
(vi)	పరామితి రూపము పరామితి (r)	$\frac{x-x_1}{\cos\theta}=\frac{y-y_1}{\sin\theta}=r$
(vii)	సాదారణ సమీకరణం	$ax+by+c=0$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 323 14-05-2022 11:24:05

రేఖలయొక్క రూపాలు	సమాంతరంగా ఉండడానికి నియమం	లంబంగాఉండడానికి నియమం
$y = m_1 x + c_1$ మరియు $y = m_2 x + c_2$	$m_2 = m_1$	$m_1 m_2 = -1$
$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ మరియు $a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$	$a_1 b_2 = a_2 b_1$	$a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$

ఒక బిందువు $P(x_1, y_1)$ అనునది $ax + by + c = 0,\ (c \neq 0)$ రేఖ యొక్క మూల బిందువు వైపు లేదా మూలబిందువు లేని వైపు గలదని $ax_1 + by_1 + c$ మరియు c ల యొక్క ఒక గుర్తు లేదా లేదా వ్యతిరేఖ గుర్తులు ఆదారంగా చెప్పవచ్చును.

(x_1, y_1) మరియు (x_2, y_2) రెండు బిందువుల మధ్య దూరం

$$D = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$P(x_1, y_1)$ బిందువు నుంచి $ax + by + c = 0$ రేఖకు గల మధ్య గల దూరం $\left|\dfrac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$

$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$ మరియు $a_1 x + b_1 y + c_2 = 0$ అను రెండు సమాంతర రేఖల వధ్య దూరం $\dfrac{|c_2 - c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

(x_1, y_1) బిందువు ద్వారా పోతూ $ax + by + c = 0$ సరళరేఖకు సమాంతరంగాగల సరళరేఖ $ax + by = ax_1 + by_1$ మరియు లంబంగాగల సరళరేఖ $bx - ay = bx_1 - ay_1$

$ax + by + c = 0$ రేఖ దృష్ట్యా $P(x_1, y_1)$ బిందువు యొక్క ప్రతిబింబ నిరూపకాలు క్రింది రేఖ ద్వారా పోందవచ్చును.

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = -\frac{2(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$$

సరళరేఖలయుగ్మం	సమాంతరంకు నియమం	లంబంకు నియమం
$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$	$h^2 - ab = 0$	$a + b = 0$

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ సరళరేఖలమధ్యగల కోణ సమద్విఖండన రేఖల సమీకరణం $\dfrac{x^2 - y^2}{a - b} = \dfrac{xy}{h}$

రెండవ తరగతి సాదారణసమీకరణం $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ సరళరెఖలయుగ్మం సూచించులకు నియమం $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$

(i) వాటి మధ్య కోణం $\theta = \tan^{-1}\left|\dfrac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}\right|$ $a + b = 0$ అయితే ఆ రేఖలు లంబాలు

(ii) ఖండన బిందువు

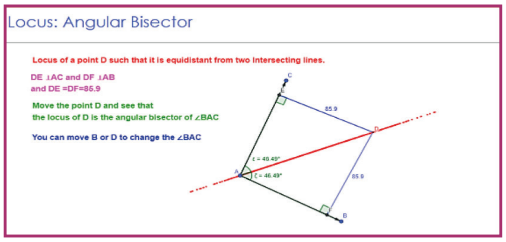
$$P = \left(\frac{hf - bg}{ab - h^2}, \frac{gh - af}{ab - h^2}\right)$$

(iii) $\dfrac{a}{h} = \dfrac{h}{b} = \dfrac{g}{f}$ లేదా $bg^2 = af^2$ అయితే $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ సమీకరణాం సూచించు రెండు సరళరేలు సమాంతరాలు

(iv) $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ఒక జత సమాంతరరేఖలను సూచించిన వాటి మధ్య దూరం $2\sqrt{\dfrac{(g^2 - ac)}{a(a + b)}}$ లేదా $2\sqrt{\dfrac{(f^2 - bc)}{b(a + b)}}$.

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 324 14-05-2022 11:24:08

అంతర్జాలకృత్యము - 6 (అ)



ఆశించు ఫలితాలు

సోపానము -1

బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్ చేసి కింద ఇవ్వబడిన URL లింకును టైపు చేయుము (లేదా) QR కోడ్‌ను స్కాన్ చేయుము.

సోపానము -2

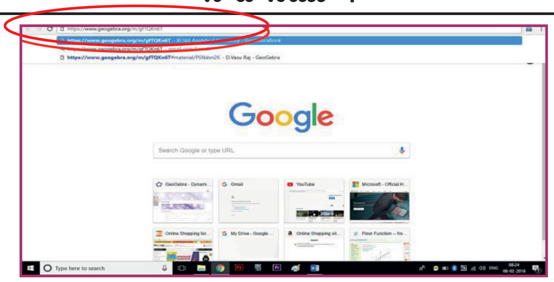
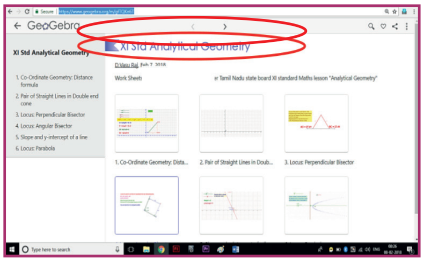
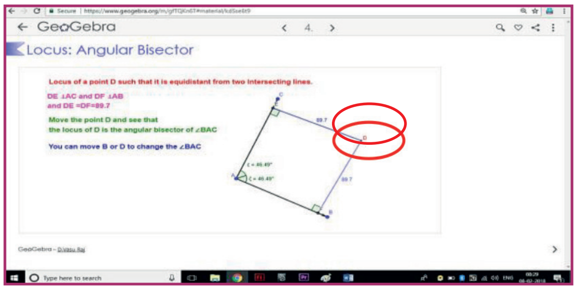
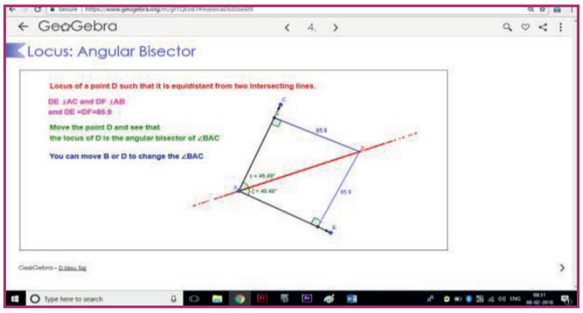
11వ తరగతిలో Geogebra workbook నందు వైశ్లేషిక రేఖాగణితము తెరచుకొనును. దానిలో 5 కన్నా ఎక్కువ worksheets లు ఉండును. దానిలో కావలసిన ఒక worksheet ను ఎంపిక చేయుము. ఉదాహరణకు బిందుపదము : కోణ సమద్విఖండనరేఖ

సోపానము -3

బిందుపదము కోణ సమద్విఖండన worksheet ఓపెన్ అగును. ఆ పేజిలో D బిందువు కదిపి D యొక్క బిందుపదము చూడవచ్చు.

సోపానము -4

D బిందువు రెండు రేఖలకు సమాన లంబ దూరంలో జరిపి బిందుపథము ఏర్పరచుటను గమనించవచ్చు.

సోపానము-1	సోపానము-2
	
సోపానము-3	**సోపానము-4**
	

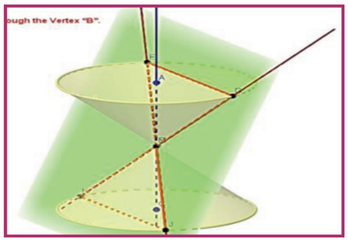
* చిత్రములు మార్గమును చూపుటకు మాత్రము

Analytical GeometryGeoGebraWorkbook : https://ggbm.at/QNaNghJZ

6X30B

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 325 14-05-2022 11:24:08

అంతర్జాలకృత్యము – 6 (ఆ)



సోపానము –1

బ్రౌజర్‌ను ఓపెన్ చేసి క్రింద ఇవ్వబడిన URL లింకును టైపు చేయుము లేదా QR కోడ్ ను స్కాన్ చేయుము

సోపానము –2

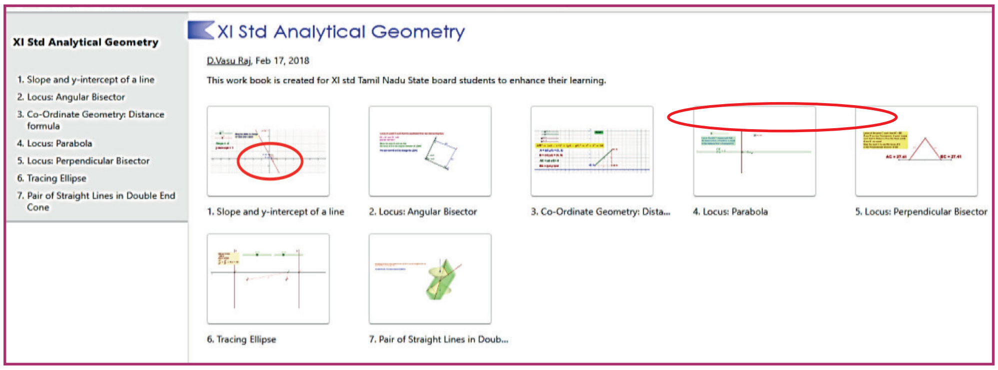
GeoGebra workbook నందు XI వ తరగతిలోని వైశ్లేషిక రేఖాగనితము తెరచుకొనును. దానిలో 7 work-sheets ఇవ్వబడియుండును. మనకు కావలసిన ఒక worksheet ను ఎంపిక చేయుము.

ఉదాహరణకు "PairofStraightLineinDoubleEndCone" ను ఎంపిక చేయుము.

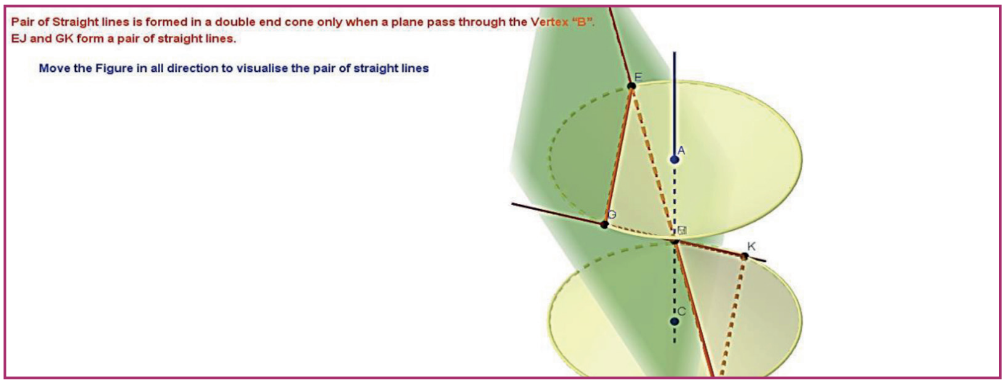
సోపానము 3

ఒక తలము రెండు మొనలు గల శంఖువును దాని శీర్షము ద్వారా ఖండించినపుడు లంబ సరళరేఖ ఏర్పడుటను చూడవచ్చు. E మరియు D బిందువులను కదిపి PairofStraightLine ను పొందవచ్చు.

సోపానము–1



సోపానము–2



* చిత్రములు మార్గమును చూపుటకు మాత్రము

Analytical GeometryGeoGebraWorkbook : https://ggbm.at/QNaNghJZ

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Chapter_6.indd 326 14-05-2022 11:24:08

జవాబులు

అభ్యాసము 1.1

(1) (i) $\{2, 3, 5, 7\}$ (ii) $\{1\}$ (iii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
(iv) $\{-5\}$ (2) $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}$ (3) (i) పరిమితం
(ii) అపరిమితం (iii) అపరిమితం (iv) అపరిమితం
(v) అపరిమితం (5) సత్యము కానిది (6) 0
(7) 128 (8) $\{0, 1, 2, 3\}$ (9) $A = \{x, y, z\}$ మరియు $B = \{1,2\}$
(10) $\{(-1, 0), (-1, 1), (0, 2), (1, 2)\}$

అభ్యాసము 1.2

(1) (i) పరావర్తనం, సౌష్ఠవము కానిది , సంక్రమణం
(ii) పరావర్తనం కానిది, సౌష్ఠవము, సంక్రమణం కానిది
(iii) పరావర్తనం, సౌష్ఠవము కానిది, సంక్రమణం కానిది
(iv) పరావర్తనము , సౌష్ఠవము , సంక్రమణం
(v) $\mathbb{R}$ అనే శూన్య సమితి , పరావర్తనం కానది, సౌష్ఠవము
(2) (i) (c, c) మరియు (d, d) (ii) (c, a)
(iii) దేనితోనూ లేకుండా (iv)(c, c) , (d, d) , (c, a) దీనితో సహా
(3) (i) (c, c) (ii) (c, a) (iii) ఏమీ లేదు (iv) (c, c) మరియు (c, a)
(4) $\{(3, 8), (6, 6), (9, 4), (12, 2)\}$ పరావర్తనం కానిది , సౌష్ఠవము కానిది , సంక్రమణము,
(7) $R = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (4,1), (4,2), (5,1)\}$ పరావర్తనం కానిది , సౌష్ఠవము , సంక్రమణం కానిది , సమానత్వం కానిది , సంబంధము
(8) కనిష్ఠ సమితి = $\{(a, a), (b, b), (c, c)\}$. గరిష్ఠ సమితి = $A \times A$

అభ్యాసము 1.3

(1) అవును , విలోమం అనేది ప్రమేయం కాదు.
(2) $f(-4) = 8$, $f(1) = 0$, $f(-2) = 6$, $f(7) = 0$, $f(0) = 0$
(3) $f(-3) = 1$, $f(5) = 38$, $f(2) = 1$, $f(-1) = -5$, $f(0) = -3$

(4) (i) ఒక ప్రమేయం , ఏక-ఏక ప్రమేయం కాదు మరియు ద్విగుణ ప్రమేయం(ii) ప్రమేయం కాదు.
(5) (i) $f = \{(1, a), (2, a), (3, a), (4, a)\}$ (ii) సాధ్యము కానిది
(iii) సాధ్యము కానిది (iv) $\{(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)\}$
(6) $\mathbb{R} - \{n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}\}, n \in \mathbb{R}$ (7) $\emptyset$ (8) $(-\infty, \frac{-1}{3}]\cup[1, \infty)$
(9) $\mathbb{R} - \{0\}$, $\mathbb{R} - \{0\}$
(10) అన్నీ విలువలుకు x, $(g \circ f) = 0$; $x < 0$ కు $f \circ g = -4x$; $x \geq 0$ కు $f \circ g = 0$
(12) $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$ (13) $x > 0$
(15) మొత్తం కుటుంబ సంపాదన = 0.43 m + 50, దినచర చలామణీ = ₹ 738

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Answer Key.indd 327 24-01-2023 16:00:25

(16) $(A + S)(x) = 55,000 + 0.09x$, మొత్తం ధర = ₹14, 05, 000

(17) $(g \circ f)(x) = 62.115x$

(18) దినచర చలామణి = ₹$(200 - x)x$; మొత్తం కుటుంబ సంపాదన = ₹$100(200 - x)$;
మొత్తం లాభం = ₹$(200 - x)x - 100(200 - x)$

(19) $f^{-1}(x) = \frac{9x}{5} + 32$ (20) $f^{-1}(x) = \frac{x+4}{3}$

అభ్యాసము 1.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(3)	(2)	(4)	(1)	(1)	(4)	(2)	(2)	(3)	(2)	(2)	(3)	(3)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(2)	(4)	(3)	(4)	(3)	(2)	(4)	(4)	(1)	(4)	(2)	(3)	

అభ్యాసము 2.1

(1) $\sqrt{7} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, $-\frac{1}{4} \in \mathbb{Q}$, $0 \in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, $3.14 \in$ □, $4 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$, $\frac{22}{7} \in \mathbb{Q}$

(3) అవును, $4 + \sqrt{3}$, $2 + \sqrt{3}$ (4) అవును, $2 + \sqrt{3}$, $2 - \sqrt{3}$

(5) $\frac{1}{2^{1001}}$

అభ్యాసము 2.2

(1) (i) $-4 < x < 10$ (ii) $\mathbb{R}$ (iii) $\frac{11}{3} \le x \le \frac{13}{3}$ (iv) $-7 < x < 7$

(2) $\left(-\infty, \frac{5}{12}\right) \cup \left(\frac{7}{12}, \infty\right)$ (3) $\left(-\infty, \frac{-7}{3}\right] \cup \left[\frac{7}{3}, \infty\right)$

(4) $\frac{-15}{2} \le x \le \frac{11}{2}$ (5) $\frac{-3}{10} < x < \frac{7}{10}$ (6) సాధన లేదు

అభ్యాసము 2.3

(1) (i) $[-1, 4)$ (ii) $[-3, 5]$ (iii) $(-\infty, 3)$ (iv) $(-\infty, 5)$

(2) (i) 1, 2, 3, 4 (ii) . . . , −3, −2, −1, 0, 1, 2, 3, 4

(3)(i) $\left(-\infty, -\frac{9}{2}\right]$ (ii) . . . , −7, −6, −5 (iii) సాధన లేదు

(4)(i) $(-\infty, 2]$ (ii) $\left(\frac{34}{5}, \infty\right)$ (5) 93

(6) 120l మరియు 300l ల మధ్య

(7) (11, 13), (13, 15), (15, 17), (17, 19) (8) $t = 9$ సెకండ్లు, 11 సెకండ్లు

(9) < 10 గంటలు (10) < ₹ 21,000 లేదా > ₹ 33,000.

అభ్యాసము 2.4

(1) $x^2 - 4x - 21 = 0$ (2) $-\frac{2}{5}\left(x^2 - 2x - 4\right)$ (3) $x^2 + \frac{\sqrt{2}}{3}x + \frac{1}{3} = 0$

(6) (i) $b = 0$ (ii) $3b^2 = 16ac$ (iii) $c = a$

(8) (i) వాస్తవము మరియు విభిన్నాలు (ii) వాస్తవము మరియు విభిన్నాలు (iii) వాస్తవము మరియు విభిన్నాలు

(9) (i) ఖండనం కానిది (ii) రెండు బిందువుల వద్ద ఖండించుట (iii) ఒకే ఒక బిందువు వద్ద స్పర్శించుట

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Answer Key.indd 328 24-01-2023 16:00:29

(10) $\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2$

అభ్యాసము 2.5

(1) $\left[-3, \frac{5}{2}\right]$ (2) $[1, 2]$

అభ్యాసము 2.6

(1) $-\frac{5}{2}$ మరియు $\frac{5}{2}$ (2) $\frac{3+\sqrt{53}}{2}$ మరియు $\frac{3-\sqrt{53}}{2}$

(3) $x=\pm 2$ (4) $x=-\frac{3}{5}$ లేదా -1

అభ్యాసము 2.7

(1) $\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(x^2-\sqrt{2}x+1\right)$ (2) $a=5$

అభ్యాసము 2.8

(1) $(0, 1)\cup(2, \infty)$ (2) $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)\cup(2, 4)$ (3) $(-3, -2]\cup[2, 5)$

అభ్యాసము 2.9

(1) $\frac{1}{2a(x-a)}-\frac{1}{2a(x+a)}$ (2) $\frac{7}{3(x-2)}+\frac{2}{3(x+1)}$

(3) $\frac{1}{6(x-1)}+\frac{2}{15(x+2)}+\frac{-3x+1}{10(x^2+1)}$ (4) $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)^3}$

(5) $\frac{1}{4(x-1)}-\frac{1}{4(x+1)}-\frac{1}{2(x^2+1)}$ (6) $\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2+1}$

(7) $1+\frac{13}{x-3}-\frac{7}{x-2}$ (8) $(x-5)+\frac{32}{(x+3)}-\frac{11}{(x+2)}$

(9) $-\frac{14}{9(x+1)}-\frac{11}{3(x+1)^2}+\frac{14}{9(x-2)}$ (10) $\frac{4}{x+1}+\frac{2x-3}{x^2+1}$

(11) $2+\left(\frac{2}{x+3}-\frac{1}{x-1}\right)$ (12) $\frac{3}{x+1}+\frac{4-3x}{x^2+1}$

అభ్యాసము 2.10

(1) (i) 25 (ii) $\frac{1}{8}$ (iii) $\frac{1}{100}$ (iv) $\frac{1}{9}$ (v) $\frac{1}{3}$

(2) 8 (3) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (4) $\frac{1}{2}$ (5) 2

(6) $\frac{21+7\sqrt{2}+3\sqrt{6}+2\sqrt{3}}{7}$ (7) 5 (8) $\frac{2+2\sqrt{6}}{5}$

అభ్యాసము 2.11

(1) $\log_b y = x$, $(0, \infty)$, $(-\infty, \infty)$ (2) $\frac{5}{6}$

(3) 64 (4) 2 (11) $2\sqrt{2}$ (12) -10

అభ్యాసము 2.12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(2)	(1)	(2)	(3)	(2)	(2)	(3)	(1)	(2)	(2)

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Answer Key.indd 329 24-01-2023 16:00:33

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(2)	(3)	(3)	(2)	(3)	(1)	(3)	(1)	(1)	(4)

అభ్యాసము 3.1

(1) (i) మొదటి పాదము (ii) రెండవ పాదము

(iii) నాల్గవ పాదము (iv) నాల్గవ పాదము

(v) రెండవ పాదము

(2) (i) 35 (ii) 165 (iii) 70 (iv) 90 (v) 270

(8) $k \in [-1, 1]$ (9) $\sec\theta = \frac{p^2+1}{2p}$; $\tan\theta = \frac{p^2-1}{2p}$; $\sin\theta = \frac{p^2-1}{p^2+1}$

(10) $\left(c^2+bd\right)^2 = (ad+cb)^2 + (ac-b^2)^2$

అభ్యాసము 3.2

(1) (i) $\frac{\pi}{6}$ రేడియన్లు (ii) $\frac{3\pi}{4}$ రేడియన్లు (iii) $-\frac{41\pi}{36}$ రేడియన్లు

(iv) $\frac{5\pi}{6}$ రేడియన్లు (v) $\frac{11\pi}{6}$ రేడియన్లు

(2) (i) 60° (ii) 20° (iii) 72° (iv) 420° (v) 200°

(3) $r \approx 31.82$ మీటర్లు (4) $s = \frac{20\pi}{3} = 20.95$ cm

(5) $\theta = 12^\circ 36'$ (6) $s = 7.16$ ft (7) $r_1 : r_2 = 5:4$

(8) సెక్టర్ కోణము $\approx 65^\circ 27' 16''$

(9) 6000° (10) 14° (11) $\frac{3\pi}{4}$

అభ్యాసము 3.3

(1) (i) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (ii) $-\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{1}{2}$ (iv) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(v) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ (vi) $\sqrt{3}$ (vii) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\sin\theta = \frac{2\sqrt{6}}{7}$; $\cos\theta = \frac{5}{7}$; $\tan\theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}$; $\operatorname{cosec}\theta = \frac{7}{2\sqrt{6}}$; $\sec\theta = \frac{7}{5}$; $\cot\theta = \frac{5}{2\sqrt{6}}$

(3) (i) $\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{cosec}\theta = -\frac{2}{\sqrt{3}}$; $\sec\theta = -2$; $\tan\theta = \sqrt{3}$; $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$

(ii) $\sin\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{cosec}\theta = \frac{3}{\sqrt{5}}$; $\sec\theta = \frac{3}{2}$; $\tan\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$; $\cot\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

(iii) $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}}{3}$; $\operatorname{cosec}\theta = -\frac{3}{2}$; $\sec\theta = \frac{3}{\sqrt{5}}$; $\tan\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cot\theta = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

(iv) $\sec\theta = -\sqrt{5}$; $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\cot\theta = -\frac{1}{2}$; $\sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\operatorname{cosec}\theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$

(v) $\cos\theta = \frac{5}{13}$; $\sin\theta = -\frac{12}{13}$; $\operatorname{cosec}\theta = -\frac{13}{12}$; $\tan\theta = -\frac{12}{5}$; $\cot\theta = -\frac{5}{12}$

(5) $\theta = 60^\circ, 120^\circ, 240^\circ, 300^\circ$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Answer Key.indd 330 24-01-2023 16:00:39

అభ్యాసము 3.4

(1) (i) $\sin(x+y)=\frac{220}{221}$ (ii) $\cos(x-y)=\frac{171}{221}$ (iii) $\tan(x+y)=\frac{220}{21}$

(2) (i) $\sin(A+B)=\frac{187}{205}$ (ii) $\cos(A-B)=\frac{156}{205}$

(3) $\cos(x-y)=\frac{4}{5}$ (4) $\sin(x-y)=-\frac{87}{425}$

(5) $\cos 105^\circ=\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$; $\sin 105^\circ=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)=-(2+\sqrt{3})$

(7) $4x^2-2\sqrt{6}x+1=0$ (16) 0 (22) 1 (24) $\frac{2}{11}$

అభ్యాసము 3.5

(1) (i) $\frac{161}{289}$ (ii) $-\frac{7}{25}$ (iii) $\frac{3713}{4225}$ (2)(i) $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ (ii) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$

అభ్యాసము 3.6

(1) (i) $\frac{1}{2}[\sin 63^\circ+\sin 7^\circ]$ (ii) $\frac{1}{2}[\sin 6x+\sin 2x]$ (iii) $\frac{1}{2}[\sin 12\theta+\sin 8\theta]$

(iv) $\frac{1}{2}[\cos 7\theta+\cos 3\theta]$ (v) $\frac{1}{2}[\cos\theta-\cos 9\theta]$

(2) (i) $2\cos 55^\circ\sin 20^\circ$ (ii) $2\cos 40^\circ\cos 25^\circ$

(iii) $2\sin 45^\circ\cos 5^\circ$ (iv) $2\sin 55^\circ\sin 20^\circ$

అభ్యాసము 3.8

(1) (i) $\pi=-\frac{\pi}{4}$; $\theta=n\pi+(-1)^n\left(-\frac{\pi}{4}\right)$, $n\in\mathbb{Z}$ (ii) $\theta=\frac{\pi}{6}$; $\theta=n\pi+\frac{\pi}{6}$, $n\in\mathbb{Z}$

(iii) $\theta=-\frac{\pi}{6}$; $\theta=n\pi+\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $n\in\mathbb{Z}$

(2)(i) $x=0,\frac{\pi}{2},\pi,\frac{3\pi}{2}$ (ii) $x=\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3},\pi$ (iii) $x=\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}$ (iv) $x=0,\pi$

(3)(i) $x=(2n+1)\frac{\pi}{6}$ లేదా $x=\frac{n\pi}{2}+(-1)^n\frac{\pi}{12}$, $n\in\mathbb{Z}$

(ii) $\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$ లేదా $\theta=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$

(iii) $\theta=(2n+1)\frac{\pi}{4}$ లేదా $\theta=2n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$

(iv) $\theta=\frac{n\pi}{3}$ లేదా $\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$ (v) $\theta=2n\pi$ లేదా $\theta=\frac{2n\pi}{3}+\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, $n\in\mathbb{Z}$

(vi) $\theta=(8n+1)\frac{\pi}{4}$, $n\in\mathbb{Z}$ (vii) $\theta=2n\pi+\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{3}$, $n\in$ □

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Answer Key.indd 331 24-01-2023 16:00:45

(viii) $\theta = 2n\pi - \frac{\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}$ (ix) $\theta = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{18},\ n \in \mathbb{Z}$

(x) $\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{10},\ n \in \mathbb{Z}$ (xi) $x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3},\ n \in \mathbb{Z}$

అభ్యాసము 3.9

(2) $\angle A = 75^{\circ}$ (9) 40 మీ॥, 40 మీ॥, 4 మీ॥ (10) 4 మీ॥, 4 మీ॥, 4 మీ॥ మరియు $4\sqrt{3}$ చదరపు మీటర్

అభ్యాసము 3.10

(1) త్రిభుజము నిర్దేషతం కానిది (3) $\angle A = 15^{\circ},\ \angle B = 105^{\circ},\ C = \sqrt{6}$

(7) $\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$ కి.మీ. (8) $2\sqrt{13}$ కి.మీ. (9) $3+\sqrt{73}$ కి.మీ. (10) 7 కి.మీ.

(11) మొత్తం ధర : ₹155800 మరియు చుట్టుకొలత $180+20\sqrt{27}$ అడుగులు

(12) $x = 100$ కి.మీ. (13) $\sqrt{5-2\sqrt{2}}$ కి.మీ. (14) $2\sqrt{6}+2(\sqrt{3}+3)$ కి.మీ.

(15) $10\sqrt{13}$ కి.మీ.

అభ్యాసము 3.11

(1) (i) $\theta = \frac{\pi}{4}$ (ii) $\theta = \frac{\pi}{6}$ (iii) $\theta = -\frac{\pi}{2}$ (iv) $\theta = \frac{3\pi}{4}$ (v) $\theta = \frac{\pi}{3}$

అభ్యాసము 3.12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(4)	(1)	(1)	(1)	(4)	(4)	(1)	(2)	(4)	(2)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(3)	(2)	(3)	(3)	(2)	(4)	(1)	(1)	(1)	(1)

అభ్యాసము 4.1

(1) (i) 17 (ii) 6 (iii) 20 (iv) 720 (v) 120
(2) (i) 151200 (ii) 24 (3) (i) 12 (ii) 24
(4) (i) 64 (ii) 24 (5) (i) 90 (ii) 64
(6) (i) 144 (ii) 80 (7) (i) 48 (ii) 90
(8) (i) 9000 (ii) 4536 (iii) 4464 (9) (i) 36 (ii) 60
(10) 13 (11) 400 (12) (i) 42 (ii) 78
(13) (i) 4^6 (ii) 3^{10} (iii) 10^{12} (14) (i) 720 (ii) 144
(iii) 4 (iv) 144 (v) 220 (vi) $(n+3)(n+2)$
(15) (i) 15 (ii) 120 (iii) $\frac{n(n-1)}{2}$ (16) (i) 4 (ii) 100

అభ్యాసము 4.2

(1) 10 (2) 4 (3) (i) 336 (ii) 172800 (4) 720
(5) (i) 4^{10} (ii) $3^4 \times 5^6$ (iii) 11! (6) (i) 4^5 (ii) 15^5
(7) 144 (8) (i) 14! (ii) $9! \times 6!$ (iii) $8! \times {}^{9}P_{6}$
(9) 34650 (10) 1260 (11) 6912 (12) 60
(13) (i) 2^8 (ii) 28 (14) (i) 43200 (ii) 151200
(iii) 19807200 (iv) 151200 (15) (i) 180 (ii) 60 (iii) 30
(16) (i) 379 (ii) 135 (17) 120, NIGHT (18) 7
(19) 399960 (20) 571956

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Answer Key.indd 332 24-01-2023 16:00:50

అభ్యాసము 4.3

(1) 1 (2) 3 (3) 10, 3 (6) 20

(9) (i) ${}^{14}C_7 = 3432$ (ii) ${}^{15}C_2 = 105$ (iii) ${}^{20}C_2 = 190$ (iv) ${}^{100}C_5$

(v) ${}^{5}C_3 \times {}^{4}C_2 \times {}^{2}C_1 = 120$ (10) (i) $2^4 = 16$ (ii) $2^5 = 32$ (iii) 2^n

(11) (i) ${}^{25}C_3$ (ii) ${}^{25}P_3$ (12) ${}^{10}P_2 \times {}^{8}C_4 = 6300$

(13) (i) ${}^{10}C_3 = 120$ (ii) ${}^{10}C_5 = 252$ (14) ${}^{5}C_2 \times {}^{20}C_3 = 11400$

(i) ${}^{4}C_1 \times {}^{20}C_3 = 4560$ (ii) ${}^{5}C_2 \times {}^{19}C_3 = 9690$ (15) ${}^{7}C_3 = 35$

(16) 4512 (17) 546 (18) (i) 280 (ii) 336 (iii) 736

(19) 485 (20) 64 (21) 2454 (22) ${}^{15}C_3 = 455$

(23) 364 (24) (i) 50 (ii) 161 (25) 15

అభ్యాసము 4.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(2)	(2)	(1)	(2)	(2)	(2)	(1)	(4)	(2)	(2)	(3)	(4)	(2)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(3)	(1)	(4)	(2)	(3)	(4)	(3)	(2)	(2)	(2)	(1)	(2)	

అభ్యాసము 5.1

(1) (i) $8x^6 - 36x^3 + 54 - \dfrac{27}{x^3}$ (ii) $2[16x^8 + 216x^4(1-x^2) + 81(1-x^2)^2]$

(2) (i) 108243216 (ii) 96059601 (iii) 4782969

(3) $(1.01)^{10^6} > 10000$ (4) 10

(5) $15, x^6$ పదము సాధ్యము కాదు. (6) 26235 (7) $-\dfrac{40}{27}$

(8) 01 (13) $n = 15$ (14) $n = 55$ (15) $n = 7$ లేదా 14

అభ్యాసము 5.2

(1) (i) **H.P** (ii) ఏదీయు కాదు

(iii) **G.P** (iv) ఏదీయు కాదు (v) ఏదీయు కాదు

(vi) **AP,GP, AGP** మరియు **HP** (vii) **A.G.P**

(2) (i) 2, 2, 4, 4, 6, 6, . . . (ii) 1, 2, 3, 5, 8, 13, . . .

(iii) 1, 2, 3, 6, 11, 20 , . . .

(3)(i) $a_n = \begin{cases} n+1 & ; n \text{ బేసి} \\ n & ; n \text{ సరి} \end{cases}$ (ii) $a_n = \dfrac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

(iii) $a_n = \dfrac{2n-1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}$ (iv) $a_n = \begin{cases} 7-n & ; n \text{ బేసి} \\ 8+n & ; n \text{ సరి} \end{cases}$

(4) 12,18,27 (5) $t_n = \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{(n+1)^2}$ (8) 5, 45

అభ్యాసము 5.3

(1) $a = \dfrac{133}{25}, d = -\dfrac{2}{75}, S_{20} = \dfrac{304}{3}$ (2) $S_{17} = 527$

(3)(i) $S_n = \dfrac{8}{81}\left[10\left(10^n - 1\right) - 9n\right]$ (ii) $S_n = \dfrac{6}{81}[10(10^n - 1) - 9n]$

(4) $S_n = \dfrac{4}{9}(4^n - 1) - \dfrac{n}{3}$ (5) $\dfrac{3n-2}{3^{n-1}}, \dfrac{3^n - (3n-2)}{2 \cdot 3^{n-1}} + \dfrac{3^{n-1} - 1}{4 \cdot 3^{n-3}}$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Answer Key.indd 333 24-01-2023 16:00:54

(6) $n = 15$ (8) 20 నెలలు (9) 2480 మీటర్లు (10) $120, 480, 30(2)^n$

(11) $500\left(\frac{11}{10}\right)^{10} = 1296.87$ (12) 15 వ రోజు

అభ్యాసము 5.4

(1) (i) $\frac{1}{5}\left[1 - \frac{x}{5} + \frac{x^2}{25} - \frac{x^3}{125} + \ldots\right]$; $|x| < 5$

(ii) $\frac{2}{9}\left[1 - 2\left(\frac{4x}{3}\right) + 3\left(\frac{4x}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{4x}{3}\right)^3 + \ldots\right]$; $|x| < \frac{3}{4}$

(iii) $5^{\left(\frac{2}{3}\right)}\left[1 + \frac{2}{15}(x)^2 - \frac{1}{225}x^4 + \frac{4}{81 \times 125}x^6 + \ldots\right]$; $x^2 < 5$

(iv) $2^{\left(-\frac{2}{3}\right)}\left[1 - \frac{x}{3} + \frac{5}{36}x^2 - \frac{5}{81}x^3 + \ldots\right]$; $|x| < 2$ (2) $(1001)^{\left(\frac{1}{3}\right)} \approx 10.00333$

(5) (i) $1 + 5x + \frac{25x^2}{2} + \frac{125x^3}{6} + \frac{625x^4}{24} + \frac{625x^5}{24} + \ldots$

(ii) $1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + \frac{2x^4}{3} - \frac{4x^5}{15} + \ldots$ (iii) $1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^3 + \frac{1}{384}x^4 + \ldots$

(6)(i) $4x - 8x^2 + \frac{64x^3}{3} - \frac{64x^4}{3} + \ldots$; $|x| < \frac{1}{4}$

(ii) $-2x - \frac{4x^2}{2} - \frac{8x^3}{3} - \frac{16x^4}{4} - \ldots$; $|x| < \frac{1}{2}$

(iii) $2[3x + \frac{27x^3}{3} + \frac{243x^5}{5} + \frac{2187x^7}{7} + \ldots]$; $|x| < \frac{1}{3}$

(iv) $-2[2x + \frac{8x^3}{3} + \frac{32x^5}{5} + \frac{128x^7}{7} + \ldots]$; $|x| < \frac{1}{2}$

(8) $\left(\frac{15}{16}\right)^{\frac{1}{8}} \simeq 0.99196$ (9) $\frac{28}{3}$ (10) $\frac{1}{2}log_e 10$

అభ్యాసము 5.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(4)	(4)	(4)	(4)	(2)	(3)	(1)	(3)	(4)	(1)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(1)	(4)	(4)	(2)	(3)	(2)	(2)	(3)	(3)	(2)

అభ్యాసము 6.1

(1) (i) $x^2 + y^2 = 81$ (ii) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$ (2) (i) $y = \pm 2$ (ii) $x = \pm 3$

(3) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (4) $k = -24,\ b = -\frac{1}{4}$ (5) $x^2 + y^2 = 16$

(6) $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 8 = 0$ (7) $x^2 + y^2 - 5x + 8y + 16 = 0$

(8) $y^2 = 2x$ (10) $8x^2 + 36y^2 - 16x + 252y + 431 = 0$

(11) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (12) $9x^2 - 33x - 3y + 35 = 0$

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Answer Key.indd 334 24-01-2023 16:01:00

(13) $x^2+y^2-12x+9y+63=0$ (14) $(5-\sqrt{21},3),(5+\sqrt{21},3),(8,-3),(2,-3)$

(15) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

అభ్యాసము 6.2

(1)(i) $y=5x-4$ (ii) $3x-y=2$ (iii) $2x+3y=5$ (iv) $x+\sqrt{3}y=(1+\sqrt{3})$

(3) $10x+3y=25$ (5) (i) $C=\frac{5}{9}(F-32)$ లేదా $F=\frac{9}{5}C+32$

(ii) $C=37^\circ$ (iii) $F=100.4^\circ$ (6) (i) 4400 మీటర్లు (ii) $D=3000$ మీటర్లు

(iii) $T=22$ సెకండ్లు (7) $P=1,55,000$

(8) $\sqrt{(3)}x+y=24$ (9) $3x-4y=12, x-2y=2$

(11) $(13,7),(-11,-3)$ (12) (i) $y=12.5x-150$ (ii) 12 సెకండ్లు

(iii) 80 సెకండ్లు (13) (ii) $x-2y+4=0$ (iii) 2 cm

(iv) 14 kg (v) 5 cm (14) (i) $y=-\frac{71}{120}x+14.2, 0\le x\le 24$

(ii) $y=f(x)$ అవధితో ఆవర్తన ప్రమేయం 24, $f(x)=f(x+24)$

(15)(i) కనిష్ఠ పొడవు = 328 యూనిట్లు

(ii) 180, 360 మరియు 540 యూనిట్లు (iii) ప్రతి మలుపు బిందువు వద్ద వాలు $=\frac{9}{40}$

అభ్యాసము 6.3

(2) $5x-4y-15=0$ (3) (i) $\frac{8}{5}$ (ii) $\frac{23}{5}$

(4) (i) $x+3y+2=0$ (ii) $4x-3y-7=0$ (5) $x+5y-31=0$

(6)(i) $x+1=0$ (ii) $x-y=0$ (iii) $2x+y+3=0$

(7) $12x+5y+6=0$ మరియు $12x+5y-20=0$

(8) $4x-3y+15=0$ మరియు $4x-3y-25=0$

(9) $2x+3y-18=0$ (10) $7\sqrt{2}$ మరియు $(-3,5)$ (12) (i) $\frac{14}{13}$ (ii) $\frac{5}{2}$

(13) (i) $4x-3y+k=0,\ k\in\mathbb{R}$ (ii) $3x+4y+k_1=0, k_1\in$ □

(14) $\sqrt{3}x-y-2\sqrt{3}=0$ (15) $A\left(\frac{13}{5},0\right)$ (16) $x+5y\pm10=0$

(17) $(0,7)$ (18) (i) $y=\begin{cases}1.50x, & 0\le x\le 10\\ x+5, & x>10\end{cases}$ (ii) ₹45

(19) $y=5x-7, y=5x+10$ (20) $y+3=0, 2x+y+3=0$ మరియు $2x-y-3=0$

అభ్యాసము 6.4

(1) $x^2-xy-2y^2+2x-13y-15=0$

(6) $3x^2-13xy-10y^2+33x+73y-126=0$

(7) (i) $x+y=0,\ 3x-y=0$ (ii) $3x+4y-11=0,\ 2x-y=0$

(iii) $x+y-5=0,\ 2x-3y+4=0$ (10) $y=x$ (11) $p=6, q=17$ లేదా $-\frac{67}{6}$

(12) $k=-1$ (13) $k=-5$ లేదా $-\frac{35}{4}$ (14) $\frac{8}{5}$ (15) $\sqrt{5}$

అభ్యాసము 6.5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(4)	(4)	(3)	(4)	(3)	(2)	(2)	(4)	(2)	(3)	(1)	(2)	(3)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(4)	(2)	(1)	(3)	(2)	(1)	(2)	(1)	(3)	(1)	(3)	(4)	

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Answer Key.indd 335 24-01-2023 16:01:11

పదకోశము

యూనిట్ 1 – సమితులు, సంబంధాలు మరియు ప్రమేయములు	
absolute value function or modulus function	ఖచ్చిత విలువ ప్రమేయం లేదా మాప ప్రమేయం
basic relations	ప్రాథమిక సంబంధాలు
bijective function	ద్విగుణ ప్రమేయం
cardinality	ప్రధానాంకము
closed interval	సంవృత అంతరం
co–domain	సహ ప్రదేశము
composition of functions	సంయుక్త ప్రమేయం
constant	స్థిరాంకము
constant function	స్థిర ప్రమేయం
dependent variable	చరరాశి
dilation	విస్ఫారణము
disjoint set	వియుక్త సమితి
domain	ప్రదేశము
empty relation	శూన్య సంబంధము
empty set or void set	శూన్యసమితి లేదా
equivalence relation	సమానత్వ సంబంధము
even function	సరి ప్రమేయం
exponential function	ఘాత ప్రమేయం
extreme relations	అంత్యసంబంధము
finite set	పరిమిత సమితి
greatest integer function	గరిష్ఠ పూర్ణాంక ప్రమేయము
horizontal line test	అడ్డురేఖ పరీక్ష
identity function	తత్సమ ప్రమేయం
image	ప్రతిబింబము
improper subset	అపక్రమ ఉపసమితి
independent variable	స్వతంత్ర చరరాశి
infinite set	అపరిమిత సమితి
inverse	విలోమము
invertible	విలోమత్యము
linear function	రేఖీయ ప్రమేయం
logarithmic function	సంవర్గమాన ప్రమేయం
odd function	బేసి ప్రమేయం
one–to–one function	ఏక–ఏక ప్రమేయం
onto function	ద్విగుణ ప్రమేయం
open interval	బాహ్య అంతరం
power set	ఘాత సమితి
pre–image	పూర్వ ప్రతిబింబము
proper subset	క్రమ ఉపసమితి
range	వ్యాప్తి
rational function	అకరణీయ ప్రమేయం
real line	వాస్తవ రేఖ
real–valued function	వాస్తవ విలువల ప్రమేయం
reciprocal function	వ్యుత్క్రమ ప్రమేయం
reflection	పరావర్తనం
reflexive relation	పరావర్తన సంబంధము
set difference	సమితి బేధము
signum function	సిగ్నకు ప్రమేయం
singleton set	ఏకమూలక సమితి

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Answer Key.indd 336
24-01-2023 16:01:11

smallest integer function	అతిచిన్న పేర్ణాంకత ప్రమేయం
step functions	సోపాన ప్రమేయం
subset	ఉపసమితి
symmetric difference	సౌష్ఠవ బేధము
transitive relation	సంక్రమణ సంబంధం
translation	అనువాదం
trivial subset	అల్పమైన ఉపసమితి
union of sets	సమితుల సమ్మేళనము
universal relation	విశ్వసంబంధము
variable	చరరాశి
vertical line test	నిలువరేఖ పరీక్ష
zero function	శూన్య ప్రమేయం
set	సమితి
super set	విశ్వసమితి

యూనిట్ 2 – ప్రాథమిక బీజగణితము

conjugate	సంయుగ్మము
discriminant	విచక్షణి
division algorithm	భాగహార
exponents	ఘాతములు
inequality	అసమానత్వము
partial fraction	పాక్షిక భిన్నాలు
polynomial expression	బహుపద సమాసాలు
quartic	వర్గ
quintic	ఐదవ అంతస్తు
radicals	రాడికల్
rational inequality	అకరణీయ సమానత్వం
remainder theorem	శేష సిద్ధాంతము

యూనిట్ 3 – త్రికోణమితి

allied angles	అనుబంధ కోణాలు
angles in standard position	ప్రామాణిక స్థితిలో కోణాలు
altitude of a triangle	త్రిభుజం ఉన్నతలు
centesimal system	వందలలో లెక్కించు వ్యవస్థ
chord	చాపము
circular system	వృత్త వ్యవస్థ
circum centre	పరివృత్త కేంద్రము
circum circle	పరివృత్తం
circum radius	పరివృత్త వ్యాసార్థము
complementary angles	పూరక కోణాలు
compound angles	సంయుక్త కోణాలు
conjugate angles	సరియుగ్మ కోణాలు
general solution	సాధారణ సాధన
interval	అంతరము
inverse trigonometric functions	విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయములు
periodicity	పరిధి
power reducing identities	ఘాత క్షీణ సమానత్వం
principal solution	మొత్తం సాధన
projection	విక్షేపము
quadrant	పాదం

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Answer Key.indd 337 24-01-2023 16:01:11

radian	రాడియన్
sector	సెక్టార్
sub–multiple angles	ఉపగుణిజకోణాలు
supplementary angles	సంపూరక కోణాలు
trigonometric identities	త్రికోణమితి సమానత్వం
trigonometric ratios	త్రికోణమితి నిష్పత్తులు

యూనిట్ 4 – సంయోగత మరియు గణిత ప్రేరణ	
cryptography	సాంకేతిక గుర్తు
factorial	ప్రస్తారణలు
heptagon	సప్త కోణము
inclusion–exclusion	బాహ్య–అంతరం
inductive step	అనుగమన సోపానము
mathematical induction	అంకమధ్యమము
pentagon	పంచభుజి
permutation	సంయోగాలు
polygon	బహుభుజి
product rule	లబ్ధ నియమము
string method	క్రమానుశ్రేణి పద్ధతి
sum rule	సంకలన నియమము

యూనిట్ 5 – ద్విపద సిద్ధాంతము, వరుసలు మరియు శ్రేణులు	
arithmetic mean	అంగగుణశ్రేఢి
arithmetic progression	అంకశ్రేఢి
arithmetic series	అంకశ్రేణి
arithmetico–geometric progression	అంకగుణ వరుస
arithmetico–geometric series	అనుసంధాన వరుస
binomial coefficients	ద్విపద గుణకాలు
binomial expansion	ద్విపద సమాసము
binomial series	ద్విపద శ్రేణి
binomial theorem	ద్విపద సిద్ధాంతము
common difference	సామాన్య బేధము
common ratio	సామాన్య నిష్పత్తి
exponential series	ఘాత శ్రేణి
finite sequence	పరిమిత వరుసలు
finite series	పరిమిత శ్రేణులు
geometric mean	గుణమధ్యమము
geometric progression	గుణశ్రేఢి
geometric series	గుణశ్రేణి
harmonic mean	హరాత్మక
harmonic progression	హరాత్మకశ్రేఢి
infinite sequence	అపరిమిత వరుసలు
infinite series	అపరిమితశ్రేణులు
initial term	ప్రారంభ పదము
logarithmic series	సంవర్గమాన శ్రేణులు
partial sum	పాక్షిక మొత్తం
rational exponent	అకరణీయ ఘాతము
telescopic summation	దూరదర్శిని మొత్తము

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Answer Key.indd 338 24-01-2023 16:01:11

యూనిట్ 6 – ద్విపరిమాణ నిరూపక రేఖాగణితం	
angle of inclination	వాలుకోణము
arbitrary constant	అనువైన స్థిరాంకము
bisector	సమద్వి ఖండన
fixed constant	స్థిర స్థిరాంకము
fixed point	స్థిర బిందువు
general form	సాధారణ రూపము
intercept	అంతర ఖండన
locus	బింధుపథము
negative intercept	ఋణ అంతరఖండన
negative slope	ఋణాత్మకవాలు
non–homogenous equation	అసమఘాత సమీకరణము
normal form	సామాన్యరూపము
parameter	పరామితి
parametric form	పరామితి రూపము
positive intercept	ధన అంతరఖండన
positive slope	ధనాత్మకవాలు
symmetry	సౌష్ఠవము
two point form	రెండు బిందువుల రూపము

సంప్రదింపు గ్రంథాలు

1. **Advanced Mathematics** - Merilyn Ryan S.S.J, Marvin E. Doublet, Mona Fabricant Theoran D.Rockhill, Prentice Hall
2. **Higher Algebra** - Bernard and Child.
3. **Higher algebra** - Hall and Knight.
4. **Algebra and Trigonometry** - Marshall D. Hestenes, Richard O. Hill, Jr.
5. **A semester course in Trigonometry** - Marcel B Finan, Ar Kansas Tech University, U.S.A.,
6. **Trigonometry** - S.L.Loney
7. **Discrete and Combinatorial Mathematics,** by Ralph P. Grimaldi, Pearson Education Asia,
8. **Discrete Mathematics with Applications,** by Thomas Koshy, Elsevier
9. **Discrete Mathematics and its Applications with Combinatorics and Graph theory**, by Kenneth, H, Rosen, Tata McGraw Hill Education Private Limited, 6th Edition
10. **Calculus** - James Stewart.
11. **Calculus** - Robert T.Smith, Roland B. Minton, McGraw Hill
12. **Calculus and Analytical Geometry,** George B.Thomas and Ross L. Finney (Ninth edition) Addison-Wesley.
13. **Differential and Integral Calculus,** N. Piskunov, Mir Publsihers, Moscow.
14. **Analytical Geometry for beginners,** The straight line and circle Vol-I by Thomas Grenfele Vyvyan Classic Reprint Series.
15. **Analytical Geometry** (The straight line and circle) Arthur Le Sueur – Google books.

Higher Secondary – Class XI – Mathematics – Volume 1
TELUGU MEDIUM
List of Reviewers & Translators

Academic Coordinator

Dr. M.Ethirajulu,
Senior Lecturer,
SCERT,
Chennai-6.

Reviewers

T. Venkatachalapathi
P.G.Asst. (Maths)
G.H.S.School, K.G.Kandigai
Tiruvalluvar Dist

E. Gurumoorthy
B.T.Asst.
SKPD Boys H.S.School
Chennai

Chandrasekar Varma
B.T.Asst. (Maths)
SKPD Boys H.S.School
Chennai

Ramesh Kumar .K
B.T.Asst.(Maths)
G.H.Schoolg, Keechalam
Tiruvallur Dist

Translators

S. Mouli
P.G.Asst.(Maths)
G.H.S.School, Athimanjeripet
Tiruvallur Dist

V. Srinivasu Rao
P.G.Asst. (Maths)
G.B.H.S.School, Pallipat
Tiruvallur Dist

K. Arunalatha
P.G.Asst.
G.B.H.S.School, Uttukota,
Tiruvallur Dist

K. Geetha
P.G.Asst
G.H.S.School
Madarapakkam
Tiruvallur Dist

Proof work

Bharathi
B.T.Asst. (Maths)
GHSS P.M. Pakkam
Tiruvallur

Jayalakshmi
B.T.Asst. (Maths)
Sir Thyagaraya Hr.Sec.School
Washermen pet, Chennai

Haritha
B.T.Asst. (Maths)
G.B.H.S.School, Uttukota,
Tiruvallur Dist

EMIS Technology Team

R.M. Satheesh
K.P. Sathya Narayana
R. Arun Maruthi Selvan

Layout

Daniel A
Balasubramiyam B
Pechimuthu
Mathan

In-House QC

B. Yogesh

Co-ordinator

Ramesh Munisamy

**This book has been printed on 80 G.S.M.
Elegant Maplitho paper.**
Printed by offset at:

11th_Maths_Vol-I_Telugu_Answer Key.indd 340 24-01-2023 16:01:12